Ejercicio 1

Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo y V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial.

- (a) *(5 pts.)*. Sean $v_1, \ldots, v_n$ vectores en V. Dar la definición del subespacio vectorial $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
- (b) *(5 pts.)*. Sean $v, w \in V$ y $\lambda \in \mathbb{k}$. Demostrar que
$$\langle v, w \rangle = \langle v, \lambda v + w \rangle.$$
- (c) *(5 pts.)*. Sean $v, w, u \in V$. Demostrar que si $\{v, w, u\}$ es un conjunto LI entonces
$$\langle v, w \rangle \neq \langle v, u \rangle$$
- (d) *(5 pts.)*. Calcular la dimensión del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.
$$W = \langle (1,0,1,0), (-1,1,0,1), (0,1,1,1), (-1,1,0,1) \rangle$$

Punto a

Sea V un espacio vectorial sobre K y sean $v_1, \ldots, v_n \in V$. Al subespacio vectorial $W = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\}$ de las combinaciones lineales de $v_1, \ldots, v_n$ se lo denomina *subespacio generado por* $v_1, \ldots, v_n$ y se lo denota

$$\begin{aligned} W &= & \langle v_1, \ldots, v_n \rangle, &\quad \text{o} \\ W &= & \operatorname{gen}\{v_1, \ldots, v_n\} &\quad \text{o} \\ W &= & \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}. & \end{aligned}$$

Punto b

Hay que probar lo siguiente:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 + \lambda v_1 \rangle$$

Por un lado se tiene que existen escalares $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ tal que $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ y por otro se tiene que existen escalares $\lambda_1', \lambda_2' \in K$ tal que $v' = \lambda_1' v_1 + \lambda_2' \cdot (v_2 + \lambda v_1)$ reescribiendo la ecuación:

$$v' = \lambda_1' v_1 + \lambda_2' \cdot (v_2 + \lambda v_1) = \lambda_1' v_1 + \lambda_2' \cdot v_2 + \lambda_2' \cdot \lambda v_1 = (\lambda_1' + \lambda_2') \cdot v_1 + \lambda_2' \cdot v_2$$

Por lo tanto, se prueba que un elemento de $\langle v_1, v_2 + \lambda v_1 \rangle$ pertenece a $\langle v_1, v_2 \rangle$. Análogamente se prueba que un elemento de $\langle v_1, v_2 \rangle$ pertenece a $\langle v_1, v_2 + \lambda v_1 \rangle$. Ambos se pueden escribir como combinación lineal de v_1 y v_2, por lo tanto queda demostrada la afirmación.

Punto c

Supongamos que $\langle v, w\rangle = \langle v, u\rangle$, entonces un vector del primer subespacio $s = \lambda_1 v + \lambda_2 w$ también puede escribirse como $\lambda_3 v + \lambda_4 u$, y se podría igualar:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 v + \lambda_2 w &= \lambda_3 v + \lambda_4 u \\
\lambda_1 v + \lambda_2 w - \lambda_3 v &= \lambda_4 u \\
(\lambda_1 - \lambda_3)v + \lambda_2 w &= \lambda_4 u \\
\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)v}{\lambda_4} + \frac{\lambda_2 w}{\lambda_4} &= u \\
\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_4} v + \frac{\lambda_2}{\lambda_4} w &= u
\end{aligned}$$

Esto quiere decir que u se puede escribir como combinación lineal de v y w, y esto contradice que el conjunto sea LI, por lo tanto se probó por contradicción o absurdo que si $\{v, w, u\}$ es un conjunto LI, entonces $\langle v, w\rangle \neq \langle v, u\rangle$.

Punto d

Para ver la dimensión del subespacio de R^4, primero planteo la matriz y reduzco para encontrar si es que existe, algún vector que sea combinación lineal del resto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esto quiere decir que la dimensión del subespacio es 2 y puede escribirse como

$$W = \langle (1,0,1,0),(0,1,1,1) \rangle$$

Ejercicio 2

Sean $a, b, c, d, e, f \in R$ con a, d, f no nulos y sea U la matriz triangular superior

$$U = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

- (a) *(5 pts.)* Encontrar la inversa de U.
- (b) *(5 pts)*. Demostrar que si las columnas de U son autovectores de una matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$, entonces A es triangular superior.

