Übungen zur Einführung in partielle Differentialgleichungen

Name:	Pedro Hussain
MatrikelNr:	7393841
Gruppe:	3
Blatt:	01

Aufgabe 1a

Gegeben:

$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $n \geq 2$, mit

$$u(x) := \begin{cases} \|x\|^{2-n} & n \geq 3 \\ \log(\|x\|) & n = 2 \end{cases}$$

Behauptung:

$\Delta u(x) = 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Beweis:

Fall 1: $n = 2$. Für $i \in \{1, 2\}$ gilt:

$$\partial_i u = \frac{1}{\|x\|} \partial_i \|x\| = \frac{1}{\|x\|} \frac{x_i}{\|x\|} = \frac{x_i}{\|x\|^2}$$

Daher

$$\partial_i^2 u = \frac{\|x\|^2 - 2x_i^2}{\|x\|^4}$$

Summation über $i = 1, 2$ ergibt

$$\Delta u(x) = \frac{2\|x\|^2 - 2\|x\|^2}{\|x\|^4} = 0 \quad \checkmark$$

Fall 1: $n \geq 3$. Für $i \in \{1, ...n\}$ gilt:

$$\partial_i u = (2-n)\|x\|^{1-n} \frac{x_i}{\|x\|} = (2-n)\|x\|^{-n} x_i$$

Also

$$\partial_i^2 u = (2-n)\left((-n)\|x\|^{-n-1} \frac{x_i^2}{\|x\|} + \|x\|^{-n} \right) = (2-n)\|x\|^{-n} \left(-\frac{n}{\|x\|^2} x_i^2 + 1 \right)$$

Summation über $i = 1, ...n$ liefert

$$\Delta u(x) = (2-n)\|x\|^{-n} \left(-\frac{n}{\|x\|^2} \|x\|^2 + n \right) = 0 \quad \checkmark$$

$\square$

Aufgabe 1b

Gegeben:

$u : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$u(x) := t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$$

Behauptung:

$\partial_t u - \Delta_x u = 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$

Beweis:

Es ist $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$.
Zu $\partial_t u$: Es gilt

$$\partial_t u = \partial_t \left(t^{-\frac{n}{2}}\right) e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} + t^{-\frac{n}{2}} \partial_t \left(e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}\right)$$

$$\partial_t \left(t^{-\frac{n}{2}}\right) = -\frac{n}{2} t^{-\frac{n}{2}-1} = -\frac{n}{2t} t^{-\frac{n}{2}}$$

$$\partial_t \left(t^{-\frac{n}{2}}\right) e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} = -\frac{n}{2t} u$$

$$\partial_t \left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) = \frac{\|x\|^2}{4t^2}$$

$$\partial_t \left(e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}\right) = e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \frac{\|x\|^2}{4t^2}$$

$$t^{-\frac{n}{2}} \partial_t \left(e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}\right) = \frac{\|x\|^2}{4t^2} u$$

Zusammengefasst

$$\partial_t u = \left(\frac{\|x\|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t}\right) u$$

Zu $\Delta_x u$: Sei $i \in \{1, ..., n\}$. Dann ist

$$\partial_i u = t^{-\frac{n}{2}} \partial_i \left(e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}\right) = t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \partial_i \left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right) = -\frac{x_i}{2t} u$$

$$\partial_i^2 u = -\frac{1}{2t}(u + x_i \partial_i u) = -\frac{1}{2t}(u - \frac{x_i^2}{2t} u) = -\frac{1}{2t}(1 - \frac{x_i^2}{2t}) u$$

Summation über $i \in \{1, ..., n\}$ ergibt

$$\Delta_x u = -\frac{1}{2t}\left(n - \frac{\|x\|^2}{2t}\right) u = \left(\frac{\|x\|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t}\right) u$$

Daher folgt

$$\partial_t u - \Delta_x u = 0$$

□

Aufgabe 2a

Gegeben:

$u \in C^2((a,b) \times (c,d))$ mit: $\partial_1 \partial_2 u = 0$ auf $(a,b) \times (c,d)$

Behauptung:

Es existieren $f \in C^2((a,b))$, $g \in C^2((c,d))$ mit $u(x_1,x_2) = f(x_1) + g(x_2)$

Beweis:

Seien $\overline{x}_1 \in (a,b)$ und $\overline{x}_2 \in (c,d)$ beliebig aber fest.
Wegen $\partial_1 \partial_2 U = 0$ muss für jedes $x_2 \in (c,d)$ die Funktion

$$\partial_2 u(\cdot, x_2) : (a,b) \to \mathbb{R}$$

konstant sein, also

$$\partial_2 u(x_1,x_2) = \partial_2 u(\overline{x}_1, x_2) \quad \forall x_1 \in (a,b)$$

