Ejercicio 1

Sea K un cuerpo y V, W k-espacios vectoriales.

- (a) *(5 pts.)* Dar la definición de transformación lineal de V a W.
- (b) *(5 pts.)* Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, demostrar que $T(0) = 0$.
- (c) *(5 pts.)* Sea k un cuerpo y consideramos al k-espacio vectorial $M_n(K)$. La función traza: $Tr : M_n(k) \to k$ está dada por

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Demostrar que Tr es una transformación lineal.

Punto a

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo K. Una transformación lineal de V en W es una función $T : V \to W$ tal que

- $T(v + v') = T(v) + T(v')$, para $v, v' \in V$,
- $T(\lambda v) = \lambda T(v)$, para $v \in V$, $\lambda \in K$.

Punto b

Tomando $v' = 0$, por la propiedad del punto a, sabemos que:

$$T(v + v') = T(v + 0) = T(v) + T(0)$$

como V, W son k-espacios vectoriales por hipótesis, $v + o = v$, entonces:

$$T(v) = T(v) + T(0)$$

Punto c

Para probar que la función traza es una transformación lineal hay que probar las siguientes afirmaciones:
- $tr(A+B) = trA + trB$,
- $tr(\lambda A) = \lambda trA$.

Primera prueba

$$tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = trA + trB$$

Segunda prueba

$$tr(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda trA$$

Queda demostrado que **es una transformación lineal**.

Ejercicio 2

Sean $a, b \in R^3$. Sea P el plano cuya ecuación paramétrica es

$$P = \{t(1, a, b) + s(a, b, -1) + (1, 0, 1) : t, s \in R\}.$$

- (a) *(10 pts.)* Sea L la recta dada de forma paramétrica $L = t(1, 1, 0) + (0, 2, 0) : t \in R$. Encontrar todos los $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tales que el plano P es perpendicular a la recta L.
- (b) *(5 pts.)* Encontrar todos los $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(1, 1, 1)$ no pertenezca a P.

Punto a

Para analizar la perpendicularidad puedo analizar en que casos el vector director de la recta L es perpendicular a los vectores que generan a P, es decir, debe cumplirse que:

$$\begin{cases} \langle (1, a, b), (1, 1, 0) \rangle = 0 \\ \langle (a, b, -1), (1, 1, 0) \rangle = 0 \end{cases}$$

Esto es lo mismo que

$$\begin{cases} 1 + a = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación sale que $a = -1$, luego reemplazando en la segunda, $b = 1$, entonces el conjunto solución es:

$$Sol = \{x \cdot (-1, 1) : x \in \mathbb{R}\}$$

Punto b

Para encontrar los valores de a y b tal que no pertenezca dicho punto al plano P, veamos en que casos sí pertenece. Los vectores de P son de la forma:

$P = \{t(1, a, b) + s(a, b, -1) + (1, 0, 1) : t, s \in R\} = \{(t + as + 1, at + bs, bt - s + 1) : t, s \in R\}$

entonces para que el punto $(1, 1, 1)$ pertenezca a P se debe cumplir lo siguiente

$$\begin{cases} t + as + 1 = 1 \\ at + bs = 1 \\ bt - s + 1 = 1 \end{cases}$$

Que es lo mismo que

$$\begin{cases} t + as = 0 \\ at + bs - 1 = 0 \\ bt - s = 0 \end{cases}$$

Resuelvo el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & b & -1 \\ b & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2+b & -1 \\ 0 & -ab-1 & 0 \end{pmatrix}$$

De acá salen dos casos:

- 1. $a^2 - b \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2+b & -1 \\ 0 & -ab-1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2+b & -1 \\ 0 & 0 & \frac{ab+1}{a^2-b} \end{pmatrix}$$

Salen dos casos nuevos:

- $ab + 1 \neq 0, a^2 - b \neq 0$ **El sistema no tiene solución**

- $a \neq 0, ab + 1 = 0, a^3 + 1 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 + b & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

las soluciones son de la forma $t = \frac{-a}{a^2-b}$ y $s = \frac{1}{a^2-b}$

- **2.** $a^2 - b = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{ab+1}{a^2-b} \end{pmatrix}$$

El sistema no tiene solución

Esto nos dice que el punto $(1,1,1)$ pertenece a P cuando $a \neq 0, ab+1=0$, $a^3+1 \neq 0$, entonces siempre que $a \ = 0, ab+1 \neq 0, a^3+1=0$, el punto no pertenecerá a P. El conjunto solución es

$$Sol = \{(a,b) \in R^2 : a \ = 0, ab+1 \neq 0, a^3+1=0\}$$

Ejercicio 3

(10 pts.) Encontrar una matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ tal que

$$A^2 = -I$$

Si $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Demostrar que no existe ninguna matriz $B \in M_2(\mathbb{R})$ tal que

$$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 + c \end{bmatrix}$$

Supongamos que la matriz es de la forma, tal que ocurre

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & d \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Desarrollo el cuadrado

$$\begin{bmatrix} a^2 + b & ab + bd \\ a + d & b + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces se forma el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a^2 + b = -1 \\ ab + bd = 0 \\ a + d = 0 \\ b + d^2 = -1 \end{cases}$$

