Ejercicio 1

(20 pts.) Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo y V, W, U espacios vectoriales sobre $\mathbb{k}$. Sean $T : V \to W$ y $S : W \to U$ transformaciones lineales. Demostrar que la composición de $S \circ T$ es una transformación lineal.

Para probar que $S \circ T$ es transformación lineal, hay que probar que cumple las dos propiedades de transformación lineal:

- $(S \circ T)(v + v') = (S \circ T)(v) + (S \circ T)(v')$

$$(S \circ T)(v + v') = S(T(v + v'))$$
$$= S(T(v) + T(v')) = S(T(v)) + S(T(v')) = (S \circ T)(v) + (S \circ T)(v')$$

- $(S \circ T)(\lambda v) = \lambda (S \circ T)(v)$

$$(S \circ T)(\lambda v) = S(T(\lambda v))$$
$$= S(\lambda T(v)) = \lambda S(T(v)) = \lambda (S \circ T)(v)$$

Con esto queda probado que $S \circ T$ **es transformación lineal**.

Ejercicio 2

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_3[x]$ definida por

$$T(a, b, c) = (a + b)x^2 + (2a + 4c)x + a - b + 4c$$

- (a) *(15 pts.)* Dar la dimensión del núcleo de T. Justifique apropiadamente.
- (b) *(10 pts.)* Calcular la matriz de la transformación T con respecto a la base canónica ordenada $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y la base ordenada $\mathcal{B} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$.
- (c) *(15 pts.)* Calcular los autovalores reales y complejos de la matriz $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$.

Punto a

El núcleo está formado por definición, por los vectores (a, b, c) tal que $T(a, b, c) = 0$, entonces podemos formar la siguiente ecuación

$$(a+b)x^2 + (2a+4c)x + a - b + 4c = 0x^2 + 0x + 0$$

Que deriva al siguiente sistema de ecuaciones, ya que la igualdad de polinomios es una igualdad coeficiente a coeficiente:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + 4c = 0 \\ 0 - b + 4c = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación $a = -b$, luego reemplazo en la segunda $-2b + 4c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}b$, por lo tanto el núcleo queda definido como:

$$Nu(T) = \left\{(-b, b, \frac{1}{2}b) : b \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle(-1, 1, \frac{1}{2})\right\rangle$$

Probemos un ejemplo, tomando $v = 2 \cdot (-1, 1, \frac{1}{2}) = (-2, 2, 1)$:

$$T((-2, 2, 1)) = (-2 + 2)x^2 + (-4 + 4)x - 2 - 2 + 4 = 0$$

Punto b

Para hallar $[T]_{\mathcal{CB}}$ primero aplico T a los vectores que conforman la base $\mathcal{C}$ y luego busco las coordenadas de dichos resultados en $\mathcal{B}$:

- $T(1,0,0) = x^2 + 2x + 1$
- $T(0,1,0) = x^2 - 1$
- $T(0,0,1) = 4x + 4$

Para hallar los vectores coordenada con respecto a la base $\mathcal{B}$ se forman los siguientes problemas:

1. $[T(1,0,0)]_{\mathcal{B}} = [x^2+2x+1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ donde a, b y c se obtienen de:

$$\begin{aligned} x^2+2x+1 &= a\cdot(1) + b\cdot(1+x) + c\cdot(1+x+x^2) \\ &= a+b+bx+c+cx+cx^2 \\ &= cx^2+(b+c)x+(a+b+c) \end{aligned}$$

Se arma el sistema

$$\begin{cases} c = 1 \\ b+c = 2 \\ a+b+c = 1 \end{cases}$$

Reemplazando c en la segunda ecuación se obtiene $b = 1$ y luego con ambos valores en la tercera ecuación, $a = -1$, esto quiere decir que:

$$x^2 + 2x + 1 = (-1) \cdot (1) + 1 \cdot (1 + x) + 1 \cdot (1 + x + x^2) = -1 + 1 + x + 1 + x + x^2 = x^2 + 2x + 1$$

