

Teoremas de la alternativa, optimización convexa, valoración de activos financiero y procesamiento de nubes de puntos generadas por escáner láser.

Pedro Manuel Flores Crespo

8-9 julio de 2020

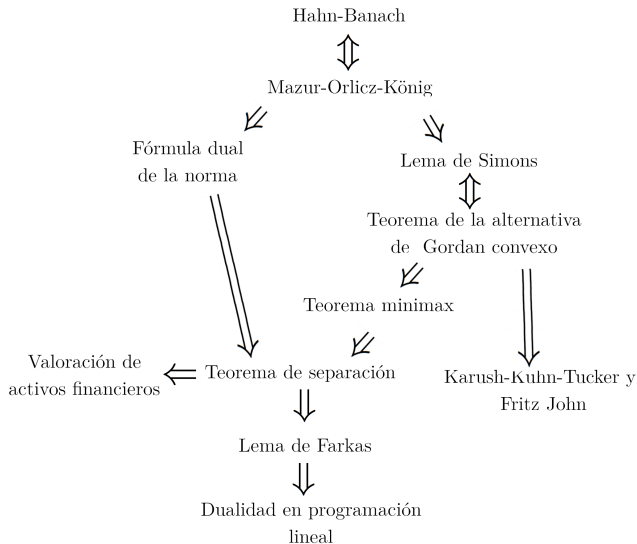
# Índice

- 1 Teoremas de la alternativa, optimización convexa y valoración de activos financieros.
  - Hahn-Banach y Mazur-Orlicz-König
  - Teorema de la alternativa de Gordan
  - Optimización
  - Minimax
  - Separación de convexos
  - Valoración de activos financieros
  
- 2 Procesamiento de nubes de puntos generadas por escáner láser.
  - Problema a resolver
  - ICP
  - Mejoras ICP
  - RANSAC
  - Banco de pruebas

# Contenido

- 1 Teoremas de la alternativa, optimización convexa y valoración de activos financieros.
  - Hahn-Banach y Mazur-Orlicz-König
  - Teorema de la alternativa de Gordan
  - Optimización
  - Minimax
  - Separación de convexos
  - Valoración de activos financieros
  
- 2 Procesamiento de nubes de puntos generadas por escáner láser.
  - Problema a resolver
  - ICP
  - Mejoras ICP
  - RANSAC
  - Banco de pruebas

## Desarrollo



### Teorema (Hahn-Banach)

Sea  $V$  un espacio vectorial y  $P : V \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional sublineal. Entonces existe un funcional lineal  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $L \leq P$ .

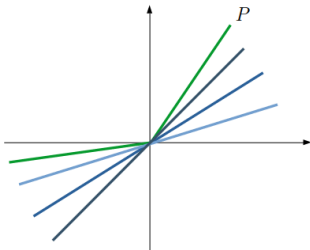


Figura: Teorema de Hahn-Banach.

### Teorema (Mazur-Orlicz-König)

Sea  $V$  un espacio vectorial y  $P : V \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional sublineal. Sea  $D$  un subconjunto no vacío y convexo de  $V$ . Entonces existe un funcional  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$  lineal tal que  $L \leq P$  e  $\inf_D L = \inf_D P$ .

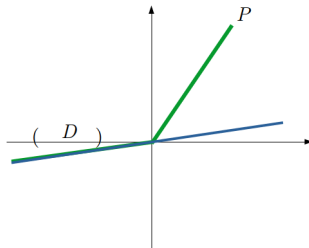


Figura: Teorema de Mazur-Orlicz-König.

