Teoremas de la alternativa, optimización convexa, valoración de activos financiero y procesamiento de nubes de puntos generadas por escáner láser.

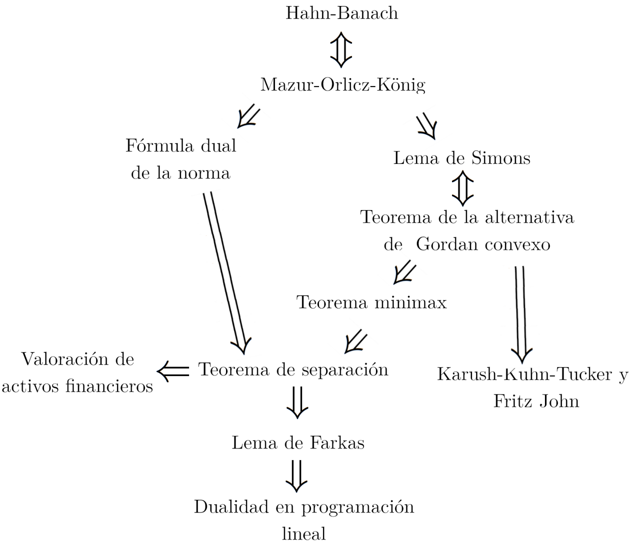
Pedro Manuel Flores Crespo

8-9 julio de 2020

Índice

Contenido

Desarrollo


Hahn-Banach
Mazur-Orlicz-König
Fórmula dual de la norma
Lema de Simons
Teorema de la alternativa de Gordan convexo
Teorema minimax
Valoración de activos financieros
Teorema de separación
Karush-Kuhn-Tucker y Fritz John
Lema de Farkas
Dualidad en programación lineal

Teorema (Hahn-Banach)

Sea V un espacio vectorial y $P : V \to \mathbb{R}$ un funcional sublineal. Entonces existe un funcional lineal $L : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $L \leq P$.

Teorema (Mazur-Orlicz-König)

Sea V un espacio vectorial y $P : V \to \mathbb{R}$ un funcional sublineal. Sea D un subconjunto no vacío y convexo de V. Entonces existe un funcional $L : V \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que $L \leq P$ e $\inf_D L = \inf_D P$.

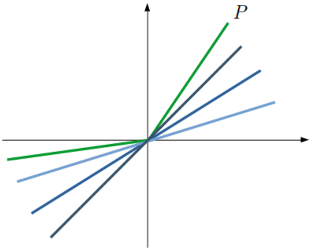


Figura: Teorema de Hahn-Banach.

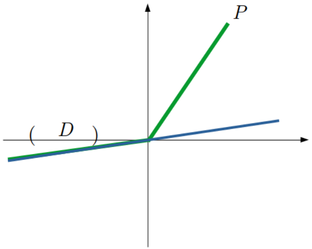


Figura: Teorema de Mazur-Orlicz-König.

Teorema (Teorema de la alternativa de Gordan)

Dados $N, M \in \mathbb{N}$, sean $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_N\}$ con $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^M$ para $i = 1, \ldots, N$. Entonces una, y solo una, de la siguientes afirmaciones se cumple:

i*) $\exists \mathbf{t} \in \Delta_N$ *tal que* $0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} t_i \boldsymbol{x}_i$.

ii*) $\exists \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^M$ *tal que cumple* $\max\limits_{i=1,\ldots,N} \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i \rangle < 0$.

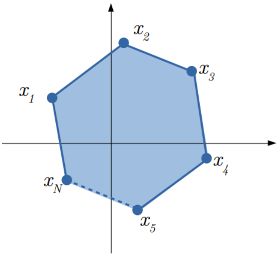


Figura: Alternativa i*).

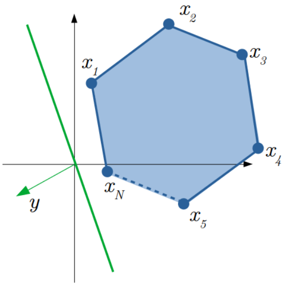


Figura: Alternativa ii*).

