



TRABAJO FIN DE GRADO
INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS

**Teoremas de la alternativa, optimización convexa,
valoración de activos financieros
y
procesamiento de nubes de puntos generadas por
escáner láser.**

Autor

Pedro Manuel Flores Crespo

Directores

Manuel Ruiz Galán

Juan Carlos Torres Cantero



Facultad de Ciencias



Granada, junio de 2020

Índice general

1. Resumen y palabras clave	5
2. Resumen extendido y palabras clave en inglés	7
3. Introducción	11
4. Objetivos	15
5. Desarrollo	17
 I Teoremas de la alternativa, optimización convexa y valoración de activos financieros	 19
6. Teoremas de la alternativa	21
6.1. Teorema de Mazur-Orlicz-König	21
 II Procesamiento de nubes de puntos generadas por escáner láser	 29
7. Conclusiones y vías futuras	31

Resumen y palabras clave

En el ámbito de las matemáticas, el trabajo fin de grado que presentamos supone la incursión a un campo dentro de la optimización, los teoremas de la alternativa, y sus aplicaciones, principalmente a la propia optimización y finanzas. El trabajo comienza con el teorema de Mazur-Orlicz-König, versión del conocido teorema de Hahn-Banach. Posteriormente, estudiamos el teorema de la alternativa de Gordan, esencial para el resto de resultados. Su primera aplicación se da en la teoría minimax, que nos conduce a resultados clásicos sobre separación de convexos. A continuación, deduciremos otro teorema de la alternativa, el de Farkas, y lo aplicaremos a la programación lineal. Para demostrar los resultados sobre optimización, volvemos al teorema de Gordan, que nos proporcionara los teoremas de Fritz John y Karush-Kuhn-Tucker. Finalmente, nos introducimos en el mundo de las matemáticas financieras obteniendo, gracias al teorema de separación, el primer teorema de asignación de precios para valorar opciones europeas. Concluimos realizando simulaciones de su valor en diferentes casos.

Por su parte, dentro del campo de la informática, se ha realizado un estudio acerca del procesamiento de nubes de puntos. En general, se tienen varias nubes que corresponden a un mismo objeto pero que están tomadas desde distintos puntos de referencia. Esto hace necesario un tratamiento de los conjuntos para conseguir que se encuentren en el mismo sistema de coordenadas y tener así un modelo digital del objeto. Este problema se denomina alineado y para resolverlo se aborda el estudio de dos algoritmos diferentes: ICP y RANSAC. El primero de ellos es un algoritmo genérico que veremos que tiene una gran desventaja, el tiempo de ejecución del mismo. Por ello, intentamos disminuir todo lo posible este tiempo mediante el uso de descriptores para detectar puntos significativos del modelo y reducir de ese modo el conjunto de puntos a los que es necesario aplicar el algoritmo. Por su parte, el algoritmo RANSAC es genérico y sirve para estimar parámetros de un modelo matemático. En nuestro caso, lo usamos para la detección de planos que nos aportaran un número reducido de puntos clave a los que aplicar el proceso de alineado.

Palabras clave: teoremas de la alternativa, teorema de Hahn-Banach, minimax, optimización, matemáticas financieras, alineado, cuaternios, ICP, RANSAC.

Resumen extendido y palabras clave en inglés

In Mathematics, the end of degree project that we present is an incursion into a field included in optimization, the theorems of the alternative, and their applications, mainly to the own optimization and finances.

Many of the theorems of the alternative are just reformulations of convex separation's theorems in certain contexts, so we start this memory with a study on Hahn-Banach's theorem. There are several equivalent versions of this result, collected for example in [7]. That is the reason why many authors talk about Hahn-Banach's theorems. We will focus on one of them, Mazur-Orlicz-König's theorem. Despite its geometrical charge, it is mainly an algebraical result. We will provide a proof of that theorem – the results in this work are self-contained – and we will use it to give a convex version of Gordan's theorem of alternative. Actually, it is an equivalent result due to S. Simons. This version is more general than the original Gordan's result and it will be extremely useful in the next important results.

Then, we will apply the convex Gordan's theorem of the alternative in the minimax theory. A minimax inequality guarantees, under certain hypothesis, that in a two variables function we can substitute $\inf\sup$ for $\sup\inf$. The power of minimax inequalities is clear when we use it – in one that we will deduce from the convex Gordan's theorem – to give classical convex separation's results.

Next, we will deduce from one separation's theorem the Farkas's lemma, which is one of the most known theorem of the alternative. This will allow us to prove, almost immediately, one of the key points of linear programming: the duality theorem. Considering more general optimization theorems, those in which the objective function and the inequalities constraints are differentiables, we will establish, using Gordan's theorem of the alternative, the theorems of Fritz John and Karush-Kuhn-Tucker.

We will conclude with a little foray into the field of financial mathematics. After introducing some of the main concepts, like a derivative security; we will prove, as a consequence of one of the convex separation's theorem, the result known as “First Fundamental Theorem of Asset Pricing”. It can be used in the pricing of European's options in the binomial model. Finally, we have programmed using *Sagemath 2.8*

some examples in order to know how their price varies according to its parametres.

Related to Computer Science, this project consists in a study of 3D digitalization, which is considered part of Computer Graphics. First, in order to have a digital copy of some desired object, we must obtain some point clouds representing the object. They are like three-dimensional photographs. Using this analogy, one photograph does not cover the whole object's surface. That is the reason why we need a few clouds for each one. Unfortunately, the point clouds are not in the same reference system. We need to "modify" them so they match and finally obtain a 3D copy of the object. This modification or treatment has three different processes: alignment, meshing and triangulation. The first one refers to the fact that we mentioned before, the point clouds are not in the same reference system. This step solves this problem. To accomplish this target in a proper way, our point clouds need some overlapping to know exactly how to place them. This situation leads us to the meshing step. Due to overlapping, once we have the shots expressed in the same coordinates, some parts have a higher level of points density. With meshing, we refer to omitting "repeated" points in these zones that have been registered several times to get a good alignment. In this moment, we have the object represented by the points. The goal of triangulating is just getting the surface represented by the points. The three steps that we have just mentioned, are very interesting and they deserve a complete study to solve them. However, in this project we will focus in the clouds alignment, also called data registration.