## Teorema (Teorema de la alternativa de Gordan)

Dados  $N, M \in \mathbb{N}$ , sean  $\{x_1, \dots, x_N\}$  con  $x_i \in \mathbb{R}^M$  para  $i = 1, \dots, N$ . Entonces una, y solo una, de la siguientes afirmaciones se cumple:

$$i^*) \exists t \in \Delta_N \text{ tal que } 0 = \sum_{i=1}^N t_i x_i.$$

$$ii^*) \exists y \in \mathbb{R}^M \text{ tal que cumple } \max_{i=1, \dots, N} \langle y, x_i \rangle < 0.$$

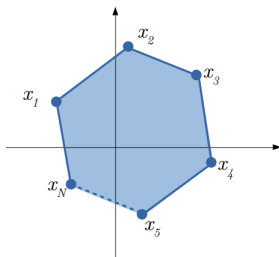


Figura: Alternativa i\*).

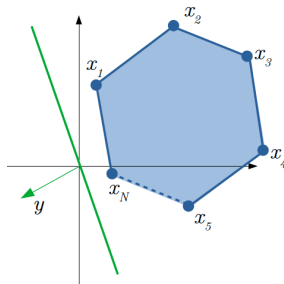


Figura: Alternativa ii\*).

Nuestro objetivo ahora es encontrar soluciones a problemas del siguiente tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a } g_1(\mathbf{x}) \leq 0 \\ \quad \vdots \\ g_N(\mathbf{x}) \leq 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

### Teorema (Teorema de Fritz John)

*Supongamos que el problema (1) tiene un mínimo local en  $\bar{\mathbf{x}} \in D$ . Si las funciones  $f, g_i$  con  $i \in I(\bar{\mathbf{x}})$  son diferenciables en  $\bar{\mathbf{x}}$  entonces existen  $\lambda_0, \lambda_i \in \mathbb{R}^+$  para  $i \in I(\bar{\mathbf{x}})$ , no todas cero, que satisfacen:*

$$\lambda_0 \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I(\bar{\mathbf{x}})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0.$$

- Fritz-John + Condición de Mangasarian-Fromovitz = Karush-Kuhn-Tucker.

A rasgos generales y a modo introductorio, podemos decir que un teorema minimax es un resultado que afirma, bajo ciertas hipótesis, que:

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y) \leq \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y),$$

### Teorema

*Sean  $X, Y$  subconjuntos convexos de sendos espacios vectoriales (no tienen que ser el mismo) tal que  $X$  está dotado de una topología que lo hace compacto.*

*Supongamos además que  $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  es:*

- i) cóncava y superiormente semicontinua en  $X$  y*
- ii) convexa en  $Y$ .*

*Entonces:*

$$\inf_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y).$$



## Teorema

Sean  $N \in \mathbb{N}$  y  $A, B$  subconjuntos convexos de  $\mathbb{R}^N$  tal que  $A$  es cerrado,  $B$  es compacto y  $A \cap B = \emptyset$ . Entonces existe  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$  tal que

$$\sup_{\mathbf{a} \in A} \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{a} \rangle < \inf_{\mathbf{b} \in B} \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{b} \rangle.$$

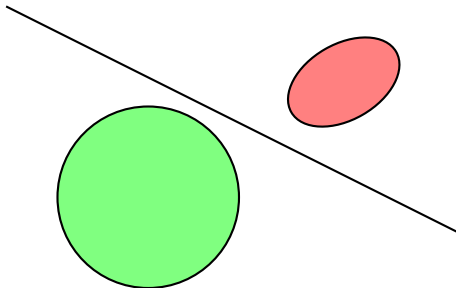


Figura: Situación de teoremas de separación

## Preliminares financieros

- Definición de activo y opción de compra (europea). Opciones *call* y *put*.

$$C_T = \max\{S_T - K, 0\} = [S_T - K]^+$$

- Principio de arbitraje.

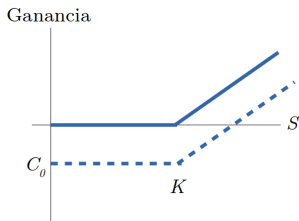


Figura: Ganancia propietario opción *call*.

