Notación O grande y o pequeña

Pedro Villar

Análisis Numérico - Primer Cuatrimestre 2024

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Universidad Nacional de Córdoba

Sucesión convergente

Una sucesión $\{x_n\}$ es convergente si existe un número L tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|x_n - L| < \varepsilon$.

Convergencia lineal, superlineal y cuadrática

Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente a x_{ast}.

- Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ tiene tasa de convergencia (al menos) **lineal** si existe una constante c tal que $0 < c < 1$ y un $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$|x_{n+1} - x_*| \leq c|x_n - x_*|, \quad \forall n \geq N.$$
- Se dice que la tasa de convergencia es (al menos) **superlineal** si existe una sucesión $\{\epsilon_n\}$ que converge a 0 y un $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$|x_{n+1} - x_*| \leq \epsilon_n|x_n - x_*|, \quad \forall n \geq N.$$
- Se dice que la tasa de convergencia es (al menos) **cuadrática** si existe una constante positiva c y un $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$|x_{n+1} - x_*| \leq c|x_n - x_*|^2, \quad \forall n \geq N.$$

Notación $\mathcal{O}$ grande y o chica

Introducimos una notación para comparar sucesiones y funciones. Sean $\{x_n\}$ y $\{\alpha_n\}$ dos sucesiones.

- Decimos que
$$\{x_n\} = \mathcal{O}(\alpha_n)$$
si existe una constante $C > 0$ y un $r \in \mathbb{N}$ tal que
$$|x_n| \leq C|\alpha_n|, \quad \forall n \geq r.$$
- Decimos que
$$\{x_n\} = O(\alpha_n)$$
si existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}$ que converge a 0, con $\varepsilon_n \geq 0$ y un $r \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| \leq \varepsilon_n|\alpha_n|, \quad \forall n \geq r$.

Esta notación también se puede extender a funciones. Se dice que
$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad \text{cuando} \quad x \to \infty$$
si existe una constante $C > 0$ y un $r \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|, \quad \forall x \geq r$. Análogamente, se dice que
$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{cuando} \quad x \to \infty$$
si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Ejemplo de notación o con sucesiones

$$\frac{1}{n \cdot ln(n)} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si
$$\frac{1}{n \cdot ln(n)} \leq \varepsilon_n \left(\frac{1}{n}\right).$$
basta tomar $\varepsilon_n = \frac{1}{ln(n)}$.