The first algorithm we will study is the Iterative Closest Point (ICP). It is considered a generic algorithm because it can be used to align two point clouds independently of the characteristics of the object. We will talk about this topic later in this work. However, it is important to highlight that there is no suitable algorithm to align any shots from all type of objects. This section starts with a brief introduction to quaternions. Quaternions are like an extension of complex numbers. In our case, we will use them to represent rotations in three dimensions (a rotation and a translation are needed to align the clouds). There are other ways to represent them such as 3×3 matrices or Euler angles but quaternions have some advantages. After that, we will discuss how to obtain the matrix and the translation mentioned before optimization a distance function. This will give us the steps we must follow in the algorithm. We will also prove the local convergence of this method. The fact that it converges locally forces us to have a pre-alignment step to ensure that the result is correct. Another disadvantage of ICP is the quadratic complexity in time which makes it untractable with large point clouds.

Our next goal will be to reduce the amount of time spent by the algorithm to complete. We will achieve it by reducing the point clouds and just using the most relevant of the model in our method. To detect these points, called key points, we will use the variation of the normal vector to distinguish between planar and sharp areas. It is possible due to the scanner used to get the shots. This decrement of the points' quantity will cause a significant reduction in the execution time. Finally, we will study how it affects the pre-alignment in the provided results.

The second algorithm we will discuss is the Random Sample Consensus. It is used to get the parameters that fit a mathematical model given by some observa-

tions. It is considered a robust algorithm even in the presence of outliers and is based on an hypothesis-test paradigm. In our case, we will use it to detect planes in our model. The steps to obtain the planes are very simple: select three random points that will represent a plane, count how many points fits that plane (with some tolerance), repeat this process N times and take the one that has the maximum number of points. We will give a formula to determine de number N depending on the probability to be an outlier, the desired probability to find the model and the number of parameters needed to defne it. Once we have the planes, we wil calculate their intersections in order to have significant coners. Then, we will use the angles between the planes to assign a descriptor to the intersection points and determine which of them match in different points clouds.

To test the proposed methods, we have different models: a clay feet property of the Faculty of Fine Arts of Granada, a part of *La torre de las Gallinas* in the Alhambra and an office. Theese models have been taken with a Faro Focus 130 laser scanner.

Keywords: theorems of the alternative, Hahn-Banach's theorem, minimax, optimization, financial mathematics, data registration, quaternions, ICP, RANSAC.

Introducción

El estudio de los teoremas de la alternativa hunde sus raíces en el teorema de separación de convexos de Hahn-Banach. Es más, algunas de sus versiones más conocidas, como el teorema de la alternativa de Gordan o el lema de Farkas, son precursoras de ese resultado fundamental del análisis funcional o la optimización. Y es precisamente ahí, en un contexto de optimización, donde surgen hace casi siglo y medio. Desde entonces han aparecido en gran cantidad, vinculados a problemas de optimización convexa en muchas ocasiones y mediante el uso de técnicas de separación. Además, su aplicabilidad no se ha circunscrito exclusivamente al campo de la optimización sino que ha trascendido dicha área: análisis convexo, análisis funcional, problemas de equilibrio ...

En esta memoria se aborda el estudio de los dos resultados de la alternativa mencionados, el teorema de Gordan y el lema de Farkas, dando incluso una versión más general del primero. Para establecerlos usamos una versión muy simple del teorema de Hahn-Banach y una mejora del mismo. Además, se aplican para establecer una desigualdad minimax que deriva, en particular, en una serie de teoremas de separación de convexos. También se ilustra su aplicabilidad en establecer resultados centrales en la optimización, como es el teorema de dualidad en programación lineal o los teoremas de Fritz John y Karush-Kuhn-Tucker en un contexto diferenciable. Finalmente, dedicamos todo un capítulo de la memoria a usar los teoremas de la alternativa, en una de sus formas equivalentes, para demostrar un resultado importante en el ámbito de las matemáticas financieras, el primer teorema fundamental de valoración de activos financieros. Ello requiere un bagaje previo – conceptos y resultados – que también se recoge en la memoria. Dicho teorema se aplica al caso de ciertos derivados muy populares, las opciones europeas, bajo un modelo binomial y se presentan algunas simulaciones numéricas realizadas con *SageMath* en su versión 2.8.

Centrándonos en la parte informática, el trabajo que se expone a continuación puede considerarse como una introducción al mundo del digitalizado 3D. Es una técnica que se engloba dentro del campo de la Informática Gráfica y que se aplica a una gran cantidad de sectores: diseño industrial, arte, cine, medicina, etc. Por ejemplo, en el mundo artístico se emplea para la obtención de un modelo digital de la obra con el fin de tener una copia digital de la misma u obtener más información que puede ser de utilidad, como en los procesos de restauración, sin necesidad de tener el original. También podemos poner un ejemplo de su uso en diseño industrial donde el modelo obtenido se puede utilizar para realizar simulaciones con el

objetivo de detectar las partes más susceptibles a sufrir fallos.

La obtención de un modelo detallado y completo es un proceso complicado y ampliamente estudiado. En primer lugar, es importante el escáner que utilicemos para realizar dicho proceso. En la actualidad existen una gran cantidad de modelos que utilizan diferentes tecnologías para obtener cada una de las tomas necesarias aunque la mayoría de ellos suelen darnos como resultado una nube de puntos que define la muestra. Otras técnicas como la fotogrametría también tienen como objetivo la obtención de un modelo 3D pero a partir de fotografías. Nosotros estudiaremos mecanismos basados en nubes de puntos. En cuanto a las técnicas utilizadas para la obtención estas nubes de puntos hay dos tipos: por contacto o sin contacto. La más utilizada es la segunda de ellas que a su vez puede utilizar una tecnología láser o mediante luz estructurada. Entre otros aspectos a tener en cuenta encontramos la resolución del escáner, su precisión, las propiedades del objeto, etc. No es el objetivo de este trabajo ver las tecnologías disponibles en el digitalizado ni el propio proceso y sus consecuencias en el resultado final obtenido pero es importante conocer las alternativas disponibles. Sí hay que tener en cuenta que algunos escáneres nos pueden aportar información adicional acerca de los puntos lo que puede ser de utilidad posteriormente. Una vez tenemos las nubes de punto, podemos distinguir tres etapas hasta llegar al modelo digital:

- Alinear: cuando se toman las muestras del objeto a digitalizar, es necesario mover el escáner con el que se realizan las medidas o el propio objeto. Esto conlleva que diferentes tomas van a estar en diferentes sistemas de coordenadas. Esto se podría solucionar, por ejemplo, mediante un sistema GPS que guardara las posiciones para posteriormente realizar las transformaciones correspondientes en las muestras. El error de GPS puede ser del orden de varios metros y no funciona bien en interiores. Por otra parte hay otro tipo de mecanismos que puede merecer la pena comentar: utilizar dianas en la escena; sensores inerciales en el escáner. En cualquier caso estos mecanismos no están siempre disponibles. Por ello, esta etapa, tiene como objetivo que todas las tomas estén respecto al mismo sistema de coordenadas. Otro aspecto a destacar es si estas tomas son rígidas o no, es decir, si no hay deformaciones en las mismas. Nosotros en este trabajo nos centraremos en el caso rígido.
- Fusionar: finalizada la etapa anterior debemos hacer que todas las nubes de puntos que tenemos alineadas se transformen en una sola. Más concretamente, durante la obtención de las muestras es necesario que estas se solapen, como veremos posteriormente, lo que hace que haya zonas con gran cantidad de puntos, muchos de ellos “repetidos”. De este modo, debemos detectar dichos puntos para que la densidad en todo el modelo sea uniforme. También hay que tener en cuenta que es posible que haya zonas que por falta de previsión o por imposibilidad física no se hayan podido obtener una muestra. En esta etapa también se deberían arreglar dichas faltas de información.
- Triangular: hasta ahora hemos trabajado con nubes de puntos pero el modelo es una superficie. Con esta etapa final se pretende obtener los triángulos que definen dicha superficie y así completar el proceso de digitalizado. Una alternativa sería obtener una función implícita que defina la superficie.

Las etapas que acabamos de mencionar no deben darse obligatoriamente en ese orden. Podríamos empezar calculando los triángulos que define cada nube de

puntos y posteriormente alinear y fusionar. Sin embargo, el orden descrito es el más habitual. Durante el proceso también se suele tener en cuenta la densidad de puntos, la posible existencia de ruido, de valores atípicos o del error que tiene el propio escáner durante la toma de medidas aunque no serán aspectos a los que nosotros les demos demasiada importancia.

Una idea importante a destacar es que en el digitalizado 3D no hay un algoritmo que sea capaz de reconstruir todo tipo de objetos. En este trabajo se estudiarán algunos algoritmos genéricos pero en la práctica existen métodos específicos para entornos urbanos, arquitectónicos, modelos curvilíneos, suaves o con aristas, etc. Más concretamente, nos centraremos en la primera de las etapas del proceso, el alineado. Dentro de este campo veremos dos de los algoritmos más usados: ICP y RANSAC. El primero de ellos es un algoritmo que se usa para cualquier modelo pero que veremos que tiene una gran desventaja: el tiempo de ejecución del mismo. Por ello, intentaremos disminuir todo lo posible este tiempo mediante el uso de descriptores para detectar puntos significativos del modelo y reducir de ese modo el conjunto de puntos a los que es necesario aplicar el algoritmo. Por su parte, el algoritmo RANSAC es más específico que el anterior y sirve para estimar parámetros de un modelo matemático. En nuestro caso, lo usaremos para la detección de planos que nos aportaran un número reducido de puntos clave a los que aplicar el proceso de alineado.

En definitiva, por un lado, en esta memoria se plasma tanto el carácter convexo-funcional de los teoremas de la alternativa como su aplicabilidad a campos tan diversos como la optimización, el análisis convexo y las matemáticas financieras. Por la parte informática, se ha realizado un análisis de dos procedimientos habituales para la alineación de dos nubes de puntos, proceso que se engloba dentro de la digitalización 3D. Señalamos finalmente que las referencias usadas en la elaboración de este memoria aparecen recogidas en el capítulo de Bibliografía. No obstante, los textos de [1], [2] y [8] han sido los esenciales para la parte de matemáticas financieras, mientras que [10], [12], [14] y [16] han sido de gran utilidad en el tema de digitalizado.

Objetivos

Los objetivos inicialmente previstos en la propuesta de TFG en matemáticas fueron:

- Realizar una recopilación de algunos teoremas de la alternativa.
- Teorema de dualidad en programación lineal.
- Teoremas de Karush-Kuhn-Tucker y Fritz John para programación convexa.
- Aplicación a finanzas: teorema fundamental de valoración de activos financieros en mercados finitos.

Sin embargo, nuestro tratamiento final ha sido algo más ambicioso, pues hemos incluido todo un capítulo de aplicaciones de los teoremas de la alternativa a la teoría minimax y a la separación de convexos. Además, en lugar de considerar los teoremas de Karush-Kuhn-Tucker y Fritz John en un ambiente convexo, los hemos establecido en un contexto no lineal y diferenciable. La idea que nos ha llevado a ello ha sido aumentar el número y tipología de aplicaciones de los teoremas de la alternativa, mostrando su versatilidad en diversos campos.

