Teorema de Hanh-Banach y de Mazur-Orlicz

El objetivo principal de esta sección es demostrar tanto una versión no tan conocida del clásico teorema de Hanh-Banach como el teorema de Mazur-Orlicz. Para ello, iremos utilizando una serie de lemas previos que nos facilitarán el proceso. Así, una vez vistos estos resultados, habremos construido la base para el lema de Simons

En primer lugar vamos a recordar la definición de funcional sublineal sobre un espacio vectorial V . Notar que todos los espacios vectoriales que vamos a usar son reales. Del mismo modo, los conjuntos que usaremos asumiremos que son no vacíos

Definición 1.1. *Sea V un espacio vectorial distinto de cero. Decimos que el $P : V \to \mathbb{R}$ es sublineal si cumple las siguientes condiciones:*

- *P es subaditiva: $x_1, x_2 \in V \Longrightarrow P(x_1 + x_2) \leq P(x_1) + P(x_2)$.*
- *P es positivamente homogénea: $x_1 \in V$ y $\lambda > 0 \Longrightarrow P(\lambda x) = \lambda P(x)$.*

Por ejemplo, toda seminorma sobre V es un funcional sublineal. También, si V= $\mathbb{R}$ y definimos $P(x) = \max\{0, x\}, \forall x \in \mathbb{R}$ obtenemos un funcional sublineal sobre $\mathbb{R}$.

El lema que exponemos a continuación, y que generalizaremos posteriormente en el lema 1.2, nos servirá para demostrar el teorema de Hanh-Banach.

Lema 1.1. *Sea V un espacio vectorial distinto de cero y $P : V \to \mathbb{R}$ un funcional sublineal. Fijamos un elemento $y \in V$. Para todo $x \in V$ tomamos*

$$P_y(x) := \inf_{\lambda > 0} \left[P(x + \lambda y) - \lambda P(y) \right]$$

Entonces, $P_y : V \to \mathbb{R}$, $P_y$es sublineal, $P_y \leq P$ y $P_y(-y) \leq -P(y)$.

Demostración. Fijamos $y \in V$. Sea $x \in V$ y $\lambda > 0$, como P es sublineal tenemos:

$$\lambda P(y) = P(\lambda y) = P(\lambda y + x - x) \leq P(x + \lambda y) + P(-x)$$

Por lo tanto, se obtiene que $P(x + \lambda y) - \lambda P(y) \geq -P(-x)$. Tomando el ínfimo sobre $\lambda > 0$ llegamos a $P_y(x) \geq -P(-x) > -\infty$. Por consiguiente, $P_y : V \to \mathbb{R}$.

Probaremos ahora que P_y es sublineal. Empezamos viendo la subaditividad. Tomamos $x_1, x_2 \in V$ y sean $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ arbitrarios. Entonces:

$$\begin{aligned}
[P(x_1 + \lambda_1 y) - \lambda_1 P(y)] &+ [P(x_2 + \lambda_2 y) - \lambda_2 P(y)] \\
&\geq [P(x_1 + x_2(\lambda_1 + \lambda_2) y)] - (\lambda_1 + \lambda_2) P(y) \\
&\geq P_y(x_1 + x_2)
\end{aligned}$$

Tomando ínfimo sobre λ_1 y λ_2, $P_y(x_1) + P_y(x_2) \geq P_y(x_1 + x_2)$. Así, P_y es subaditiva. Para comprobar que es positivamente homogénea tomamos $x \in V$ y $\mu > 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}
P_y(\mu x) &= \inf_{\lambda > 0} [P(\mu x + \lambda y) - \lambda P(y)] = \mu \inf_{\lambda > 0} [P(ux + (\lambda/\mu) y) - (\lambda/\mu) P(y)] \\
&= \mu \inf_{\upsilon > 0} [P(ux + \upsilon y) - \upsilon P(y)] = \mu P_y(x)
\end{aligned}$$

Obtenemos que P_y es positivamente homogénea y como consecuencia sublineal.

Para demostrar que $P_y \leq P$, sea $x \in V$ y tomando $\lambda = 1$:

$$P_y(x) \leq P(x + y) - P(y) \leq P(x) + P(y) - P(y) = P(x) \Longrightarrow P_y \leq P$$

Finalmente, actuando de manera similar al caso anterior:

$$P_y(-y) \leq P(-y + y) - P(y) = -P(y)$$

■

Ahora procedemos a probar el teorema de Hanh-Banch para funcionales sublineales, el cual es uno de los resultados más importantes del análisis funcional.

Teorema 1.1 (Hanh-Banach)**.** *Sea V un espacio vectorial distinto de cero y $P : V \to \mathbb{R}$ un funcional sublineal. Entonces existe un funcional lineal L en V tal que $L \leq P$.*

Demostración. Sea $\mathcal{Q}$ el conjunto de funcionales sublineales Q en V tales que $Q \leq P$. Primero probaremos que todo subconjunto $\mathcal{T}$ totalmente ordenado de $\mathcal{Q}$ tiene una cota inferior en $\mathcal{Q}$. Para $T_1, T_2 \in \mathcal{Q}$ tenemos la relación de orden usual, es decir:

$$T_1 \leq T_2 \Longleftrightarrow T_1(x) \leq T_2(x) \quad \forall x \in \mathrm{V}$$

Definimos $Q(x) := \inf\{T(x) : T \in \mathcal{T}\}$. Si $x \in$V y $T \in \mathcal{T}$, como T es subaditiva obtenemos la siguiente relación $0 = T(0) = T(x - x) \leq T(x) + T(-x) \Longrightarrow T(x) \geq -T(-x)$ (1). Como $T \in \mathcal{Q} \Longrightarrow T(x) \leq P(x) \Longrightarrow -T(x) \geq -P(x)$ (2). Usando (1), (2) y tomando ínfimo sobre T llegamos a $Q(x) \geq -P(x) \geq -\infty$. Por lo tanto $Q : V \to \mathbb{R}$.

