Pedro Villar

Notas de Clase
Organización del Computador

Primer Cuatrimestre 2024

Índice de Contenido

1 Sistemas Binarios de Numeración

Un número decimal, como por ejemplo 4543, representa una cantidad igual a 4 millares, 5 centenas, 4 decenas y 3 unidades. En general, un número decimal se puede expresar como una suma de potencias de 10, multiplicadas por los dígitos que lo componen. Por ejemplo, el número 4543 se puede expresar como:

$$4543 = 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

Observación 1

En general un número decimal se puede expresar como:

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

donde a_i es un dígito decimal y n es el número de dígitos menos uno.
Los coeficientes a_i son números enteros no negativos menores que 10. El valor i indica la posición del dígito en el número, comenzando por la derecha con $i = 0$ y por tanto, la potencia de 10 correspondiente es 10^i.

Decimos que un sistema numérico decimal es base 10 porque usa diez dígitos: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. En general, un sistema numérico de base b usa b dígitos, que son los números enteros no negativos menores que b. Por ejemplo, el **sistema binario** es base 2 porque usa dos dígitos: 0 y 1.

Definición 1: Sistema Binario

El sistema binario es un sistema de numeración en el que los números se representan utilizando solamente dos dígitos: 0 y 1.

En este sistema, cada coeficiente a_i es un dígito binario, es decir, un 0 o un 1 y se multiplica por una potencia de 2 en lugar de 10. Por ejemplo, el número binario 1011 se puede expresar como:

$$1011 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

O tomando un número con punto decimal, por ejemplo 11010.11, se puede expresar como:

$$11010.11 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$$

Observación 2

En general, un número expresado en base r consiste en una secuencia de dígitos a_i que se multiplican por potencias de r:

$$a_n \cdot r^n + a_{n-1} \cdot r^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot r^1 + a_0 \cdot r^0 + a_{-1} \cdot r^{-1} + a_{-2} \cdot r^{-2} + \ldots$$

Donde el valor de los coeficientes a_i es un número entero que varía entre 0 y $r - 1$.

Se acostumbra tomar del sistema decimal los r dígitos requeridos si la base es menor que 10, y utilizar las letras del alfabeto para representar los dígitos adicionales. Por ejemplo, en el sistema hexadecimal, que es base 16, se utilizan los dígitos del 0 al 9 y las letras del alfabeto A, B, C, D, E, F para representar los dígitos $10, 11, 12, 13, 14, 15$ respectivamente. Por ejemplo, en la base hexadecimal, el número $2A3F$ se puede expresar como:

$$2A3F = 2 \cdot 16^3 + 10 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0$$

Definición 2: Sistema hexadecimal

El sistema hexadecimal es un sistema de numeración en el que los números se representan utilizando dieciséis dígitos: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$.

1.1 Operaciones en el sistema binario

Método 1: Conversión de binario a decimal

Para convertir un número binario a decimal, se multiplica cada dígito binario (*bit*) por la potencia de 2 correspondiente a su posición y se suman los resultados.

$$a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0$$

Notar que si el bit es 0, su contribución a la suma es 0, y si el bit es 1, su contribución a la suma es 2^i.

A continuación, se muestra una tabla con las potencias de 2 y su valor en decimal:

Potencia de 2	**Valor en decimal**
2^0	1
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	1024

Método 2: Suma de números binarios

La suma de dos números binarios se realiza de la misma forma que la suma de dos números decimales, pero con la diferencia de que el acarreo se produce cuando el resultado de la suma de dos bits es 2 o más. En este caso, el bit de la suma se coloca en la posición correspondiente y se lleva un acarreo a la posición siguiente. Por ejemplo, la suma de 1011 y 1101 se realiza de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 0 & 1 & 1 & (11) \\ + & 1 & 1 & 0 & 1 & (13) \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & (24) \end{array}$$

El resultado es 10000 en binario, que es igual a 16 en decimal. Hay que tener en cuenta las siguientes reglas:

- $0 + 0 = 0$
- $0 + 1 = 1$
- $1 + 0 = 1$
- $1 + 1 = 10$

Método 3: Resta de números binarios

La resta de dos números binarios se realiza de la misma forma que la resta de dos números decimales, pero con la diferencia de que el préstamo se produce cuando el resultado de la resta de dos bits es negativo. En este caso, se toma prestado un bit de la posición siguiente. Por ejemplo, la resta de 1101 y 1011 se realiza de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & (13) \\ - & 1 & 0 & 1 & 1 & (11) \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & (2) \end{array}$$

El resultado es 100 en binario, que es igual a 4 en decimal. Hay que tener en cuenta las siguientes reglas:

