Probabilidad y Estadística - Introducción a la Probabilidad y Estadística 2024

Villar Pedro

Guía de ejercicios N ^{o} 2. Variables aleatorias discretas

Los ejercicios con $*$ pueden dejarse como repaso para evaluaciones.

Variable aleatoria

0. Imagine que desea generar listas de longitud 5, donde cada elemento es un número entero entre 1 y 100. Un ejemplo de una lista podría ser:

$$(87, 1, 39, 100, 56)$$

El espacio muestral Ω está compuesto por todas las posibles listas de 5 elementos que se pueden formar con números enteros en el rango de 1 a 100. Es decir: $\Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) : 1 \leq a_i \leq 100, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) Supongamos que cada elemento de la lista tiene la misma probabilidad de ser seleccionado. Escriba la función de probabilidad P asociada a este experimento. Es decir, determine la probabilidad de generar una lista específica en Ω.
b) Defina una variable aleatoria X cualquiera relacionada con este experimento.

Solución

(a) Calcular la Probabilidad de una Lista Específica:
El problema nos pide calcular la probabilidad de generar una lista específica de 5 números enteros entre 1 y 100.

Dado que cada elemento de la lista se selecciona de manera independiente y todos los números entre 1 y 100 tienen la misma probabilidad de ser seleccionados, la probabilidad de seleccionar un número en particular es:

$$\text{Probabilidad de seleccionar un número específico} = \frac{1}{100}$$

Como la selección de cada número en la lista es independiente de los demás, la probabilidad de obtener una lista específica de 5 elementos es el producto de las probabilidades individuales:

$$P(\text{lista específica}) = \frac{1}{100} \times \frac{1}{100} \times \frac{1}{100} \times \frac{1}{100} \times \frac{1}{100} = \left(\frac{1}{100}\right)^5 = \frac{1}{10^{10}}$$

Entonces, la probabilidad de generar una lista específica en el espacio muestral es $\frac{1}{10^{10}}$.

(b) Definir una Variable Aleatoria:
Podemos definir muchas variables aleatorias relacionadas con este experimento. Un ejemplo de una variable aleatoria podría ser:

- X: "La suma de los elementos de la lista generada".

En este caso, X sería una variable aleatoria que toma diferentes valores dependiendo de la suma de los números en la lista generada.

Funciones de probabilidad de masa y función de distribución

1. Sea X = número de neumáticos de un automóvil, seleccionado al azar, que tenga baja la presión.

   a) ¿Cuál de las siguientes tres funciones $p(.)$ es una función de probabilidad de masa para X ? Justifique.

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	0.3	0.2	0.1	0.05	0.05
$p(x)$	0.4	0.1	0.1	0.1	0.3
$p(x)$	0.4	0.1	0.2	0.1	0.3

   b) Con la función de probabilidad de masa obtenida en (a), calcule: $P(2 \leq X \leq 4), P(X \leq 2)$ y $P(X \neq 0)$.

   c) Obtenga la función de distribución acumulada de X.

   d) Si $p(x) = k(5 - x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4$, ¿cuál debe ser el valor de la constante k para que p sea una función de probabilidad de masa?.

Solución

- **a)** La función de probabilidad de masa debe cumplir con dos condiciones:
  - Todos los valores de $p(x)$ deben ser no negativos.
  - La suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1.

  Analicemos cada una de las funciones propuestas:
  - Función 1: $\sum_x p(x) = 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}7 \neq 1$
  - Función 2: $\sum_x p(x) = 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}3 = 1$
  - Función 3: $\sum_x p(x) = 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 = 1{,}1$

  Por lo tanto, la única función que es una función de probabilidad de masa para X es la Función 2.
- **b)** Usando la función de probabilidad de masa $p(x) = 0{,}4, 0{,}1, 0{,}1, 0{,}1, 0{,}3$:
  - $P(2 \leq X \leq 4) = p(2) + p(3) + p(4) = 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}5$
  - $P(X \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) = 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}6$
  - $P(X \neq 0) = 1 - p(0) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$
- **c)** La función de distribución acumulada de X se define como:

  $$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} p(t)$$

  Usando la función de probabilidad de masa $p(x) = 0{,}4, 0{,}1, 0{,}1, 0{,}1, 0{,}3$:
  - $F(0) = p(0) = 0{,}4$
  - $F(1) = p(0) + p(1) = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5$
  - $F(2) = p(0) + p(1) + p(2) = 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}6$
  - $F(3) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}7$
  - $F(4) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}3 = 1$

  Por lo tanto la distribución acumulada es:

  $$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F(x) = 0{,}4 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ F(x) = 0{,}5 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ F(x) = 0{,}6 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ F(x) = 0{,}7 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ F(x) = 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

- **d)** Para que $p(x) = k(5 - x)$ sea una función de probabilidad de masa, debe cumplir con las dos condiciones:
  - Todos los valores de $p(x)$ deben ser no negativos.
  - La suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1.