Nuestro objetivo ahora es encontrar soluciones a problemas del siguiente tipo:

$$\begin{cases} \inf\limits_{x \in D} f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.a } g_1(\boldsymbol{x}) \leq 0 \\ \qquad \vdots \\ \quad g_N(\boldsymbol{x}) \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Teorema (Teorema de Fritz John)

Supongamos que el problema (1) tiene un mínimo local en $\bar{\mathbf{x}} \in D$. Si las funciones f, g_i con $i \in I(\bar{\mathbf{x}})$ son diferenciables en $\bar{\mathbf{x}}$ entonces existen $\lambda_0, \lambda_i \in \mathbb{R}^+$ para $i \in I(\bar{\mathbf{x}})$, no todas cero, que satisfacen:

$$\lambda_0 \nabla f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I(\bar{\mathbf{x}})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0.$$

- Fritz-John + Condicón de Mangasarian-Fromovitz = Karush-Kuhn-Tucker.

A rasgos generales y a modo introductorio, podemos decir que un teroema minimax es un resultado que afirma, bajo ciertas hipótesis, que:

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y) \leq \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y),$$

Teorema

Sean X, Y subconjuntos convexos de sendos espacios vectoriales (no tienen que ser el mismo) tal que X está dotado de una topología que lo hace compacto. Supongamos además que $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ es:

i) *cóncava y superiormente semicontinua en X y*

ii) *convexa en Y.*

Entonces:

$$\inf_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) = \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y).$$

Teorema

Sean $N \in \mathbb{N}$ y A, B subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^N$ tal que A es cerrado, B es compacto y $A \cap B = \emptyset$. Entonces existe $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\sup_{\boldsymbol{a} \in A} \langle \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a} \rangle < \inf_{\boldsymbol{b} \in B} \langle \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{b} \rangle .$$

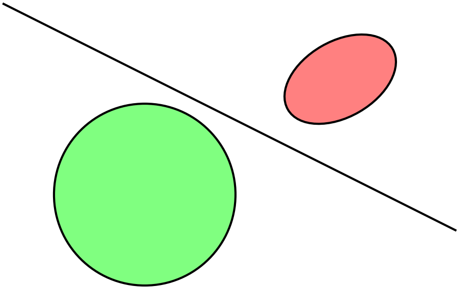


Figura: Situación de teoremas de separación

Preliminares financieros

- Definición de activo y opción de compra (europea). Opciones *call* y *put*.

$$C_T = \text{máx}\{S_T - K, 0\} = [S_T - K]^+$$

- Principio de arbitraje.

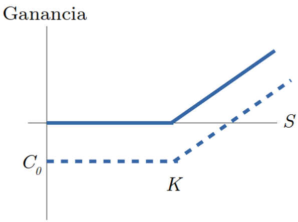


Figura: Ganancia propietario opción *call*.

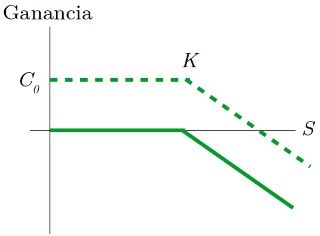


Figura: Ganancia vendedor opción *call*

Martingalas

Un proceso $\mathbb{F}$-adaptado $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ es una $(\mathbb{F}, P)$-martingala si $E(|M_t|) < \infty$ para todo $t \in \mathbb{T}$ y

$$E(M_{t+1}|\mathcal{F}_t) = M_t \textit{ para todo } t \in \mathbb{T} \setminus \{T\}.$$

Teorema

(Primer reorema fundamental de asignación de precios) Un modelo de mercado discreto es viable si, y solo si, existe una medida de martingala equivalente para S.

Precio de una opción de compra *call*. Modelo binomial

El precio el instante $t \in \mathbb{T}$ viene dado por

$$S_t = \begin{cases} S_{t-1}(1+u) & \text{con probabilidad } p \\ S_{t-1}(1+d) & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases} \quad \text{donde } \; -1 < d < u.$$

La medida martingala equivalente Q es:

$$\begin{cases} Q(\frac{S_t}{S_{t-1}} = 1+u) = q \\ Q(\frac{S_t}{S_{t-1}} = 1+d) = 1-q \end{cases}$$

con $q = \frac{r-d}{u-d}$ con $d < r < u$. El valor de una opción viene dado por

$$V_0(C_T) = (1+r)^{-T} \sum_{v=A}^{T} \binom{T}{v} q^v (1-q)^{T-v} \left[S_0(1+u)^v (1+d)^{T-v} - K \right],$$

donde A denota el primer entero k que cumple $S_0(1+u)^k(1+d)^{T-k} > K$

Estudio del valor en función de algunos de sus parámetros

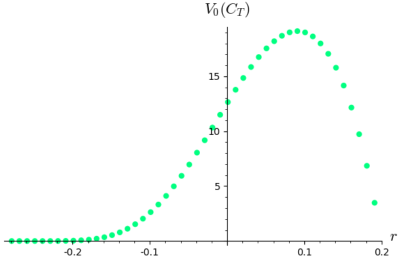


Figura: Variación en función del valor de r ($d = -0{,}28,\ u = 0{,}2$).

