


## Introducción

El estudio de los teoremas de la alternativa hunde sus raíces en el teorema de separación de convexos de Hahn-Banach. Es más, algunas de sus versiones más conocidas, como el teorema de la alternativa de Gordan o el lema de Farkas, son precursoras de ese resultado fundamental del análisis funcional o la optimización. Y es precisamente ahí, en un contexto de optimización, donde surgen hace casi siglo y medio. Desde entonces han aparecido en gran cantidad, vinculados a problemas de optimización convexa <sup>en muchas ocasiones</sup> ~~normalmente~~ y mediante el uso de técnicas de separación. Además, su aplicabilidad no se ha circunscrito exclusivamente al campo de la optimización ~~normalmente~~ sino que ha trascendido dicha área: análisis convexo,

análisis funcional, problemas de equilibrio...

En esta memoria se aborda el estudio de los dos resultados de la alternativa mencionados, el teorema de Gordan y el lema de Farkas, dando incluso una versión más general del primero. Para establecerlos nos retrotraemos a una versión muy simple del teorema de Hahn-Banach y una mejora del mismo. Además, se aplican para establecer una desigualdad minimax que deriva, en particular, en una serie de teoremas de separación de convexos. También se ilustra su aplicabilidad en establecer resultados centrales en optimización, como es el teorema de dualidad en programación lineal o los teoremas de Fritz John y Karush-Kuhn-Tucker en un contexto diferenciable. Finalmente, dedicamos todo un capítulo de la memoria a usar los teoremas de

la alternativa, en una de sus formas equivalentes, para demostrar un resultado importante en matemáticas financieras, el primer teorema fundamental de valoración de activos financieros en mercados finitos. Ello requiere un bagaje previo —conceptos y resultados— que también se recoge en la memoria. Dicho teorema se aplica al caso de ciertos derivados muy populares, las opciones europeas, bajo un modelo binomial y se presentan algunas simulaciones numéricas realizadas con  software, no recuerdo el nombre).

En definitiva, en esta memoria se plasma tanto el carácter convexo-funcional de los teoremas de la alternativa como su aplicabilidad a campos tan diversos como la optimización, el análisis convexo o las matemáticas financieras.

## Objetivos del trabajo

Los objetivos inicialmente previstos en la propuesta de TFG fueron:

- Realizar una recopilación de algunos teoremas de la alternation.
- Teorema de dualidad en programación lineal.
- Teoremas de Karush-Kuhn-Tucker y Fritz John para programación convexa.
- Aplicación a finanzas: ~~teorema~~ teorema fundamental de valoración de activos financieros en mercados finitos.

Sin embargo, nuestro tratamiento final ha sido algo más ambicioso, pues hemos incluido todo un capítulo de aplicaciones de los teoremas de la alternation a la teoría minimax y a la separación de convexos. Además, en lugar de considerar los teoremas de Karush-Kuhn-Tucker y Fritz John en un ambiente con-

vexo, los hemos establecido en un contexto no lineal y diferenciable. La idea que nos ha llevado a ello ha sido el abundar en el número y tipología de aplicaciones de los teoremas de la alternativa, mostrando su versatilidad en diversos campos.

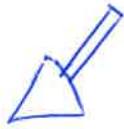
## Desarrollo del trabajo

El proceso seguido en el desarrollo de este TFG ha sido, por un lado, recopilar material sobre el tema y analizarlo, y por otro, darle estructura totalmente autocentrada, elaborando los diversos contenidos de forma jerarquizada, en el sentido de que unos se deducen de los anteriores. A modo de esquema, los resultados se han estructurado atendiendo al siguiente esquema, donde además se recoge la relación entre ellos:

Hahn-Banach



Mazur-Orlicz-König



Fórmula dual de la norma



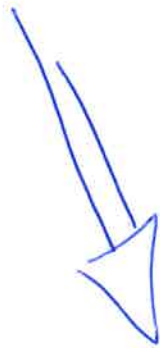
Lemma de Simons



Teorema de la alternativa de Gordan conves



Teorema minimax



Valores de activos financieros



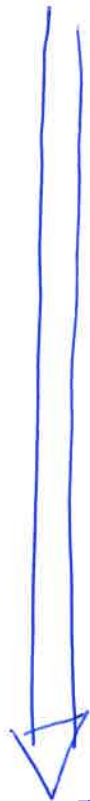
Teoremas de separación



Lemma de Farkas



Dualidad en progr. lineal



KKT y FJ

Como puede observarse, las técnicas son de carácter conciso y analítico funcional. En este ~~sentido~~ sentido, ha sido de gran utilidad el material de los textos [SiH] y [BoR].



## Conclusiones y vis futuras

Los objetivos que nos marcamos en la propuesta inicial se han alcanzado satisfactoriamente. Es más, se ha realizado una incursión no prevista en la teoría minimax de mano de las teorías de la alternativa. Ello ha permitido obtener una visión más completa de las técnicas y aplicaciones de las teorías de la alternativa: ~~en optimización convexa, finanzas y~~