Dado que $p(x) = k(5 - x)$, podemos encontrar el valor de k que satisface la segunda condición:

$$\sum_x p(x) = \sum_x k(5 - x) = k \sum_x 5 - x = k(5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 15k = 1$$

Por lo tanto, $k = \frac{1}{15}$ y la función de probabilidad de masa es $p(x) = \frac{1}{15}(5 - x)$.

2. Un negocio de computadoras que atiende pedidos por correo tiene seis líneas telefónicas. Denotemos por X el número de líneas en uso en un momento específico. Supongamos que la función de probabilidad de masa de X está dada en la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	0.10	0.15	0.20	0.25	0.20	0.06	0.04

Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

a) $A =$ A lo sumo tres líneas están en uso.
b) $B =$ Menos de tres líneas están en uso.
c) $C =$ Por lo menos tres líneas están en uso.
d) $D =$ Entre 2 y 5 líneas están en uso.
e) $E =$ Entre 2 y 4 líneas no están en uso.
f) $F =$ Por lo menos 4 líneas no están en uso.
g) Obtenga la función de distribución acumulada de X.

Solución

- **a)** $P(A) = P(X \leq 3) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = 0{,}10 + 0{,}15 + 0{,}20 + 0{,}25 = 0{,}70$
- **b)** $P(B) = P(X < 3) = p(0) + p(1) + p(2) = 0{,}10 + 0{,}15 + 0{,}20 = 0{,}45$
- **c)** $P(C) = P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (p(0) + p(1) + p(2)) = 1 - (0{,}10 + 0{,}15 + 0{,}20) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$
- **d)** $P(D) = P(2 \leq X \leq 5) = p(2) + p(3) + p(4) + p(5) = 0{,}20 + 0{,}25 + 0{,}20 + 0{,}06 = 0{,}71$
- **e)** $P(E) = P(2 \leq X \leq 4) = p(2) + p(3) + p(4) = 0{,}20 + 0{,}25 + 0{,}20 = 0{,}65$
- **f)** $P(F) = P(0 \leq X \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) = 0{,}10 + 0{,}15 + 0{,}20 = 0{,}45$
- **g)** La función de distribución acumulada de X se define como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} p(t)$$

Usando la función de probabilidad de masa dada:

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F(x) = 0{,}10 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ F(x) = 0{,}25 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ F(x) = 0{,}45 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ F(x) = 0{,}70 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ F(x) = 0{,}90 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ F(x) = 0{,}96 & \text{si } 5 \leq x < 6 \\ F(x) = 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

3. Una compañía de seguros ofrece a sus tenedores de pólizas varias opciones diferentes para el pago de primas. Para un tenedor seleccionado al azar, sea $X =$ número de meses entre pagos sucesivos. La función de distribución acumulada de X es como sigue:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0,30 & 1 \leq x < 3 \\ 0,40 & 3 \leq x < 4 \\ 0,45 & 4 \leq x < 6 \\ 0,60 & 6 \leq x < 12 \\ 1 & 12 \leq x \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la función de probabilidad de masa de X ?

b) Sólo con el uso de la función de distribución acumulada, calcule $P(3 \leq X \leq 6)$ y $P(4 \leq X)$.