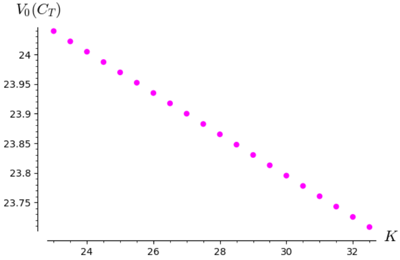


Figura: Variación en función del valor de K.

Contenido

- Interés del digitalizado 3D.
- Cauce habitual de trabajo:
  - Alinear: expresar todas las tomas respecto al mismo sistema de referencia.
  - Fusionar: eliminar puntos "repetidos".
  - Triangular: construir malla de triángulos.

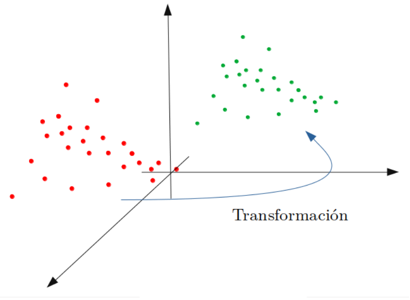


Figura: Nubes de puntos sin alinear.

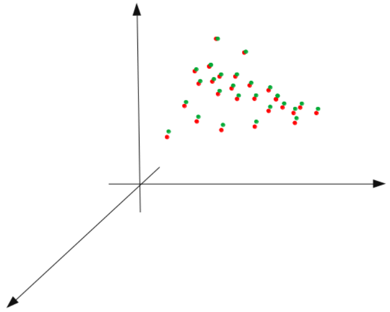


Figura: Nubes de puntos alineadas.

- Uso de cuaternios para expresar las rotaciones.
- Para minimizar la distancia (euclidea) entre el conjunto de puntos P a alinear con el modelo X, calculamos los vectores propios de

$$M = \begin{pmatrix} tr(\Sigma_{px}) & \Delta^t \\ \Delta & \Sigma_{px} + \Sigma_{px}^t + tr(\Sigma_{px}) I_3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

donde

$$\Sigma_{px} = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} [(p_i - \bar{\boldsymbol{p}})(x_i - \bar{\boldsymbol{x}})^t],$$

$$A_{ij} = (\Sigma_{px} - \Sigma_{px}^t)_{ij} \quad i, j \in \{0, 1, 2\},$$

y

$$\Delta = \begin{pmatrix} A_{12} & A_{20} & A_{01} \end{pmatrix}.$$

El cuaternio que representa la rotación viene dado por el vector propio asociado al mayor valor propio de M y la traslación por el vector $\boldsymbol{b} = R\bar{\boldsymbol{p}} + \bar{\boldsymbol{x}}$.
El algoritmo ICP intenta minimizar la distancia entre los puntos más cercanos.

Problemas del método ICP

- Convergencia local $\Longrightarrow$ Prealinear.

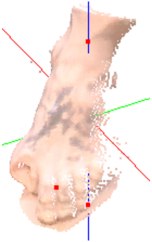


Figura: Conjunto (1) con 7 042 puntos.

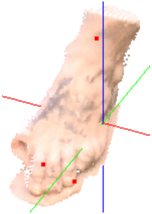


Figura: Conjunto (2) con 8 334 puntos.

$\Longrightarrow$

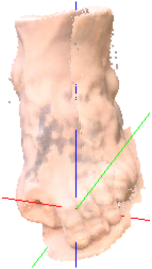


Figura: Tomas prealineadas.

Problemas del método ICP

It.	D. antes (mm)	D. después (mm)	Seg.
1	21.2000	18.1299	62.8672
2	16.7174	15.8707	62.7888
3	15.1625	14.4617	62.8636
4	13.9753	13.7418	63.059
5	13.6518	13.6071	62.8259

Cuadro: Resultados ajuste mediante ICP.

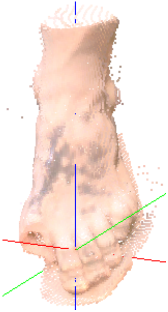


Figura: Tomas alineadas.

- Orden cuadrático en tiempo $\Longrightarrow$ Reducir el conjunto de puntos a los que aplicar el método.

- Para reducir el conjunto de puntos, detectamos puntos clave midiendo las variaciones de la normal (previo proceso de simplificado de la malla).