De la primera ecuación sale que $b = -1 - a^2$, luego de la tercera $d = -a$, entonces reemplazo en mi matriz original:

$$\begin{bmatrix} a & -1 - a^2 \\ 1 & -a \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Esto es válido para cualquier $a \in \mathbb{R}$, veamos un ejemplo, tomando $a = 2$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1-2^2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

El resultado es correcto, **cumple la propiedad**

Para demostrar que no existe ninguna matriz $B \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1+c \end{bmatrix}$, podemos considerar la forma general de una matriz 2×2 y sus propiedades:

Una matriz $B \in M_2(R)$ tiene la forma general:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in R$. Entonces, B^2 se calcula como:

$$B^2 = BB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

Para que $B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 + c \end{bmatrix}$, necesitamos que $a^2 + bc = -1$, $ab + bd = 0$, $ac + dc = 0$ y $bc + d^2 = -1 + c$.

Sin embargo, notamos que $a^2 + bc = -1$ implica que $a^2 = -1 - bc$. Como $a, b, c \in R$, el lado derecho de la ecuación es un número real. Pero el lado izquierdo de la ecuación, a^2, es siempre no negativo (porque el cuadrado de cualquier número real es no negativo). Por lo tanto, si bc es un número positivo no tiene solución, pero si bc es un número negativo, entonces $-1 - bc$ podría ser no negativo, lo que permitiría soluciones reales para a. Analicemos la posibilidad:

Si consideramos la ecuación $ab + bd = 0$, esto implica que $b(a + d) = 0$. Por lo tanto, o bien $b = 0$ o bien $a + d = 0$. Si $b = 0$, entonces $bc = 0$, lo que contradice nuestra suposición de que bc es un número negativo.
Si $a + d = 0$, entonces $d = -a$. Pero entonces, en la ecuación $bc + d^2 = -1 + c$, tendríamos $bc + (-a)^2 = -1 + c$, lo que implicaría que $bc + a^2 = -1 + c$. Pero ya sabemos que $a^2 + bc = -1$, por lo que tendríamos que $-1 = -1 + c$, lo que implicaría que $c = 0$. Pero esto también contradice nuestra suposición de que bc es un número negativo.
Por lo tanto, aún no podemos encontrar una matriz B que satisfaga todas las ecuaciones necesarias.

No existe ninguna matriz $B \in M_2(R)$ tal que $B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 + c \end{bmatrix}$.

Ejercicio 4

Consideramos la base $\mathcal{B} = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ y la base canónica $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Sea $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal tal que:

$$[U(x,y,z)]_{\mathcal{B}} = (0,x,y,z)$$

- (a) *(10 pts.)* Calcular $U(x,y,z)$
- (b) *(10 pts.)* Calcular la dimensión de la imagen de U.

Punto a

Dado que $U(x, y, z)$ está expresado como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$, podemos escribirlo como:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= 0 \cdot (1, 0, 0, 0) + x \cdot (0, 1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 1, 0) + z \cdot (0, 1, 1, -1) \\ &= (0, x + y + z, y + z, -z) \end{aligned}$$

Punto b

Para calcular la imagen de U, observamos los posibles vectores $(0, x + y + z, y + z, -z)$ para todos los posibles valores de x, y, z. La imagen vive en el espacio de salida, por ello será un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

$$Im(U) = \{v \in \mathbb{R}^4 : U(x, y, z) = v\}$$

$$\{(x_0, y_0, z_0, w_0) : U(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0, w_0)\}$$

Pero ya se tiene el dato de $U : (x, y, z)$, por lo tanto

$$(0, x + y + z, y + z, -z) = (x_0, y_0, z_0, w_0)$$

Se arma el sistema:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = x + y + z \\ z_0 = y + z \\ w_0 = -z \end{cases}$$

De acá planteo la matriz y resuelvo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_0 \\ 1 & 1 & 1 & y_0 \\ 0 & 1 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & -1 & w_0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & y_0 \\ 0 & 1 & 1 & z_0 \\ 0 & 0 & -1 & w_0 \\ 0 & 0 & 0 & x_0 \end{bmatrix}$$

Estos nos dice lo siguiente:

$$Im(u) = \{(x_0, y_0, z_0, w_0) \in R^4 : x_0 = 0\}$$

$$= \{(0, y_0, z_0, w_0) \in R^4\} = \{y_0 \cdot (0,1,0,0) + z_0 \cdot (0,0,1,0) + w_0 \cdot (0,0,0,1) \in R^4 : y_0, z_0, w_0 \in R\}$$

Entonces, el conjunto generador de $Im(U)$ es $\langle(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle$. **Y la dimensión es 3.**

Ejercicio 5

Sea $T : R^4 \to R^4$ la transformación lineal dada por

$$T(x, y, z, w) = (x - y, 2x + y, 3z + w, z + 3w)$$

- (a) *(10 pts.)* Calcular los autovalores reales de T
- (b) *(10 pts.)* Calcular los autoespacios de los autovalores calculados en el punto anterior.
- (c) *(5 pts.)* Decidir si T es diagonalizable.