Solución

- **a)** La función de probabilidad de masa se puede obtener a partir de la función de distribución acumulada:

$$p(x) = F(x) - F(x-1)$$

Usando la función de distribución acumulada dada:

$$\begin{aligned} p(1) &= F(1) - F(0) = 0{,}30 - 0 = 0{,}30 \\ p(3) &= F(3) - F(2) = 0{,}40 - 0{,}30 = 0{,}10 \\ p(4) &= F(4) - F(3) = 0{,}45 - 0{,}40 = 0{,}05 \\ p(6) &= F(6) - F(5) = 0{,}60 - 0{,}45 = 0{,}15 \\ p(12) &= F(12) - F(11) = 1 - 0{,}60 = 0{,}40 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de probabilidad de masa de X es:

x	1	3	4	6	12
$p(x)$	0.30	0.10	0.05	0.15	0.40

- **b)** Usando la función de distribución acumulada, podemos calcular las probabilidades solicitadas:
  - $P(3 \leq X \leq 6) = F(6) - F(2) = 0{,}60 - 0{,}30 = 0{,}30$
  - $P(4 \leq X) = 1 - F(3) = 1 - 0{,}40 = 0{,}60$

4. Considere un grupo de cinco personas, A, B, C, D y E, que son potenciales donantes de sangre. Se necesita un donante de sangre tipo $O+$ y, de estas personas, sólo A y B tienen dicho grupo sanguíneo. Un laboratorio tomará una muestra de sangre de cada persona y determinará en orden aleatorio el grupo sanguíneo, hasta encontrar la primera muestra $O+$. Considere la variable aleatoria X, que cuenta el número de determinaciones necesarias.

   a) Encuentre la función de probabilidad de masa de X.

   b) Usando la función de probabilidad de masa obtenida en el ítem a), calcule la probabilidad de que el grupo sanguíneo $O+$ no sea encontrado en las dos primeras determinaciones.

Solución

- **a)** La función de probabilidad de masa se puede obtener a partir de la función de distribución acumulada:

$$p(x) = F(x) - F(x-1)$$

Dado que la probabilidad de encontrar un donante de sangre tipo $O+$ es de $2/5$, la función de probabilidad de masa de X es:

x	1	2	3	4
$p(x)$	0,40	0,30	0,20	0,10

- **b)** La probabilidad de que el grupo sanguíneo $O+$ no sea encontrado en las dos primeras determinaciones es:

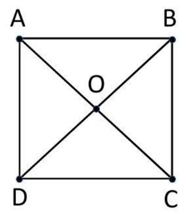
$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}20 + 0{,}10 = 0{,}30$$

5. Silvinavive en el punto O del siguiente diagrama y decide salir a correr. En su recorrido, tiene cuatro posibles destinos que son A, B, C y D. Para decidir a cuál de estos lugares ir primero, lanza dos veces una moneda, y de acuerdo con el resultado, elige uno de los cuatro destinos. Una vez que Silvina llega a un lugar, puede decidir entre regresar a su casa, continuar hacia uno de los dos destinos adyacentes. Cada una de estas opciones tiene una probabilidad de $1/3$. Silvina continúa corriendo entre los destinos hasta que finalmente decide regresar a su casa.

   a) Sea $X =$ número de destinos que recorre. Obtenga la función de probabilidad de masa de X.

   b) Obtenga la función de distribución acumulada de X.

   c) Sea $Y =$ número de segmentos que transita Silvina. Obtenga la función de probabilidad de masa de Y.



Solución

- **a)** Usando la función de probabilidad de masa de X:
  - Visitó un destino y regresó a casa: $P(X=1) = 1 \cdot \frac{1}{3}$,
  - Visitó dos destinos y regresó a casa: $P(X=2) = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$,
  - Visitó tres destinos y regresó a casa: $P(X=3) = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$,

  Por lo tanto, la función de probabilidad de masa de X es:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} & \text{si } x = 1, 2, 3.. \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- **b)** La función de distribución acumulada de X se define como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} p(t)$$

  Usando la función de probabilidad de masa de X:

$$F(1) = p(1) = \frac{1}{3}$$
$$F(2) = p(1) + p(2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$$
$$F(3) = p(1) + p(2) + p(3) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{13}{27}$$

  Por lo tanto, la distribución acumulada es:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x & \text{si } x = 1, 2, 3.. \end{cases}$$

- **c)** Usando la función de probabilidad de masa de Y:
  - Visitó un segmento y regresó a casa: $P(Y=1) = 1 \cdot \frac{1}{3}$,
  - Visitó dos segmentos y regresó a casa: $P(Y=2) = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$,
  - Visitó tres segmentos y regresó a casa: $P(Y=3) = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$,

  Por lo tanto, la función de probabilidad de masa de Y es:

$$p(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{y-2} & \text{si } y = 1, 2, 3.. \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Medidas caracteristicas de una v. a.