Punto a

Para hallar la inversa utilizo la matriz adjunta:
(Sea $A \in M_n(K)$, llamaremos **matriz adjunta** de A a la matriz $adj(A) = [C_{ij}]^T$ donde C_{ij} es el cofactor de lugar (i, j))

$$adj\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} df & -bf & be - cd \\ 0 & af & -ea \\ 0 & 0 & ad \end{bmatrix}$$

Ahora aplico la fórmula que permite calcular la inversa

$$\frac{1}{det(U)}adj(U) = U^{-1}$$

$$\frac{1}{adf} \cdot \begin{bmatrix} df & -bf & be - cd \\ 0 & af & -ea \\ 0 & 0 & ad \end{bmatrix} = U^{-1}$$

Y por lo tanto

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{ad} & \frac{be-cd}{adf} \\ 0 & \frac{1}{d} & \frac{-e}{df} \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3

Sean $a, b \in R$ y sean L1 y L2 las rectas en $\mathbb{R}^3$ dadas por

$$L_1 = \{t(a,1,1) + (2,1,0) : t \in \mathbb{R}\},$$
$$L_2 = \{s(1,0,b) + (1,1,-1) : s \in \mathbb{R}\}.$$

- (a) *(5 pts.)* Determinar todos los pares $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tales que la intersección $L1 \cap L2$ posee exactamente un punto.
- (b) *(5 pts.)* Determinar todos los pares $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tales que la intersección $L1 \cap L2$ es el conjunto vacío.

Primero voy a expresar las rectas $L1$ y $L2$ en forma implícita para poder armar los sistemas de ecuaciones:

Recta $L1$

$$\begin{aligned} t(a,1,1)+(2,1,0) &= (ta,t,t)+(2,1,0) \\ &= (ta+2,t+1,t) \end{aligned}$$

De acá se puede igualar a un vector genérico (x,y,z) y se obtiene que:
$x=ta+2,\ y=t+1$ y $z=t$, despejando t de cada ecuación: $t=\frac{x-2}{a},\ t=y-1$ y $t=z$, ahora se pueden igualar para eliminar el parámetro t

$$\begin{gathered} \frac{x-2}{a}=y-1=z \\ x-2=ay-a=za \end{gathered}$$

Igualando primero la primera con la última ecuación

$$\frac{x-2}{a} = z$$

$$x - 2 = za$$

$$x - za = 2$$

Luego igualando la primera con la segunda ecuación

$$\frac{x-2}{a} = y - 1$$

$$x - 2 = ay - a$$

$$x - ay = 2 - a$$

Entonces la recta queda definida como:

$$\begin{cases} x - za = 2 \\ x - ay = 2 - a \end{cases}$$

Recta $L2$

$$\begin{aligned} s(1,0,b)+(1,1,-1) &= (s,0,sb)+(1,1,-1) \\ &= (s+1,1,sb-1) \end{aligned}$$

De acá se puede igualar a un vector genérico (x,y,z) y se obtiene que:
$x=s+1,\ y=1$ y $z=sb-1$, despejando s de cada ecuación: $s=x-1,\ y=1$ y $s=\frac{z+1}{b}$, ahora se pueden igualar para eliminar el parámetro s:

$$\begin{aligned} x-1 &= \frac{z+1}{b} \\ bx-b &= z+1 \\ bx-z &= 1+b \end{aligned}$$

Pero como $y = 1$, entonces la forma implícita es:

$$\begin{cases} bx - z = 1 + b \\ y = 1 \end{cases}$$

Punto a y b

Planteo la intersección con un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - za = 2 \\ x - ay = 2 - a \\ bx - z = 1 + b \\ y = 1 \end{cases}$$

Lo paso a matriz y reduzco:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ 1 & -a & 0 & -a+2 \\ b & 0 & -1 & b+1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & -a & a & -a \\ b & 0 & -1 & b+1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3 - bf_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & -a & a & -a \\ 0 & 0 & ab-1 & -b+1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4 <-> f_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ab-1 & -b+1 \\ 0 & -a & a & -a \end{bmatrix} \xrightarrow{f_4 + af_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ab-1 & -b+1 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

Acá es necesario separar en dos casos principales:

1. Si $ab-1 \neq 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ab-1 & -b+1 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_4 - \frac{a}{ab-1} f_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ab-1 & -b+1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-a+ab}{ab-1} \end{bmatrix}$$

Ahora salen dos casos mas:

- Si $a \neq 0, b \neq 1$ (si b fuese 1, la tercera fila quedaría $ab - 1 = 0$ y como $ab - 1 \neq 0$, seria un absurdo y se está buscando analizar la última fila.):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ab-1 & -b+1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-a+ab}{ab-1} \end{bmatrix}$$

El sistema es:

$$\begin{cases} x = \frac{a+ab-2}{ab-1} \\ y = 1 \\ z = \frac{-b+1}{ab-1} \\ 0 = \frac{-a+ab}{ab-1} \end{cases}$$

no existe solución, ya que $\frac{-a+ab}{ab-1} \neq 0$ y por lo tanto se llega a una igualdad incorrecta.

- Si $-a+ab=0, a\neq 1, b\neq 1$:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ab-1 & -b+1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-a+ab}{ab-1}\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ab-1 & -b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

El sistema es:

$$\begin{cases} x-az=2 \\ y=1 \\ (ab-1)z=-b+1 \end{cases}$$

De la tercera ecuación sale que $z = \frac{-b+1}{ab-1}$ y de la primera ecuación se tiene que $x = 2 + az$ reemplazo z, $x = 2 + a\frac{-b+1}{ab-1} = \frac{a+ab-2}{ab-1}$, entonces la solución única es:

$$\begin{cases} x = \frac{a+ab-2}{ab-1} \\ y = 1 \\ z = \frac{-b+1}{ab-1} \end{cases}$$

2. Si $ab - 1 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ab-1 & -b+1 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -b+1 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_4<->f_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b+1 \end{bmatrix}$$

De acá salen dos casos mas:

- Si $ab-1=0, b\neq 1$ no existe solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b+1 \end{bmatrix}$$

El sistema es:

$$\begin{cases} x-az=2 \\ y=1 \\ az=0 \\ 0=-b+1 \end{cases}$$

Se llega a una igualdad incorrecta, por lo tanto el sistema no tiene solución.

- Si $a = 1, b = 1$, hay solución única:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema es:

$$\begin{cases} x - az = 2 \\ y = 1 \\ az = 0 \end{cases}$$

De la tercera ecuación sale que $z=0$ después reemplazando en la primera, $x=2$ y por lo tanto la solución es:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Entonces, el conjunto de pares (a,b) para los cuales $L_1 \cap L_2$ posee exactamente un punto es:

$$\{(a,b) : ab-1 \neq 0 \wedge (a-ab=0 \wedge a \neq 1) \vee (a=1 \wedge b=1)\}$$

,y el conjunto para los cuales el conjunto es vacío es

$$\{(a,b) : (ab-1 \neq 0 \ \wedge \ a \neq 0 \ \wedge \ b \neq 1) \vee (ab-1=0 \ \wedge \ b \neq 1)\}$$

Ejercicio 4

Sean $\mathbb{B} = \{1, x, x2, x3 + x\}$ base de $\mathbb{R}_4[x]$ y sea $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Sea $T : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) *(5 pts.)* Calcular la dimensión del núcleo de T .
- (b) *(5 pts.)* Decidir si T es suryectiva. Justificar.

Como

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces se puede afirmar que:

- $T(1) = (0, 1)$
- $T(x) = (-1, 2)$
- $T(x^2) = (1, 0)$
- $T(x^3 + x) = (1, 0)$

Primero voy a obtener $T(ax^3 + bx^2 + cx + d)$ para luego calcular el núcleo. Como $\mathcal{B}$ genera a $\mathbb{R}_4[x]$, quiere decir que a $ax^3 + bx^2 + cx + d$ se lo puede escribir como combinación lineal de los elementos de la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= \lambda_1 1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 (x^3 + x) \\ &= \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3 + \lambda_4 x \\ &= \lambda_4 x^3 + \lambda_3 x^2 + (\lambda_2 + \lambda_4) x + \lambda_1 \end{aligned}$$

Como la igualdad de polinomios es una igualdad coeficientes a coeficientes, se forma el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a = \lambda_4 \\ b = \lambda_3 \\ c = \lambda_2 + \lambda_4 \\ d = \lambda_1 \end{cases}$$