Dentro de la parte informática se pretendía:

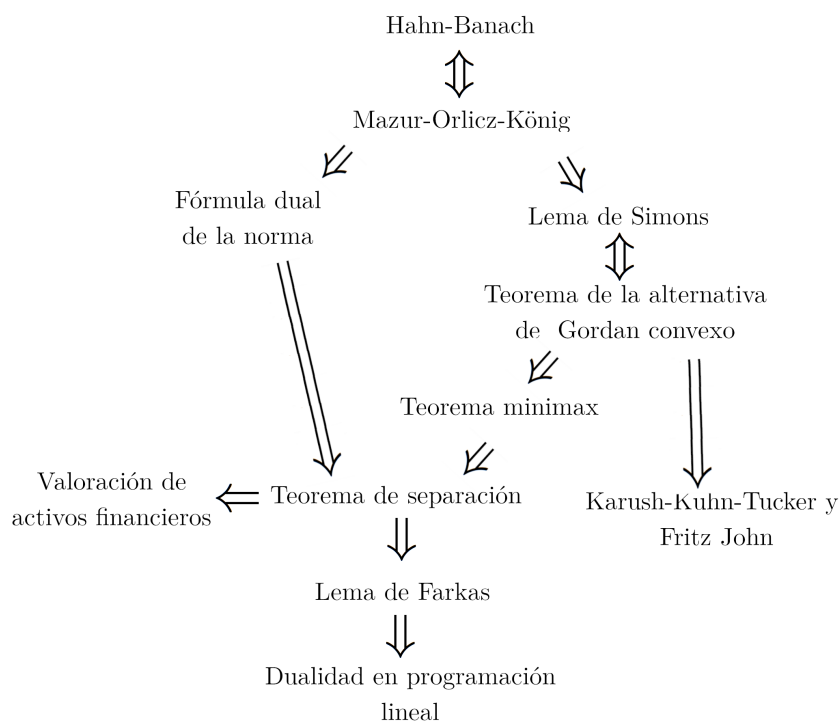
- Realizar una breve incursión en el mundo de la digitalización 3D, conociendo a rasgos generales el proceso empleado en la obtención de un modelo.
- Estudio de la información geométrica del modelo obtenido.
- Uso de dicha información para proponer una optimización de los algoritmos empleados en el proceso.
- Realización de un programa para evaluar los resultados obtenidos.

Destacamos que también se han alcanzado los objetivos propuestos en este caso. Inicialmente, la propuesta de TFG no contenía ninguna especificación acerca de los algoritmos o técnicas a usar debido a la amplia cantidad de métodos existentes así como la complejidad del proceso completo de digitalizado. Así, el primer punto ha servido como fase previa para el conocimiento del tema a trabajar para poder concretar un objetivo. Tras ello, se decidió centrar el estudio en la etapa de alineado tal, como ya se ha comentado anteriormente, y orientar de ese modo, los puntos segundo y tercero en ese ámbito. Finalmente, el cuarto punto se ha enfocado como un banco de pruebas para comprobar los resultados obtenidos en los puntos anteriores y no como una aplicación para uso de terceros.

Desarrollo

Matemáticas

El proceso seguido en el desarrollo del TFG ha sido, por un lado, recopilar material sobre el tema y analizarlo, y por otro, darle estructura totalmente auto-contenida, elaborando los diversos contenidos de forma jerarquizada en el sentido de que se deducen de los anteriores. A modo de esquema, los resultados se han estructurado atendiendo al siguiente esquema donde además se recoge la relación entre ellos:



Como puede observarse, las técnicas son de carácter convexo y analítico funcional.

Informática

Tras la concreción del tema a resolver dentro del ámbito del digitalizado 3D, se decidió empezar a trabajar en uno de los algoritmos más conocidos para ello, el *Iterative Closest Point* (ICP). También, al comenzar el trabajo, se decidió la manera de realizar las pruebas necesarias. Se optó por la realización de un banco de pruebas utilizando *OpenGL* como biblioteca gráfica, *C++* como lenguaje de programación así como *Qt* para la interfaz gráfica. Este banco de pruebas debe proporcionar herramientas básicas para la manipulación de las nubes de puntos con las que estamos trabajando así como otras funcionalidades necesarias para el desarrollo de los distintos algoritmos. En este caso se hizo necesaria solventar problemas como: abrir y guardar archivos, manipulación de la matriz de vista, selección de un conjunto de puntos y borrado de los mismos, selección de puntos aislados, etc.

Volviendo al primer algoritmo a estudiar, se comprobó que era necesario un conocimiento previo acerca de los cuaternios, tanto para la demostración de la convergencia del método como para su implementación. Una vez completado se procedió a la elaboración de distintas pruebas. Destacar que también se hizo necesario el cálculo de valores propios de una matriz por lo que se optó por usar la biblioteca *Eigen*. Posteriormente, se planteó la posibilidad de incluir mejoras al método usando la variación de las normales para obtener información acerca de la geometría del modelo. Por ello, fue necesaria la inclusión de esta opción dentro del banco de pruebas así como un algoritmo de simplificado de la nube de puntos tal y como se explicará en el desarrollo del trabajo.

Llegados a este punto, se planteó la posibilidad de incluir otra serie de mejoras al procedimiento o de estudiar otros algoritmos diferentes. Se siguió la segunda opción con el fin de tener una visión general más general del problema. Por ello, en último lugar aparece un estudio acerca del algoritmo *Random Sample Consensus* (RANSAC), partiendo de la explicación de los pasos del propio algoritmo pasando por razonamientos probabilísticos para asegurar la obtención de buenos resultados y finalmente la realización de pruebas del mismo.

Parte I

Teoremas de la alternativa, optimización convexa y valoración de activos financieros

Teoremas de la alternativa

Los teoremas de la alternativa constituyen una potente herramienta en optimización. A pesar de tener un claro carácter convexo, se aplican incluso a problemas no convexos, tal y como se comprobará a lo largo de esta memoria. Nuestro punto de partida es el resultado del análisis convexo, más importante, el teorema de Hahn-Banach. Es más, daremos una versión equivalente debida a H. König, conocida como el teorema de Mazur-Orlicz-König. Como consecuencia, obtendremos el teorema de la alternativa de Gordan, tanto en su versión clásica como una más general.

6.1. Teorema de Mazur-Orlicz-König

El objetivo principal de esta sección es demostrar una versión equivalente no muy conocida del clásico teorema de Hahn-Banach, el teorema de Mazur-Orlicz-König. Iremos de una versión básica y algebraica del teorema de Hahn-Banach al teorema de Mazur-Orlicz-König siguiendo como aparece en el texto de S. Simons [8].

En primer lugar vamos a recordar la definición de funcional sublineal sobre un espacio vectorial V . Notar que todos los espacios vectoriales que vamos a usar son reales. Del mismo modo, los conjuntos que usaremos asumiremos que son no vacíos.