6. Sea X = resultado cuando un dado honesto se hace rodar una vez.

   a) Calcule la esperanza de X y de $1/X$.

   b) Si antes de arrojar el dado se ofrece al tirador retirarse con $\frac{1}{3{,}5}$ dólares o jugar obteniendo $h(X) = \frac{1}{X}$ dólares, ¿le conviene retirarse o jugar? Justifique.

Solución

- **a)** La esperanza de X se define como:

$$E(X)=\sum_x x\cdot p(x)=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3+\frac{1}{6}\cdot 4+\frac{1}{6}\cdot 5+\frac{1}{6}\cdot 6=\frac{21}{6}=3{,}5$$

La esperanza de $1/X$ se define como:

$$E\left(\frac{1}{X}\right)=\sum_x \frac{1}{x}\cdot p(x)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=0{,}408$$

- **b)** Le conviene jugar, ya que la esperanza de $1/X$ es de 0,408, que es mayor que el monto ofrecido para retirarse ($\frac{1}{3{,}5}=0{,}286$).

7. Un distribuidor de aparatos electrodomésticos vende tres modelos de diferentes congeladores verticales con capacidad de $13{,}5, 15{,}9$ y 19.1 pies cúbicos de espacio de almacenaje, respectivamente. Sea X la cantidad de espacio de almacenaje comprado por un cliente que va a comprar un congelador. Supongamos que X tiene la siguiente función de probabilidad de masa:

x	13.5	15.9	19.1
$p(x)$	0.2	0.5	0.3

a) Calcule $E(X), E\left(X^2\right)$ y $V(X)$.

b) Si el precio de un congelador que tiene una capacidad de X pies cúbicos es de $25X-8,5$, ¿cuál es la esperanza y varianza del precio pagado por un cliente que va a comprar un congelador?

c) Suponga que mientras la capacidad nominal de un congelador es X, la capacidad real es $h(X)=X-0,01X^2$. ¿Cuál es la capacidad real esperada del congelador comprado por un cliente?

Solución

- **a)** La esperanza de X se define como:

$$E(X)=\sum_x x\cdot p(x)=13{,}5\cdot 0{,}2+15{,}9\cdot 0{,}5+19{,}1\cdot 0{,}3=16{,}38$$

La esperanza de X^2 se define como:

$$E\left(X^2\right)=\sum_x x^2\cdot p(x)=13{,}5^2\cdot 0{,}2+15{,}9^2\cdot 0{,}5+19{,}1^2\cdot 0{,}3=272{,}298$$

La varianza de X se define como:

$$V(X)=E\left(X^2\right)-(E(X))^2=272{,}298-(16{,}38)^2=3{,}9936$$

- **b)** Si el precio de un congelador que tiene una capacidad de X pies cúbicos es de $25X-8,5$, la esperanza y varianza del precio pagado por un cliente que va a comprar un congelador son:

$$E(25X-8,5)=25E(X)-8,5=25\cdot 16{,}38-8,5=401$$

$$V(25X-8,5)=25^2V(X)=25^2\cdot 3{,}9936=2496$$

- **c)** La capacidad real esperada del congelador comprado por un cliente es:

$$E(h(X))=E(X-0,01X^2)=E(X)-0,01E(X^2)=16{,}38-0,01\cdot 272{,}298=13{,}657$$

8. Considere la variable aleatoria X del ejercicio 4.

a) Encuentre la esperanza y la desviación estándar de X.

b) Si la determinación del grupo sanguíneo de cada muestra le cuesta al laboratorio \$200, ¿cuál es el costo esperado para realizar las determinaciones necesarias hasta encontrar el donante?. ¿Y la varianza del costo?.

Solución

- **a)** La esperanza de X se define como:

$$E(X) = \sum_x x \cdot p(x) = 1 \cdot 0{,}40 + 2 \cdot 0{,}30 + 3 \cdot 0{,}20 + 4 \cdot 0{,}10 = 2$$

Luego para calcular la varianza necesito $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \sum_x x^2 \cdot p(x) = 1^2 \cdot 0{,}40 + 2^2 \cdot 0{,}30 + 3^2 \cdot 0{,}20 + 4^2 \cdot 0{,}10 = 5$$

La varianza de X se define como:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 5 - 2^2 = 1$$

La desviación estándar de X es la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1} = 1$$

