Probabilidad y Estadística -
Introducción a la Probabilidad y Estadística
2024

Villar Pedro

Guía de ejercicios N ^{o} 1. Probabilidad, Probabilidad condicional, Independencia

Probabilidad

1. La biblioteca de una universidad tiene cinco ejemplares de un cierto texto en reserva. Dos ejemplares (1 y 2) son primeras impresiones y los otros tres $(3,4$ y $5)$ son segundas impresiones. Un estudiante examina estos libros en orden aleatorio, deteniéndose sólo cuando selecciona una segunda impresión.
a) Hacer una lista de todos los resultados posibles.
b) Sea el evento A : sólo un lib es examinado. ¿Cuáles resultados están en A ?.
c) Sea el evento B : el libro 5 es seleccionado. ¿Cuáles resultados están en B ?
d) Sea el evento C : el libro 1 no se examina. ¿Cuáles resultados están en C ?
e) Expresar $A \cap B, \quad A \cup B \quad$ y $\overline{(B \cap C)}$.

Solución

- **Punto a**

$$[\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{2,1,3\},\{2,1,4\},\{2,1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{3\},\{4\},\{5\}]$$

- **Punto b** Sólo un libro es examinado:
$$A=\{\{3\},\{4\},\{5\}\}$$

- **Punto c** El libro 5 es seleccionado
$$B=\{\{1,2,5\},\{2,1,5\},\{2,5\},\{1,5\},\{5\}\}$$

- **Punto d** El libro 1 no se examina
$$C=\{\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$$

- **Punto e**
$$A \cap B=\{\{5\}\},$$
$$A \cup B=\{\{1,2,5\},\{2,1,5\},\{3\},\{4\},\{5\}\},$$
$$\overline{(B \cup C)}=\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{2,1,3\},\{2,1,4\},\{2,1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{3\},\{4\}\}$$

2. Demostrar que si un evento A está contenido en otro B, entonces $P(B-A)=P(B)-P(A)$ y $P(A) \leq P(B)$. En general, dados dos eventos A y B, ¿qué relación existe entre $P(A), P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$?.

Solución

- $A \subset B \Rightarrow B=A \cup \overline{(B \cap A^c)} \Rightarrow P(B)=P(A \cup \overline{(B \cap A^c)})=P(A)+P(\overline{(B \cap A^c)})=P(A)+P(B-A)=P(B) \Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$
- Como la función P va entre 0 y 1, esto implica que $P(B) \geq P(A)$ y la relación que existe es $P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$.

3. Una empresa de consultoría de computadoras ha licitado en tres proyectos. Sea $A_i=\{$ proyecto i otorgado $\}$, para $i=1,2,3$, y supongamos que $P(A_1)=0,22, P(A_2)=0,25$ y $P(A_3)=0,28, P(A_1 \cap A_2)=0,11$, $P(A_1 \cap A_3)=0,05, P(A_2 \cap A_3)=0,07$ y $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)=0,01$. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos:
a) $A_1 \cup A_2$

b) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ (Sugerencia: $\overline{(A_1 \cup A_2)} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}\Big)$
c) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$
d) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$
*e) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3$
*f) $\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right) \cup A_3$

Solución

- **Punto a**

$$P(A_1 \cup A_2) = 0{,}22 + 0{,}25 - 0{,}11 = 0{,}36$$

- **Punto b**

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \overline{(A_1 \cup A_2)} = 1 - 0,36 = 0{,}64$$

- **Punto c**

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap B_2 \cap C_3) = 0{,}53$$

- **Punto d**

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)} = 1 - 0{,}53 = 0{,}47$$

- **Punto e**

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) = P(A_3) - (P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_3)) = 0{,}17$$

- **Punto f**

$$P((\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \cup A_3) = 0{,}75$$

4. Cinco empresas $F_1, F_2, \ldots, F_5$ hacen propuestas con respecto a tres contratos separados, C_1, C_2 y C_3. Una empresa sólo puede obtener a lo sumo un contrato. Los contratos son diferentes, de tal forma que la asignación de C_1 a F_1 se debe diferenciar de la asignación de C_2 a F_1.
a) ¿Cuántos puntos muestrales hay en total en este experimento que trata de la asignación de los contratos a las empresas? (No hay necesidad de listar todos los puntos).
b) Encuentre la probabilidad de que se conceda un contrato a la empresa F_3, bajo el supuesto de que los puntos muestrales son equiprobables.

