Ejercicio 1
Justificar apropiadamente.

(a) (*5pts.*) Dar la definición de suma directa de subespacios vectoriales.

(b) (*5pts.*) Cuales son las condiciones necesarias para que un conjunto sea un subconjunto de un espacio vectorial.

Ejercicio 2
(*15pts.*) Sean $A, B, C \in M : 5 \times 5$ tales que $det(A) = 2$, $det(B) = 3$ y $det(C) = 4$. Calcular $det(PQR)$ donde P, Q, R son las matrices que se obtienen a partir de A, B, C mediante operaciones elementales por filas de la siguiente manera

1. P se obtiene de A sumando a la fila 1 la fila 2 multiplicada por 3.
2. Q se obtiene de B multiplicando la fila 4 por 2.
3. R se obtiene de C intercambiando la fila 1 con la fila 3.

Ejercicio 3
(*15pts.*) Hallar la representación paramétrica del plano que pasa por el origen y por el punto $(1, 2, -1)$ y tal que uno de sus vectores direccionales es $(2, 3, 0)$.

Ejercicio 4
(*20pts.*) Para la siguiente matriz A, determine sus valores propios y sus vectores propios y determine la matriz que diagonaliza a A.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5
Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) (*5pts.*) Todo conjunto que contenga al vector nulo, es linealmente dependiente.

(b) (*5pts.*) Si $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal, entonces $dim(Nu(T)) \geq 3$.

(c) (*5pts.*) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $dim(Im(T)) = 3$ y $dim(Nu(T)) = 3$.

Ejercicio 6
Considere la transformaciónlineal $T : \mathbb{R}_4[x] \to M_{2\times 2}$ definida como

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a + c + 2d & 2a + b + c + 4d \\ 2a + b + c + 3d & a + b + 2d \end{pmatrix}$$

(a) (*10pts.*) Determinar el nuceo e imagen de T.

(b) (*5pts.*) Encontrar la matriz asociada a T.

(c) (*10pts.*) Decidir si T es diagonizable, y si es así dar la matriz diagonal.