Punto a

La matriz asociada a esta transformación lineal es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ahora se deben hallar los autovalores y autovectores de A

Planteo el polinomio característico:

$$\chi_A(x) = \det(xId - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & x-3 \end{vmatrix}$$

Obtengo el determinante usando el método de cofactores:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x-3 & -1 \\ 0 & -1 & x-3 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-3 & -1 \\ 0 & -1 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)^2\cdot\begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix}\cdot((x+1)^2+2)$$

$$= (x^2-6x+8)\cdot((x+1)^2+2) = (x^2-6x+8)\cdot(x^2-2x+3)$$

$$= (x-2)\cdot(x-4)\cdot(x^2-2x+3)$$

Los únicos autovalores reales de A son $2, 4$.

Punto b

Para hallar los autoespacios hay que resolver dos sistemas de ecuaciones:

$$(2Id - A)X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduzco la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De acá salen las siguientes ecuaciones: $x_1 + x_2 = 0,\ 3x_2 = 0,\ \ -x_3 - x_4 = 0$, tomando un vector (x_1, x_2, x_3, x_4), las soluciones son de la forma $(0, 0, -x_4, x_4)$, es decir el autoespacio asociado a 2 es $V_2 = \{t \cdot (0, 0, -1, 1) : t \in R\}$.

$$(4Id - A)X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reduzco la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De acá salen las siguientes ecuaciones: $3x_1 + x_2 = 0,\ \frac{11}{3}x_2 = 0,\ x_3 - x_4 = 0$, tomando un vector (x_1, x_2, x_3, x_4), las soluciones son de la forma $(0, 0, 1, 1)$, es decir el autoespacio asociado a 4 es $V_4 = \{t \cdot (0, 0, 1, 1) : t \in R\}$.

Punto c

La matriz no es diagonizable, ya que no existen 4 autovectores linealmente independientes que generen a $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 6

(10 pts.) Consideremos el R-espacio vectorial $R_4[x]$. Definamos

$$W = \{p(x) \in R_4[x] : p(1) - p(2) = 0\}$$

Calcular la dimensión de W.

Primero, recordemos que $R_4[x]$ es el espacio de todos los polinomios de grado estrictamente menor que 4. Por lo tanto, una base para $R_4[x]$ es $\{1, x, x^2, x^3\}$. Ahora, queremos encontrar todos los polinomios $p(x)$ en $R_4[x]$ que satisfacen la condición $p(1) - p(2) = 0$. Esto significa que queremos encontrar todos los polinomios tales que el valor del polinomio en $x = 1$ es igual al valor del polinomio en $x = 2$.

Un polinomio general en $R_4[x]$ puede escribirse como $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. La condición $p(1) - p(2) = 0$ se convierte en:

$$(a + b + c + d) - (a + 2b + 4c + 8d) = 0$$

Simplificando, obtenemos:

$$-b - 3c - 7d = 0$$

Entonces podemos reescribir a W como:

$$W = \{a + bx + cx^2 + dx^3 : -b - 3c - 7d = 0 \; ; \; a, b, c, d \in R\}$$

Simplificándolo un poco mas:

$$W = \{a + (-3c - 7d)x + cx^2 + dx^3 : -b - 3c - 7d = 0 \; ; \; a, c, d \in R\}$$

Por la cantidad de variables libres, se deduce que la **dimensión de W es 2**.

Ejercicio 7

Sean V un espacio de dimensión 5 y $\mathcal{B}$ una base de V. Si $S, T : V \to V$ son transformaciones lineales tales que la matriz $[S \circ T]_{\mathcal{B}}$ es igual a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Demostrar que T es un isomorfismo.

Hay un teorema que dice lo siguiente:

Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita sobre K tal que $\dim V = \dim W$. Sea $T : V \to W$ transformación lineal. Entonces, son equivalentes:

- T es un isomorfismo.
- T es monomorfismo.
- T es epimorfismo. > - Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es una base de W.

Dado que $T : V \to V$ es una transformación lineal y $\dim V = \dim V$, podemos aplicar el teorema directamente. Solo necesitamos demostrar que T es un monomorfismo (inyectivo) o un epimorfismo (sobreyectivo), o que la imagen de una base de V bajo T es una base de V.

En este caso, dado que la matriz de la transformación compuesta $S \circ T$ es invertible (como se puede ver por el hecho de que todos los elementos de la diagonal principal son distintos de cero), esto implica que $S \circ T$ es un isomorfismo. Pero para que la composición de dos transformaciones lineales sea un isomorfismo, ambas transformaciones deben ser isomorfismos. Por lo tanto, T debe ser un isomorfismo.