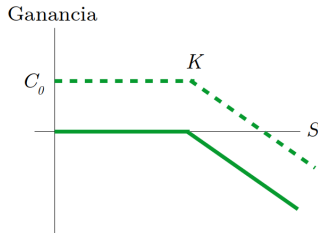


Figura: Ganancia vendedor opción *call*

# Martingalas

Un proceso  $\mathbb{F}$ -adaptado  $M = (M_t)_{t \in \mathbb{T}}$  es una  $(\mathbb{F}, P)$ -martingala si  $E(|M_t|) < \infty$  para todo  $t \in \mathbb{T}$  y

$$E(M_{t+1} | \mathcal{F}_t) = M_t \text{ para todo } t \in \mathbb{T} \setminus \{T\}.$$

## Teorema

*(Primer reorema fundamental de asignación de precios) Un modelo de mercado discreto es viable si, y solo si, existe una medida de martingala equivalente para  $S$ .*

## Precio de una opción de compra *call*. Modelo binomial

El precio el instante  $t \in \mathbb{T}$  viene dado por

$$S_t = \begin{cases} S_{t-1}(1+u) & \text{con probabilidad } p \\ S_{t-1}(1+d) & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases} \quad \text{donde } -1 < d < u.$$

La medida martingala equivalente  $Q$  es:

$$\begin{cases} Q\left(\frac{S_t}{S_{t-1}} = 1+u\right) = q \\ Q\left(\frac{S_t}{S_{t-1}} = 1+d\right) = 1-q \end{cases}$$

con  $q = \frac{r-d}{u-d}$  con  $d < r < u$ . El valor de una opción viene dado por

$$V_0(C_T) = (1+r)^{-T} \sum_{v=A}^T \binom{T}{v} q^v (1-q)^{T-v} \left[ S_0 (1+u)^v (1+d)^{T-v} - K \right],$$

donde  $A$  denota el primer entero  $k$  que cumple  $S_0(1+u)^k(1+d)^{T-k} > K$

# Estudio del valor en función de algunos de sus parámetros

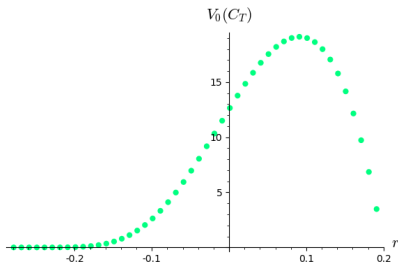


Figura: Variación en función del valor de  $r$  ( $d = -0,28$ ,  $u = 0,2$ ).

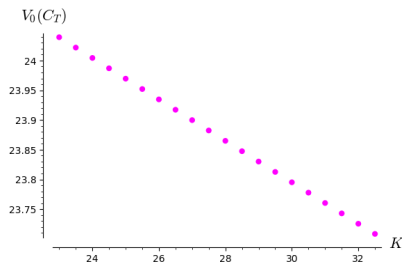


Figura: Variación en función del valor de  $K$ .

## Contenido

- 1 Teoremas de la alternativa, optimización convexa y valoración de activos financieros.
  - Hahn-Banach y Mazur-Orlicz-König
  - Teorema de la alternativa de Gordan
  - Optimización
  - Minimax
  - Separación de convexos
  - Valoración de activos financieros
- 2 Procesamiento de nubes de puntos generadas por escáner láser.
  - Problema a resolver
  - ICP
  - Mejoras ICP
  - RANSAC
  - Banco de pruebas

- Interés del digitalizado 3D.
- Cauce habitual de trabajo:
  - Alinear: expresar todas las tomas respecto al mismo sistema de referencia.
  - Fusionar: eliminar puntos "repetidos".
  - Triangular: construir malla de triángulos.