- **b)** Si la determinación del grupo sanguíneo de cada muestra le cuesta al laboratorio \$200, el costo esperado para realizar las determinaciones necesarias hasta encontrar el donante es:

$$E(200X) = 200E(X) = 200 \cdot 2 = 400$$

La varianza del costo se define como:

$$V(200X) = 200^2 V(X) = 200^2 \cdot 1 = 40000$$

Distribuciones de una variable aleatoria discreta

9. Suponga que sólo el 20 % de los automovilistas se detienen por completo en un cruce donde hay un semáforo con luz roja intermitente en todas las direcciones, cuando no haya otros automóviles visibles.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que de 20 automovilistas, seleccionados al azar, que lleguen al cruce en estas condiciones:

      1) a lo sumo 5 se detengan por completo?
      2) exactamente 5 se detengan por completo?
      3) por lo menos 5 se detengan por completo?

   b) ¿Cuántos, de los siguientes 20 automovilistas, espera el lector que se detengan por completo?

Solución

- **a)** Se puede identificar que la variable es binomial, ya que se trata de un experimento de Bernoulli repetido 20 veces. La probabilidad de éxito es $p = 0{,}20$ y la probabilidad de fracaso es $q = 1-p = 0{,}80$. Ahora bien lo que hay que hacer es calcular las probabilidades solicitadas:
  1. $P(X \leq 5) = \sum_{x=0}^{5} \binom{20}{x} \cdot 0{,}20^x \cdot 0{,}80^{20-x} = \binom{20}{0} \cdot 0{,}20^0 \cdot 0{,}80^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0{,}20^1 \cdot 0{,}80^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0{,}20^2 \cdot 0{,}80^{18} + \binom{20}{3} \cdot 0{,}20^3 \cdot 0{,}80^{17} + \binom{20}{4} \cdot 0{,}20^4 \cdot 0{,}80^{16} + \binom{20}{5} \cdot 0{,}20^5 \cdot 0{,}80^{15} = 0{,}012 + 0{,}058 + 0{,}137 + 0{,}205 + 0{,}218 + 0{,}175 = 0{,}805$
  2. $P(X = 5) = \binom{20}{5} \cdot 0{,}20^5 \cdot 0{,}80^{15} = 0{,}175$
  3. $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \sum_{x=0}^{4} \binom{20}{x} \cdot 0{,}20^x \cdot 0{,}80^{20-x} = 1 - 0{,}63 = 0{,}37$
- **b)** La cantidad de automovilistas que se espera que se detengan por completo es:

$$E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}20 = 4$$

10. Un tipo particular de raqueta de tenis se fabrica en tamaños mediano y extragrande. El 60 % de todos los clientes, de cierta tienda, buscan el tamaño extragrande.

    a) Entre 10 clientes seleccionados al azar que desean ese tipo de raqueta, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 6 busquen el tamaño extragrande?.

b) Entre 10 clientes seleccionados al azar que desean ese tipo de raqueta, ¿cuál es la probabilidad de que el número de clientes que buscan el tamaño extragrande esté dentro de una desviación estándar del valor medio?.

c) La tienda tiene actualmente 6 raquetas de cada modelo. ¿Cuál es la probabilidad de que los siguientes diez clientes que buscan esta raqueta puedan comprar el modelo que buscan, de entre la existencia actual?.

Solución

- **a)** Se puede identificar que la variable es binomial, ya que se trata de un experimento de Bernoulli repetido 10 veces. La probabilidad de éxito es $p = 0{,}60$ y la probabilidad de fracaso es $q = 1-p = 0{,}40$. Ahora bien lo que hay que hacer es calcular las probabilidades solicitadas:

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \sum_{x=0}^{5} \binom{10}{x} \cdot 0{,}60^x \cdot 0{,}40^{10-x} = 1 - 0{,}367 = 0{,}633$$

- **b)** Primero se necesita calcular la esperanza y la desviación estándar de la variable aleatoria X:

$$E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}60 = 6$$

$$V(X) = n \cdot p \cdot q = 10 \cdot 0{,}60 \cdot 0{,}40 = 2{,}4$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2{,}4} = 1{,}549$$

Luego, la probabilidad de que el número de clientes que buscan el tamaño extragrande esté dentro de una desviación estándar del valor medio es: $P(6 - 1{,}549 \leq X \leq 6 + 1{,}549)$. Como estamos hablando de una variable discreta, tomo los valores enteros que esten en ese intervalo, es decir:

$$P(4{,}451 \leq X \leq 7{,}549) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) = 0{,}6665$$

