Introducción a la Lógica y la Computación - Estructuras de orden - Práctico 1: Relaciones. 2024

Villar Pedro

(1) Determine si la relación dada es una relación de equivalencia sobre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si la relación es de equivalencia, indique las clases de equivalencia.

(a) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1)\}$

(b) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

(c) $\{(x, y)|1 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 5\}$

Solución

Recordemos la definición:

Una relación es de equivalencia si satisface las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad.

(a) La relación es de equivalencia. Las clases de equivalencia son $\{1, 3\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}$.
Prueba: la relación es reflexiva ya que $(x, x) \in R$ para todo $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, la relación es simétrica ya que si $(x, y) \in R$ entonces $(y, x) \in R$ y la relación es transitiva ya que si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ entonces $(x, z) \in R$.

(b) La relación no es de equivalencia.
Prueba: la relación no es simétrica ya que $(1, 3) \in R$ pero $(3, 1) \notin R$.

(c) La relación no es de equivalencia.
Prueba: la relación no es simétrica ya que $(1, 2) \in R$ pero $(2, 1) \notin R$.

(2) Determine si las siguientes relaciones sobre $\mathbb{Z}$ son reflexivas, simétricas, antisimétricas o transitivas:

(a) $(x, y) \in R$ si $x^2 = y^2$

(c) $(x, y) \in R$ si $x \geq y$

(b) $(x, y) \in R$ si $x > y$

(d) $(x, y) \in R$ si $x \neq y$

Solución

(a) La relación es reflexiva, simétrica y transitiva.
Prueba: la relación es reflexiva ya que $x^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, la relación es simétrica ya que si $x^2 = y^2$ entonces $y^2 = x^2$ y la relación es transitiva ya que si $x^2 = y^2$ y $y^2 = z^2$ entonces $x^2 = z^2$.

(c) La relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
Prueba: la relación es reflexiva ya que $x \geq x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, la relación es antisimétrica ya que si $x \geq y$ y $y \geq x$ entonces $x = y$ y la relación es transitiva ya que si $x \geq y$ y $y \geq z$ entonces $x \geq z$.

(b) La relación es irreflexiva, antisimétrica y transitiva.
Prueba: la relación es irreflexiva ya que $x \not< x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, la relación es antisimétrica ya que si $x > y$ y $y > x$ entonces $x = y$ y la relación es transitiva ya que si $x > y$ y $y > z$ entonces $x > z$.

(d) La relación es irreflexiva, simétrica y transitiva.

Prueba: la relación es irreflexiva ya que $x \neq x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, la relación es simétrica ya que si $x \neq y$ entonces $y \neq x$ y la relación es transitiva ya que si $x \neq y$ y $y \neq z$ entonces $x \neq z$.

(3) Utilizando las respuestas del ejercicio (2) determine para cada caso si la relación es de equivalencia y/o de orden. Recuerde que una relación de orden debe ser reflexiva, antisimétrica, y transitiva.

Solución

(a) La relación es de equivalencia.
Prueba: la relación es reflexiva ya que $x^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, la relación es simétrica ya que si $x^2 = y^2$ entonces $y^2 = x^2$ y la relación es transitiva ya que si $x^2 = y^2$ y $y^2 = z^2$ entonces $x^2 = z^2$.

(c) La relación es de orden.
Prueba: la relación es reflexiva ya que $x \geq x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, la relación es antisimétrica ya que si $x \geq y$ y $y \geq x$ entonces $x = y$ y la relación es transitiva ya que si $x \geq y$ y $y \geq z$ entonces $x \geq z$.

(b) La relación no es de orden ni de equivalencia.
Prueba: la relación no es reflexiva ya que $x \not< x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, la relación es antisimétrica ya que si $x > y$ y $y > x$ entonces $x = y$ pero no es reflexiva, la relación es transitiva ya que si $x > y$ y $y > z$ entonces $x > z$ pero no es reflexiva.