Ahora probaremos que Q es subaditiva. Para ello, tomamos $x_1, x_2 \in$V. Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ arbitrarios. Si $T_1 \geq T_2$ (el caso de $T_2 \geq T_1$ es análogo.):

$$T_1(x_1) + T_2(x_2) \geq T_2(x_1) + T_2(x_2) \geq T_2(x_1 + x_2) \geq Q(x_1 + x_2)$$

Concluimos que ambos casos $T_1(x_1) + T_2(x_2) \geq Q(x_1 + x_2)$. Tomando ínfimo en T_1 y T_2 obtenemos que $Q(x_1) + Q(x_2) \geq Q(x_1 + x_2)$. Así, Q es sublineal. Que sea positivamente homogénea es consecuencia de que T también lo es. Dado $\mu > 0$:

$$\begin{aligned} Q(\mu x) &= \inf\{T(\mu x) : T \in \mathcal{T}\} \\ &= \inf\{\mu T(x) : T \in \mathcal{T}\} \\ &= \mu \inf\{T(x) : T \in \mathcal{T}\} \\ &= \mu Q(x) \end{aligned}$$

De este modo, Q es sublineal y como es claro que $Q \leq P \Longrightarrow Q \in \mathcal{Q}$. Así, es directo que Q es el elemento minimal de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{Q}$.

El lema de Zorn nos proporciona entonces un elemento minimal de $\mathcal{Q}$ que llamaremos L. Tomamos ahora $y \in$V. Con la notación del lema anterior, L_y :V$\longrightarrow \mathbb{R}$ es sublineal, $L_y \leq L$ (como consecuencia $L_y \in \mathcal{Q}$) y $L_y(-y) \leq L(-y)$. De hecho, como L es minimal en $\mathcal{Q}$, $L_y = L$ y por ello $L(-y) \leq L(-y)$. Por otro lado, como L es subaditiva, $L(-y) \geq -L(y)$. Combinando ambas desigualdades, $L(-y) = -L(y)$. Tomamos $x \in$V y $\lambda < 0$, usando la igualdad anterior llegamos a:

$$L(\lambda x) = L(-(-\lambda)x) = -L(-\lambda x) = -(-\lambda)L(x) = \lambda L(x)$$

obteniendo que L es homogénea. Si $x_1, x_2 \in$V, la subaditividad de L nos da $L(-x_1 - x_2) \leq L(-x_1) + L(-x_2)$. Usando la homogeneidad de L:

$$\begin{aligned} L(x_1 + x_2) &= L(-(-x_1 - x_2)) = -L(-x_1 - x_2) \\ &\geq -L(-x_1) - L(-x_2) = L(x_1) + L(x_2) \geq L(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

Por ello, $L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2)$ y concluimos que L es lineal.

■

El siguiente resultado importante que demostraremos será el teorema de Mazur-Orlicz. Primero, veamos un lema previo.

Lema 1.2. *Sea V un espacio vectorial distinto de cero y $P : V \to \mathbb{R}$ un funcional sublineal. Sea D un subconjunto no vacío y convexo de V y $\beta := \inf_D P \in \mathbb{R}$. Para todo $x \in V$ tomamos*

$$Q(x) := \inf_{d \in D, \lambda > 0} [P(x + \lambda d) - \lambda\beta]$$

Entonces, $Q : V \to \mathbb{R}$, Q es sublineal, $Q \leq P$ y $\forall d \in D, -Q(-d) \geq \beta$.

Demostración. Si $x \in$V, $d \in D$ y $\lambda > 0$ entonces

$$P(x + \lambda d) - \lambda\beta \geq -P(-x) + \lambda P(d) - \lambda\beta \geq -P(-x) \geq -\infty$$

La primera igualdad se deduce de la linealidad de P ya que:

$$\lambda P(d) = P(\lambda d) = P(\lambda d + x - x) \leq P(x + \lambda d) + P(-x) \Longrightarrow -P(-x) \leq P(x + \lambda d)$$

Y la segunda a que como $\beta = \inf_D P \Longrightarrow \lambda P(d) \geq \lambda\beta \Longrightarrow \lambda P(d) - \lambda\beta \geq 0$. Tomando el ínfimo sobre $d \in D$ y $\lambda > 0$ llegamos a $Q(x) \geq -P(-x) > -\infty$. Por consiguiente, $Q : V \to \mathbb{R}$. Es relativamente fácil probar que Q es positivamente homogénea por lo que para ver que es sublineal solo queda ver la subaditividad. Para ello, tomamos $x_1, x_2 \in V$. Sean $d_1, d_2 \in D$ y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ arbitrarios. Para simplificar la notación llamamos $x := x_1 + x_2$, $\lambda := \lambda_1 + \lambda_2$ y $d := (\lambda_1/\lambda)d_1 + (\lambda_2/\lambda)d_2$. Notar que $d \in D$ al ser este convexo. Entonces:

$$\begin{aligned} [P(x_1 + \lambda_1 d_1) - \lambda_1\beta] + [P(x_2 + \lambda_2 d_2) - \lambda_2\beta] &\geq P(x + \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2) - \lambda\beta \\ &= P(x + \lambda d) - \lambda\beta \\ &\geq Q(x) = Q(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