- **c)** La probabilidad de que los siguientes diez clientes que buscan esta raqueta puedan comprar el modelo que buscan, de entre la existencia actual, es:

$$P(X \leq 6) = \sum_{x=0}^{6} \binom{10}{x} \cdot 0{,}60^x \cdot 0{,}40^{10-x} = 0{,}563$$

11. De todas las reparaciones hechas en aparatos de TV en cierta tienda, el 80 % se hace en aparatos que ya no tienen garantía.

a) Entre 20 aparatos llevados a reparación, ¿cuál es el número esperado de aparatos que ya no tengan garantía?

b) Entre 20 aparatos llevados a reparación, ¿cuál es el número esperado de aparatos que tienen garantía?

c) Entre 20 aparatos llevados a reparación, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos el 75 % ya no tengan garantía?

d) Suponga que hay 12 aparatos ahora en la tienda, de los cuales 4 tienen garantía. Si 5 de los 12 son llevados a reparación en orden aleatorio y se reparan en el mismo orden, ¿cuál es la la función de distribución de probabilidad de X = número de aparatos con garantía entre los 5 reparados? ¿Cuánto vale $E(X)$ y $V(X)$?

Solución

- **a)** La cantidad de aparatos que ya no tienen garantía se puede modelar como una variable aleatoria binomial, ya que se trata de un experimento de Bernoulli repetido 20 veces. La probabilidad de éxito es $p = 0{,}80$ y la probabilidad de fracaso es $q = 1 - p = 0{,}20$. La cantidad esperada de aparatos que ya no tienen garantía es:

$$E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}80 = 16$$

- **b)** La cantidad de aparatos que tienen garantía es:

$$E(20 - X) = 20 - E(X) = 20 - 16 = 4$$

- **c)** La probabilidad de que por lo menos el 75 % de los aparatos ya no tengan garantía es:

$$P(X \geq 15) = 1 - P(X < 15) = 1 - P(X \leq 14) = 1 - 0{,}1958 = 0{,}8042$$

- **d)** Ahora se puede modelar la cantidad de aparatos con garantía entre los 5 reparados como una variable aleatoria hipergeométrica. La cantidad de aparatos con garantía en la población es $r_1 = 4$, la cantidad de aparatos sin garantía en la población es $r_2 = 8$, y la cantidad de aparatos reparados es $n = 5$. La función de probabilidad de masa de X es:

$$p(X = x) = \frac{\binom{r_1}{x} \cdot \binom{r_2}{n-x}}{\binom{r_1+r_2}{n}}$$

Luego:

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	0.0707	0.3535	0.4242	0.1414	0.0101

La esperanza de X es:

$$E(X) = n \cdot \frac{r_1}{r_1 + r_2} = 5 \cdot \frac{4}{12} = 1{,}6667$$

La varianza de X es:

$$V(X) = \frac{r_1 \cdot n \cdot (r - r_1) \cdot (r - n)}{r^2 \cdot (r-1)} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7}{12^2 \cdot 11} = 0{,}7074$$

12. Cada uno de 12 refrigeradores de cierto tipo ha sido devuelto a un distribuidor debido a la presencia de un ruido oscilante agudo cuando está funcionando. Supongamos que 4 de esos 12 tienen compresores defectuosos y los otros 8 tienen problemas menos serios. Si se examinan 6 refrigeradores al azar, sea $X =$ número de refrigeradores que tienen el compresor defectuoso entre los 6 examinados.

a) Calcule:
1) $P(X = 1)$
2) $P(X \geq 4)$
3) $P(1 \leq X \leq 3)$

b) ¿Cuánto vale $E(X)$ y $V(X)$?

