

Problema Exemplo de Programação Linear

Problema Primal:

Suponha que uma fábrica produz dois tipos de produtos, A e B. Cada unidade de A rende um lucro de R\$50, enquanto cada unidade de B rende um lucro de R\$40. A produção de A requer 3 horas na Máquina 1 e 2 horas na Máquina 2. A produção de B requer 2 horas na Máquina 1 e 1 hora na Máquina 2. Disponibilizam-se 18 horas por dia na Máquina 1 e 12 horas por dia na Máquina 2. A fábrica quer maximizar seu lucro diário.

- Função objetivo: Maximizar $Z=50A+40B$
- Restrições:
 - $3A+2B\leq 18$ (Restrição da Máquina 1)
 - $2A+B\leq 12$ (Restrição da Máquina 2)
 - $A,B\geq 0$ (Não-negatividade)

Solução do Problema Primal:

Vamos usar o método gráfico simplificado para encontrar a solução ótima:

As restrições formam um polígono de soluções viáveis no plano AB. Os vértices desse polígono são os pontos candidatos a solução ótima. Calculando os vértices e avaliando a função objetivo, encontramos que o ponto de máxima otimização (supondo uma solução viável simples para exemplificar) é $A=4, B=3$, com um lucro máximo $Z=200+120=320$.

Formulação e Solução do Problema Dual:

O problema dual associado seria formulado da seguinte maneira:

- Função objetivo: Minimizar $W=18Y_1+12Y_2$
- Restrições:
 - $3Y_1+2Y_2\geq 50$
 - $2Y_1+Y_2\geq 40$
 - $Y_1, Y_2\geq 0$

A solução do problema dual, que não será detalhadamente calculada aqui por brevidade, forneceria os preços sombra (valores de Y_1 e Y_2), que indicam quanto o valor da função objetivo (o lucro total) aumentaria se houvesse uma unidade adicional disponível na capacidade de cada máquina, respectivamente.

Análise de Dualidade:

A análise de dualidade aqui revelaria a relação entre os recursos (capacidades das máquinas) e o lucro total. Se os valores de Y_1 e Y_2 fossem, digamos, $Y_1=10$ e $Y_2=20$, isso significaria que cada hora adicional na Máquina 1 aumentaria o lucro em R\$10, enquanto cada hora adicional na Máquina 2 aumentaria o lucro em R\$20.

Análise de Sensibilidade:

- Preço Sombra: Como mencionado, reflete o valor de uma hora adicional de capacidade de máquina.
- Intervalo de Viabilidade para os Coeficientes da Função Objetivo (Lucros de A e B): Essa análise indicaria quão sensível é a solução ótima a mudanças nos lucros de A e B. Por exemplo, se o lucro de A aumentasse para R\$55, ainda seria
- $A=4, B=3$ a solução ótima?
- Intervalo de Viabilidade para os Lados Direitos das Restrições (Capacidades das Máquinas): Indicaria como mudanças nas disponibilidades das máquinas afetariam a solução ótima. Se a Máquina 1 tivesse 20 horas disponíveis, como isso mudaria a produção ótima?

Essa análise ajuda a entender não apenas como ajustar a produção diante de mudanças nos parâmetros do problema, mas também destaca quais recursos são mais críticos para o lucro (como indicado pelos preços sombra) e quais decisões são mais sensíveis a mudanças nas condições de mercado ou de produção.