Solución

- **Punto a:** sean C_1, C_2 y C_3 los tres contratos, y F_1, F_2, F_3, F_4 y F_5 las cinco empresas.
  El primer contrato, C_1, puede ser asignado a cualquiera de las 5 empresas. Para cada asignación de C_1, hay 4 posibles asignaciones para C_2 y 3 posibles asignaciones para C_3. Aplicando el principio de multiplicación, el número total de formas de asignar los tres contratos a las cinco empresas es:

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

- **Punto b:** para calcular la probabilidad de que la empresa F_3 obtenga al menos un contrato, consideremos las siguientes posibilidades: - F_3 obtiene C_1: hay 4 formas de asignar los otros dos contratos a las 4 empresas restantes.
  - F_3 obtiene C_2: Hay 4 formas de asignar C_1 y 3 formas de asignar C_3 a las 4 empresas restantes.
  - F_3 obtiene C_3: Similarmente, hay 4 formas de asignar C_1 y 3 formas de asignar C_2.

  Por lo tanto, hay un total de $4 + 4 \times 3 + 4 \times 3 = 36$ formas en las que F_3 puede obtener al menos un contrato. La probabilidad de este evento es:

$$P(F_3 \text{ obtiene al menos un contrato}) = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$$

5. Al poco tiempo de ser puestos en servicios, algunos colectivos fabricados por cierta compañía presentan grietas en su parte inferior. Una ciudad tiene 25 de estos colectivos y han aparecido grietas en 8 de ellos. Se seleccionan aleatoriamente 5 colectivos para hacer una inspección.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que 4 de los 5 colectivos tengan grietas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 4 de los seleccionados tengan grietas?.

Solución

- **Punto A** voy a hacer una elección aleatoria de 5 colectivos entre 25 totales, donde debo calcular la probabilidad de que 4 sean agrietados, de los cuales hay 8, y 1 este sano, de los cuales hay 17.

$$\frac{\binom{17}{1} \times \binom{8}{4}}{\binom{25}{5}} = 0{,}022$$

  Por lo tanto la probabilidad de que 4 de los 5 colectivos tengan grietas es de 0.022.

- **Punto B** como ya sabemos la probabilidad de que 4 colectivos de 5 tengan grietas, solamente debemos sumar la probabilidad de que los 5 colectivos tengan grietas. Es decir:

$$\frac{\binom{17}{0} \times \binom{8}{5}}{\binom{25}{5}} + 0{,}022 = 0{,}023$$

  La probabilidad de que al menos 4 tengan grietas es de 0.023

6. Un departamento académico con cinco miembros de la facultad: Anderson, Box, Cox, Cramer y Fisher, debe seleccionar a dos de sus miembros para prestar servicio en una comisión de revisión de personal. Debido a que el trabajo será lento, nadie desea prestar ese servicio, así que deciden que el representante será seleccionado por el método de colocar cinco boletas de papel en una caja, mezclarlas y seleccionar dos.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que Anderson y Box sean seleccionados?.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que se seleccione por lo menos a uno de los dos miembros cuyos apellidos comienzan con C ?
c) Si los cinco miembros de la facultad han dado clase en la universidad durante 3, 6, 7, 10 y 14 años respectivamente, ¿cuál es la probabilidad de que entre los dos representantes seleccionados tengan por lo menos 15 años de experiencia en la enseñanza?

Solución

- **Punto a:** la probabilidad de seleccionar específicamente a Anderson y Box es:

$$P(\text{Seleccionar a Anderson y Box}) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$$

  Esto se debe a que hay solo una forma de seleccionar a esos dos individuos de un grupo de 5, y el denominador representa el número total de posibles pares.

  Otra forma de calcularlo es considerando los eventos independientes de seleccionar a Anderson y luego a Box:

$$P(\text{Seleccionar a Anderson y Box}) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{10}$$

  El factor 2 se debe a que hay dos posibles órdenes para seleccionar a estos dos individuos.

- **Punto b:** sea C el evento "seleccionar al menos una persona con apellido que comienza con C". Entonces:

$$P(C) = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{3}{1} + \binom{2}{2} \times \binom{3}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{7}{10}$$

  El numerador representa la suma de dos casos: - Seleccionar 1 persona con apellido C y 1 sin C: $\binom{2}{1} \times \binom{3}{1}$ - Seleccionar 2 personas con apellido C: $\binom{2}{2} \times \binom{3}{0}$

- **Punto c:** necesitamos calcular la probabilidad de que los dos representantes seleccionados tengan, en total, al menos 15 años de experiencia en la enseñanza. Primero, listemos los años de experiencia de cada miembro:
  - *Anderson*: 3 años
  - *Box*: 6 años
  - *Cox*: 7 años
  - *Cramer*: 10 años
  - *Fisher*: 14 años

  Primero, enumeremos todos los posibles pares y sus respectivas sumas de años de experiencia:

a) Anderson (3) y Box (6): 9 años
b) Anderson (3) y Cox (7): 10 años
c) Anderson (3) y Cramer (10): 13 años
d) Anderson (3) y Fisher (14): 17 años
e) Box (6) y Cox (7): 13 años
f) Box (6) y Cramer (10): 16 años
g) Box (6) y Fisher (14): 20 años
h) Cox (7) y Cramer (10): 17 años
i) Cox (7) y Fisher (14): 21 años
j) Cramer (10) y Fisher (14): 24 años