Definiere $\varphi : (c,d) \to \mathbb{R}$ durch $\varphi(x_2) = \partial_2 u(\overline{x}_1, x_2)$ und sei Φ eine Stammfunktion von φ.
Dann ist $\Phi \in C^2((c,d))$. Für $x_1 \in (a,b), x_2 \in (c,d)$ gilt

$$u(x_1,x_2) - u(x_1,\overline{x}_2) = \int_{\overline{x}_2}^{x_2} \partial_2 u(x_1,\xi_2) d\xi_2 = \int_{\overline{x}_2}^{x_2} \varphi(\xi_2) d\xi_2 = \Phi(x_2) - \Phi(\overline{x}_2)$$

Also

$$x(x_1,x_2) = u(x_1,\overline{x}_2) + \Phi(x_2) - \Phi(\overline{x}_2)$$

Definiere $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $f(x_1) := u(x_1,\overline{x}_2)$, und $g : (c,d) \to \mathbb{R}$, $g(x_2) := \Phi(x_2) - \Phi(\overline{x}_2)$.
Dann ist $f \in C^2((a,b))$, $g \in C^2((c,d))$ und für $x_1 \in (a,b)$, $x_2 \in (c,d)$ gilt

$$u(x_1,x_2) = f(x_1) + g(x_2)$$

$\square$

Aufgabe 2b

Gegeben:

$u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ mit $\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = 0$

Behauptung:

Es existieren $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ mit $u(x_1,x_2) = f(x_1+x_2) + g(x_1-x_2)$

Beweis:

Definiere $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $v(y_1, y_2) := u(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2})$. Dann gilt

$$\partial_2 v(y_1, y_2) = \frac{1}{2}\left(\partial_1 u(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}) - \partial_2 u(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2})\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial_{y_1}}\left(\partial_1 u(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2})\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_{11}^2 u(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}) + \partial_{21}^2 u(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2})\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial_{y_1}}\left(\partial_2 u(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2})\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_{12}^2 u(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}) + \partial_{22}^2 u(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2})\right)$$

Es folgt

$$\partial_1\partial_2 v(y_1, y_2) = \frac{1}{4}\left(\partial_{11}^2 u(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}) - \partial_{22}^2 u(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2})\right) = 0$$

Nach **Aufgabe 2a** mit $(a, b) = (c, d) = \mathbb{R}$ existieren daher Funktionen $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ mit

$$v(y_1, y_2) = f(y_1) + g(y_2)$$

Also folgt mit $x_1 = \frac{y_1+y_2}{2}, x_2 = \frac{y_1-y_2}{2}$

$$u(x_1, x_2) = v(x_1 + x_2, x_1 - x_2) = f(x_1 + x_2) + g(x_1 - x_2)$$

$\square$

Aufgabe 3

Gegeben:

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^\infty(U)$, $F \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$.

Behauptung:

(a) $\text{div}(\text{grad} f) = \Delta f$
(b) Für $n = 3$: $\text{rot}(\text{grad}\, f) = 0$
(c) $\text{div}(\text{rot} F) = 0$

Beweis:

Zu (a): Es ist

$$\text{div}(\text{grad} f) = \text{div}(\partial_1 f, ..., \partial_n f)) = \partial_1(\partial_1) f + ... + \partial_n(\partial_n) f = \partial_1^2 f + ... + \partial_n^2 f = \Delta f \quad \checkmark$$

Zu (b): Es ist

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{rot} \begin{bmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_2 \partial_3 f - \partial_3 \partial_2 f \\ -(\partial_1 \partial_3 f - \partial_3 \partial_1 f) \\ \partial_1 \partial_2 f - \partial_2 \partial_1 f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \surd$$

Lezteres gilt wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen (Schwartscher Satz).

Zu (c): Es ist

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = \operatorname{div} \begin{bmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ -(\partial_1 F_3 - \partial_2 F_1) \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{bmatrix} = \partial_1 \partial_2 F_3 - \partial_1 \partial_3 F_2 - \partial_2 \partial_1 F_3 + \partial_2 \partial_2 F_1 + \partial_3 \partial_1 F_2 - \partial_3 \partial_2 F_1$$

Die rechte Seite verschwindet, wieder aufgrund des Schwartz'schen Satzes. $\surd$

$\square$

Aufgabe 4

Gegeben:

$\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

Behauptung:

$$\partial^\alpha x^\beta = \begin{cases} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta} & \text{falls } \beta \leq \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis:

Induktion über n.

$n = 1$: Es ist

$$\partial^\alpha x^\beta = \partial^{\alpha_1} x^{\beta_1}$$