Ejercicio 1

a) Obtener la serie de Taylor centrada en 0 para la función $f(x) = ln(x+1)$. Escribir la serie usando la notación de sumatorias. Dar una expresión para el resto cuando la serie es truncada en k términos.

b) Estimar el número de términos que deberán incluirse en la serie para aproximar $ln(1.5)$ con un margen de error no mayor que 10^{-10}.

Solución: **Inciso a)**

- Primero, necesitamos obtener las derivadas sucesivas de la función $f(x) = \ln(x+1)$ evaluadas en $x = 0$.

$$f(x) = \ln(x+1)$$
$$f'(x) = \frac{1}{x+1}$$
$$f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$
$$f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$$
$$f'''(0) = 2$$
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$$
$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

- La serie de Taylor centrada en $x = 0$ para $f(x)$ viene dada por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Sustituyendo los valores encontrados anteriormente, tenemos:

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} x^n$$

- Usando la notación de sumatorias, la serie de Taylor se puede escribir como:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots$$
$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

- Para obtener una expresión para el resto cuando la serie es truncada en k términos, uso la fórmula del resto de Taylor:

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} x^{k+1}$$

donde ξ es un punto entre 0 y x. En este caso,

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x+1)^{k+1}}$$

Entonces, el resto $R_k(x)$ cuando la serie es truncada en k términos viene dado por:

$$R_k(x) = \frac{(-1)^k k! x^{k+1}}{(k+1)!(x+1)^{k+1}}$$

Solución: **Inciso b)**

- Primero, evaluo el resto $R_k(x)$ cuando $x = 0.5$ (ya que $\ln(1.5) = \ln(1+0.5)$):

$$R_k(0.5) = \frac{(-1)^k k! 0.5^{k+1}}{(k+1)!(0.5)^{k+1}} = \frac{(-1)^k k!}{(k+1)! 2^{k+1}}$$

- Se busca que el valor absoluto de $R_k(0.5)$ sea menor que 10^{-10}, es decir:

$$\left| \frac{(-1)^k k!}{(k+1)! 2^{k+1}} \right| < 10^{-10}$$

- Dividiendo ambos lados por $k!$, obtengo:

$$\left| \frac{(-1)^k}{(k+1) 2^{k+1}} \right| < \frac{10^{-10}}{k!}$$

- Tomando el valor absoluto de ambos lados, se tiene:

$$\frac{1}{(k+1) 2^{k+1}} < \frac{10^{-10}}{k!}$$

  Reemplazando $k = 1, 2, 3, \ldots$ hasta que la desigualdad se cumpla, se obtiene el número de términos necesarios para aproximar $\ln(1.5)$ con un margen de error no mayor que 10^{-10}.

Ejercicio 2

Si la serie para $ln(x)$ centrada en $x = 1$ se corta después del término que comprende a $(x-1)^{1000}$ y después se utiliza para calcular $ln(2)$ ¿Qué cota se puede imponer al error?
Solución: Para resolver este problema, primero debo encontrar la serie de Taylor de $\ln(x)$ centrada en $x = 1$. Luego, evaluaremos el resto de la serie truncada después del término que contiene $(x-1)^{1000}$ cuando $x = 2$, lo que nos dará una cota para el error al calcular $\ln(2)$.

- Serie de Taylor de $\ln(x)$ centrada en $x = 1$:

$$\ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$$

- Truncando la serie después del término que contiene $(x-1)^{1000}$, obtenemos:

$$\ln(x) \approx \sum_{n=0}^{1000} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$$

- El resto de la serie truncada está dado por:

$$R_{1000}(x) = \frac{\ln^{(1001)}(\xi)}{1001!}(x-1)^{1001}$$

  donde ξ es un punto entre 1 y x.

- Calculando la derivada (1001)-ésima de $\ln(x)$,

$$\ln^{(1001)}(x) = \frac{(-1)^{1001}(1001!)}{x^{1001}}$$

- Sustituyendo esta expresión en la fórmula del resto, se obtiene

$$R_{1000}(x) = \frac{(-1)^{1001}(x-1)^{1001}}{x^{1001}}$$

- Evaluando el resto en $x = 2$, se tiene:

$$R_{1000}(2) = \frac{(-1)^{1001}}{2^{1001}}$$

- Tomando el valor absoluto de $R_{1000}(2)$, se obtiene:

$$|R_{1000}(2)| = \frac{1}{2^{1001}}$$

  Por lo tanto, al utilizar la serie de Taylor truncada después del término que contiene $(x-1)^{1000}$ para calcular $\ln(2)$, el error estará acotado por:

$$\left| \ln(2) - \sum_{n=0}^{1000} \frac{(-1)^{n+1}(2-1)^n}{n} \right| \leq \frac{1}{2^{1001}}$$

  Se puede ver que la cota es muy chica, lo que indica que la aproximación de $\ln(2)$ utilizando los primeros 1001 términos de la serie de Taylor centrada en $x = 1$ es muy precisa.

Ejercicio 3

Verificar la siguiente igualdad y mostrar que la serie converge en el intervalo $-e < x \leq e$

$$\ln(e+x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{x}{e}\right)^k$$

Solución: El problema equivale a mostrar que la serie de Taylor de $\ln(e+x)$ centrada en $x=0$ es igual a la serie dada y que converge en el intervalo $-e < x \leq e$.

- Para sacar la serie de Taylor de $\ln(e+x)$ centrada en $x=0$, primero necesito obtener las derivadas sucesivas de la función $f(x) = \ln(e+x)$.
- Derivando $f(x) = \ln(e+x)$, se obtiene:

$$f'(x) = \frac{1}{e+x}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{(e+x)^2}$$
$$f'''(x) = \frac{2}{(e+x)^3}$$
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(e+x)^n}$$

- La serie de Taylor centrada en $x=0$ para $f(x)$ viene dada por:

$$\ln(e+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

  Sustituyendo los valores encontrados anteriormente, se tiene:

$$\ln(e+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} x^n$$

- Usando la notación de sumatorias, la serie de Taylor se puede escribir como:

$$\ln(e+x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{x}{e}\right)^k$$

  El número 1 proviene de la evaluación de la función en $x=0$, ya que $\ln(e+0) = \ln(e) = 1$.

- Para calcular el radio de convergencia de la serie, uso el criterio de la razón:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{(-1)^k}{k+1}\left(\frac{x}{e}\right)^{k+1}}{\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{x}{e}\right)^k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{-x}{e(k+1)}\right| = \frac{|x|}{e}$$

- La serie converge si el radio de convergencia es mayor que 1, es decir, si $|x| < e$. Por lo tanto, la serie converge en el intervalo $-e < x \leq e$.

Ejercicio 4

Desarrollar la función $\sqrt{x}$ en serie de potencias centrada en $x = 1$ y verificar que utilizando la aproximación lineal de dicha función se puede aproximar $\sqrt{0.9999999995}$ con un error no mayor que 10^{-10}.
Solución: Para desarrollar la función $\sqrt{x}$ en serie de potencias centrada en $x = 1$, primero necesito obtener las derivadas sucesivas de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

- Derivando $f(x) = \sqrt{x}$, se obtiene:
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}$$
$$f'''(x) = \frac{3}{8x^{5/2}}$$
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n x^{(2n-1)/2}}$$

- La serie de Taylor centrada en $x = 1$ para $f(x)$ viene dada por:
$$\sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$
Cada término de la serie es:
$$\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n n!}(x-1)^n$$

- La serie de Taylor centrada en $x = 1$ para $f(x)$ es: