

# Übungen zur Einführung in partielle Differentialgleichungen

|             |               |
|-------------|---------------|
| Name:       | Pedro Hussain |
| MatrikelNr: | 7393841       |
| Gruppe:     | 3             |
| Blatt:      | 01            |

## Aufgabe 1a

### Gegeben:

$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ,  $n \geq 2$ , mit

$$u(x) := \begin{cases} \|x\|^{2-n} & n \geq 3 \\ \log(\|x\|) & n = 2 \end{cases}$$

### Behauptung:

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

### Beweis:

**Fall 1:**  $n = 2$ . Für  $i \in \{1, 2\}$  gilt:

$$\partial_i u = \frac{1}{\|x\|} \partial_i \|x\| = \frac{1}{\|x\|} \frac{x_i}{\|x\|} = \frac{x_i}{\|x\|^2}$$

Daher

$$\partial_i^2 u = \frac{\|x\|^2 - 2x_i^2}{\|x\|^4}$$

Summation über  $i = 1, 2$  ergibt

$$\Delta u(x) = \frac{2\|x\|^2 - 2\|x\|^2}{\|x\|^4} = 0 \quad \checkmark$$

**Fall 1:**  $n \geq 3$ . Für  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt:

$$\partial_i u = (2-n)\|x\|^{1-n} \frac{x_i}{\|x\|} = (2-n)\|x\|^{-n} x_i$$

Also

$$\partial_i^2 u = (2-n) \left( (-n)\|x\|^{-n-1} \frac{x_i^2}{\|x\|} + \|x\|^{-n} \right) = (2-n)\|x\|^{-n} \left( -\frac{n}{\|x\|^2} x_i^2 + 1 \right)$$

Summation über  $i = 1, \dots, n$  liefert

$$\Delta u(x) = (2-n)\|x\|^{-n} \left( -\frac{n}{\|x\|^2} \|x\|^2 + n \right) = 0 \quad \checkmark$$

□

## Aufgabe 1b

### Gegeben:

$u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$u(x) := t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$$

### Behauptung:

$\partial_t u - \Delta_x u = 0$  auf  $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$

### Beweis:

Es ist  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ .

**Zu  $\partial_t u$ :** Es gilt

$$\partial_t u = \partial_t \left( t^{-\frac{n}{2}} \right) e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} + t^{-\frac{n}{2}} \partial_t \left( e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \right)$$

$$\partial_t \left( t^{-\frac{n}{2}} \right) = -\frac{n}{2} t^{-\frac{n}{2}-1} = -\frac{n}{2t} t^{-\frac{n}{2}}$$

$$\partial_t \left( t^{-\frac{n}{2}} \right) e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} = -\frac{n}{2t} u$$

$$\partial_t \left( -\frac{\|x\|^2}{4t} \right) = \frac{\|x\|^2}{4t^2}$$

$$\partial_t \left( e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \right) = e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \frac{\|x\|^2}{4t^2}$$

$$t^{-\frac{n}{2}} \partial_t \left( e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \right) = \frac{\|x\|^2}{4t^2} u$$

Zusammengefasst

$$\partial_t u = \left( \frac{\|x\|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t} \right) u$$

**Zu  $\Delta_x u$ :** Sei  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Dann ist

$$\partial_i u = t^{-\frac{n}{2}} \partial_i \left( e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \right) = t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \partial_i \left( -\frac{\|x\|^2}{4t} \right) = -\frac{x_i}{2t} u$$

$$\partial_i^2 u = -\frac{1}{2t} (u + x_i \partial_i u) = -\frac{1}{2t} \left( u - \frac{x_i^2}{2t} u \right) = -\frac{1}{2t} \left( 1 - \frac{x_i^2}{2t} \right) u$$

Summation über  $i \in \{1, \dots, n\}$  ergibt

$$\Delta_x u = -\frac{1}{2t} \left( n - \frac{\|x\|^2}{2t} \right) u = \left( \frac{\|x\|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t} \right) u$$

Daher folgt

$$\partial_t u - \Delta_x u = 0$$

□

## Aufgabe 2a

### Gegeben:

$u \in C^2((a, b) \times (c, d))$  mit:  $\partial_1 \partial_2 u = 0$  auf  $(a, b) \times (c, d)$

### Behauptung:

Es existieren  $f \in C^2((a, b))$ ,  $g \in C^2((c, d))$  mit  $u(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2)$

### Beweis:

Seien  $\bar{x}_1 \in (a, b)$  und  $\bar{x}_2 \in (c, d)$  beliebig aber fest.