2. $[T(0,1,0)]_{\mathcal{B}} = [x^2 - 1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ donde a, b y c se obtienen de:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= a \cdot (1) + b \cdot (1 + x) + c \cdot (1 + x + x^2) \\ &= a + b + bx + c + cx + cx^2 \\ &= cx^2 + (b + c)x + (a + b + c) \end{aligned}$$

Se arma el sistema

$$\begin{cases} c = 1 \\ b + c = 0 \\ a + b + c = -1 \end{cases}$$

Reemplazando c en la segunda ecuación se obtiene $b = -1$ y luego con ambos valores en la tercera ecuación, $a = -1$, esto quiere decir que:

$$x^2 - 1 = (-1) \cdot (1) + (-1) \cdot (1 + x) + 1 \cdot (1 + x + x^2) = -1 - 1 - x + 1 + x + x^2 = x^2 - 1$$

3. $[T(0,0,1)]_{\mathcal{B}} = [4x+4]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ donde a, b y c se obtienen de:

$$\begin{aligned} 4x+4 &= a\cdot(1) + b\cdot(1+x) + c\cdot(1+x+x^2) \\ &= a+b+bx+c+cx+cx^2 \\ &= cx^2 + (b+c)x + (a+b+c) \end{aligned}$$

Se arma el sistema

$$\begin{cases} c = 0 \\ b + c = 4 \\ a + b + c = 4 \end{cases}$$

Reemplazando c en la segunda ecuación se obtiene $b = 4$ y luego con ambos valores en la tercera ecuación, $a = 0$, esto quiere decir que:

$$4x + 4 = 0 \cdot (1) + 4 \cdot (1 + x) + 0 \cdot (1 + x + x^2) = 4x + 4$$

Los 3 vectores coordenadas obtenidos son, $[T(1,0,0)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$[T(0,1,0)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $[T(0,0,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, al colocarlos como columnas se obtiene $[T]_{\mathcal{CB}}$:

$$[T]_{\mathcal{CB}} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Punto c

Para hallar los autovalores planteo el polinomio característico:

$$\chi(x) = det(A - xId) = \begin{vmatrix} -1-x & -1 & 0 \\ 1 & -1-x & 4 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

Simplifico un poco la matriz:

$$\begin{bmatrix} -1-x & -1 & 0 \\ 1 & -1-x & 4 \\ 1 & 1 & -x \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1-(x+1)C_2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ (x-1)^2+1 & -1-x & 4 \\ -x & 1 & -x \end{bmatrix}$$

Ahora calculo el polinomio expandiendo por la fila 1:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ (x-1)^2+1 & -1-x & 4 \\ -x & 1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (x-1)^2+1 & 4 \\ -x & -x \end{vmatrix} = ((x-1)^2+1)(-x) - 4(-x) = -x^3 - 2x^2 + 2x = x(-x^2 - 2x + 2)$$

Un autovalor es $x = 0$ y para los demás, factorizo el polinomio $-x^2 - 2x + 2$ usando bhaskara:

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 2}}{-2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{-2} = -1 \pm \frac{\sqrt{12}}{-2} = -1 \pm \frac{\sqrt{2^2 \cdot 3}}{2} = -1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Los autovalores son $x = 0$, $x = -1 + \sqrt{3}$ y $x = -1 - \sqrt{3}$.

Ejercicio 3

(30 pts.) Definir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ que verifique que

$$Nu(T) = \{(x, y, z) : z = x = 3y\}$$

$$Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b = a - c,\ b - d = c \right\}$$

Escribir explícitamente $T(x, y, z)$ para cualquier $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Justifique cada paso.