Definición 6.1. Sea V un espacio vectorial. Decimos que el $P : V \rightarrow \mathbb{R}$ es sublineal si cumple las siguientes condiciones:

- P es subaditiva: $x_1, x_2 \in V \implies P(x_1 + x_2) \leq P(x_1) + P(x_2)$.
- P es positivamente homogénea: $x_1 \in V$ y $\lambda > 0 \implies P(\lambda x) = \lambda P(x)$.

Como consecuencia, podemos afirmar que $P(0) = 0$. En efecto:

$$P(0) = P(2 \times 0) = 2 \times P(0) \implies P(0) = 0.$$

Por ejemplo, toda norma o incluso toda seminorma sobre V es un funcional sublineal. Así, dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ tenemos que $P : H^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$P(x) = \|x'\|_{L^2(a,b)}$$

es una seminorma y por ello sublineal. También, si $V = \mathbb{R}$ y definimos la parte positiva

$$P(x) = [x]^+ = \max\{0, x\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

obtenemos un funcional sublineal sobre \mathbb{R} .

El lema que exponemos a continuación, y que generalizaremos posteriormente en el lema 6.2, nos servirá para demostrar el teorema de Hanh-Banach.

Lema 6.1. *Sea V un espacio vectorial y $P : V \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional sublineal. Fijamos un elemento $y \in V$ y para todo $x \in V$ tomamos*

$$P_y(x) := \inf_{\lambda > 0} [P(x + \lambda y) - \lambda P(y)].$$

Entonces, $P_y(V) \subset \mathbb{R}$, $P_y : V \rightarrow \mathbb{R}$ es sublineal, $P_y \leq P$ y además $P_y(-y) \leq -P(y)$.

Demostración. Fijamos $y \in V$. Sea $x \in V$ y $\lambda > 0$. Como P es sublineal tenemos:

$$\lambda P(y) = P(\lambda y) = P(\lambda y + x - x) \leq P(x + \lambda y) + P(-x).$$

Por lo tanto, se obtiene que $P(x + \lambda y) - \lambda P(y) \geq -P(-x)$. Tomando el ínfimo sobre $\lambda > 0$ llegamos a $P_y(x) \geq -P(-x) > -\infty$. Por consiguiente, $P_y(V) \subset \mathbb{R}$, esto es $P_y : V \rightarrow \mathbb{R}$.

Probaremos ahora que P_y es sublineal. Empezamos viendo la subaditividad. Tomamos $x_1, x_2 \in V$ y sean $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ arbitrarios. Entonces, la definición de P_y da

$$\begin{aligned} P(x_1 + \lambda_1 y) - \lambda_1 P(y) + P(x_2 + \lambda_2 y) - \lambda_2 P(y) \\ \geq P(x_1 + x_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)y) - (\lambda_1 + \lambda_2)P(y) \\ \geq P_y(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Tomando ínfimos sobre λ_1 y λ_2 , $P_y(x_1) + P_y(x_2) \geq P_y(x_1 + x_2)$. Así, P_y es subaditiva. Para comprobar que es positivamente homogénea tomamos $x \in V$ y $\mu > 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} P_y(\mu x) &= \inf_{\lambda > 0} [P(\mu x + \lambda y) - \lambda P(y)] \\ &= \mu \inf_{\lambda > 0} [P(x + (\lambda/\mu)y) - (\lambda/\mu)P(y)] \\ &= \mu \inf_{v > 0} [P(x + vy) - vP(y)] \\ &= \mu P_y(x). \end{aligned}$$

Obtenemos que P_y es positivamente homogénea y como consecuencia sublineal.

Para demostrar que $P_y \leq P$, sea $x \in V$ y tomando $\lambda = 1$ en la definición de P_y ,

$$P_y(x) \leq P(x + y) - P(y) \leq P(x) + P(y) - P(y) = P(x).$$

Como $x \in V$ es arbitrario, entonces $P_y \leq P$. Finalmente, razonando de manera similar,

$$P_y(-y) \leq P(-y + y) - P(y) = -P(y).$$

■

El teorema de Hahn-Banach que hemos mencionado antes (básico y algebraico) se enuncia en estos términos:

Teorema 6.1 (Hahn-Banach). *Sea V un espacio vectorial y $P : V \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional sublineal. Entonces existe un funcional lineal $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $L \leq P$.*

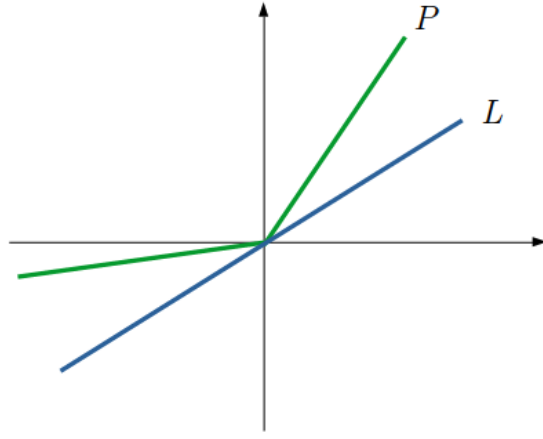


Figura 6.1: Teorema de Hahn-Banach.

Demostración. Sea $SUB = \{Q : V \rightarrow \mathbb{R} : Q \leq P\}$, es decir, el conjunto no vacío de funcionales sublineales sobre V que minoren a P . Nuestro propósito es emplear el lema de Zorn con objeto de probar que tiene un elemento minial y tal elemento será el funcional L que buscamos. Para ello, dados $T_1, T_2 \in SUB$ consideramos la relación de orden usual, es decir:

$$T_1 \leq T_2 \iff T_1(x) \leq T_2(x) \quad \forall x \in V.$$

Primero probaremos que todo subconjunto \mathcal{T} totalmente ordenado de SUB tiene una cota inferior en SUB . Definimos $Q(x) := \inf\{T(x) : T \in \mathcal{T}\}$ y queremos ver que $Q(x) \in \mathbb{R}$. Si $x \in V$ y $T \in \mathcal{T}$, como T es subaditiva obtenemos la siguiente relación:

$$0 = T(0) = T(x - x) \leq T(x) + T(-x) \implies T(x) \geq -T(-x) \quad (6.1)$$

Por otro lado:

$$T \in \mathcal{Q} \implies T(x) \leq P(x) \implies -T(x) \geq -P(x) \quad (6.2)$$

Usando (6.1), (6.2) y tomando ínfimo sobre T llegamos a $Q(x) \geq -P(x) > -\infty$. Por lo tanto $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$.