Solución

- **a)** La cantidad de refrigeradores con compresor defectuoso entre los 6 examinados se puede modelar como una variable aleatoria hipergeométrica. La cantidad de refrigeradores con compresor defectuoso en la población es $r_1 = 4$, la cantidad de refrigeradores sin compresor defectuoso en la población es $r_2 = 8$, y la cantidad de refrigeradores examinados es $n = 6$. La función de probabilidad de masa de X es:

$$p(X = x) = \frac{\binom{r_1}{x} \cdot \binom{r_2}{n-x}}{\binom{r_1+r_2}{n}}$$

Ahora bien lo que hay que hacer es calcular las probabilidades solicitadas:

1. $P(X = 1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{8}{5}}{\binom{12}{6}} = 0{,}2424$
2. $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{x=0}^{3} \frac{\binom{4}{x} \cdot \binom{8}{6-x}}{\binom{12}{6}} = 1 - 0{,}9697 = 0{,}0303$
3. $P(1 \leq X \leq 3) = \sum_{x=1}^{3} \frac{\binom{4}{x} \cdot \binom{8}{6-x}}{\binom{12}{6}} = 0{,}9393$

- **b)** La esperanza de X es:

$$E(X) = n \cdot \frac{r_1}{r_1 + r_2} = 6 \cdot \frac{4}{12} = 2$$

La varianza de X es:

$$V(X) = \frac{r_1 \cdot n \cdot (r - r_1) \cdot (r - n)}{r^2 \cdot (r-1)} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 6}{12^2 \cdot 11} = 0{,}7273$$

13. Boca y River hacen una serie de partidos en los que si hay empate se define por penales. Suponga que $p = P($ gana Boca $) = 0,5$. Jugarán hasta que Boca gane dos partidos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que River gane x partidos?.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se jueguen 4 partidos?.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que se jueguen a lo sumo 4 partidos?

d) ¿Cuántos partidos se esperaría que gane River?. ¿Cuántos partidos se esperaría que se jueguen?.

Solución

- **a)** La cantidad de partidos que gana River se puede modelar como una variable aleatoria binomial negativa, notar que para que River gane x partidos, se requieren $x + 2$ partidos en total (dado que el último lo gana Boca). Tenemos que la probabilidad de Dado que $p = 0{,}5$ es la probabilidad de ganar un partido. Consideremos el número de secuencias posibles de $x + 1$ partidos en los que River gane x partidos y Boca gane exactamente uno de esos $x + 1$. Se puede ver como el número de combinaciones de $x + 1$ partidos donde Boca gana una vez, seguido por un partido final donde Boca gana nuevamente.

$$P(X = x) = \binom{x+1}{1} \cdot (0{,}5)^{x+1} \cdot (0{,}5)^1 = (x + 1) \cdot (0{,}5)^{x+2}$$

- **b)** Para que se jueguen exactamente 4 partidos, uno de los equipos debe haber ganado 2 veces, y el otro equipo debe haber ganado 2 veces en los primeros 3 partidos (es decir, River debe ganar 2 partidos y Boca 1 en los primeros 3 partidos, o viceversa). El cuarto partido necesariamente lo gana Boca para que termine la serie.

  Existen 2 posibles secuencias: River gana 2 partidos en los primeros 3, o Boca gana 2 partidos en los primeros 3, seguido de una victoria de Boca en el 4to partido.

$$P(\text{Jugar 4 partidos}) = \binom{3}{1} \cdot (0{,}5)^3 \cdot 0{,}5 + \binom{3}{1} \cdot (0{,}5)^3 \cdot 0{,}50 = 0{,}1875$$

- **c)** Para calcular esta probabilidad, se necesita sumar las probabilidades de que la serie termine en 2, 3 o 4 partidos.
  - 2 partidos: Boca gana los primeros dos partidos:

$$P(\text{Jugar 2 partidos}) = (0{,}5)^2 = 0{,}25$$

  - 3 partidos: River gana 2 partidos en los primeros 3:

$$P(\text{Jugar 3 partidos}) = \binom{2}{1} \cdot (0{,}5)^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$$

  - 4 partidos: River gana 2 partidos en los primeros 3, o Boca gana 2 partidos en los primeros 3:

$$P(\text{Jugar 4 partidos}) = 0{,}1875$$

$$P(\text{A lo sumo 4 partidos}) = 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}1875 = 0{,}6875$$

- **d)** Usando la variable aleatoria del punto a), la cantidad de partidos que se espera que gane River es:

$$E(X) = \frac{r}{p} = \frac{2}{0{,}5} = 4$$

14. Suponga que $X =$ número de tornados observados, en una región particular, durante un período de un año tiene distribución de Poisson con $\lambda = 8$.

a) Calcule: $P(X \leq 5)$, $\quad P(6 \leq X \leq 9)$, $\quad P(10 \leq X)$ y $\quad P(X \geq 1)$

b) ¿Cuántos tornados se puede esperar que se observen durante un período de un año? ¿Cuál es la desviación estándar de X ?