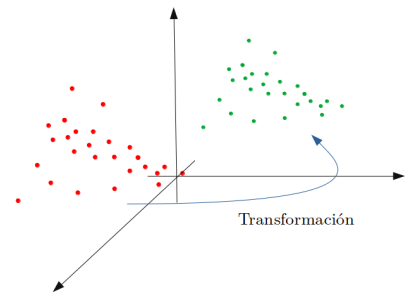


Figura: Nubes de puntos sin alinear.

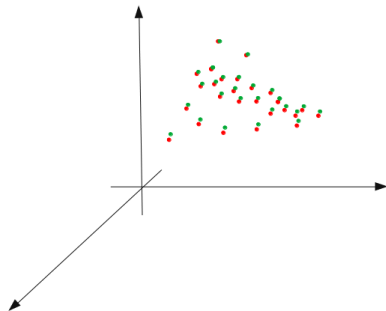


Figura: Nubes de puntos alineadas.

- Uso de cuaternios para expresar las rotaciones.
- Para minimizar la distancia (euclídea) entre el conjunto de puntos  $P$  a alinear con el modelo  $X$ , calculamos los vectores propios de

$$M = \begin{pmatrix} tr(\Sigma_{px}) & \Delta^t \\ \Delta & \Sigma_{px} + \Sigma_{px}^t + tr(\Sigma_{px})I_3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

donde

$$\Sigma_{px} = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} [(p_i - \bar{p})(x_i - \bar{x})^t],$$

$$A_{ij} = (\Sigma_{px} - \Sigma_{px}^t)_{ij} \quad i, j \in \{0, 1, 2\},$$

y

$$\Delta = (A_{12} \quad A_{20} \quad A_{01}).$$

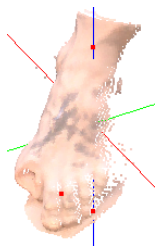
El cuaternio que representa la rotación viene dado por el vector propio asociado al mayor valor propio de  $M$  y la traslación por el vector  $\mathbf{b} = R\bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{x}}$ .

El algoritmo ICP intenta minimizar la distancia entre los puntos más cercanos.

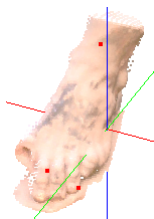


## Problemas del método ICP

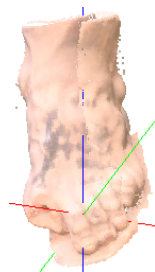
- Convergencia local  $\Rightarrow$  Prealinear.



**Figura:** Conjunto (1) con 7 042 puntos.



**Figura:** Conjunto (2) con 8 334 puntos.



**Figura:** Tomas prealineadas.

## Problemas del método ICP

It.	D. antes (mm)	D. después (mm)	Seg.
1	21.2000	18.1299	62.8672
2	16.7174	15.8707	62.7888
3	15.1625	14.4617	62.8636
4	13.9753	13.7418	63.059
5	13.6518	13.6071	62.8259

Cuadro: Resultados ajuste mediante ICP.

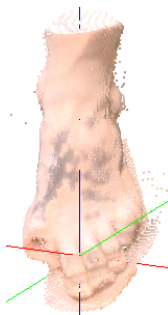


Figura: Tomas alineadas.

- Orden cuadrático en tiempo  $\implies$  Reducir el conjunto de puntos a los que aplicar el método.

- Para reducir el conjunto de puntos, detectamos puntos clave midiendo las variaciones de la normal (previo proceso de simplificado de la malla).

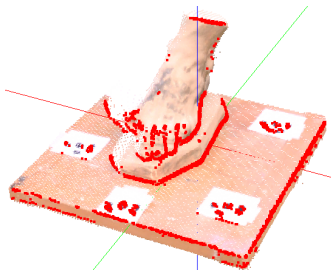


Figura: Puntos clave en la malla simplificada (1885).

- Podemos tomar puntos clave en una toma o en las dos (con algunas consideraciones).
- En la segunda opción, se han reducido dos conjuntos de puntos de unos 80 000 puntos a 11142 y 2273 obteniendo resultados satisfactorios empleando 0.7 segundos por iteración.