De la tercera ecuación sale que $\lambda_2 = c - a$, y entonces:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = d1 + (c - a)x + bx^2 + a(x^3 + x)$$

Aplico transformación lineal de cada lado:

$$
\begin{aligned}
ax^3 + bx^2 + cx + d &= d1 + (c-a)x + bx^2 + a(x^3 + x) \\
T(ax^3 + bx^2 + cx + d) &= T(d1 + (c-a)x + bx^2 + a(x^3 + x)) \\
&= T(d1) + T((c-a)x) + T(bx^2) + T(a(x^3 + x)) \\
&= dT(1) + (c-a)T(x) + bT(x^2) + aT(x^3 + x)
\end{aligned}
$$

Pero los valores de la trasformación lineal aplicada a cada elemento de la base se tienen:

$$\begin{aligned} T(ax^3 + bx^2 + cx + d) &= dT(1) + (c-a)T(x) + bT(x^2) + aT(x^3 + x) \\ &= d(0,1) + (c-a)(-1,2) + b(1,0) + a(1,0) \\ &= (0,d) + (a-c, 2c-2a) + (b,0) + (a,0) \\ &= (2a + b - c, d + 2c - 2a) \end{aligned}$$

Punto a

El núcleo por definición son todos los polinomios $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que $T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (0, 0)$, como la transformación ya está definida, se arma el sistema:

$$\begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ d + 2c - 2a = 0 \end{cases}$$

Lo paso a matriz para simplificar un poco:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 + f_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y el sistema queda

$$\begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ b = -c - d \end{cases}$$

Reemplazando b en la primera ecuación $2a = -(-c-d)+c = 2c+d$ entonces $a = c + \frac{1}{2}d$ ahora queda todo en función de c y d, se puede definir al núcleo como:

$$Nu(T) = \left\{(c + \frac{1}{2}d)x^3 + (-c-d)x^2 + cx + d : c, d \in \mathbb{R}\right\}$$

Para saber la dimensión del núcleo, se tiene que un vector en dicho conjunto es de la forma: $(c + \frac{1}{2}d)x^3 + (-c-d)x^2 + cx + d$ que es lo mismo que $cx^3 + \frac{1}{2}dx^3 - cx^2 - dx^2 + cx + d$ ahora tomando como factor común las variables libres: $c(x^3 - x^2 + x) + d(\frac{1}{2}x^3 - x^2 + 1)$ se tiene que una base del núcleo es $\{x^3 - x^2 + x, \frac{1}{2}x^3 - x^2 + 1\}$ y la dimensión es la cantidad de vectores en la base, es decir $dim(Nu(T)) = 2$.

Como ejemplo se puede tomar al vector $v = 0 \cdot (x^3 - x^2 + x) + 1 \cdot (\frac{1}{2}x^3 - x^2 + 1)$ y al aplicarle transformación lineal:

$$T(\frac{1}{2}x^3 - x^2 + 1) = \left(2\frac{1}{2} - 1, 1 - 2\frac{1}{2}\right) = (0,0)$$

v pertenece al núcleo.

Punto b

Por teorema de la dimensiones, $dim(\mathbb{R}_4[x]) = dim(Im(T)) + dim(Nu(T))$ se tienen las dimensiones del espacio de salida y del núcleo:

$$\begin{aligned} dim(\mathbb{R}_4[x]) &= dim(Im(T)) + dim(Nu(T)) \\ 4 &= dim(Im(T)) + 2 \\ dim(Im(T)) &= 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

Como el $rango$ de T equivale a la dimensión del conjunto de llegada, es decir $rango(T) = dim(\mathbb{R}^2)$, entonces T es un epimorfismo, esto quiere decir que es suryectiva.

Ejercicio 5

Sea $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-2y & 2x-4y \\ z+3w & 2z+6w \end{bmatrix}$$

- (a) *(5 pts.)* Decidir si la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ pertenece a ImT . Justificar.
- (b) *(10 pts.)* Calcular los autovalores reales de T.
- (c) *(10 pts.)* Calcular los autoespacios de los autovalores calculados en el punto anterior.
- (d) *(5 pts.)* Decidir si T es diagonalizable.

