Consignas

# 1 Rectas y Planos

**Ejercicio 1.1**
*Halla las ecuaciones de la recta* $L$ *que pasa por los puntos* $P = (1, 0, -1)$ *y* $Q = (2, 1 - 3)$*:*

**Ejercicio 1.2**
*Hallar las ecuaciones del plano* $P$ *que pasa por los puntos* $A = (0, 1, -1)$, $B = (2, 3, -5)$ *y* $C = (1, 4, 3)$.

**Ejercicio 1.3**
*Comprueba si existe alguna recta que pase por los puntos* $P = (3, 1, 0)$, $Q = (0, -5, 1)$, $R = (6, -5, 1)$.

**Ejercicio 1.4**
*Halla todas las ecuaciones del plano* $\Pi$ *Determinado por el punto* $A = (1, -3, 2)$ *y por los vectores* $u = (2, 1, 0)$, $v = (-1, 0, 3)$.

# 2 Sistemas lineales

**Ejercicio 2.1**

Para que valores del parámetro $k$, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

- i) tiene solución única.
- ii) no tiene solución.
- iii) tiene soluciones infinitas.

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

**Ejercicio 2.2**
Encuentre el determinante de las siguientes matrices, usando únicamente las propiedades de los determinantes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 2.3**
Considere el valor del siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 8$$

en base a este resultado, encuentre el valor de

$$\begin{vmatrix} -3a_{11} & -3a_{12} & -3a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \\ 5a_{21} & 5a_{22} & 5a_{23} \end{vmatrix}$$

**Ejercicio 2.4**

Demuestra que si $a \neq b$ entonces el siguiente determinante de $n \times n$

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

**Ejercicio 2.5**
Encuentre la forma general de las matrices $A \in M_{2\times 2}$ tales que conmuten con la matriz $B$, esto es, $AB = BA$ donde

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 2.6**
Muestre que si $A$ es una matriz de tamaño $n \times n$, entonces el determinante de su adjunta es igual al determinante de $A$ elevado a la $(n-1)$, esto es

$$|adj(A)| = (|A|)^{n-1}$$

**Ejercicio 2.7**

Sea $A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ probar que $det(A_n) = n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

**Ejercicio 2.8**
Determinar para que valores de $x \in \mathbb{R}$ la siguiente matriz es invertible

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & x \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 2.9**
Sea $A = \begin{pmatrix} x & a & b & c & d \\ x & x & a & b & c \\ x & x & x & a & b \\ x & x & x & x & a \\ x & x & x & x & x \end{pmatrix}$ calcular $det(A)$.

# 3 Espacios Vectoriales

**Ejercicio 3.1**
Sea $M$ el conjunto de todas las matrices invertibles de tamaño $3 \times 3$, muestre que este conjunto no es un espacio vectorial.

**Ejercicio 3.2**
Cuales de los siguientes subconjuntos de $R_3[x]$ (espacio vectorial de polinomios de grado ¡ 3) son subespacios vectoriales. Con las operaciones de suma y producto normales que conocemos.

- **a.** $V = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0 = 0\}$
- **b.** $V = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_2 = a_1 + 1\}$

**Ejercicio 3.3**
Determine si los siguientes conjuntos $W$ son subespacios vectoriales o no del espacio vectorial $M_n$ (espacio vectorial de las matrices de tamaño $n \times n$)

- **a.** $\{W = A \in M_n \mid A^t = A\}$
- **b.** $\{A \in M_n \mid A \text{ es triangular superior}\}$

**Ejercicio 3.4**
Muestre que el conjunto de todos los puntos del plano $ax + by + cz = 0$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

**Ejercicio 3.5**
Determine si $\{1 - 2x, x - x^2\}$ forma una base para $R_3[x]$.

**Ejercicio 3.6**
Encuentre una base para el espacio solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo siguiente,

$$\begin{cases} 2x - 6y + 4z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ -3x + 9y - 6z = 0 \end{cases}$$

# 4 Transformaciones Lineales

**Ejercicio 4.1**
Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_3[x]$ definida por

$$T(a, b, c) = (a + b)x^2 + (2a + 4c)x + a - b + 4c$$

- (a) Dar la dimensión del núcleo de $T$. Justifique apropiadamente.
- (b) Calcular la matriz de la transformación $T$ con respecto a la base canónica ordenada $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y la base ordenada $\mathcal{B} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$.
- (c) Calcular los autovalores reales y complejos de la matriz $[T]_{\mathcal{CB}}$.

**Ejercicio 4.2**
Definir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ que verifique que

$$Nu(T) = \{(x, y, z) : z = x = 3y\}$$

$$Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b = a - c,\ b - d = c \right\}$$

Escribir explícitamente $T(x, y, z)$ para cualquier $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Justifique cada paso.

**Ejercicio 4.3**
Definir una transformación lineal $T : R^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que: $T(1, 1) = (1, -2)$ y $T(-1, 1) = (2, 3)$.

**Ejercicio 4.4**
Dada la siguiente transformación lineal $T : M_2 \to \mathbb{R}_3[x]$ definida como

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + b + c + (b + c + d)x + (a - d)x^2 + (a + 2b + 2c + d)x^3$$

determinar

- El núcleo de la transformación y decir si es inyectiva,
- la imagen de la transformación y decir si es sobreyectiva.

**Ejercicio 4.5**
Sea $T : \mathcal{C}^4 \to \mathcal{C}^3$ una transformación lineal cuyo núcleo esta generado por los vectores

$$(i, 0, -1, i) \quad (2, 1, -1, 0) \quad (1, 1, -1 - i, 1)$$

Determinar la dimensión de la imagen de $T$.

**Ejercicio 4.6**
Considere la siguiente transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y, z) = (x + y, 3x - z)$$

Sean $\mathcal{B}_1\{(1, 1, 2), (-3, 0, 1), (2, 4, 3)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(4, 1), (3, 1)\}$ Encuentre la matriz de $T$ asociada a las bases dadas.

**Ejercicio 4.7**
Sea $T : M_2 \to M_2$ una transformación lineal definida como

$$T(A) = AM - MA$$

donde $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- Determinar el núcleo y la imagen de $T$.
- Encontrar la matriz asociada a $T$.

**Ejercicio 4.8**
Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (x + y, x - z, -y + z)$$

- Calcular los autovalores de $T$.
- ¿$T$ es diagonizable? Justificar.

**Ejercicio 4.9**
Hallar una transformación lineal $T : R_3[x] \to \mathbb{R}^4$ tal que $Nu(T) = \{a_1 x + a_1 x^2 \mid a_1 \in \mathbb{R}\}$.

**Ejercicio 4.10**
Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, demostrar que el núcleo es un subespacio de $V$ y la imagen un subespacio de $W$.