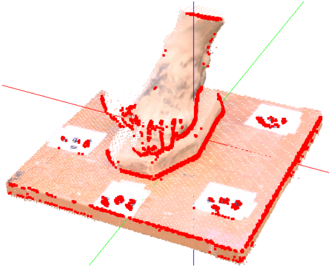


Figura: Puntos clave en la malla simplificada (1 885).

- Podemos tomar puntos clave en una toma o en las dos (con algunas consideraciones).
- En la segunda opción, se han reducido dos conjuntos de puntos de unos 80 000 puntos a 1 1142 y 2 273 obteniendo resultados satisfactorios empleando 0.7 segundos por iteración.

EL algoritmo RANSAC (*RAndom Sample Consensus*) es del tipo hipótesis-y-prueba y sirve para ajustar parámetros de un modelo matemático

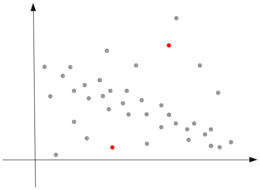


Figura: Escogemos los puntos.

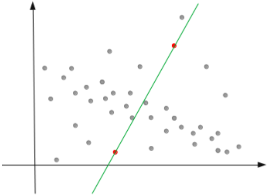


Figura: Trazamos el modelo.

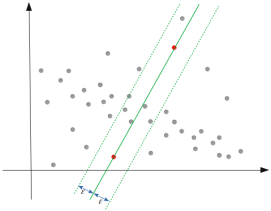
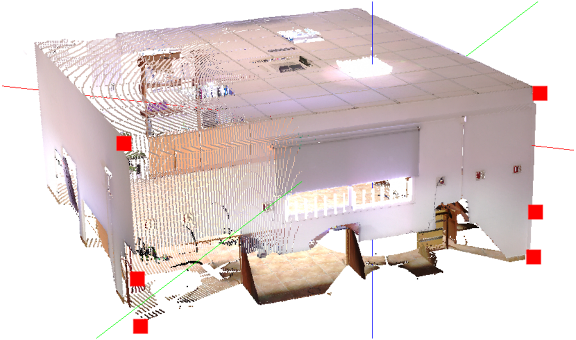


Figura: Vemos cómo de bueno es.

El número de iteraciones necesarias depende de los puntos necesarios para definir el modelo, la probabilidad para asegurar que encontramos uno adecuado y de la probabilidad de no estar en el modelo.

Aplicación en alineado

Usamos el algoritmo RANSAC para obtener los puntos de intersección entre planos y alineamos el modelo en base a esos puntos.



Problema $\Longleftrightarrow$ se necesitan muchos planos para obtener resultados satisfactorios y que se puedan diferenciar fácilmente unos puntos de otros.

Desarrollo del banco de pruebas

La aplicación para ver los resultados se ha hecho mediante *Qt*, *OpenGL* y *C++*.

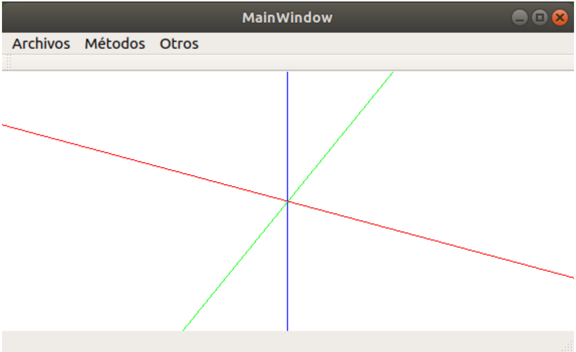


Figura: Aplicación desarrollada.

Algunas referencias

- J.M. Borwein, A.S. Lewis, *Convex analysis and nonlinear optimization: theory and examples*, Second Edition, CMS Books in Mathematics/Ourrages Mathématiques de la SMC 3, Springer, New York, 2006.
- R.J. Elliot, R.E. Kopp, *Mathematics of financial markets*, Second Edition, Springer Finance, New York, 2005.
- G. Giorgi, A. Guerraggio, J. Thierfelder, *Mathematics of optimization: smooth and nonsmooth case*, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2004.
- Paul J.Besl y Neil D.McKay, *A method for registration of 3d-shapes*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Inteligence, 1992.
- Martin A Fischler y Robert C Bolles, *Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography*, Communications of the ACM, 24(6):381–395, 1981.
- Yan-Bin Jia, *Quaternions and rotations*, Com S 477/577, 2013. Notes.