(d) La relación no es de orden ni de equivalencia.
Prueba: la relación no es reflexiva ya que $x \neq x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, la relación es simétrica ya que si $x \neq y$ entonces $y \neq x$ pero no es reflexiva, la relación es transitiva ya que si $x \neq y$ y $y \neq z$ entonces $x \neq z$ pero no es reflexiva.

(4) Sea A un conjunto y f una función definida en A. Probar que la relación $\{(x, y) \in A \times A | f(x) = f(y)\}$ es una relación de equivalencia sobre A. Comparar con 2 a.

Solución

- Reflexividad: $f(x) = f(x)$ para todo $x \in A$ por lo que $(x, x) \in R$ para todo $x \in A$.
- Simetría: Si $f(x) = f(y)$ entonces $f(y) = f(x)$ por lo que $(x, y) \in R$ implica $(y, x) \in R$.
- Transitividad: Si $f(x) = f(y)$ y $f(y) = f(z)$ entonces $f(x) = f(z)$ por lo que $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ implica $(x, z) \in R$.

Por lo tanto, la relación es de equivalencia.

(5) Utilizando como motivación con los ejercicios 2 b y 2c, responda:

(a) Sea R una relación irreflexiva y transitiva (relación de orden parcial estricto") sobre un conjunto A. Probar que $R\cup$ Igualdad $_A$ es una relación de orden parcial sobre A.

(b) ¿Cómo se podrá obtener una relación de orden parcial estricto a partir de una relación de orden parcial?

Solución

(a) Sea R una relación irreflexiva y transitiva sobre un conjunto A. Para probar que $R\cup$ Igualdad $_A$ es una relación de orden parcial sobre A debemos probar que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

- Reflexividad: $x = x$ para todo $x \in A$ por lo que $(x, x) \in R\cup$ Igualdad $_A$ para todo $x \in A$.
- Antisimetría: Si $(x, y) \in R\cup$ Igualdad $_A$ y $(y, x) \in R\cup$ Igualdad $_A$ entonces $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$ o $x = y$ y $y = x$ por lo que $x = y$.
- Transitividad: Si $(x, y) \in R\cup$ Igualdad $_A$ y $(y, z) \in R\cup$ Igualdad $_A$ entonces $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ o $x = y$ y $y = z$ por lo que $x = z$.

Por lo tanto, $R\cup$ Igualdad $_A$ es una relación de orden parcial sobre A.

(b) Para obtener una relación de orden parcial estricto a partir de una relación de orden parcial debemos eliminar la reflexividad. Es decir, si R es una relación de orden parcial sobre un conjunto A entonces $R\setminus$ Igualdad $_A$ es una relación de orden parcial estricto sobre A.

(6) Liste los pares de la relación de equivalencia sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ definida por la partición dada. También señale las clases de equivalencia [1], [2], [3] y [4].

(a) $\{1, 2\}, \{3, 4\}$

(b) $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$

Solución

(a) La relación de equivalencia es $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$. Las clases de equivalencia son $[1] = \{1, 2\}$ y $[2] = \{3, 4\}$.

(b) La relación de equivalencia es $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$. Las clases de equivalencia son $[1] = \{1\}$, $[2] = \{2\}$, $[3] = \{3\}$ y $[4] = \{4\}$.

(7) Sea R la relación "Fulano no es más viejo que Mengano"sobre un conjunto de personas A.

(a) De un ejemplo, puede ser ficticio, de un conjunto A de personas en los cuales esa relación no sea un orden parcial.

(b) Explique qué propiedad falla para que sea un orden parcial.

Solución

(a) Sea $A = \{Fulano, Mengano\}$ y la relación $R = \{(Fulano, Mengano)\}$. La relación no es un orden parcial ya que no es reflexiva.

(b) La propiedad que falla es la reflexividad. La relación no es reflexiva ya que Fulano no es más viejo que Mengano pero Mengano no es más viejo que Fulano.