Primero voy a sacar una base de la imagen, un vector genérico de salida es de la forma

$$\begin{bmatrix} x-2y & 2x-4y \\ z+3w & 2z+6w \end{bmatrix}$$

que es lo mismo que

$$x\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

A simple viste se puede notar que $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (-2)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

por lo tanto una base correcta de la imagen es:

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$

Punto a

Para verificar si la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ pertenece a la imagen, hay que ver si se puede escribir como combinación lineal de los elementos de la base de la imagen, a simple vista se puede ver que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el vector sí pertenece a la imagen.

Punto b

Para obtener los autovalores reales de T primero hay que hallar la matriz de T, para ello tomo la base canónica de $M_2(\mathbb{R})$ y le aplico T para formarla:

- $T\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}$
- $T\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-2 & -4\\0 & 0\end{bmatrix}$
- $T\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}$
- $T\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & 0\\3 & 6\end{bmatrix}$

Luego los expreso en función de la base canónica para obtener los vectores coordenada y posiciono cada vector como columna de una matriz:

- $\left[T\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)\right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$
- $\left[T\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)\right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}-2\\ -4\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

- $\left[T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $\left[T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Para hallar los autovalores reales, se plantea el polinomio característico

$$\chi(x) = det(A - xId) = \begin{vmatrix} 1-x & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6-x \end{vmatrix}$$

Reduzco la matriz para que queda mas fácil de operar:

$$\begin{bmatrix} 1-x & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6-x \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 - \frac{x-1}{2} c_2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ \frac{x(x+3)}{2} & -4-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6-x \end{bmatrix}$$

Ahora calculo el determinante de la matriz resultante expandiendo por la fila 1:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ \frac{x(x+3)}{2} & -4-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6-x \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} \frac{x(x+3)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 3 \\ 0 & 2 & 6-x \end{vmatrix} = 2\cdot\frac{x(x+3)}{2}\begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & 6-x \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot\frac{x(x+3)}{2}((1-x)(6-x)-6) = x(x+3)(x^2-7x)$$

$$= x^2(x+3)(x-7)$$

Las raíces del polinomio característico, los autovalores reales son: $0, -3, 7$.

Punto c

Ahora para encontrar los autoespacios de los autovalores del punto anterior, hay que resolver los siguientes sistemas:

1. Con $x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para ello reduzco primero la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 - 2f_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_4 - 2f_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De acá salen las ecuaciones: $x - 2y = 0$ y $z + 3w = 0$, de la primera ecuación $x = 2y$ y de la segunda $z = -3w$, por lo tanto las soluciones son de la forma $(2y, y, -3w, w)$ y los dos autovectores asociados al autovalor 0 son $(2, 1, 0, 0)$ y $(0, 0, -3, 1)$, el autoespacio correspondiente es $V_0 = \langle (2, 1, 0, 0), (0, 0, -3, 1) \rangle$.

2. Con $x = -3$

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para ello reduzco primero la matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_1/2} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1/4} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_4 - f_3/2} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 15/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 \cdot 2/15} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3 - 3f_4} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_3/4} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De acá salen las ecuaciones: $x - 1/2y = 0$, $z = 0$ y $w = 0$, entonces $x = 1/2y$, las soluciones son de la forma $(1/2y, y, 0, 0)$, el vector asociado es $(1/2, 1, 0, 0)$ y el autoespacio es $V_3 = \langle (1/2, 1, 0, 0) \rangle$.

3. Con $x = 7$

$$\begin{bmatrix} -6 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para ello reduzco primero la matriz

$$\begin{bmatrix} -6 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2<->f_1} \begin{bmatrix} 2 & -11 & 0 & 0 \\ -6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2+3f_1} \begin{bmatrix} 2 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & -35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2(-1/35)} \begin{bmatrix} 2 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1+11f_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_4+f_3/3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-f_3/6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De acá salen las ecuaciones: $x = 0$, $y = 0$, $z - 1/2w = 0$, entonces $z = 1/2w$, las soluciones son de la forma $(0, 0, 1/2w, w)$, el vector asociado es $(0, 0, 1/2, 1)$ y el autoespacio es $V_7 = \langle (0, 0, 1/2, 1) \rangle$.