De estas combinaciones, los pares que suman al menos 15 años de experiencia son:

- Anderson y Fisher (17 años)
- Box y Cramer (16 años)
- Box y Fisher (20 años)
- Cox y Cramer (17 años)
- Cox y Fisher (21 años)
- Cramer y Fisher (24 años)

Hay 6 combinaciones que cumplen la condición de sumar al menos 15 años de experiencia, de un total de 10 combinaciones posibles. Por lo tanto, la probabilidad es:

$$P(\text{al menos 15 años de experiencia}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Esta es la probabilidad de que los dos representantes seleccionados tengan, en total, al menos 15 años de experiencia en la enseñanza.

7. Una profesora desea programar una reunión con cada uno de sus ocho ayudantes, cuatro hombres y cuatro mujeres, para analizar su curso. Se supone que todos los ordenamientos posibles de las reuniones tienen la misma probabilidad de ser elegidos.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una asistente (mujer) esté entre los tres primeros con quien se reúne la profesora?.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que después de las cinco primeras reuniones, la profesora se haya reunido con todas las asistentes?.

Solución

- **Punto a:** hay 8 ayudantes en total: 4 hombres y 4 mujeres. Los tres primeros ayudantes pueden ser seleccionados en cualquier orden, y queremos encontrar la probabilidad de que al menos uno de esos tres sea una mujer.

  Primero, calculo la probabilidad de que **ninguna** mujer esté entre los tres primeros, lo que significaría que los tres primeros son todos hombres.

  - Paso 1: Seleccionar 3 hombres entre los 4 disponibles: la cantidad de maneras de seleccionar 3 hombres de un total de 4 es:

$$\binom{4}{3} = 4$$

  - Paso 2: Seleccionar el orden de los 3 hombres seleccionados: el número de formas de ordenar esos 3 hombres es:

$$3! = 6$$

  Entonces, el número total de maneras de tener a los 3 primeros ayudantes como hombres es $4 \times 6 = 24$.

  - Paso 3: Total de maneras de ordenar cualquier 3 de los 8 ayudantes: el total de maneras de ordenar cualquier 3 de los 8 ayudantes es:

$$\binom{8}{3} \times 3! = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times 6 = 336$$

  - Paso 4: Calcular la probabilidad La probabilidad de que los tres primeros ayudantes sean todos hombres es:

$$P(\text{3 hombres}) = \frac{24}{336} = \frac{1}{14}$$

Entonces, la probabilidad de que **al menos una mujer** esté entre los tres primeros es:

$$P(\text{al menos 1 mujer}) = 1 - P(\text{3 hombres}) = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$$

- **Punto b:** hay que hallar la probabilidad de que después de las cinco primeras reuniones, la profesora se haya reunido con todas las asistentes (las 4 mujeres).
  - Paso 1: Considerar todas las combinaciones de los 5 primeros ayudantes: seleccionar 5 de los 8 ayudantes en:

  $$\binom{8}{5} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

  - Paso 2: Seleccionar las 4 mujeres dentro de esos 5 ayudantes: hay una sola manera de seleccionar a las 4 mujeres, y la quinta persona debe ser uno de los 4 hombres restantes:

  $$\binom{4}{4} \times \binom{4}{1} = 1 \times 4 = 4$$

  - Paso 3: Calcular la probabilidad: la probabilidad de que todas las mujeres estén entre los 5 primeros ayudantes es:

  $$P(\text{todas las mujeres en los 5 primeros}) = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$$

Probabilidad condicional

8. Una caja contiene 6 cubos rojos y 4 verdes y una segunda caja contiene 7 cubos rojos y 3 verdes. Se elige al azar un cubo de la primera caja y se pone en la segunda caja. Luego se selecciona al azar un cubo de la segunda caja y se pone en la primera caja.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que se seleccione un cubo rojo de la primera caja y un cubo rojo de la segunda caja?.
b) Al finalizar el proceso de selección ¿cuál es la probabilidad de que los números de cubos rojos y verdes de la primera caja sean idénticos a los que habían al comienzo?.

