Series de Potencia y de Taylor

Pedro Villar

Análisis Numérico - Primer Cuatrimestre 2024

FAMAF Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

UNC Universidad Nacional de Córdoba

Series de Taylor

Sea f una función infinitamente derivable en un intervalo I y sea $x_0 \in I$. La serie de Taylor de f centrada en x_0 es

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

¿Como obtener la serie de Taylor?

Para obtener la serie de Taylor de una función $f(x)$ centrada en a, se deben seguir los siguientes pasos:

1. Calcula las derivadas sucesivas de la función $f(x)$ respecto a x: $f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(}4)(x), \dots, f^{(}n)(x)$.
2. Evalúa cada una de estas derivadas en el punto $x = a$: $f(a), f'(a), f''(a), f'''(a), \dots, f^{(}n)(a)$.
3. Forma el polinomio de Taylor utilizando los valores evaluados en el paso 2: $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + (f''(a)/2!)(x-a)^2 + (f'''(a)/3!)(x-a)^3 + \cdots + (f^{(}n)(a)/n!)(x-a)^n$ Este es el **polinomio de Taylor** de grado n centrado en $x = a$.
4. Expresa el polinomio de Taylor como una suma infinita: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (f''(a)/2!)(x-a)^2 + (f'''(a)/3!)(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(}n)(a)}{n!}(x-a)^n$. Este es el **desarrollo en serie de Taylor** de $f(x)$ centrado en $x = a$.

Teorema del Resto de Lagrange

Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I y sea $x_0 \in I$. Entonces, para cada $x \in I$, existe un número c entre x y x_0 tal que

$$f(x) = T_f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

A esta expresión se la conoce como la **fórmula de Taylor con resto de Lagrange**.

¿Como obtener el resto de Lagrange?

Cuando una serie de Taylor se trunca en el término k-ésimo, el error cometido al aproximar la función $f(x)$ por el polinomio de Taylor de grado k, se obtiene de la siguiente manera:

1. Que la serie este truncada en k términos hace referencia a que la función $f(x)$ se aproxima por el polinomio de Taylor de grado k centrado en $x = a$, es decir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(}n)(a)}{n!}(x-a)^n + R_k(x)$$

   y lo que debemos calcular es el error $R_k(x)$, que se expresa como $R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$.
2. El número c es un número real que pertenece al intervalo $[a, x]$.
3. Calcular la derivada $(k+1)$-ésima de la función $f(x) : f^{(k+1)}(x)$.
4. Encontrar un valor c entre a y x. Si se conoce que $f^{(k+1)}(x)$ no cambia de signo en el intervalo $[a, x]$, se puede tomar $c = a$. De lo contrario, se debe aplicar el **teorema del valor medio** para encontrar c.
5. Evaluar $f^{(k+1)}(c)$.
6. Sustituir los valores encontrados en la fórmula del resto de Lagrange: $R_k(x) = (f^{(k+1)}(c)/(k+1)!)(x-a)^{(k+1)}$.

Ejemplo

Obtener la serie de Taylor centrada en 0 para la función $f(x) = ln(x+1)$. Escribir la serie usando la notación de sumatorias. Dar una expresión para el resto cuando la serie es truncada en k términos.

1. Calcular las derivadas sucesivas de la función $f(x)$ respecto a x: $f'(x) = 1/(x+1)$, $f''(x) = -1/(x+1)^2$, $f'''(x) = 2/(x+1)^3$, $f''''(x) = -6/(x+1)^4, \dots$.
   Con esto podemos ver que la derivada n-ésima de la función $f(x)$ es $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!/(x+1)^n$.
2. Evaluar cada una de estas derivadas en el punto $x = 0$: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$, $f''''(0) = -6, \dots$
   Si tomamos la expresión general de la derivada n-ésima de la función $f(x)$, se tiene que $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$.
3. Ahora desarrollo los términos del polinomio de taylor y reemplazo con los valores obtenidos en el paso 2:

$$\begin{aligned}
&\frac{f^0(0)}{1}x^0 + \frac{f^1(0)}{1!}x^1 + \frac{f^2(0)}{2!}x^2 + \frac{f^3(0)}{3!}x^3 + \frac{f^4(0)}{4!}x^4 + \dots \\
&= 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}
\end{aligned}$$

   Otra forma es reemplazar la expresión general en la fórmula de Taylor y simplificar:

$$T_f(x) == \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

Ahora para dar una expresión para el resto cuando la serie es truncada en k términos, se hace lo siguiente:

1. Que la serie este truncada en k términos hace referencia a que la función $f(x)$ se aproxima por el polinomio de Taylor de grado k centrado en $x = 0$, es decir

$$f(x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_k(x)$$

   y lo que debemos calcular es el error $R_k(x)$, que se expresa como $R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}x^{k+1}$.
2. La derivada $(k+1)$-ésima de la función $f(x)$ es $f^{(k+1)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{(x+1)^{k+1}}$, pero tomando el $c = a$, se tiene que $f^{(k+1)}(c) = (-1)^k \frac{k!}{(1)^{k+1}} = (-1)^k k!$.
3. Entonces reemplazando en la fórmula del resto de Lagrange, se obtiene que

$$R_k(x) = \frac{(-1)^k k!}{(k+1)!}x^{k+1} = \frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}$$

Estimar el número de términos que deberán incluirse en la serie para aproximar $ln(1.5)$ con un margen de error no mayor que 10^{-10}.

1. Se busca el valor de k tal que $|R_k(0.5)| \leq 10^{-10}$, esto es ya que $ln(1.5) = ln(1 + 0.5)$.
2. Por lo tanto primero hay que evaluar $R_k(0.5)$

$$R_k(0.5) = \frac{(-1)^k}{k+1}0.5^{k+1}$$

   Y se tiene que buscar que $|R_k(0.5)| \leq 10^{-10}$, es decir

$$\frac{0.5^{k+1}}{k+1} \leq 10^{-10}$$

   A partir de acá se puede buscar el valor de k que cumpla con la desigualdad.