- $0 - 0 = 0$
- $0 - 1 = 1$ (y llevamos 1)
- $1 - 0 = 1$
- $1 - 1 = 0$

Método 4: Multiplicación de números binarios

La multiplicación de dos números binarios se realiza teniendo en cuenta dos reglas, la primera regla dice. **Todo número multiplicado por cero es igual a cero** y la segunda, que **uno por uno, es igual a uno.** Luego, el producto se puede hacer de la misma forma a la que se hace en el sistema decimal, esto consiste en multiplicar el multiplicando por cada uno de los dígitos del multiplicador y luego se realiza la suma de los productos. Por ejemplo, la multiplicación de 110 y 10 se realiza de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 1 & 0 \\ & \text{x} & & 1 & 0 \\ \hline & & 0 & 0 & 0 \\ + & 1 & 1 & 0 & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

1.2 Conversiones de base numérica

El proceso de convertir un número de un sistema numérico a otro se realiza plantenado el número en el sistema original y luego se divide sucesivamente por la base del sistema al que se quiere convertir, tomando el residuo de cada división. El resultado se obtiene tomando los residuos en orden inverso. Por ejemplo, para convertir el número 23 en base 10 a base 2, se realiza el siguiente proceso:

División	**Cociente**	**Residuo**
23	11	1
11	5	1
5	2	1
2	1	0
1	0	1

Por lo tanto el número 23 en base 10 es igual a 10111 en base 2. Para convertir un número de base 2 a base 10, se realiza el proceso inverso, multiplicando cada dígito por la potencia de 2 correspondiente a su posición y sumando los resultados.

Observación 3

La conversión de enteros decimales a cualquier base r se puede realizar mediante el algoritmo de la división sucesiva. El algoritmo consiste en dividir el número decimal por la base r y tomar el residuo. Luego, se divide el cociente obtenido por la base r y se toma el residuo. Este proceso se repite hasta que el cociente sea cero. El número en base r se obtiene tomando los residuos en orden inverso.

Ejemplo 1: Conversión de base 10 a base 2

Convertir el número 47 en base 10 a base 2.

Solución: Se realiza el algoritmo de la división sucesiva:

División	Cociente	Residuo
47	23	1
23	11	1
11	5	1
5	2	1
2	1	0
1	0	1

Por lo tanto, el número 47 en base 10 es igual a 101111 en base 2.

Ejemplo 2: Conversión de base 2 a base 10

Convertir el número 101110 en base 2 a base 10.

Solución: Se realiza el proceso inverso, multiplicando cada dígito por la potencia de 2 correspondiente a su posición y sumando los resultados:

$$101110 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 32 + 0 + 8 + 4 + 2 + 0 = 46$$

Por lo tanto, el número 101110 en base 2 es igual a 46 en base 10.

Ejemplo 3: Conversión de base 10 a base 8

Convertir 153 decimal a octal.

Solución: Se realiza el algoritmo de la división sucesiva:

División	Cociente	Residuo
153	19	1
19	2	3
2	0	2

Por lo tanto, el número 153 en base 10 es igual a 231 en base 8. Ahora veamos como se tratan las fracciones decimales.
La conversión de una *fracción* decimal a binario se efectúa con un método similar al que se utiliza con enteros decimales, pero se multiplica en lugar de dividir y se acumulan enteros en vez de residuos. Por ejemplo, se

tiene que convertir el número $(0.6875)_{10}$ a binario. Se multiplica el número por 2 y se toma la parte entera del resultado, luego se multiplica la parte decimal del resultado por 2 y se toma la parte entera del resultado, y así sucesivamente. El resultado se obtiene tomando las partes enteras en orden

Multiplicación	**Parte entera**	**Parte decimal**
$0.6875 \cdot 2 = 1.375$	1	0.375
$0.375 \cdot 2 = 0.75$	0	0.75
$0.75 \cdot 2 = 1.5$	1	0.5
$0.5 \cdot 2 = 1.0$	1	0

Por lo tanto la respuesta es $(0.1011)_2$.

Observación 4

Para convertir una fracción decimal a un número en base r, seguimos un procedimiento similar, multiplicando por r y tomando la parte entera del resultado, y luego multiplicando la parte decimal del resultado por r y tomando la parte entera del resultado, y así sucesivamente. El resultado se obtiene tomando las partes enteras en orden.

Ejemplo 4: Conversión de fracción decimal a octal

Convertir $(0.513)_{10}$ a octal.

Solución: Se multiplica el número por 8 y se toma la parte entera del resultado, luego se multiplica la parte decimal del resultado por 8 y se toma la parte entera del resultado, y así sucesivamente. El resultado se obtiene tomando las partes enteras en orden.

Multiplicación	**Parte entera**	**Parte decimal**
$0.513 \cdot 8 = 4.104$	4	0.104
$0.104 \cdot 8 = 0.832$	0	0.832
$0.832 \cdot 8 = 6.656$	6	0.656
$0.656 \cdot 8 = 5.248$	5	0.248
$0.248 \cdot 8 = 1.984$	1	0.984
$0.984 \cdot 8 = 7.872$	7	0.872

Por lo tanto, la respuesta es $(0.406517)_8$.

1.3 Conversión entre octal y hexadecimal

Las conversiones entre binario, octal y hexadecimal desempeñan un papel importante en las computadoras digitales. Puesto que $2^3 = 8$ y $2^4 = 16$, cada dígito octal corresponde a tres dígitos binarios y cada dígito hexadecimal corresponde a cuatro dígitos binarios. En la siguiente tabla se presentan los primeros 16 números de los sistemas binario, octal y hexadecimal.

Decimal (base 10)	Binario (base 2)	Octal (base 8)	Hexadecimal (base 16)
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Método 5: Conversión de binario a octal

La conversión de binario a octal se efectúa facilmente acomodando los dígitos del número binario en grupos de tres, partiendo del punto binario tanto a la izquierda como a la derecha. Luego, se asigna el dígito octal correspondiente a cada grupo. Así se ilustra el proceso de conversión de binario a octal:

$$\underbrace{101}_{5}\,\underbrace{110}_{6} \Rightarrow (101.110)_2 = (5.6)_8$$

Binario	Octal	Decimal
101	5	5
110	6	6
101.110	5.6	5.75

Método 6: Conversión de octal o hexadecimal a binario

La conversión de octal o hexadecimal a binario se hace invirtiendoel procedimiento anterior. Cada dígito octal se convierte a su equivalente binario de tres dígitos. Asimismo, cada dígito hexadecimal se convierte en su equivalente binario de cuatro dígitos. Por ejemplo, el número $(5.6)_8$ se convierte a binario de la siguiente forma:

Octal	Binario	Decimal
5	101	5
6	110	6
5.6	101.110	5.75

Y el número $306.D_{16}$ se convierte a binario de la siguiente forma:

Hexadecimal	Binario	Decimal
3	0011	3
0	0000	0
6	0110	6
D	1101	13
306.D	001100000110.1101	774.8125

1.4 Complementos

Definición 3: Complemento a la base disminuida

Dado un número N en base r que tiene n dígitos, el complemento $(r-1)$ de N se define como el número $(r^n - 1) - N$. En el caso de los números decimales $(r = 10)$, el complemento $(r-1)$ de N se define como el número $(10^n - 1) - N$. En este caso, 10^n representa un número que consiste en un uno seguido de n ceros. $10^n - 1$ es un número que consiste en n nueves.

Ejemplo 5: Complemento $(r-1)$ de un número decimal

Por ejemplo en la base decimal, se tiene $n = 4$, tenemos $10^4 = 10000$ y $10^4 - 1 = 9999$. Entonces, el complemento $(10-1)$ de 1234 es $9999 - 1234 = 8765$.

Ejemplo 6: Complemeto $(r-1)$ de un número decimal

Se tiene $N = 546700$ y se quiere calcular el complemento $(10-1)$ de N. Se tiene que $10^6 = 1000000$ y $10^6 - 1 = 999999$. Entonces, el complemento $(10-1)$ de 546700 es $999999 - 546700 = 453299$.

Ejemplo 7: Complemento $(r-1)$ de un número decimal

Se tiene $N = 012398$ y se quiere calcular el complemento $(10-1)$ de N. Se tiene que $10^6 = 1000000$ y $10^6 - 1 = 999999$. Entonces, el complemento $(10-1)$ de 012398 es $999999 - 12398 = 987601$.

Observación 5: Complemento de números binarios

El complemento $(2-1)$ de un número binario se define como el número $(2^n - 1) - N$. En este caso, 2^n representa un número que consiste en un uno seguido de n ceros. $2^n - 1$ es un número que consiste en n unos.

Ejemplo 8: Complemento $(2-1)$ de un número binario

Si se tiene $n = 4$, tenemos $2^4 = 10000$ y $2^4 - 1 = 1111$. Entonces, el complemento $(2-1)$ de 1010 es $1111 - 1010 = 0101$.

Con esto podriamos decir que el complemento a uno de un número binario se obtiene restando cada dígito a uno. Sin embargo, al restar números binarios a uno podemos tener $1 - 0 = 1$ o bien $1 - 1 = 0$, lo que hace que el bit cambie de 0 a 1 o de 1 a 0. Por lo tanto, **el complemento a uno de un número binario se**

obtiene cambiando cada dígito 0 por 1 y cada dígito 1 por 0.

Definición 4: Complemento a la base

El complemento a r de un número N de n dígitos en base r se define como $r^n - N$, para $N \neq 0$, y 0 para $N = 0$.