Solución

- **Punto a** En la primera caja tenemos un total de 10 cubos y en la segunda tambien. Si elegimos un cubo al azar de la primera caja la posibilidad de que sea rojo es de:

  $$\frac{6}{10}$$

  Luego la probabilidad de sacar un cubo rojo de la segunda es de

  $$\frac{8}{11}$$

  Notar que el cubo de la primera caja paso a la segunda, por lo tanto hay un cubo mas y es rojo.
  Entonces

  $$\frac{6}{10} \times \frac{8}{11} = 0{,}4363$$

- **Punto b** Para que esto suceda, los cubos intercambiados deben ser del mismo color.
  Notar que lo calculado anteriorermente era la probabilidad de seleccionar de la primera caja un rojo, y luego de la segunda tambien otro rojo, por lo tanto solamente falta calcular la probabilidad de primero sacar un verde y luego sacar otro verde de la otra caja.
  Para esto llamo a:
  V_1 = Sacar un cubo verde de la primera caja
  V_2 = Sacar un cubo verde de la segunda caja
  La $P(V_1)$ ya la sabemos calcular y es:

  $$\frac{4}{10}$$

  Solo resta calcular $P(V_2|V_1)$ Es decir la probabilidad de V_2 despues de que ocurrio V_1.
  Por enunciado esto es:

$$\frac{4}{11}$$

Ahora multiplicamos $P(V_1) \times P(V_2|V_1)$

$$\frac{4}{10} \times \frac{4}{11} = \frac{8}{55} = 0{,}1454$$

Ahora sumamos la probabilidad de sacar dos cubos rojos (Punto A) y dos puntos verdes (Lo que hicimos recien)

$$0{,}4363 + 0{,}1454 = 0{,}5817$$

9. Una gran tienda de departamentos vende camisas deportivas en tres talles (pequeño, mediano y grande), en tres modelos (a cuadros, estampados y de franjas) y con dos largos de mangas (corta y larga). Las siguientes tablas presentan las proporciones de camisas vendidas que caben en varias combinaciones de categorías.

Manga corta			
	Modelo		
Talle	Cuadros	Estampada	Franjas
Pequeño	0,04	0,02	0,05
Mediano	0,08	0,07	0,12
Grande	0,03	0,07	0,08
Manga larga			
	Modelo		
Talle	Cuadros	Estampada	Franjas
Pequeño	0,03	0,02	0,03
Mediano	0,10	0,05	0,07
Grande	0,04	0,02	0,08

a)¿Cuál es la probabilidad de que la camisa que se venda sea mediana, de manga larga y estampada?.
b)¿Cuál es la probabilidad de que la camisa que se venda sea mediana y estampada?.
c)¿Cuál es la probabilidad de que la camisa que se venda sea de manga corta?. ¿Y de manga larga?.
d) ¿Cuál es la probabilidad de que el talle de la camisa que se venda sea mediano?. ¿Y que el modelo sea estampado?.
e) Dado que la camisa que se vendió era a cuadros y de manga corta, ¿cuál es la probabilidad de que su talle sea mediano?.
f) Dado que la camisa que se vendió era a cuadros y mediana, ¿cuál es la probabilidad de que sea de manga corta? ¿Y de manga larga?

Solución

- **Primeros puntos:** a) 0.05, b) 0.12, c) 0.56 y 0.44, d) 0.49 y 0.25.
- **Punto e:** se debe hallar lo siguiente:

$$P(\text{Med.} \mid \text{Cuadros y Manga Corta}) = \frac{P(\text{Med. y Cuadros y Manga Corta})}{P(\text{Cuadros y Manga Corta})}$$

- Mirando la tabla, se puede ver que la probabilidad de que la camisa sea **mediana**, de **manga corta** y de **cuadros** es 0,08.
- Calcular $P(\text{Cuadros y Manga Corta})$: la probabilidad total de que la camisa sea de **cuadros y manga corta** se obtiene sumando las probabilidades de que sea de talla pequeña, mediana y grande:

$$P(\text{Cuadros y Manga Corta}) = P(\text{Pequeño y Cuadros y Manga Corta}) +$$

$$P(\text{Mediano y Cuadros y Manga Corta}) + P(\text{Grande y Cuadros y Manga Corta}) = 0{,}04 + 0{,}08 + 0{,}03 = 0{,}15$$

Ahora, usando la fórmula de la probabilidad condicional del principio:

$$P(\text{Mediano} \mid \text{Cuadros y Manga Corta}) = \frac{0{,}08}{0{,}15} \approx 0{,}5333$$

Por lo tanto, la probabilidad de que la camisa sea de talla mediana dado que es de cuadros y manga corta es aproximadamente 0,5333.

10. a) Dados los eventos A y B con $P(B) > 0$, demuestre que $P(A \mid B) + P(\bar{A} \mid B) = 1$.

b) Si $P(B \mid A) > P(B)$ demuestre que $P(\bar{B} \mid A) < P(\bar{B})$.
c) Dados los eventos A, B y C con $P(C) > 0$, demuestre que $P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(A \cap B \mid C)$.