Ahora probaremos que Q es subaditiva. Para ello, tomamos $x_1, x_2 \in V$. Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ arbitrarios. Si $T_1 \geq T_2$ (el caso de $T_2 \geq T_1$ es análogo.):

$$T_1(x_1) + T_2(x_2) \geq T_2(x_1) + T_2(x_2) \geq T_2(x_1 + x_2) \geq Q(x_1 + x_2).$$

Concluimos (en ambos casos) que $T_1(x_1) + T_2(x_2) \geq Q(x_1 + x_2)$. Tomando ínfimo en T_1 y T_2 obtenemos que $Q(x_1) + Q(x_2) \geq Q(x_1 + x_2)$. Así, Q es sublineal. Que sea positivamente homogénea es consecuencia de que T también lo es. Dado $\mu > 0$:

$$\begin{aligned} Q(\mu x) &= \inf\{T(\mu x) : T \in \mathcal{T}\} \\ &= \inf\{\mu T(x) : T \in \mathcal{T}\} \\ &= \mu \inf\{T(x) : T \in \mathcal{T}\} \\ &= \mu Q(x). \end{aligned}$$

De este modo, Q es sublineal y como es claro que $Q \leq P \implies Q \in \text{SUB}$. Así, es directo que Q es el elemento minimal de \mathcal{T} en SUB.

El lema de Zorn nos proporciona entonces un elemento minimal de SUB que llamaremos L . Vamos a comprobar que L es lineal y, por tanto, es el funcional buscado. Tomamos ahora $y \in V$. Con la notación del lema anterior, $L_y : V \rightarrow \mathbb{R}$ es sublineal, $L_y \leq L$ (como consecuencia $L_y \in \text{SUB}$) y $L_y(-y) \leq L(-y)$. De hecho, como L es minimal en SUB, $L_y = L$ y por ello $L(-y) \leq L(-y)$. Por otro lado, como L es subaditiva, $L(-y) \geq -L(y)$. Combinando ambas desigualdades, $L(-y) = -L(y)$. Tomamos $x \in V$ y $\lambda < 0$, usando la igualdad anterior llegamos a:

$$L(\lambda x) = L(-(-\lambda)x) = -L(-\lambda x) = -(-\lambda)L(x) = \lambda L(x)$$

obteniendo que L es homogénea. Si $x_1, x_2 \in V$, la subaditividad de L nos da $L(-x_1 - x_2) \leq L(-x_1) + L(-x_2)$. Usando la homogeneidad de L :

$$\begin{aligned} L(x_1 + x_2) &= L(-(-x_1 - x_2)) = -L(-x_1 - x_2) \\ &\geq -L(-x_1) - L(-x_2) = L(x_1) + L(x_2) \geq L(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Por ello, $L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2)$ y por la arbitrariedad de $x_1, x_2 \in V$ concluimos que L es lineal. ■

Nos disponemos a probar, a partir del teorema de Hahn-Banach el de Mazur-Orlicz-König, que supone un refinamiento. Destacamos que el teorema de Hahn-Banach tiene gran cantidad de versiones equivalentes. Véase, por ejemplo, [7]. Antes, necesitamos un resultado técnico, que constituye una especie de versión global sobre un convexo del lema 6.1.

Lema 6.2. Sea V un espacio vectorial y $P : V \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional sublineal. Sea D un subconjunto convexo de V y sea $\beta := \inf_D P \in \mathbb{R}$. Para todo $x \in V$ tomamos

$$Q(x) := \inf_{d \in D, \lambda > 0} [P(x + \lambda d) - \lambda \beta].$$

Entonces, $Q(V) \subset \mathbb{R}$, $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ es sublineal, $Q \leq P$ y además $\forall d \in D$ se cumple $-Q(-d) \geq \beta$.

Demostración. Si $x \in V$, $d \in D$ y $\lambda > 0$, entonces

$$P(x + \lambda d) - \lambda\beta \geq -P(-x) + \lambda P(d) - \lambda\beta \geq -P(-x) > -\infty.$$

La primera desigualdad se deduce de la linealidad de P ya que:

$$\begin{aligned}\lambda P(d) &= P(\lambda d) \\ &= P(\lambda d + x - x) \\ &\leq P(x + \lambda d) + P(-x)\end{aligned}$$

por lo que $\lambda P(d) - P(-x) \leq P(x + \lambda d)$. La segunda se debe a que

$$\beta = \inf_D P \implies \lambda P(d) \geq \lambda\beta \implies \lambda P(d) - \lambda\beta \geq 0.$$

Tomando el ínfimo sobre $d \in D$ y $\lambda > 0$ llegamos a

$$Q(x) \geq -P(-x) > -\infty,$$

por lo que $Q(V) \subset \mathbb{R}$. Es relativamente fácil probar que Q es positivamente homogénea por lo que para ver que es sublineal solo queda comprobar la subaditividad. Para ello, tomamos $x_1, x_2 \in V$. Sean $d_1, d_2 \in D$ y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ arbitrarios. Para simplificar la notación llamamos $x := x_1 + x_2$, $\lambda := \lambda_1 + \lambda_2$ y $d := (\lambda_1/\lambda)d_1 + (\lambda_2/\lambda)d_2$. Notar que $d \in D$, al ser este convexo. Entonces:

$$\begin{aligned}P(x_1 + \lambda_1 d_1) - \lambda_1\beta + P(x_2 + \lambda_2 d_2) - \lambda_2\beta &\geq P(x + \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2) - \lambda\beta \\ &= P(x + \lambda d) - \lambda\beta \\ &\geq Q(x) = Q(x_1 + x_2).\end{aligned}$$