Wegen  $\partial_1 \partial_2 u = 0$  muss für jedes  $x_2 \in (c, d)$  die Funktion

$$\partial_2 u(\cdot, x_2) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

konstant sein, also

$$\partial_2 u(x_1, x_2) = \partial_2 u(\bar{x}_1, x_2) \quad \forall x_1 \in (a, b)$$

Definiere  $\varphi : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $\varphi(x_2) = \partial_2 u(\bar{x}_1, x_2)$  und sei  $\Phi$  eine Stammfunktion von  $\varphi$ . Dann ist  $\Phi \in C^2((c, d))$ . Für  $x_1 \in (a, b)$ ,  $x_2 \in (c, d)$  gilt

$$u(x_1, x_2) - u(x_1, \bar{x}_2) = \int_{\bar{x}_2}^{x_2} \partial_2 u(x_1, \xi_2) d\xi_2 = \int_{\bar{x}_2}^{x_2} \varphi(\xi_2) d\xi_2 = \Phi(x_2) - \Phi(\bar{x}_2)$$

Also

$$u(x_1, x_2) = u(x_1, \bar{x}_2) + \Phi(x_2) - \Phi(\bar{x}_2)$$

Definiere  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1) := u(x_1, \bar{x}_2)$ , und  $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x_2) := \Phi(x_2) - \Phi(\bar{x}_2)$ . Dann ist  $f \in C^2((a, b))$ ,  $g \in C^2((c, d))$  und für  $x_1 \in (a, b)$ ,  $x_2 \in (c, d)$  gilt

$$u(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2)$$

□

## Aufgabe 2b

### Gegeben:

$u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  mit  $\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = 0$

### Behauptung:

Es existieren  $f, g \in C^2(\mathbb{R})$  mit  $u(x_1, x_2) = f(x_1 + x_2) + g(x_1 - x_2)$

### Beweis:

Definiere  $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $v(y_1, y_2) := u(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2})$ . Dann gilt

$$\partial_2 v(y_1, y_2) = \frac{1}{2} \left( \partial_1 u\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right) - \partial_2 u\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial_{y_1}} \left( \partial_1 u\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} \left( \partial_{11}^2 u\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right) + \partial_{21}^2 u\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial_{y_1}} \left( \partial_2 u\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right) \right) = \frac{1}{2} \left( \partial_{12}^2 u\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right) + \partial_{22}^2 u\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right) \right)$$

Es folgt

$$\partial_1 \partial_2 v(y_1, y_2) = \frac{1}{4} \left( \partial_{11}^2 u\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right) - \partial_{22}^2 u\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right) \right) = 0$$

Nach **Aufgabe 2a** mit  $(a, b) = (c, d) = \mathbb{R}$  existieren daher Funktionen  $f, g \in C^2(\mathbb{R})$  mit

$$v(y_1, y_2) = f(y_1) + g(y_2)$$

Also folgt mit  $x_1 = \frac{y_1+y_2}{2}, x_2 = \frac{y_1-y_2}{2}$

$$u(x_1, x_2) = v(x_1 + x_2, x_1 - x_2) = f(x_1 + x_2) + g(x_1 - x_2)$$

□

## Aufgabe 3

### Gegeben:

$U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f \in C^\infty(U)$ ,  $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ .

### Behauptung:

- (a)  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$
- (b) Für  $n = 3$ :  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$
- (c)  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$

### Beweis:

Zu (a): Es ist

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{div}(\partial_1 f, \dots, \partial_n f) = \partial_1(\partial_1 f) + \dots + \partial_n(\partial_n f) = \partial_1^2 f + \dots + \partial_n^2 f = \Delta f \quad \checkmark$$

Zu (b): Es ist

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{rot} \begin{bmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_2 \partial_3 f - \partial_3 \partial_2 f \\ -(\partial_1 \partial_3 f - \partial_3 \partial_1 f) \\ \partial_1 \partial_2 f - \partial_2 \partial_1 f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

Lezteres gilt wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen (Scharfscher Satz).

Zu (c): Es ist

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = \operatorname{div} \begin{bmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ -(\partial_1 F_3 - \partial_2 F_1) \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{bmatrix} = \partial_1 \partial_2 F_3 - \partial_1 \partial_3 F_2 - \partial_2 \partial_1 F_3 + \partial_2 \partial_2 F_1 + \partial_3 \partial_1 F_2 - \partial_3 \partial_2 F_1$$

Die rechte Seite verschwindet, wieder aufgrund des Schwartz'schen Satzes.  $\checkmark$

□

## Aufgabe 4

**Gegeben:**

$$\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

**Behauptung:**

$$\partial^\alpha x^\beta = \begin{cases} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta} & \text{falls } \beta \leq \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Beweis:**

Induktion über  $n$ .

$n = 1$ : Es ist also  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ . Daher gilt die Behauptung nach den eindimensionalen Differationsregeln.

$n \rightarrow n+1$ : Gelte die Behauptung für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ . Setze  $\alpha = (\alpha_1, \underline{\alpha})$  und  $\beta = (\beta_1, \underline{\beta})$

$$\partial^\alpha x^\beta = \partial^{\alpha_1} x^{\beta_1} = \begin{cases} \frac{\alpha_1!}{(\alpha_1-\beta_1)!} x^{\alpha_1-\beta_1} & \text{falls } \beta_1 \leq \alpha_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$