Solución

- a) La probabilidad condicional se define como:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

y

$$P(\bar{A} \mid B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}$$

Dado que $A \cap B$ y $\bar{A} \cap B$ son eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos respecto a B, tenemos:

$$P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$$

Dividiendo ambos lados por $P(B)$:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = 1$$

Por lo tanto:

$$P(A \mid B) + P(\bar{A} \mid B) = 1$$

- b) Dado que $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$, podemos escribir:

$$P(\bar{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A)$$

Si $P(B \mid A) > P(B)$, entonces:

$$1 - P(B \mid A) < 1 - P(B)$$

lo que implica:

$$P(\bar{B} \mid A) < P(\bar{B})$$

- c) Usamos la definición de probabilidad condicional:

$$P(A \cup B \mid C) = \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)}$$

Aplicando la ley de probabilidades para la unión de eventos:

$$P(A \cup B \mid C) = \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)}$$

Utilizando la propiedad de la probabilidad para la unión de dos eventos:

$$P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

Entonces, la probabilidad condicional se convierte en:

$$P(A \cup B \mid C) = \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(C)}$$

Dividiendo cada término por $P(C)$, obtenemos:

$$P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(A \cap B \mid C)$$

11. Uno de cada 25 adultos está afectado de cierta enfermedad para la que se ha desarrollado una prueba de diagnóstico. La prueba es tal que, cuando un individuo padece la enfermedad, el resultado de la prueba es positivo en un 99 % de las veces, mientras que un individuo sin la enfermedad mostrará un resultado positivo sólo el 2 % de las veces.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un resultado de la prueba sea positivo?.
b) Dado que el resultado de la prueba es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que el individuo tenga la enfermedad?.
c) Dado que el resultado de la prueba es negativo, ¿cuál es la probabilidad de que el individuo no tenga la enfermedad?

Solución

- **Punto a:** hay que hallar la probabilidad de que un resultado de la prueba sea positivo; por un lado tenemos que uno de cada 25 aultos tiene la enfermedad ($\frac{1}{25}$) y en este caso el resultado es positivo con una probabilidad del 0,99, luego, cuando el adulto no tiene la enfermedad ($\frac{24}{25}$), la probabilidad de que sea positivo es del 0,02, sumando estos resultados se obtiene:

$$\frac{1}{25} \cdot 0{,}99 + \frac{24}{25} \cdot 0{,}02 = 0{,}0588$$

- **Punto b:** planteo la probabilidad condiconal, lo que hay que hallar es:

$$P(Enfermo \mid Positivo) = \frac{P(\text{Enfermo y Positivo})}{P(\text{Positivo})}$$

Los datos son los del inciso a:

$$P(Enfermo \mid Positivo) = \frac{\frac{1}{25} \cdot 0{,}99}{0{,}0588} \approx 0{,}6735$$

- **Punto c:** planteo la probabilidad condicional, lo que hay que hallar es:

$$P(\text{No Enfermo} \mid \text{Negativo}) = \frac{P(\text{No Enfermo y Negativo})}{P(Negativo)}$$

Por el inciso a, se tiene que $P(Negativo) = 1 - 0{,}0588 = 0{,}9412$, luego para obtener $P(\text{No Enfermo y Negativo})$ se tiene que:

$$P(\text{No Enfermo y Negativo}) = 1 - (P(\text{Positivo}) + P(\text{Enfermo y Negativo})) = 1 - (0{,}0588 + \frac{1}{25} \cdot 0{,}1) = 0{,}9408$$

Ahora bien, reemplazando en la fórmula del principio:

$$P(\text{No Enfermo} \mid \text{Negativo}) = \frac{0{,}9408}{0{,}9412} \approx 0{,}9996$$

Independencia

12. Sean A y B eventos independientes, demostrar que $\bar{A}$ y B, $\quad A$ y $\bar{B}$ y $\bar{A}$ y $\bar{B}$ son independientes.

Solución

Primero que nada, por hipótesis, A y B son eventos independientes, es decir:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- **Primer punto:** probar que $\overline{A}$ y B son independientes, basta demostrar que:

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P(B)$$

Se tiene que

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) =_{\text{hip}} P(A) \cdot P(B) + P(\overline{A} \cap B)$$

Ahora despejando $P(\overline{A} \cap B)$:

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot (1 - P(A)) = P(B) \cdot P(\overline{A})$$

- **Segundo punto:** probar que A y $\overline{B}$ son independientes, basta demostrar que:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B})$$

Se tiene que

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =_{\text{hip}} P(A) \cdot P(B) + P(A \cap \overline{B})$$

Ahora despejando $P(A \cap \overline{B})$:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B})$$

- **Tercer punto:** probar que $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes, basta demostrar que:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$$

Se tiene que

$$P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) =_{\text{parte anterior}} P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$$

Ahora despejando $P(\overline{A} \cap \overline{B})$:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) - P(A) \cdot P(\overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot (1 - P(A)) = P(\overline{B}) \cdot P(\overline{A})$$

13. En un lote de 10 tablas de madera, dos están demasiado verdes para ser usadas en construcción de primera calidad. Se seleccionan 2 tablas al azar, una después de otra.
Sea $A = \{$la primera tabla está verde$\}$ y $B = \{$la segunda tabla está verde $\}$. Calcule $P(A), P(B)$ y $P(A \cap B)$. ¿Son A y B independientes?.