Tomando ínfimo sobre d_1, d_2, λ_1 y λ_2, $Q(x_1) + Q(x_2) \geq Q(x_1 + x_2)$. Así, Q es subaditiva y como consecuencia sublineal. Fijamos $d \in D$. Sea $x \in$V arbitrario. Entonces, $\forall\lambda > 0$, $Q(x) \leq P(x) + \lambda [P(d) - \beta]$. Tomando $\lambda \longrightarrow 0$, $Q(x) \leq P(x)$ y como consecuencia $Q \leq P$. Finalemente, sea $d \in D$ arbitrario y tomando $\lambda = 1$:

$$Q(-d) \leq Q(-d + d) - \beta = -\beta \Longrightarrow -Q(-d) \geq \beta$$

■

Visto este lema, estamos preparados para ver el resultado que nos interesa:

Teorema 1.2 (Mazur-Orlicz)**.** *Sea V un espacio vectorial distinto de cero y $P : V \to \mathbb{R}$ un funcional sublineal. Sea D un subconjunto no vacío y convexo de V . Entonces existe un funcional lineal L sobre V tal que $L \leq P$ e $\inf_D L = \inf_D P$*

Demostración. Sea $\beta := \inf_D P$. En el caso de que $\beta = -\infty$ por el teorema de Hanh-Banach tenemos que $\exists L$ sobre V tal que es lineal y $L \leq P$. Así:

$$L \leq P \Longrightarrow inf_D L \leq \inf_D P = -\infty \Longrightarrow inf_D L = \inf_D P$$

Supongamos entonces que $\beta \in \mathbb{R}$. Definimos el funcional auxiliar Q como en el lema 1.2. Del teorema de Hanh-Banach obtenemos que existe un funcional lineal L sobre V tal que $L \leq Q$ (como $Q \leq P$ tenemos que $L \leq P$). Sea $d \in D$, entonces:

$$L(d) = -L(-d) \geq -Q(-d) \geq \beta$$

Tomando ínfimo sobre $d \in D$:

$$\inf_D L \geq \beta = \inf_D P$$

Por otro lado, como $L \geq P$:

$$\inf_D L \leq \inf_D P$$

Juntando ambas desigualdades obtenemos $\inf_D L = \inf_D P$ ■

Lema de Simons y Teorema de la Alternativa de Gordan

Este capítulo se centra en lema de Simons, el cual será de gran ayuda para demostrar el Teorema de la Alternativa de Gordan.

Antes de comenzar, necesitamos hacer la siguiente definición.

Definición 2.1. *Dado $N \in \mathbb{N}$ con $N > 1$ llamamos símplex unitario de $\mathbb{R}^N$ al conjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^N$ dado por:*

$$\Delta_N := \left\{ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} t_i = 1 \ \ , \ \ t_1, ..., t_N \geq 0 \right\}.$$

Por ejemplo, si $N = 2$, tenemos que $\Delta_2 = \mathrm{co}\{(1,0),(0,1)\}$, es decir es la envolvente convexa de los vectores de la base usual de $\mathbb{R}^2$. De hecho en general, $\Delta_N = co\{e_1, ...e_N\}$.

Antes de continuar veamos que efectivamente Δ_N es convexo y compacto:

- Convexo: tenemos que comprobar que dados $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s} \in \Delta_N \Longrightarrow \lambda\boldsymbol{t} + (1-\lambda)\boldsymbol{s} \in \Delta_N, \lambda \in [0,1]$. En efecto, las coordenadas de $\lambda\boldsymbol{t} + (1-\lambda)\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^N$ verifican:

  i) $\lambda t_i + (1-\lambda)s_i \geq 0$ para todo $i = 1, ..., N$ ya que $t_i, s_i \geq 0$.

  ii) $\sum_{i=1}^{N}(\lambda t_i + (1-\lambda)s_i) = \lambda \sum_{i=1}^{N} t_i + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{N} s_i = \lambda + (1-\lambda) = 1$ ya que $\sum_{i=1}^{N} t_i = \sum_{i=1}^{N} s_i = 1$.

  Por lo tanto, $\lambda\boldsymbol{t} + (1-\lambda)\boldsymbol{s} \in \Delta_N$ para todo $\lambda \in [0,1]$.

- Compacto: al encontrarnos en $\mathbb{R}^N$ y aplicando el conocido Teorema de Heine-Borel basta ver que Δ_N es cerrado y acotado. Claramente es acotado por lo que nos centraremos en la de cerrado. Sea $\{\boldsymbol{t}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Δ_N y sea $\boldsymbol{t}_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $\{\boldsymbol{t}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \boldsymbol{t}_0$. Tenemos que comprobar que $\boldsymbol{t}_0 \in \Delta_N$.

i) Como todas las coordenadas de $\boldsymbol{t}_n$ son no negativas podemos asegurar que las de $\boldsymbol{t}_0$ también lo son.

ii) la función $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(\boldsymbol{t}) = \sum_{i=1}^N t_i$ es continua. Claramente $f(\boldsymbol{t}) = 1$ para todo $\boldsymbol{t} \in \Delta_N$ y por ello $\{f(\boldsymbol{t}_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 1$. Por continuidad de f y unicidad de límite tenemos que $f(\boldsymbol{t}_0) = 1$ pero eso implica que la suma de sus componentes vale 1

Así, hemos demostrado que $\boldsymbol{t}_0 \in \Delta_N$ y por lo tanto Δ_N es compacto.

