Modelagem e Controle no Espaço de Estados de um Pêndulo Invertido

Luiz Gabriel Aragão

e

Pedro Ian Moraes

Universidade Federal de Minas Gerais

Outubro, 2020

Resumo

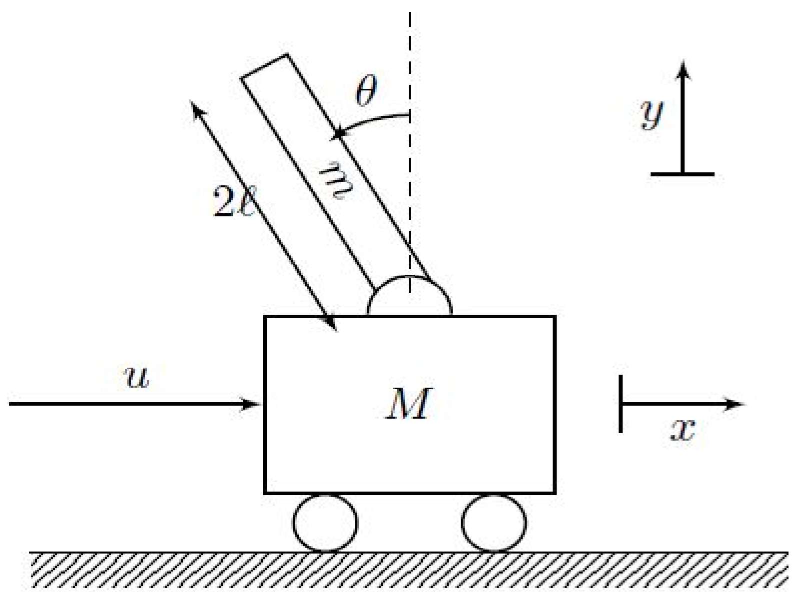
Neste trabalho foi implementado um sistema de controle para o problema do pêndulo invertido baseado na modelagem de Espaço de Estados. Para esta tarefa, fez-se uma representação matemática deste sistema físico baseado em uma descrição por equações diferenciais matriciais. Utilizando essa representação é possível implementar um observador e um controlador de estados capaz de realizar alguma tarefa desejada. Foram utilizadas as ferramentas computacionais MATLAB/Simulink para criar as todas rotinas. (disponíveis no link: https://github.com/PedroIan/CSEE/tree/master/TrabalhoFinal)

Palavras-chave: Espaço de Estados, Controle Moderno.

Procedimentos - Parte 1 | Linearização e Caracterização

Para início da tarefa, foi utilizada a seguinte modelagem matemática:

$$(I + m\ell^2)\ddot{\theta} + m\ell\ddot{x}\cos\theta - mg\ell\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$
$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - m\ell\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\theta + m\ell\ddot{\theta}\cos\theta = u$$



Considerando o fato do sistema ser não linear, faz-se necessário realizar a linearização em torno de um ponto de operação para que seja possível afirmar sobre a controlabilidade e observabilidade do modelo. Realizando o procedimento de simplificação com auxílio do MATLAB, obtém-se:

$$\theta'' = (49 * \theta)/15 - u/36 - x'/7200$$

$$x'' = (2 * u)/21 - (7 * \theta)/5 - x'/2100$$

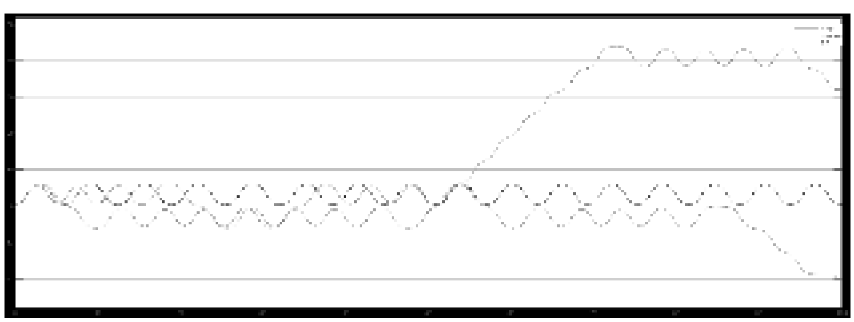
Com essa simplificação pode-se encontrar o modelo linearizado do sistema através da utilização da matriz Jacobiana (A), sendo ela:

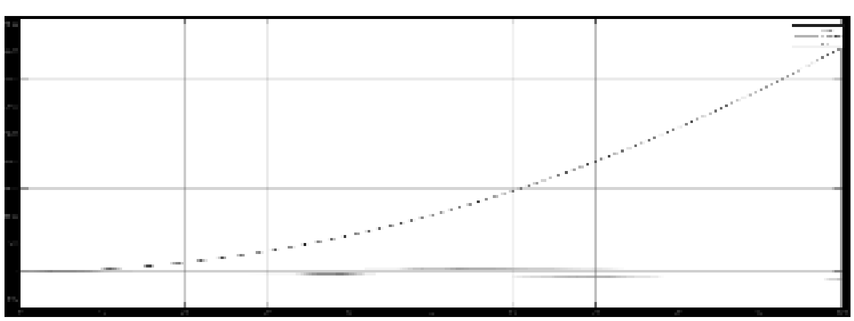
$$
\begin{matrix}
[\,0, & 1, & 0, & 0] \\
[\,0, & -1/2100, & -7/5, & 0] \\
[\,0, & 0, & 0, & 1] \\
[\,0, & -1/7200, & 49/15, & 0]
\end{matrix}
$$

Em seguida, avalia-se a controlabilidade e observabilidade do sistema linearizado partindo dos valores da matriz A, sendo esse sistema Controlável e Observável, de acordo com as funções disponibilizadas pelo MATLAB, *ctrb* e *obsv*.

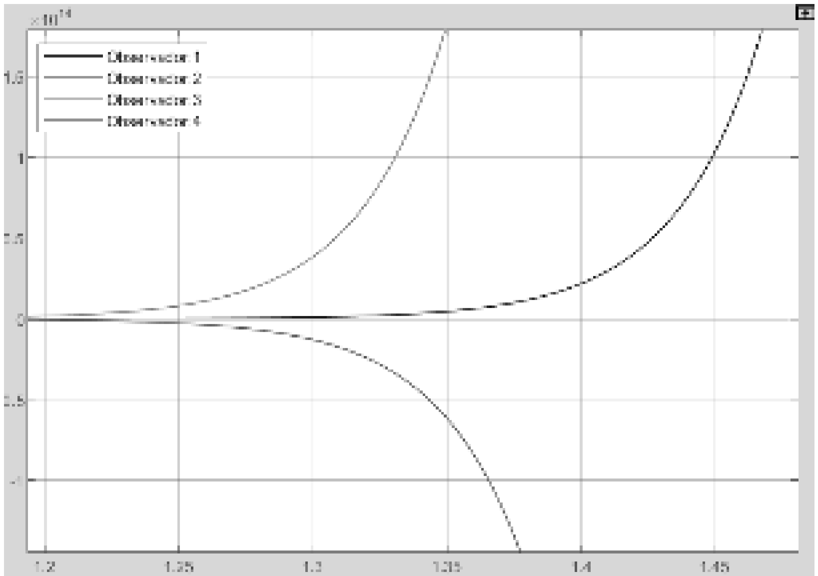
Procedimentos - Parte 2 | Observador e Controlador

Com o modelo linearizado, utilizando a ferramenta Simulink pode-se obter a resposta natural do sistema para diferentes entradas de controle de mesma amplitude (degrau, onda quadrada e onda senoidal).

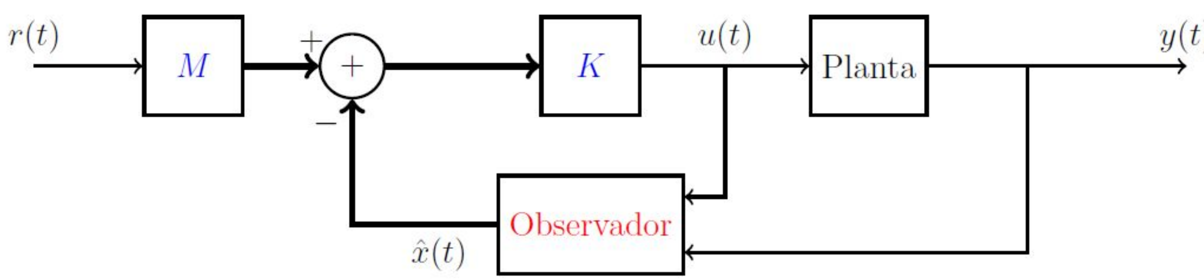




Com o projeto de observador de ordem reduzida fornecido na especificação do trabalho, é possível simular o sistema linearizado em conjunto com o Observador gerando os seguintes valores estimados dos estados ao longo do tempo:



Após a implementação e testes do observador, fechamos a malha para realizar o controle do processo esquematizado abaixo:



Para encontrar os ganhos M e K, tal que o tempo de acomodação seja menor do que 1.5 segundos, podemos utilizar dois métodos, o de alocação de pólos e o *LQR (Linear–quadratic regulator)*.