Solución

- **Primera parte:** Hay dos tablas verdes entre 10 tablas, entonces:

$$P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

- **Segunda Parte:** $P(B)$ se puede descomponer en dos casos: cuando las dos tablas sean verdes y cuando la primera sea verde y la otra no:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A})$$

Si la primera tabla ya es verde, solo quedaría seleccionar otra entre las 9 restantes, entonces $P(B \mid A) = \frac{1}{9}$ y análogamente, cuando la primera no sea verde, se tiene $P(B \mid \overline{A}) = \frac{2}{9}$.

$$P(B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{9} = 0{,}2$$

- **Tercera parte:** con lo visto en las otras partes, los eventos no son independientes, es decir seleccionar la primera tabla afecta la probabilidad de que la segunda salga verde o no. Entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A \mid B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9}$$

- Por último **los eventos no son independientes**.

14. Un mazo de 52 cartas es mezclado y se reparten 13 cartas a cada uno de los 4 jugadores A, B, C y D. Calcular la probabilidad de los siguientes eventos:
a) A tiene todos los corazones, B todos los diamantes, C todos los tréboles y D todas las picas.
b) Cada jugador tiene cartas de un solo palo.
c) El jugador A no tiene ases.
d) Cada jugador recibe un as.

Solución

- **Punto a (forma 1):** Para que se cumpla lo que pide el inciso, debe pasar que:

  - A tenga las 13 cartas de corazones,
  - B tenga las 13 cartas de diamantes,
  - C tenga las 13 cartas de trébol,
  - D tenga las 13 cartas de pica,

  primero, se toman 13 cartas de las 52, luego 13 de las 39 restantes, luego otras 13 de las 26 restantes y por ultimo las 13 que quedaron. Entonces las formas de que pase esto son:

$$\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot \binom{13}{13}$$

  y por lo tanto la probabilidad buscada es:

$$\frac{1}{\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot \binom{13}{13}} \approx 1{,}86 \times 10^{-29}$$

- **Punto a (forma 2):** Otra forma de hacer el Punto A es calcular primero el espacio muestral. es decir Ω.

Al tener que repartir 52 cartas A tiene 52 cartas posibles a recibir como primera carta, B tiene 51 cartas posibles a recibir como primera carta, C tiene 50 cartas posibles a recibir como primera carta, D tiene 49 cartas posibles a recibir como primera carta, A tiene 48 posibles cartas a recibir como primera carta... Por lo tanto el espacio muestrable es de

$$52!$$

Luego calculamos las posibilidades del evento.
1. A tiene 13 posibles cartas a recibir (corazones)
2. B tiene 13 posibles cartas a recibir (diamantes)
3. C tiene 13 posibles cartas a recibir (treboles)
4. D tiene 13 posibles cartas a recibir (picas)

Por lo tanto. 13!,13!,13!,13!
Entonces haciendo:

$$\frac{\text{Casos probables}}{\text{Casos posibles}}$$

$$\frac{13! \times 13! \times 13! \times 13!}{52!} \approx 1{,}86 \times 10^{-29}$$

- **Punto b:** Acá es similar al punto anterior, con la diferencia que no importa el palo, por lo que habría que tomar en cuenta también las formas de seleccionar los 4 palos, es decir 4!, la probabilidad de que esto pase es:

$$\frac{4!}{\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot \binom{13}{13}} \approx 1{,}47 \times 10^{-28}$$

- **Punto c:** Si el jugador A no tiene ases, significa que los 4 están repartidos entre los jugadores B, C y D. Las posibles cartas que A puede recibir son las 48 cartas no ases, y queremos repartir 13 de ellas a A:

$$P(\text{A sin ases}) = \frac{\binom{48}{13}}{\binom{52}{13}} \approx 0{,}3038$$

- **Punto d:** La cantidad de formas de asignar los ases a los jugadores es 4^4, y despues las 48 cartas restantes se pueden distribuir libremente:

$$P(\text{Cada jugador recibe un as}) = \frac{4^4 \cdot \binom{48}{12} \cdot \binom{36}{12} \cdot \binom{24}{12} \cdot \binom{12}{12}}{\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13} \cdot \binom{13}{13}} \approx 0{,}1055$$

15. Se realizó una investigación en personas que sufren leucoplasia oral. El 85 % de ellas fuma o consume alcohol, el 45 % consume alcohol y el 60 % fuma.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida al azar de esta población consuma alcohol y no fume?.
b) Si se elige al azar un individuo fumador, ¿cuál es la probabilidad de que consuma alcohol?.
c) ¿Son independientes los eventos fumar y consumir alcohol?.

