

Series de Taylor

Sea f una función infinitamente derivable en un intervalo I y sea $x_0 \in I$. La serie de Taylor de f centrada en x_0 es

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

¿Como obtener la serie de Taylor?

Para obtener la serie de Taylor de una función $f(x)$ centrada en a , se deben seguir los siguientes pasos:

- Calcula las derivadas sucesivas de la función $f(x)$ respecto a x : $f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), \dots, f^{(n)}(x)$.
- Evalúa cada una de estas derivadas en el punto $x = a$: $f(a), f'(a), f''(a), f'''(a), \dots, f^{(n)}(a)$.
- Forma el polinomio de Taylor utilizando los valores evaluados en el paso 2: $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + (f''(a)/2!)(x - a)^2 + (f'''(a)/3!)(x - a)^3 + \dots + (f^{(n)}(a)/n!)(x - a)^n$ Este es el **polinomio de Taylor** de grado n centrado en $x = a$.
- Expresa el polinomio de Taylor como una suma infinita: $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (f''(a)/2!)(x - a)^2 + (f'''(a)/3!)(x - a)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$. Este es el **desarrollo en serie de Taylor** de $f(x)$ centrado en $x = a$.

Teorema del Resto de Lagrange

Sea f una función $n + 1$ veces derivable en un intervalo I y sea $x_0 \in I$. Entonces, para cada $x \in I$, existe un número c entre x y x_0 tal que

$$f(x) = T_f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

A esta expresión se la conoce como la **fórmula de Taylor con resto de Lagrange**.

¿Como obtener el resto de Lagrange?

Cuando una serie de Taylor se trunca en el término k -ésimo, el error cometido al aproximar la función $f(x)$ por el polinomio de Taylor de grado k , se obtiene de la siguiente manera:

- Que la serie este truncada en k términos hace referencia a que la función $f(x)$ se aproxima por el polinomio de Taylor de grado k centrado en $x = a$, es decir

$$f(x) = \sum_{n=0}^k \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + R_k(x)$$

y lo que debemos calcular es el error $R_k(x)$, que se expresa como $R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (x - a)^{k+1}$.

- El número c es un número real que pertenece al intervalo $[a, x]$.
- Calcular la derivada $(k + 1)$ -ésima de la función $f(x) : f^{(k+1)}(x)$.
- Encontrar un valor c entre a y x . Si se conoce que $f^{(k+1)}(x)$ no cambia de signo en el intervalo $[a, x]$, se puede tomar $c = a$. De lo contrario, se debe aplicar el **teorema del valor medio** para encontrar c .
- Evaluar $f^{(k+1)}(c)$.
- Sustituir los valores encontrados en la fórmula del resto de Lagrange: $R_k(x) = (f^{(k+1)}(c)/(k+1)!)(x - a)^{(k+1)}$.

Ejemplo

Obtener la serie de Taylor centrada en 0 para la función $f(x) = \ln(x + 1)$. Escribir la serie usando la notación de sumatorias. Dar una expresión para el resto cuando la serie es truncada en k términos.

- Calcular las derivadas sucesivas de la función $f(x)$ respecto a x : $f'(x) = 1/(x + 1)$, $f''(x) = -1/(x + 1)^2$, $f'''(x) = 2/(x + 1)^3$, $f^{(4)}(x) = -6/(x + 1)^4$, \dots
Con esto podemos ver que la derivada n -ésima de la función $f(x)$ es $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n - 1)!/(x + 1)^n$.
- Evaluar cada una de estas derivadas en el punto $x = 0$: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$, $f^{(4)}(0) = -6$, \dots
Si tomamos la expresión general de la derivada n -ésima de la función $f(x)$, se tiene que $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n - 1)!$.
- Ahora desarrollo los términos del polinomio de taylor y reemplazo con los valores obtenidos en el paso 2:

$$\begin{aligned} & \frac{f^0(0)}{1} x^0 + \frac{f^1(0)}{1!} x^1 + \frac{f^2(0)}{2!} x^2 + \frac{f^3(0)}{3!} x^3 + \frac{f^4(0)}{4!} x^4 + \dots \\ &= 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \end{aligned}$$

Otra forma es reemplazar la expresión general en la fórmula de Taylor y simplificar:

$$T_f(x) == \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n - 1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

Ahora para dar una expresión para el resto cuando la serie es truncada en k términos, se hace lo siguiente:

- Que la serie este truncada en k términos hace referencia a que la función $f(x)$ se aproxima por el polinomio de Taylor de grado k centrado en $x = 0$, es decir

$$f(x) = \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + R_k(x)$$

y lo que debemos calcular es el error $R_k(x)$, que se expresa como $R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} x^{k+1}$.

- La derivada $(k + 1)$ -ésima de la función $f(x)$ es $f^{(k+1)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{(x+1)^{k+1}}$, pero tomando el $c = a$, se tiene que $f^{(k+1)}(c) = (-1)^k \frac{k!}{(1)^{k+1}} = (-1)^k k!$.
- Entonces reemplazando en la fórmula del resto de Lagrange, se obtiene que

$$R_k(x) = \frac{(-1)^k k!}{(k + 1)!} x^{k+1} = \frac{(-1)^k}{k + 1} x^{k+1}$$

Estimar el número de términos que deberán incluirse en la serie para aproximar $\ln(1.5)$ con un margen de error no mayor que 10^{-10} .

- Se busca el valor de k tal que $|R_k(0.5)| \leq 10^{-10}$, esto es ya que $\ln(1.5) = \ln(1 + 0.5)$.
- Por lo tanto primero hay que evaluar $R_k(0.5)$

$$R_k(0.5) = \frac{(-1)^k}{k + 1} 0.5^{k+1}$$

Y se tiene que buscar que $|R_k(0.5)| \leq 10^{-10}$, es decir

$$\frac{0.5^{k+1}}{k + 1} \leq 10^{-10}$$

A partir de acá se puede buscar el valor de k que cumpla con la desigualdad.