Com o auxílio do MATLAB, encontra-se, para o método *LQR*:

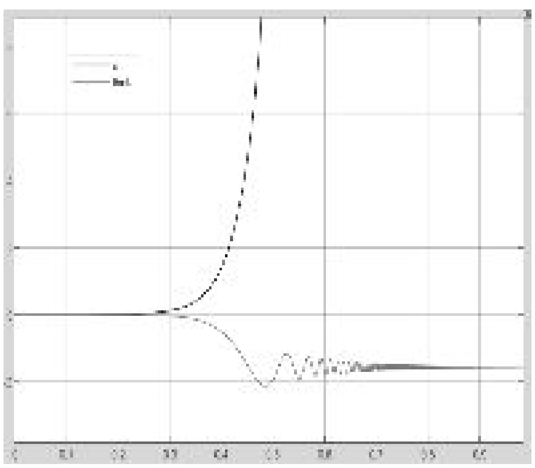
KLQR = [-1.0000 -294.6878 -165.3790 -5.9922]

transposta(MLQR) = [-0.0000 -0.0026 -0.0014 -0.0001]

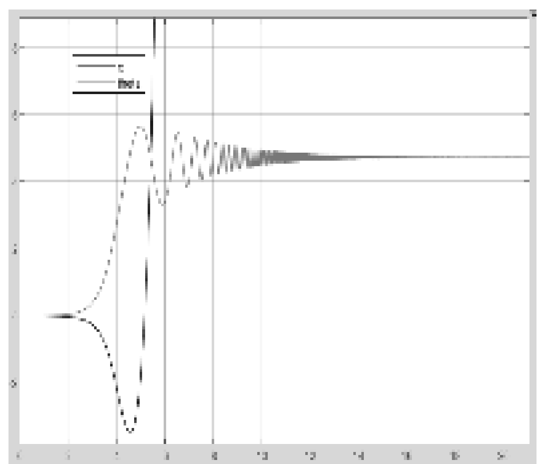
Para o método de alocação de pólos:

KPlace = [1.9954 8.4067 -3.9989 -1.2524]

A saída do sistema, após o fechamento da malha, leva a simulação ao extremo, levando cerca de 15 minutos para computar os primeiros 1.5 segundos. Mesmo assim, com os ganhos encontrados pelos métodos, encontram-se a seguintes respostas:



LQR



Alocação de Pólos

Conclusão e Discussão

Apesar dos resultados obtidos não estarem de acordo com o esperado desde o início da resolução do trabalho, conclui-se que é possível controlar o sistema utilizando representação no espaço de estados, e manter o pêndulo na posição vertical.

Dessa forma, considera-se êxito na resolução deste trabalho, considerando os resultados encontrados para a estabilização do pêndulo na posição vertical. Entretanto, o resultado da saída ‘x’ da planta pode ser considerado atípico pois a solução encontrada considera que o carrinho ao qual o pêndulo está preso está percorrendo um trilho de comprimento infinito (ou suficientemente grande). Ainda assim, é possível considerar os resultados obtidos deste cenário simulado para fins de análise de desempenho para diferentes métodos de controle.

Neste contexto, o resultado encontrado utilizando o método *LQR* foi melhor comparado ao método de alocação de pólos. Em primeiro lugar, aquele estabiliza mais rapidamente a variável controlada, podendo realizar a tarefa de controle de maneira mais rápida. Em segundo lugar o método LGR apresenta um sobressinal menor, isto pode levar uma diminuição no esforço empregado pelo atuador.

Por fim, acredita-se que os resultados possam melhorar escolhendo outros pólos para o sistema de malha fechada, mas como a sua simulação é mostrou-se lenta, talvez seja necessário encontrar outros valores para a definição do sistema físico (como por exemplo um carrinho mais leve, uma haste menor, etc…), e refazer os cálculos já disponíveis no script do MATLAB gerado pelos participantes. Ainda assim, foi possível observar que utilizando a modelagem em espaço de estados é possível estabelecer uma base para projetar de sistemas de controle focados em aumentar velocidade de resposta do sistema e diminuir o esforço dos atuadores do processo.