Tomando ínfimo sobre d_1, d_2, λ_1 y λ_2 , $Q(x_1) + Q(x_2) \geq Q(x_1 + x_2)$. Así, Q es subaditiva y como consecuencia sublineal. Para concluir, fijamos $d \in D$. Sea $x \in V$ arbitrario. Entonces, $\forall \lambda > 0$, $Q(x) \leq P(x) + \lambda(P(d) - \beta)$. Tomando $\lambda \rightarrow 0$, $Q(x) \leq P(x)$ y como consecuencia $Q \leq P$. Finalmente, sea $d \in D$ arbitrario y tomando $\lambda = 1$:

$$Q(-d) \leq Q(-d + d) - \beta = -\beta \implies -Q(-d) \geq \beta.$$

■

Ya estamos preparados para probar el teorema de Mazur-Orlicz-König, debido a H. König [4, 5]. No solo es una versión equivalente del teorema de Hahn-Banach, también de un teorema de Mazur-Orlicz [6].

Teorema 6.2 (Mazur-Orlicz-König). *Sea V un espacio vectorial y $P : V \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional sublineal. Sea D un subconjunto no vacío y convexo de V . Entonces existe un funcional $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que $L \leq P$ e $\inf_D L = \inf_D P$.*

Antes de pasar a la demostración, observemos que, aunque es un resultado puramente algebraico, tiene una fuerte interpretación geométrica: el teorema de Hahn-Banach garantiza, dado un funcional sublineal $P : V \rightarrow \mathbb{R}$, la existencia de un funcional lineal $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ con $L \leq P$. En la figura 6.2 mostramos unos ejemplos

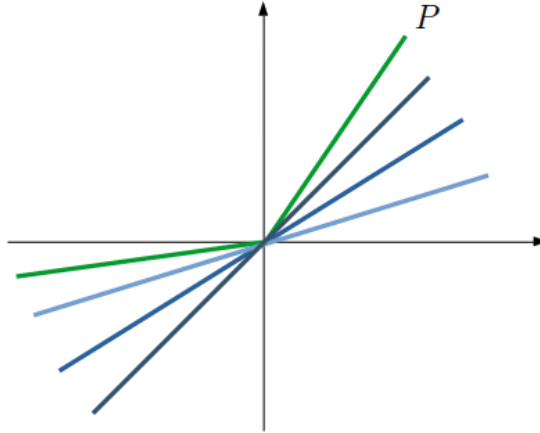


Figura 6.2: Ejemplos de funcionales aportados por el teorema de Hahn-Banach.

de funcionales que nos aporta el teorema de Hahn-Banach.

El teorema de Mazur-Orlicz-König, fijado un subconjunto convexo D de V , nos da solo los funcionales lineales que minoran a P y que cumplen

$$\inf_D L = \inf_D P.$$

En la imagen 6.3 se muestra un ejemplo del teorema.

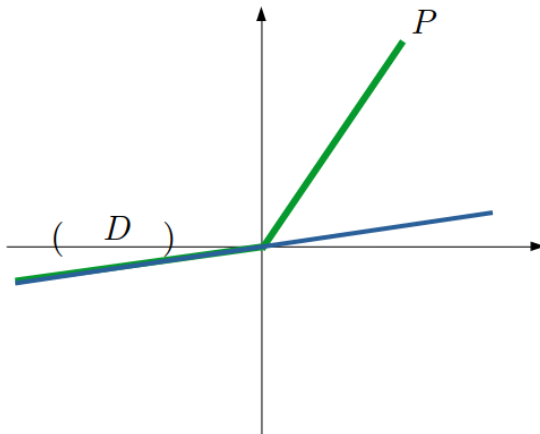


Figura 6.3: Teorema de Mazur-Orlicz-König.

Demostración. Sea $\beta := \inf_D P$. En el caso de que $\beta = -\infty$ por el teorema de Hahn-Banach tenemos que $\exists L$ sobre V tal que es lineal y $L \leq P$. Así:

$$L \leq P \implies \inf_D L \leq \inf_D P = -\infty \implies \inf_D L = \inf_D P.$$

Supongamos entonces que $\beta \in \mathbb{R}$. Definimos el funcional auxiliar Q como en el lema 6.2. Del teorema de Hanh-Banach obtenemos que existe un funcional lineal L sobre V tal que $L \leq Q$ (como $Q \leq P$ tenemos que $L \leq P$). Sea $d \in D$, entonces:

$$L(d) = -L(-d) \geq -Q(-d) \geq \beta.$$

Tomando ínfimo sobre $d \in D$:

$$\inf_D L \geq \beta = \inf_D P.$$

Por otro lado, como $L \leq P$:

$$\inf_D L \leq \inf_D P.$$

Juntando ambas desigualdades obtenemos $\inf_D L = \inf_D P$. ■

Antes de probar la eficiencia del teorema de Mazur-Orlicz-König en el siguiente apartado, presentamos una consecuencia bien conocida. En particular, nos será de utilidad posteriormente para el teorema de separación. Recordemos dados E_1, E_2 dos espacios normados y $T : E_1 \longrightarrow E_2$ un operador lineal, entonces T es continuo si, y solo si, verifica la siguiente condición:

$$\exists \alpha > 0 : \|T(x)\| \leq \alpha \|x\| \quad \forall x \in E_1,$$

Consideramos el espacio vectorial dado por:

$$E^* = \{T : E \longrightarrow \mathbb{R} : T \text{ es lineal y continuo}\}.$$

conocido como el espacio dual (topológico) de E . Para todo $T \in E^*$ definimos su norma como:

$$\|T\| = \min\{\alpha > 0 : |T(x)| \leq \alpha \|x\| \quad \forall x \in E\}.$$

De este modo, podemos escribir:

$$|T(x)| \leq \|T\| \|x\|$$

siendo dicha desigualdad óptima. También podemos expresar su norma como el mínimo mayorante de un conjunto mayorado, es decir, el supremo:

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| / \|x\| : \forall x \in E \setminus \{0\}\}.$$