Solución

- **Punto a:** Hay una probabilidad del 0,45 de que la persona consuma alcohol y una probabilidad del 0.40 de que no fume, entonces

$$P(\text{Consuma alcohol o fume}) = P(\text{Consume alcohol}) + P(\text{Fume}) - P(\text{Consuma alcohol y fume})$$

$$\Rightarrow 0{,}85 = 0{,}45 + 0{,}60 - P(\text{Consuma alcohol y fume})$$

$$\Rightarrow P(\text{Consuma alcohol y fume}) = 0{,}45 + 0{,}60 - 0{,}85 = 0{,}20$$

y ahora con esto:

$$P(\text{Consuma alcohol y no fume}) = P(\text{Consuma alcohol}) - P(\text{Consuma alcohol y fume}) = 0{,}45 - 0{,}20 = 0{,}25$$

- **Punto b:** Ahora es probabilidad condicional, que probabilidad hay de que tomando un fumador el mismo consuma alcohol tambien:

$$P(\text{Consuma alcohol} \mid \text{Fume}) = \frac{P(\text{Consuma alcohol y fume})}{P(\text{Fume})} = \frac{0{,}20}{0{,}60} \approx 0{,}333$$

- **Punto c:** Por definición, estos dos eventos son independientes si:

$$P(\text{Consuma alcohol y fume}) = P(\text{Consuma alcohol}) \cdot P(\text{fume}) = 0{,}45 \cdot 0{,}60 = 0{,}27$$

pero $P(\text{Consuma alcohol y fume}) = 0{,}20$, por lo tanto los eventos no son independientes.

16. Una compañía realiza el 50 % de sus envíos a través de la empresa de correos 1, el 40 % a través de la empresa 2 y el resto por la empresa 3 . De los paquetes enviados por la empresa 1 , el 2 % llega tarde a su destino. El 1 % de los paquetes enviados por la empresa de correos 2 llega tarde y, de aquellos enviados por la empresa 3 , el 5 % llega tarde.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un paquete elegido al azar llegue tarde a su destino?.
b) Si un paquete elegido al azar llega a tiempo, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido enviado por la empresa 1?.
c) Si se sabe que el paquete no fue enviado por la empresa 3 , ¿cuál es la probabilidad de que llegue a tiempo a su destino?.
d) Si se eligen 10 paquetes al azar de los enviados por esta compañía, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno llegue tarde?.

Solución

- **Punto a:**
Definimos los siguientes eventos:
  - E_1: Paquete enviado por la empresa 1,
  - E_2: Paquete enviado por la empresa 2,
  - E_3: Paquete enviado por la empresa 3,
  - T: El paquete llega tarde.

  Las probabilidades dadas son:
  - $P(E_1) = 0{,}5$
  - $P(E_2) = 0{,}4$
  - $P(E_3) = 0{,}1$
  - $P(T \mid E_1) = 0{,}02$
  - $P(T \mid E_2) = 0{,}01$
  - $P(T \mid E_3) = 0{,}05$

  Usando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que un paquete llegue tarde es:

$$P(T) = P(T \mid E_1) \times P(E_1) + P(T \mid E_2) \times P(E_2) + P(T \mid E_3) \times P(E_3)$$

$$P(T) = 0{,}02 \times 0{,}5 + 0{,}01 \times 0{,}4 + 0{,}05 \times 0{,}1$$

$$P(T) = 0{,}019$$

- **Punto b:**
Dado que el evento "Llega a tiempo.$^{\text{es}}$ el complemento de T, queremos calcular:

$$P(E_1 \mid \overline{T})$$

  Aplicando la regla de Bayes:

$$P(E_1 \mid \overline{T}) = \frac{P(E_1) \times P(\overline{T} \mid E_1)}{P(\overline{T})}$$

  Calculamos primero:

$$P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0{,}019 = 0{,}981$$

$$P(\overline{T} \mid E_1) = 1 - P(T \mid E_1) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$$

  Entonces:

$$P(E_1 \mid \overline{T}) = \frac{0{,}5 \times 0{,}98}{0{,}981} \approx 0{,}4995$$