Enunciamos este lema previo que usaremos posteriormente el la demostración del de Simons.

Lema 2.1. *Sea $N \in \mathbb{N}$, con $N \geq 1$ y $L : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $S(x) := \text{máx}\{x_1, ..., x_N\}$. Entonces, S es sublineal. Además, si $L : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal tal que $L \leq S$ entonces L es de la forma $L(x) = t_1x_1 + ... + t_Nx_N$ con $(t_1, ..., t_N) \in \Delta_N$. De hecho, el recíproco también es cierto, es decir, si $L = (t_1, ..., t_N) \in \Delta_N$ entonces $L \leq S$.*

Demostración. Claramente, S es positivamente homogénea. También es subaditiva ya que dados $x, y \in$V :

$$\begin{aligned} S(x+y) &= \text{máx}\{x_1 + y_1, ..., x_N + y_N\} \\ &\leq \text{máx}\{x_1, ..., x_N\} + \text{máx}\{y_1, ..., y_N\} = S(x) + S(y) \end{aligned}$$

Por ello, S es sublineal. Para terminar veamos que

$$\left\{L : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} : L \text{ lineal y } L \leq S\right\} = \Delta_N$$

$\supseteq$) Sea $\mathbf{t} \in \Delta_N$ definimos $L : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ como $L(x) := \langle \mathbf{t}, x\rangle$. Es evidente que L es lineal al serlo el producto escalar. Dado $x \in \mathbb{R}$:

$$L(x) = \sum_{i=1}^N t_i x_i \leq \sum_{i=1}^N t_i S(x) = S(x) \sum_{i=1}^N t_i = S(x)$$

donde la primera desigualdad se debe a que $x_i \leq S(x)$ para todo x_i con $i = 1, ..., N$ y a que $t_i \geq 0$ ya que $\mathbf{t} \in \Delta_N$. Esto también justifica la que última igualdad ya que $\sum_{i=1}^N t_i = 1$.

$\subseteq$) Sea $L = (t_1, ..., t_N) \in \mathbb{R}^N$ lineal tal que $\forall x \in \mathbb{R}^N$ cumple $\sum_{i=1}^N t_i x_i \leq \text{máx}\{x_1, ..., x_N\}$. Así, si tomamos $e_i \in \mathbb{R}^N$ donde e_i representa el i-ésimo elemento de la base usual de $\mathbb{R}^N$ con $i = 1, ..., N$. Entonces:

$$L(-e_i) = -t_i \leq 0 \Longrightarrow t_i \geq 0 \quad \forall i = 1, ..., N$$

Si ahora llamamos $e = \sum_{i=1}^{N} e_i$. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} L(e) = \sum_{i=1}^{N} t_i \leq \text{máx}\{1, ..., 1\} = 1 \\ L(-e) = -\sum_{i=1}^{N} t_i \leq \text{máx}\{-1, ..., -1\} = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} t_i = 1$$

Concluimos entonces que $L = (t_1, ..., t_N) \in \Delta_N$.

■

Enunciamos ahora lema de Simons[ST08] en que destacamos la ausencia de hipótesis topológicas, lo que será importante posteriormente.

Lema 2.2 (Lema de Simons)**.** *Sea C un subconjunto no vacío y convexo de un espacio vectorial. Dadas $f_1, ..., f_N$ $(N \geq 1)$ funciones sobre C reales y convexas, entones existen $(t_1, ..., t_N) \in \Delta_N$ que cumplen*

$$\inf_C [\text{máx}\{f_1, ..., f_N\}] = \inf_C [t_1 f_1 + ... + t_N f_N]$$

Demostración. Sea $V = \mathbb{R}^N$ con $N \in \mathbb{N}$. Definimos S :V$\longrightarrow P$ como

$$S(x_1, ..., x_N) := \text{máx}\{x_1, ..., x_N\}$$

. Por el lema 2.1 S es sublineal. Tomamos el subconjunto:

$$D = \{(x_1, ..., x_N) \in V : \exists c \in C \quad \text{tal que} \quad \forall i = 1, ...N, \quad f_i(c) \leq x_i\}$$

D es un subconjunto convexo de V . Sean $x, y \in D$, por ello, existen $c_x, c_y \in C$ tales que $f_i(c_x) \leq x_i$ y $f_i(c_y) \leq y_i \quad \forall i = 1, ..., N$. Dado $\lambda \in [0, 1]$, llamamos $c := (1-\lambda)c_x + \lambda c_y$ que pertenece a C por ser este convexo. Veamos que c es el elemento necesario de C para que cualquier combinación convexa de x e y esté en D. Así, para todo $i = 1, ..., N$:

$$f_i(c) = f_i((1-\lambda)c_x + \lambda c_y) \leq (1-\lambda)f(c_x) + \lambda f(c_y) \leq (1-\lambda)x_i + \lambda y_i$$

donde la primera desigualdad se debe a que las f_i son convexas y la segunda a que $x, y \in D$. Por ello, $(1-\lambda)x_i + \lambda y_i \in D, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$ por lo que D es convexo. Aplicando el Teorema de Mazur-Orlizc, existe L funcinal lineal sobre V tal que $L \leq S$ e $\inf_D L = \inf_D S$.