- El núcleo está definido como

$$Nu(T) = \{(x, y, z) : z = x = 3y\}$$

Que es lo mismo que

$$= \{(3y, y, 3y) : y \in \mathbb{R}\} = \langle(3, 1, 3)\rangle$$

- La imagen está definida como

$$Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b = a - c,\ b - d = c \right\}$$

Que es lo mismo que

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & a - c \\ c & a - 2c \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \, | a, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Por teorema, si se tiene un vector v_0 que pertenece al núcleo y expandimos el conjunto a $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ de forma tal que formen una base de $\mathbb{R}^3$, entonces $T(v_1), T(v_2), T(v_3)$ generaran a la imagen de T.
Por lo tanto completo la base

$$\{(3,1,3),(1,0,0),(0,1,0)\}$$

Y planteo las transformaciones:

- $T(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $T(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
- $T(3,1,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ahora obtengo el vector coordenada de (x, y, z) con respecto a la base anterior:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= a \cdot (1, 0, 0) + b \cdot (0, 1, 0) + c \cdot (3, 1, 3) \\ &= (a, 0, 0) + (0, b, 0) + (3c, c, 3c) \\ &= (a + 3c, b + c, 3c)\end{aligned}$$

Acá se forma el sistema

$$\begin{cases} a + 3c = x \\ b + c = y \\ 3c = z \end{cases}$$

De la tercera ecuación, $c = \frac{1}{3}z$, reemplazando en la primera y segunda ecuación: $a + 3\frac{1}{3}z = x$ y $b + \frac{1}{3}z = y$, implica que $a = x - z$ y $b = y - \frac{1}{3}z$.

Esto quiere decir que

$$(x,y,z) = (x-z)\cdot(1,0,0) + (y-\frac{1}{3}z)\cdot(0,1,0) + \frac{1}{3}z\cdot(3,1,3)$$

Aplico transformación lineal de cada lado de la ecuación

$$\begin{aligned}
T(x,y,z) &= T((x-z)\cdot(1,0,0) + (y-\frac{1}{3}z)\cdot(0,1,0) + \frac{1}{3}z\cdot(3,1,3)) \\
&= (x-z)\cdot T(1,0,0) + (y-\frac{1}{3}z)\cdot T(0,1,0) + \frac{1}{3}z\cdot T(3,1,3) \\
&= (x-z)\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} + (y-\frac{1}{3}z)\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix} + \frac{1}{3}z\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}x-z & x-z\\ 0 & x-z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3}z-y\\ y-\frac{1}{3}z & \frac{2}{3}z-2y\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}x-z & x-z+\frac{1}{3}z-y\\ y-\frac{1}{3}z & x-z+\frac{2}{3}z-2y\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Para corroborar el resultado, podemos verificar que el vector $(3, 1, 3)$ pertenezca al núcleo:

$$T(3,1,3) = \begin{pmatrix} 3-3 & 3-3+\frac{1}{3}3-1 \\ 1-\frac{1}{3}3 & 3-3+\frac{2}{3}3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la transformación queda definida como:

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-z & x-z+\frac{1}{3}z-y \\ y-\frac{1}{3}z & x-z+\frac{2}{3}z-2y \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4

(10 pts.) Sea $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ una transformación lineal **no** nula. Demostrar que existe una matriz triangular superior $A \in M_2(\mathbb{R})$ **no nula** tal que $T(A) = 0$.

Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

Ahora aplico transformación lineal de cada lado de la ecuación

$$T(A) = T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = T\left(a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = aT\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + bT\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + cT\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Como buscamos $T(A) = 0$, tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} aT\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + bT\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + cT\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \\ \\ a \neq 0 \ \lor \ b \neq 0 \ \lor \ c \neq 0 \end{cases}$$

El primer requisito es que la transformación lineal T sea **no nula**, es decir, que exista al menos una matriz $B \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $T(B) \neq 0$. Esto implica que al menos uno de los términos sea distinto de cero.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $T\left(a\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right) \neq 0$. Entonces, podemos elegir a=1, b=0 y c=0, y obtenemos la matriz:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

que es triangular superior, **no nula** y cumple que $T(A) = 0$, como queríamos demostrar.