Solución

- **a)** La distribución de Poisson es una distribución de probabilidad discreta que describe el número de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo fijo o en un área fija. La función de probabilidad de masa de X es:

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

  Ahora bien lo que hay que hacer es calcular las probabilidades solicitadas:

1. $P(X \leq 5) = \sum_{x=0}^{5} \frac{e^{-8} \cdot 8^x}{x!} = 0{,}1912$
2. $P(6 \leq X \leq 9) = \sum_{x=6}^{9} \frac{e^{-8} \cdot 8^x}{x!} = 0{,}5254$
3. $P(10 \leq X) = 1 - P(X < 10) = 1 - \sum_{x=0}^{9} \frac{e^{-8} \cdot 8^x}{x!} = 1 - 0{,}7166 = 0{,}2834$
4. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{e^{-8} \cdot 8^0}{0!} = 1 - 0{,}0003 = 0{,}9997$

- **b)** La esperanza y varianza de X son:

$$E(X) = V(X) = \lambda = 8$$

15. Un estacionamiento tiene dos entradas. Los coches llegan por hora a la entrada I de acuerdo con una distribución Poisson de parámetro $\lambda = 3$ y a la entrada II de acuerdo con una distribución Poisson de parámetro $\lambda = 4$. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 coches lleguen al estacionamiento durante una hora dada? (Se supone que los números de coches que llegan a los dos entradas son independientes).

Solución

- La cantidad de coches que llegan al estacionamiento en una hora se puede modelar como la suma de dos variables aleatorias Poisson independientes, donde $\lambda = 7$ ya que la suma de dos variables aleatorias Poisson independientes es también una variable aleatoria Poisson. La probabilidad de que 3 coches lleguen al estacionamiento durante una hora dada es:

$$P(X = 3) = \frac{e^{-7} \cdot 7^3}{3!} = 0{,}0521$$

16. Se supone que el número de defectos Y (por cm) de la producción diaria de cierto tipo de soga tiene una distribución de Poisson con una media de 2. Cuando se vende la soga, la ganancia por cm está dada por $X = 50 - 2Y - Y^2$. Dé la ganancia esperada por cm .

Solución

Primero voy a calcular lo que voy a necesitar mas adelante:

$$E(Y) = \lambda = 2$$

$$E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = 2 + 2^2 = 6$$

Ahora bien, la ganancia esperada por cm es:

$$E(X) = E(50 - 2Y - Y^2) = 50 - 2E(Y) - E(Y^2) = 50 - 2 \cdot 2 - 6 = 40$$

17. a) Halle la esperanza y varianza para una variable aleatoria con distribución Hipergeométrica.
b) Halle la esperanza y varianza para una variable aleatoria con distribución Binomial Negativa.

Solución

- **a)** La distribución Hipergeométrica modela el número de éxitos en una muestra sin reemplazo. Si tenemos una población de tamaño N, de la cual K son éxitos y $N - K$ son fracasos, y seleccionamos una muestra de tamaño n sin reemplazo, la variable aleatoria X que representa el número de éxitos en la muestra sigue una distribución Hipergeométrica.
La función de probabilidad está dada por:

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

La esperanza y varianza de una variable aleatoria con distribución Hipergeométrica son:
Esperanza:

$$E(X) = \frac{nK}{N}$$

Varianza:

$$\text{Var}(X) = \frac{nK(N-K)}{N^2} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Donde: - N es el tamaño de la población. - K es el número de éxitos en la población. - n es el tamaño de la muestra.

- **b)** La distribución Binomial Negativa modela el número de ensayos hasta que se obtienen r éxitos. La función de probabilidad está dada por:

  La función de probabilidad está dada por:

  $$P(X = k) = \binom{k + r - 1}{r - 1} p^r (1 - p)^k \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

  Donde k es el número de fracasos antes de obtener r éxitos.

  La esperanza y varianza de una variable aleatoria con distribución Binomial Negativa son:

  Esperanza:

  $$E(X) = \frac{r(1 - p)}{p}$$

  Esta es la esperanza del número de fracasos antes de obtener r éxitos.

  Varianza:

  $$\text{Var}(X) = \frac{r(1 - p)}{p^2}$$