Nuevamente, por el lema 2.1 tenemos que $L = (t_1, ..., t_N) \in \Delta_N$.

Finalmente:

$$\inf_D L = \inf_{c \in C} [t_1 f(c) + .. + t_N f(c)] = \inf_C [t_1 f + .. + t_N f]$$

y

$$\inf_D S = \inf_{c\in C}[\max\{f_1(c),...,f_N(c)\}] = \inf_C [\max\{f_1,...,f_N\}]$$

por lo que

$$\inf_C [t_1 f + .. + t_N f] = \inf_C [\max\{f_1,...,f_N\}]$$

■

Enunciamos ahora el Teorema de la alternativa de Gordan en su versión convexa.

Teorema 2.1 (Teorema de la Alternativa de Gordan-versión convexa)**.** *Sea C un subconjunto convexo de un espacio vectorial y sean $f_1,...,f_N : C \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones convexas ($N \geq 1$). Entonces una, y solo una, de la siguientes afirmaciones se cumple:*

i) $\exists \mathbf{t} \in \Delta_N$ *tal que* $0 \leq \inf_C \sum_{i=1}^N t_i f_i$.

ii) $\exists c \in C$ *que cumple* $\max\{f_1(c),...,f_N(c)\} < 0$.

Demostración. Si aplicamos el lema de Simons, lema 2.2 a las funciones $f_1,...,f_N$ obtenemos:

$$\exists t \in \Delta_N : \inf_C [\max\{f_1,...,f_N\}] = \inf_C \sum_{i=1}^N t_i f_i$$

Supongamos en primer lugar que $\alpha := \inf_C [\max\{f_1,...,f_N\}] \in \mathbb{R}$. Planteamos la siguiente alternativa, cuyos casos son excluyentes:

a) $0 \leq \alpha$: implica $i)$ ya que $\alpha = \inf_C \sum_{i=1}^N t_i f_i$

b) $\alpha < 0$: este caso, por su parte, implica $ii)$ ya que:

$$\alpha = \inf_C [\max\{f_1,...,f_N\}] < 0 \Longleftrightarrow \exists c \in C : \max\{f_1(c),...,f_N(c)\} < 0$$

Para finalizar, veamos cuando $\alpha = -\infty$. En este caso, estamos en la misma situación que en b) por lo que solo se puede dar $ii)$. ■

Destacamos las siguientes observaciones:

Observación 1. *Esta versión convexa del teorema implica la versión clásica del mismo.*

Dados $\{x_1, ...x_N\}$ con $x_i \in \mathbb{R}^M, (M \geq 1)$ $i = 1,...,N$, la versión clásica del teorema nos aporta las siguientes alternativas:

i*) $\exists \mathbf{t} \in \Delta_N$ tal que $0 = \sum_{i=1}^N t_i x_i$.

ii*) $\exists y \in \mathbb{R}^M$ tal que cumple $\text{máx}_{i=1,...,N}\langle y, x_i\rangle < 0$.

Para ello, basta aplicar la versión convexa del teorema a $C := \mathbb{R}^M$ y a las funciones $f_1, ..., f_N : C \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_i(c) := \langle c, x_i\rangle, \forall i = 1, ..., N$. Notar que las funciones $f_1, ..., f_N$ son lineales por lo que en particular son convexas. En este caso, la alternativa *ii*) implica *ii∗*) ya que:

$$\exists c \in C = \mathbb{R}^M : \underset{i=1,...,N}{\text{máx}} \langle c, x_i\rangle = \underset{i=1,...,N}{\text{máx}} f_i(c) < 0$$

Por su parte, la alternativa *i*) nos da:

$$\exists \mathbf{t} \in \Delta_N : 0 \leq \inf_{c\in\mathbb{R}^M} \sum_{i=1}^N t_i f_i(c) = \inf_{c\in\mathbb{R}^M} \sum_{i=1}^N t_i \langle c, x_i\rangle = \inf_{c\in\mathbb{R}^M} \langle c, \sum_{i=1}^N t_i x_i\rangle$$

Hemos obtenido por ello que : $0 \leq \inf_{c\in\mathbb{R}^M}\langle c, \sum_{i=1}^N t_i x_i\rangle$ lo que nos lleva a $0 \leq \langle c, \sum_{i=1}^N t_i x_i\rangle$ para todo $c \in \mathbb{R}^M$. Usando la linealidad por la izquierda del producto escalar:

$$0 \leq \langle -c, \sum_{i=1}^N t_i x_i\rangle \Longleftrightarrow 0 \leq -\langle c, \sum_{i=1}^N t_i x_i\rangle \Longleftrightarrow \langle c, \sum_{i=1}^N t_i x_i\rangle \leq 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}^M$$

Juntando ambas desigualdades obtenemos que $0 = \langle c, \sum_{i=1}^N t_i x_i\rangle, \quad \forall c \in \mathbb{R}^M$. Como la igualdad anterior se cumple para todo elemento de $\mathbb{R}^M$ entonces podemos deducir que $\sum_{i=1}^N t_i x_i = 0$ ya que $\sum_{i=1}^N t_i x_i \in (\mathbb{R}^M)^\perp = \{0\}$. Así pues, tenemos que

$$\text{Se cumple } i) \Longleftrightarrow \exists t \in \Delta_N : 0 = \sum_{i=1}^N t_i x_i$$

Es claro entonces que obtenemos *i∗*).