Observación 6

Puesto que 10^n es un número que se representa con un uno seguido de n ceros, $10^n - N$, que se define como el complemento 10 de N, tambien puede formarse dejando como están todos los ceros menos significativos, restando a 10 el primer dígito menos significativo distinto de cero, y restando 9 a los demas dígitos de la izquierda.

Ejemplo 9: Complemento a 10 de un número decimal

Se tiene que buscar el complemento a 10 de $N = 012398$ en base 10. Se tiene que $10^6 = 1000000$. Entonces, el complemento a 10 de 012398 es $1000000 - 12398 = 987602$.

Ejemplo 10: Complemento a 10 de un número decimal

Se tiene que buscar el complemento a 10 de $N = 546700$ en base 10. Se tiene que $10^6 = 1000000$. Entonces, el complemento a 10 de 546700 es $1000000 - 546700 = 453300$.

1.5 Complemento con punto

Si el número N original lleva punto, deberá quitarse temporalmente para formar el complemento a ro a $(r-1)$, y volver a colocarlo despues del número complementado en la misma posición relativa. También vale la pena mencionar que el complemento del complemento restablece el valor original del número. El complemento a r de N es $r^n - N$.

1.6 Solución del Práctico 1

Ejercicio 1

Convertir los siguientes números en hexadecimal a binario de 32 bits:

a) $0xABCDEF00$

b) $0x123456$

c) $0x8E3FC581$

d) $0x10A6F2B$

Solución: **Punto a:** Se tiene que $0xABCDEF00 = 10101011110011011110111100000000$.

$$\underbrace{A}_{1010}\underbrace{B}_{1011}\underbrace{C}_{1100}\underbrace{D}_{1101}\underbrace{E}_{1110}\underbrace{F}_{1111}\underbrace{0}_{0000}\underbrace{0}_{0000}$$

Punto b: Se tiene que $0x123456 = 000100100011010001010110$.

$$\underbrace{1}_{0001}\underbrace{2}_{0010}\underbrace{3}_{0011}\underbrace{4}_{0100}\underbrace{5}_{0101}\underbrace{6}_{0110}$$

Punto c: Se tiene que $0x8E3FC581 = 10001110001111111100010110000001$.

$$\underbrace{8}_{1000}\underbrace{E}_{1110}\underbrace{3}_{0011}\underbrace{F}_{1111}\underbrace{C}_{1100}\underbrace{5}_{0101}\underbrace{8}_{1000}\underbrace{1}_{0001}$$

Punto d: Se tiene que $0x10A6F2B = 0001000010100110111100101011$.

$$\underbrace{1}_{0001}\underbrace{0}_{0000}\underbrace{A}_{1010}\underbrace{6}_{0110}\underbrace{F}_{1111}\underbrace{2}_{0010}\underbrace{B}_{1011}$$

Ejercicio 2

Convertir los siguientes números en binario a decimal y a hexadecimal:

a) 1110011110000011

b) 10110111001101000101111

c) 10110011011011.11000010000

d) 1000111111010001111.000001101

Solución: **Punto a:** Se tiene que:

$$1110011110000011 = 1 \cdot 2^{15} + 1 \cdot 2^{14} + 1 \cdot 2^{13} + 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^{9} + 1 \cdot 2^{8} + 1 \cdot 2^{7} + 1 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 1 \cdot 2^{0} = 59267$$

Para pasar a hexadecimal hay que tomar de a cuatro dígitos:

$$\underbrace{1110}_{E}\underbrace{0111}_{7}\underbrace{1000}_{8}\underbrace{0011}_{3} = 0xE783$$

Punto b: Se tiene que:

$$10110111001101000101111 = 2^{22} + 2^{20} + 2^{19} + 2^{17} + 2^{16} + 2^{15} + 2^{12} + 2^{11} + 2^{9} + 2^{5} + 2^{3} + 2^{2} + 2^{1} + 2^{0} = 6003247$$

Para pasar a hexadecimal hay que tomar de a cuatro dígitos:

$$\underbrace{0101}_{5}\underbrace{1011}_{B}\underbrace{1001}_{9}\underbrace{1010}_{A}\underbrace{0010}_{2}\underbrace{1111}_{F} = 0x5B9A2$$

...

Ejercicio 3

Suponiendo que se tienen registros de 16 bits, convertir a binario **sin** signo los siguientes números en base 10:

a) 123

b) 59

c) $255, 46$

d) 98.019

Solución: **Punto a:** Se tiene que 123 = 1111011. **Punto b:** Se tiene que 59 = 111011. **Punto c:** Se tiene que 255 = 11111111. **Punto d:** Se tiene que 98.019 = 1100010.0000010011.

...