EL algoritmo RANSAC (*R*andom *S*ample *C*onsensus) es del tipo hipótesis-y-prueba y sirve para ajustar parámetros de un modelo matemático

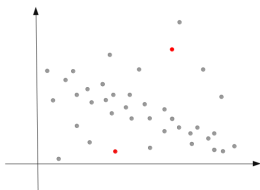


Figura: Escogemos los puntos.

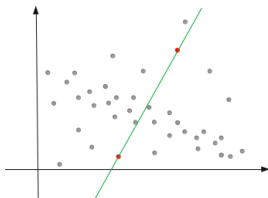


Figura: Trazamos el modelo.

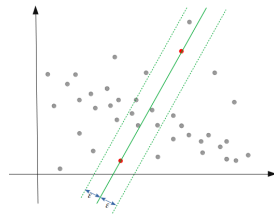
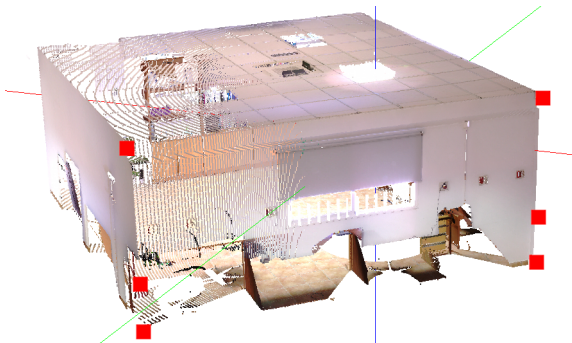


Figura: Vemos cómo de bueno es.

El número de iteraciones necesarias depende de los puntos necesarios para definir el modelo, la probabilidad para asegurar que encontramos uno adecuado y de la probabilidad de no estar en el modelo.

## Aplicación en alineado

Usamos el algoritmo RANSAC para obtener los puntos de intersección entre planos y alineamos el modelo en base a esos puntos.



Problema  $\iff$  se necesitan muchos planos para obtener resultados satisfactorios y que se puedan diferenciar fácilmente unos puntos de otros.

## Desarrollo del banco de pruebas

La aplicación para ver los resultados se ha hecho mediante *Qt*, *OpenGL* y *C++*.

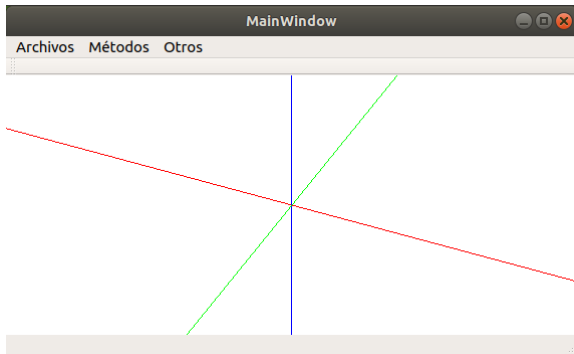


Figura: Aplicación desarrollada.

## Algunas referencias



J.M. Borwein, A.S. Lewis, *Convex analysis and nonlinear optimization: theory and examples*, Second Edition, CMS Books in Mathematics/Ouvrages Mathématiques de la SMC 3, Springer, New York, 2006.



R.J. Elliot, R.E. Kopp, *Mathematics of financial markets*, Second Edition, Springer Finance, New York, 2005.



G. Giorgi, A. Guerraggio, J. Thierfelder, *Mathematics of optimization: smooth and nonsmooth case*, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2004.



Paul J.Besl y Neil D.McKay, *A method for registration of 3d-shapes*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992.



Martin A Fischler y Robert C Bolles, *Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography*, Communications of the ACM, 24(6):381–395, 1981.



Yan-Bin Jia, *Quaternions and rotations*, Com S 477/577, 2013. Notes.