Observación 2. *El lema de Simons(lema 2.2) y el Teorema de la Alternativa de Gordan (teorema 2.1) son equivalentes.*

Ya hemos visto que el Lema de Simons implica el Teorema de la Alternativa de Gordan. Veamos que el recíproco también es cierto.

Llamamos $\alpha := \inf_C [\text{máx}\{f_1, ..., f_N\}]$. Si $\alpha = -\infty$. Por el lema 2.1 sabemos que $\forall \boldsymbol{t} \in \Delta_N$ se cumple que $\sum_{i=1}^N t_i f_i(c) \leq \text{máx}\{f_1(c), ..., f_N(c)\}$ para todo $c \in C$. Tomando ínfimos en C:

$$\inf_C \left[\sum_{i=1}^N t_i f_i\right] \leq \inf_C [\text{máx}\{f_1, ..., f_N\}] = -\infty \Longrightarrow \inf_C \left[\sum_{i=1}^N t_i f_i\right] = -\infty$$

y por ello $\forall \boldsymbol{t} \in \Delta_N$ (en particular para uno) se cumple que

$$\inf_C \left[\sum_{i=1}^{N} t_i f_i \right] = \inf_C \left[\max\{f_1, ..., f_N\} \right]$$

Supongamos ahora que $\alpha \in \mathbb{R}$. Sean las funciones $q_1, ..., g_N : C \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas como $g_i = f_i - \alpha$ con $i = 1, ..., N$. Veamos que las funciones $g_1, ..., g_N$ son convexas como consecuencia de que $f_1, ..., f_N$ lo son. Sean $c_1, c_2 \in C$ y $\lambda \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} g_i(\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2) &= f_i(\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2) - \alpha \\ &\leq \lambda f_i(c_1) + (1-\lambda) f_i(c_2) - \alpha \\ &= \lambda f_i(c_1) + (1-\lambda) f_i(c_2) - \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha \\ &= \lambda(f_i(c_1) - \alpha) + (1-\lambda)(f_i(c_2) - \alpha) \\ &= \lambda g_i(c_1) + (1-\lambda) g_i(c_2) \end{aligned}$$

Obtenemos que g_i es convexa para todo $i = 1, ..., N$. Si usamos el Teorema de la Alternativa de Gordan obtenemos que solo se pueden dar una y solo de las siguientes posibilidades:

i) $\exists \mathbf{t} \in \Delta_N$ tal que $0 \leq \inf_C \sum_{i=1}^{N} t_i g_i$.

ii) $\exists c \in C$ que cumple $\max\{g_1(c), ..., g_N(c)\} < 0$.

Razonemos que no se puede dar *ii*). Si fuese así, tendríamos que $\exists c \in C$ tal que $\max\{g_1(c), ..., g_N(c)\} = \max\{f_1(c) - \alpha, ..., f_N(c) - \alpha\} < 0$. En particular, existiría un índice $j \in 1, ..., N$ que cumpliría $f_j(c) - \alpha < 0 \Longrightarrow f_j(c) < \alpha = inf_C \left[\max\{f_1, ..., f_N\}\right]$. Esto es imposible por la propia definición de ínfimo. Por ello, afirmamos que $\exists \mathbf{t} \in \Delta_N$ tal que $0 \leq \inf_C \sum_{i=1}^{N} t_i g_i$. Desarrollando el sumatorio:

$$\begin{aligned} 0 < \inf_C \sum_{i=1}^{N} t_i g_i &= \inf_C \sum_{i=1}^{N} t_i (f_i - \alpha) = \inf_C \left[\sum_{i=1}^{N} t_i (f_i) - \sum_{i=1}^{N} t_i \alpha \right] \\ &= \inf_C \left[\sum_{i=1}^{N} t_i (f_i) - \alpha \sum_{i=1}^{N} t_i \right] = \inf_C \left[\sum_{i=1}^{N} t_i (f_i) - \alpha \right] = \inf_C \left[\sum_{i=1}^{N} t_i (f_i) \right] - \alpha \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$0 < \inf_C \left[\sum_{i=1}^{N} t_i (f_i) \right] - \alpha \Longleftrightarrow \inf_C \left[\max\{f_1, ..., f_N\} \right] = \alpha < \inf_C \left[\sum_{i=1}^{N} t_i (f_i) \right]$$

El lema 2.1 nos aporta la otra desigualdad y llegamos nuevamente a que $\exists \boldsymbol{t} \in \Delta_N$ que cumple:

$$\inf_C \left[\sum_{i=1}^{N} t_i f_i \right] = \inf_C \left[\max\{f_1, ..., f_N\} \right]$$