Punto d

Para ver si T es diagonizable, hay que verificar si los autovectores asociados a T forman una base de $M_2(\mathbb{R})$, para ello veo si son linealmente independientes:
Si los vectores son linealmente independientes, la única solución a esta ecuación es la trivial:

$$\lambda_1(2,1,0,0) + \lambda_2(0,0,-3,1) + \lambda_3(1/2,1,0,0) + \lambda_4(0,0,1/2,1)$$

Se forma el siguiente sistema de ecuaciones representado por la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como la única solución es la trivial, el conjunto es linealmente independiente y por lo tanto es base. Esto prueba que T es diagonizable.

Ejercicio 6

(10 pts.) Decidir si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $NuT = \langle (1,0,-1) \rangle$ y $NuT \subset ImT$. ¿Existe una única transformación lineal que satisfaga las propiedades anteriores?

Por definición el núcleo de una transformación lineal está contenido en la imagen de dicha transformación, pero sin embargo, existen infinitas transformaciones lineales que pueden tener el mismo núcleo. **Entonces existen infinitas transformaciones lineales que satisfacen las propiedades dadas**.

Ejercicio 7

Sea $\Bbbk$ un cuerpo. Consideramos el $\Bbbk$-espacio vectorial $\Bbbk_n[x]$

- (a) *(5 pts.)* Demostrar que la función $T : \Bbbk_n[x] \to \Bbbk_n[x]$ dada por $T(p(x)) = p(x - a)$, con $a \in \Bbbk$, es una transformación lineal biyectiva.
- (b) (5 pts.) Demostrar que el conjunto $\{1, (x - a), (x - a)2, \ldots, (x - a)n - 1\}$ es una base de $\Bbbk_n[x]$.

Punto a

Para demostrar que T es biyectiva hay que demostrar dos cosas:

1. T es lineal, debemos demostrar que cumple con las dos propiedades de una transformación lineal:

Sea $p(x), q(x) \in \mathbb{k}_n[x]$, entonces

$$T(p(x)+q(x)) = (p+q)(x-a) = p(x-a)+q(x-a) = T(p(x))+T(q(x))$$
$$T(c \cdot p(x)) = c \cdot p(x-a) = c \cdot T(p(x))$$

Por lo tanto T es lineal.

2. T es biyectiva, debemos demostrar que es inyectiva y sobreyectiva.

Para demostrar que T es inyectiva, debemos demostrar que si $T(p(x)) = T(q(x))$, entonces $p(x) = q(x)$, supongamos que $T(p(x)) = T(q(x))$. Entonces, $p(x-a) = q(x-a)$. Si evaluamos ambas funciones en $x+a$, obtenemos:

$$p(x) = p(x+a-a) = q(x+a-a) = q(x)$$

Por lo tanto, T es inyectiva.

Para demostrar que T es sobreyectiva, debemos demostrar que para todo $p(x) \in \mathbb{k}_n[x]$, existe un $q(x) \in \mathbb{k}_n[x]$ tal que $T(q(x)) = p(x)$. Sea $p(x) \in \mathbb{k}_n[x]$. Entonces, podemos definir $q(x) = p(x+a)$. Entonces,

$$T(q(x)) = T(p(x+a)) = p(x+a-a) = p(x).$$

Por lo tanto, T es sobreyectiva.

Como T es inyectiva y sobreyectiva, es biyectiva. Por lo tanto, queda demostrado que T es una transformación lineal biyectiva.

Punto b

Para demostrar que el conjunto $\{1, (x-a), (x-a)2, \ldots, (x-a)n-1\}$ es una base de $\mathbb{k}_n[x]$, debemos demostrar que es linealmente independiente y que genera $\mathbb{k}_n[x]$.

Primero, para demostrar que el conjunto es linealmente independiente, debemos demostrar que la única combinación lineal que iguala al vector nulo es la combinación trivial. Sea $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{k}$ tal que:

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_{n-1}(x-a)^{n-1} = 0$$

Si evaluamos esta ecuación en $x = a$, obtenemos:

$$c_0 = 0$$

Si tomamos la primera derivada de la ecuación original y la evaluamos en $x = a$, obtenemos:

$$c_1 = 0$$

Si tomamos la segunda derivada de la ecuación original y la evaluamos en $x = a$, obtenemos:

$$2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

Continuando de esta manera, podemos demostrar que $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$. Por lo tanto, el conjunto es linealmente independiente, genera y es una base de $\mathbb{k}_n[x]$.