Para $x \in E_1 \setminus \{0\}$ tenemos que $|T(x)| / \|x\| = \|T(x/\|x\|)\|$ y es claro que $\{x/\|x\| : x \in E_1 \setminus \{0\}\}$ es la esfera unidad de E que notamos como S_E . Si en vez de la esfera consideramos la bola unidad, B_E el supremo no varía. Efectivamente, si $x \in B_E$ se tiene que $x = \|x\| u$ con $u \in S_E$, y por ello $|T(x)| = \|x\| \|T(u)\| \leq |T(u)|$ ya que $\|x\| \leq 1$. De este modo, también tenemos que:

$$\|T\| = \sup_{x \in B_E} |T(x)|.$$

En este momento, estamos en disposición de enunciar y demostrar la igualdad que deseamos:

Corolario 6.1. *Dado un espacio normado E y $x \in E$, entonces se cumple que:*

$$\sup_{x^* \in B_{E^*}} x^*(x) = \|x\|. \quad (6.3)$$

Demostración. Sea $x_0 \in E$ y sea $D := \{x_0\}$. Consideramos el funcional

$$\begin{aligned} P : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\|. \end{aligned}$$

Es claro que P es sublineal y que D es convexo. Podemos aplicar el Teorema de Mazur-Orlicz-König, teorema 6.2, y obtenemos que existe un funcional $L : E \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que $L \leq P$ e $\inf_D L = \inf_D P$. Como $L \leq P$, entonces

$$\|L(x)\| \leq \|P(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in E.$$

Concluimos que L es continua. Además, como tenemos que $L \in E^*$, llamamos $L = x^*$ y llegamos a que $\|L\| = \|x^*\| \leq 1$, es decir, $x^* \in B_{E^*}$. Por su parte, como $\inf_D L = \inf_D x^* = \inf_D P$ y $D = \{x_0\}$ entonces, $x^*(x_0) = \|x_0\|$. De este modo, llegamos a que existe $x^* \in B_{E^*}$ tal que $x^*(x_0) = \|x_0\|$. Si tomamos cualquier elemento $y^* \in B_{E^*}$, entonces

$$\|y^*(x_0)\| \leq \|y^*\| \|x_0\| \leq \|x_0\|$$

y podemos asegurar que:

$$\sup_{x^* \in B_{E^*}} x^*(x_0) = \|x_0\|.$$

Como $x_0 \in E$ es arbitrario, la desigualdad enunciada queda probada. ■

Parte II

Procesamiento de nubes de puntos generadas por escáner láser

Conclusiones y vías futuras

Tanto en el ámbito matemático como informático, los objetivos que nos marcamos en la propuesta inicial se han alcanzado satisfactoriamente. En el primero de ellos, incluso se ha realizado una incursión no prevista en la teoría minimax de manos de los teoremas de la alternativa. Ello ha permitido obtener una visión completa de las técnicas y aplicaciones de los teoremas de la alternativa.

En el caso del de digitalizado 3D, se ha realizado una sólida introducción con los procedimientos básicos existentes. El estudio hecho en este trabajo se podría completar posteriormente con varias vías debido a la amplitud del tema. Sería posible plantear otra serie de mejoras a los algoritmos como por ejemplo, el uso de *voxels* para tener una mejor división espacial de la nube de puntos y acelerar el proceso del cálculo del punto más cercano. Otro posible camino a seguir sería estudiar algoritmos para la resolución de las otras dos etapas del proceso: fusión y triangulación. Finalmente, también se podría mejorar el banco de pruebas con la finalidad de que sea un *software* funcional para el público en general.

Bibliografía

- [1] J.M. Borwein, A.S. Lewis, *Convex analysis and nonlinear optimization: theory and examples*, Second Edition, CMS Books in Mathematics/Ourrages Mathématiques de la SMC 3, Springer, New York, 2006.
- [2] R.J. Elliot, R.E. Kopp, *Mathematics of financial markets*, Second Edition, Springer Finance, New York, 2005.
- [3] G. Giorgi, A. Guerraggio, J. Thierfelder, *Mathematics of optimization: smooth and nonsmooth case*, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2004.
- [4] H. König, *Über das von Neumannsche minimax-theorem*, Archiv der Mathematik 19(1968), 482-487.
- [5] H. König, *Sublinear functionals and conical measures*, Archiv der Mathematik 77(2001), 56-64.
- [6] S. Mazur, W. Orlicz, *Sur les espaces métriques linéaires II*, Studia Mathematica 13(1953), 137-179.
- [7] E. Schechter, *Handbook of analysis and its foundations*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1999.
- [8] S. Simons, *From Hahn-Banach to monotonicity*, 2nd edition, Lectures notes in Mathematics 1693, Springer, New York, 2008.
- [9] Gary KL Tam, Zhi-Quan Cheng, Yu-Kun Lai, Frank C Langbein, Yonghuai Liu, David Marshall, Ralph R Martin, Xian-Fang Sun, Paul L Rosin, *Registration of 3D point clouds and meshes: A survey from rigid to nonrigid*, IEEE transactions on visualization and computer graphics, 2012.
- [10] Yan-Bin Jia, *Quaternions and rotations*, Com S 477/577, 2013. Notes
- [11] Jernej Barbic, *Quaternions and Rotations*, CSCI 520 Computer Animation and Simulation, University of Southern California.
- [12] Paul J. Besl y Neil D. McKay, *A method for registration of 3d-shapes*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992.
- [13] Richard Hartley y Andrew Zisserman, *Multiple view geometry in computer vision*, Cambridge university press, 2003.
- [14] Martin A Fischler y Robert C Bolles, *Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography*, Communications of the ACM, 24(6):381-395, 1981.

- [15] PW Theiler, K Schindler, et al, *Automatic registration of terrestrial laser scanner point clouds using natural planar surfaces*, ISPRS Annals of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, 3:173–178, 2012.
- [16] Domingo Martín Perandrés, *Informática Gráfica con OpenGL 4*, 2018.
- [17] *Qt Documentation*, <https://doc.qt.io/qt-5/reference-overview.html>
- [18] *Eigen C++ library documetation*, <http://eigen.tuxfamily.org/dox/>