Minimax

COMPLETARRR

Proposición 3.1. *Sea D un subconjunto de un espacio vectorial real, $\bar{x}$ un punto del interior de D y $g_1, ..., g_N : D \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas y diferenciables en $\bar{x}$. Definimos $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ como $g(x) := \text{máx}_{i=1,...,N}\{g_i(x)\}$ y el conjunto de índices $K = \{i : g_i(\bar{x}) = g(\bar{x})\}$. Entonces, para toda dirección del espacio vectorial, llamémosla d, la derivada direccional de g viene dada por la siguiente expresión:*

$$g'(\bar{x}; d) = \max_{i \in K}\{\langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle\} \tag{3.1}$$

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $K = \{1, ..., N\}$ ya que aquellas g_i que no alcancen el máximo no afectarán al cálculo de la derivada de g. Para cada $i \in K$ tenemos la siguiente desigualdad:

$$\liminf_{t \to 0} \frac{g(\bar{x} + td) - g(\bar{x})}{t} \geq \liminf_{t \to 0} \frac{g_i(\bar{x} + td) - g_i(\bar{x})}{t} = \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle$$

La primera desigualdad se deduce de la definición de g ya que es el máximo de las g_i para $i = 1, ..., N$ y la segunda igualdad a que todas las g_i son diferenciables en $\bar{x}$ y por tanto existe el límite de la definición de derivada direccional y coincide con el límite inferior. Por lo tanto:

$$\liminf_{t \to 0} \frac{g(\bar{x} + td) - g(\bar{x})}{t} \geq \max_{i=1,...,N} \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle$$

Por otro lado, afirmamos que :

$$\limsup_{t \to 0} \frac{g(\bar{x} + td) - g(\bar{x})}{t} \leq \max_{i=1,...,N} \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle$$

De lo contrario, existirían una sucesión $\{t_n\} \to 0$ y $\varepsilon > 0$ que cumplirían:

$$\frac{g(\bar{x} + t_n d) - g(\bar{x})}{t_n} \geq \max_{i=1,...,N} \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle + \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomamos ahora una sucesión parcial $\{t_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente y $j \in K$ un índice fijo tal que para todo $k \in \{\sigma(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ se cumple que $g(\bar{x} + t_k d) = g_j(\bar{x} + t_k d)$. Tomando límite obtenemos que :

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to 0} \frac{g(\bar{x}+td) - g(\bar{x})}{t} &= \limsup_{t\to 0} \frac{g_j(\bar{x}+td) - g_j(\bar{x})}{t} \\ &= \langle \nabla g_j(\bar{x}), d\rangle \geq \max_{i=1,\ldots,N} \langle \nabla g_i(\bar{x}), d\rangle + \varepsilon\end{aligned}$$

lo cual es imposible. Finalmente, hemos obtenido que:

$$\limsup_{t\to 0} \frac{g(\bar{x}+td) - g(\bar{x})}{t} \leq \max_{i=1,\ldots,N} \langle \nabla g_i(\bar{x}), d\rangle \leq \liminf_{t\to 0} \frac{g(\bar{x}+td) - g(\bar{x})}{t}$$

Como el límite inferior es siempre menor o igual que el superior concluimos que ambos coinciden y por lo tanto existe el límite y además:

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(\bar{x}+td) - g(\bar{x})}{t} = g'(\bar{x}; d) = \max_{i=1,\ldots,N} \langle \nabla g_i(\bar{x}), d\rangle$$

■

Nuestro objetivo ahora es encontrar soluciones a problemas del siguiente tipo:

$$\begin{cases} \text{minimizar } f(x) \\ \text{sujeto a } g_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, ..., N \\ \text{con } x \in C \end{cases} \tag{3.2}$$

donde C es un subconjunto del espacio vectorial, f es la función objetivo y las restricciones g_i con $i \in I$ son continuas en C. Si un punto satisface todas las restricciones diremos que es *factible* y como consecuencia llamamos *región de factibilidad* al conjunto de todos los puntos factibles. Para un punto factible $\bar{x}$ definimos el *conjunto activo* como $I(\bar{x}) = \{i : g_i(\bar{x}) = 0\}$. Para este problema y asumiendo que $\bar{x} \in C$ llamamos *vector de multiplicadores de Lagrange para* $\bar{x}$ a $\lambda \in (\mathbb{R}^N)^+$ si $\bar{x}$ es un punto crítico de:

$$L(x; \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i g_i(x)$$

Teorema 3.1 (Condiciones de Fritz John). *Supongamos que el problema 3.2 tiene un mínimo local en $\bar{x} \in C$. Si las funciones f, g_i con $i \in I(\bar{x})$ son diferenciables en $\bar{x}$ entonces existen $\lambda_1, \lambda_i \in \mathbb{R}^+$ para*

$i \in I(\bar{x})$, no todas cero, que satisfacen:

$$\lambda_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

Demostración. Consideramos la función

$$g(x) = \text{máx}\{f(x) - f(\bar{x}), g_i(x) : i \in I(\bar{x})\}$$

Como $\bar{x}$ es un mínimo local del problema 3.2 también lo es de g. Esto se debe a que como $f(x) \geq f(\bar{x}) \Longrightarrow f(x) - f(\bar{x}) \geq 0$ para todo x en un entorno de $\bar{x}$. Por otro lado, $g_i(x) \leq 0$ si $x \in C$ y si $i \in I(\bar{x})$ entonces $g_i(\bar{x}) = 0$. De este modo $g(x) \geq 0$ para todo x en un entorno de $\bar{x}$ y $g(\bar{x}) = 0$ por lo que efectivamente alcanza un mínimo local en $\bar{x}$. Por la proposición 3.1 tenemos que para toda dirección d del espacio vectorial se cumple:

$$g'(\bar{x}; d) = \text{máx}\{\langle \nabla f(\bar{x}), d\rangle, \langle \nabla g_i(\bar{x}), d\rangle : i \in I(\bar{x})\} \geq 0 \quad ???Prop2{,}1{,}1$$