- **Punto c:**
Queremos calcular la probabilidad de que un paquete llegue a tiempo dado que no fue enviado por la empresa 3:

$$P(\overline{T} \mid \overline{E_3})$$

  Sabemos que:

$$P(\overline{E_3}) = P(E_1) + P(E_2) = 0{,}5 + 0{,}4 = 0{,}9$$

Usamos la probabilidad total para paquetes no enviados por la empresa 3:

$$P(\overline{T} \mid \overline{E_3}) = \frac{P(\overline{T} \cap \overline{E_3})}{P(\overline{E_3})} = \frac{P(\overline{T} \mid E_1) \times P(E_1) + P(\overline{T} \mid E_2) \times P(E_2)}{P(\overline{E_3})}$$

Sustituyendo valores:

$$P(\overline{T} \mid \overline{E_3}) = \frac{(0{,}98 \times 0{,}5) + (0{,}99 \times 0{,}4)}{0{,}9}$$

$$P(\overline{T} \mid \overline{E_3}) = \frac{0{,}49 + 0{,}396}{0{,}9} \approx 0{,}9867$$

- **Punto d:**
  Si se eligen 10 paquetes al azar, la probabilidad de que ninguno llegue tarde es:

$$P(\overline{T_i}) = \prod_{i=1}^{10} P(\overline{T}) = (1 - P(T))^{10}$$

Calculando:

$$P(\overline{T_i}) = 0{,}981^{10} \approx 0{,}8254$$

17. Una costura hecha en un avión necesita 25 remaches. La costura tendrá que volver a realizarse si al menos uno de los remaches está defectuoso. Suponga que los remaches están defectuosos independientemente, unos de otros, cada uno con la misma probabilidad.
a) Si el 14 % de todas las costuras necesitan volver a efectuarse, ¿cuál es la probabilidad de que un remache esté defectuoso?.
b) Si se quiere que sólo el 10 % de las costuras necesiten volver a ejecutarse, ¿cuál es la probabilidad de que un remache sea defectuoso?.

Solución

- **Punto a:** Supongamos que el 14
  Dado que una costura requiere reparación si al menos un remache es defectuoso, tenemos:

$$P(\text{al menos un remache defectuoso}) = 1 - P(\text{ningún remache defectuoso}) = 0{,}14$$

La probabilidad de que ninguno de los 25 remaches sea defectuoso es q^{25}. Por lo tanto:

$$1 - q^{25} = 0{,}14$$

Resolviendo para q y luego para p, obtenemos:

$$p \approx 0{,}006$$

Esto significa que aproximadamente el 0.6

- **Punto b:** Siguiendo un procedimiento similar, si el 10

$$1 - q^{25} = 0{,}10$$

Resolviendo para p, obtenemos:

$$p \approx 0{,}004$$

Es decir, en este caso, la probabilidad de que un remache sea defectuoso es aproximadamente del 0.4

18. En una carrera de caballos participan 6 caballos numerados del 1 al 6 . Todos los resultados posibles de la carrera son igualmente probables. Hacen podio los tres primeros caballos en terminar la carrera.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el caballo con el número 2 salga en primer lugar?.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el caballo con el número 1 haga podio?.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra al menos uno de los dos ítems anteriores?.
d) Una persona hace apuestas sobre el resultado de la carrera. Apuesta que los caballos numerados con 1, 2 y 3 hacen podio. ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona gane su apuesta?.

Solución

- **Punto a:** Sea A el evento ."el caballo número 2 obtiene el primer lugar". Dado un conjunto de 6 caballos, cada uno con la misma probabilidad de ganar, tenemos:

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

- **Punto b:** Definamos S como el evento .$^{\text{el}}$ caballo número 1 hace podio". Esto es equivalente a:

$$S = \{\text{el caballo 1 es primero}\} \cup \{\text{el caballo 1 es segundo}\} \cup \{\text{el caballo 1 es tercero}\}$$

Dado que cada uno de estos eventos elementales tiene probabilidad $1/6$, tenemos:

$$P(S) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

- **Punto c:** Utilizando la regla de la adición para probabilidades, tenemos:

$$P(A \cup S) = P(A) + P(S) - P(A \cap S)$$

$P(A \cap S)$ representa la probabilidad de que ocurran simultáneamente los eventos A y S. Al enumerar todas las posibles ordenaciones de los caballos 1 y 2 en los primeros dos lugares y considerando las opciones para el tercer lugar, encontramos que hay 8 casos favorables de un total de 120. Por lo tanto:

$$P(A \cap S) = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

Finalmente:

$$P(A \cup S) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{15} = \frac{13}{30}$$

- **Punto d:** Sea E el evento "los caballos 1, 2 y 3 ocupan los tres primeros lugares". Para calcular la probabilidad de E, contamos las permutaciones de los caballos 1, 2 y 3 entre los tres primeros lugares y dividimos por el número total de posibles ordenaciones de los 6 caballos:

$$P(E) = \frac{3!}{6!} = \frac{1}{20}$$