Por lo tanto, el sistema

$$\begin{cases} \langle \nabla f(\bar{x}), d\rangle < 0 \\ \langle \nabla g_i(\bar{x}), d\rangle < 0 \text{ con } i \in I(\bar{x}) \end{cases}$$

no tiene solución (para ninguna dirección) ya que al menos uno es no negativo. Si aplicamos el Teorema de la Alternativa de Gordan en su versión clásica (referenciar ??) vemos que solo se puede dar la alternativa i*) y en ese caso obtenemos que:

$$\exists \boldsymbol{t} = (t_0, ..., t_M) \in \Delta_M \text{ tal que } 0 = t_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} t_i \nabla g_i(\bar{x})$$

con M el cardinal del conjunto $I(\bar{x})$. La demostración concluye llamando $\lambda_0 = t_0$ y $\lambda_i = t_i$ con $i \in I(\bar{x})$ ∎

Las condiciones de Fritz John nos pueden aportan una gran desventaja y es que es posible que $\lambda_1 = 0$ por lo que la función objetivo es independiente a las restricciones. Por ello, necesitamos imponer algunas condiciones extra. En esta situación diremos que se cumple el *requisito de Mangasarian-Fromovitz* si existe una dirección d del espacio vectorial que satisface que $\langle \nabla g_i(\bar{x}), d\rangle < 0$ para todo índice $i \in I(\bar{x})$. Enunciamos ahora otro teorema que soluciona el problema que acabamos de comentar.

Teorema 3.2 (Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker)**.** *Supongamos que el problema 3.2 tiene un mínimo local en $\bar{x} \in C$. Si las funciones f, g_i con $i \in I(\bar{x})$ son diferenciables en $\bar{x}$ y se cumple el requisito de Mangasarian-Fromovitz entonces existe un vector de multiplicadores de Lagrange para*

$\bar{x}$.

Demostración. Definimos nuevamente la función $g(x)$ de la demostración del teorema 3,1 y seguimos teniendo que para toda dirección d se cumple:

$$g'(\bar{x}; d) = \text{máx}\{\langle \nabla f(\bar{x}), d\rangle, \langle \nabla g_i(\bar{x}), d\rangle : i \in I(\bar{x})\} \geq 0$$

Si notamos como d_0 a la dirección que nos aporta el requisito de Mangasarian-Fromovitz tenemos que $\langle \nabla g_i(\bar{x}), d_0\rangle < 0$ para todo índice $i \in I(\bar{x})$. En ese caso tenemos que:

$$g'(\bar{x}; d_0) = \text{máx}\{\langle \nabla f(\bar{x}), d_0\rangle, \langle \nabla g_i(\bar{x}), d_0\rangle : i \in I(\bar{x})\} = \langle \nabla f(\bar{x}), d_0\rangle \geq 0$$

Ahora tenemos el sistema

$$\begin{cases} \langle \nabla f(\bar{x}), d\rangle \geq 0 \\ \langle \nabla g_i(\bar{x}), d\rangle < 0 \text{ con } i \in I(\bar{x}) \end{cases}$$

Del mismo modo, aplicando el Teorema de la Alternativa de Gordan en su versión clásica no se puede dar la alternativa ii*) y volvemos a tener por la alternativa i*) que

$$\exists \boldsymbol{t} = (t_0, ..., t_M) \in \Delta_M \text{ tal que } 0 = t_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} t_i \nabla g_i(\bar{x})$$

con M el cardinal de $I(\bar{x})$. Si multiplicamos escalarmente la igualdad por d_0 obtenemos:

$$0 = t_0 \langle \nabla f(\bar{x}), d_0\rangle + \sum_{i \in I(\bar{x})} t_i \langle \nabla g_i(\bar{x}), d_0\rangle$$

Notamos que $\sum_{i \in I(\bar{x})} t_i \langle g_i(\bar{x}), d_0\rangle \neq 0$. Si lo fuese se daría que $\sum_{i \in I(\bar{x})} t_i = 0$ al ser $\langle g_i(\bar{x}), d_0\rangle < 0 \quad \forall i \in I(\bar{x})$. Pero en ese caso $0 = \nabla f(\bar{x})$ al ser $t_0 = t_0 + \sum_{i \in I(\bar{x})} t_i = 1$. Como

Así, $\sum_{i \in I(\bar{x})} t_i \langle g_i(\bar{x}), d_0\rangle < 0$ y nos lleva a que $0 < t_0 \langle \nabla f(\bar{x}), d_0\rangle \implies t_0 > 0$. Para concluir la demostración basta tomar $\lambda_i = t_i / t_0 \forall i \in I(\bar{x})$.

■

Bibliografía

[BL10] Jonathan Borwein y Adrian S Lewis. *Convex analysis and nonlinear optimization: theory and examples.* Springer Science & Business Media, 2010.

[ST08] Stephen Simons y F Takens. *From Hahn-Banach to Monotonicity*, volumen 1693. Springer, 2008.