Preliminares Matemáticos

Pedro Villar

Análisis Numérico - Primer Cuatrimestre 2024

FAMAF Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

UNC Universidad Nacional de Córdoba

Teorema del valor intermedio para funciones continuas

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, para todo y entre $f(a)$ y $f(b)$, existe un c en $[a, b]$ tal que $f(c) = y$.

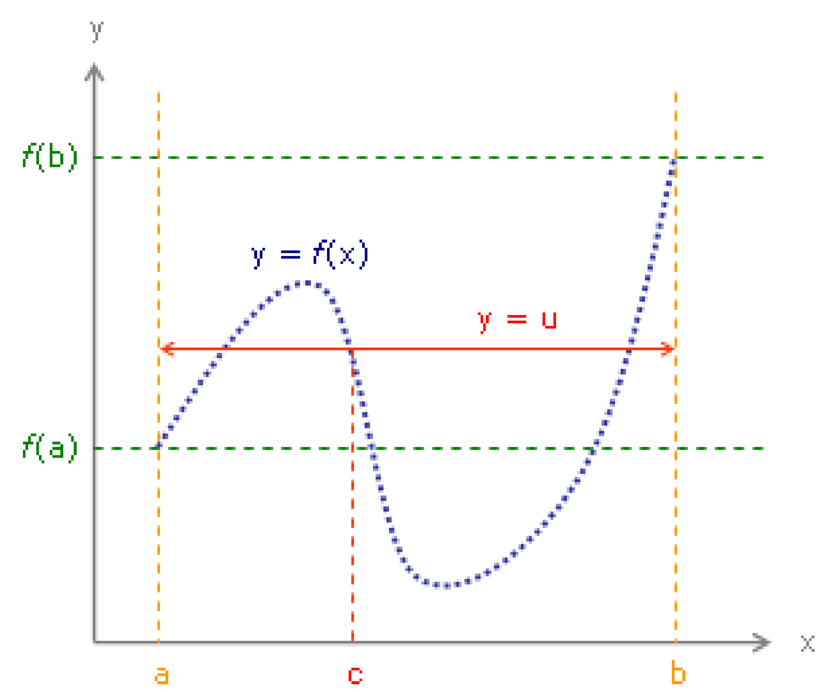

Fig. 1: Teorema del valor intermedio.

Teorema del valor medio para funciones derivables

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable. Entonces, existe un c en $[a, b]$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

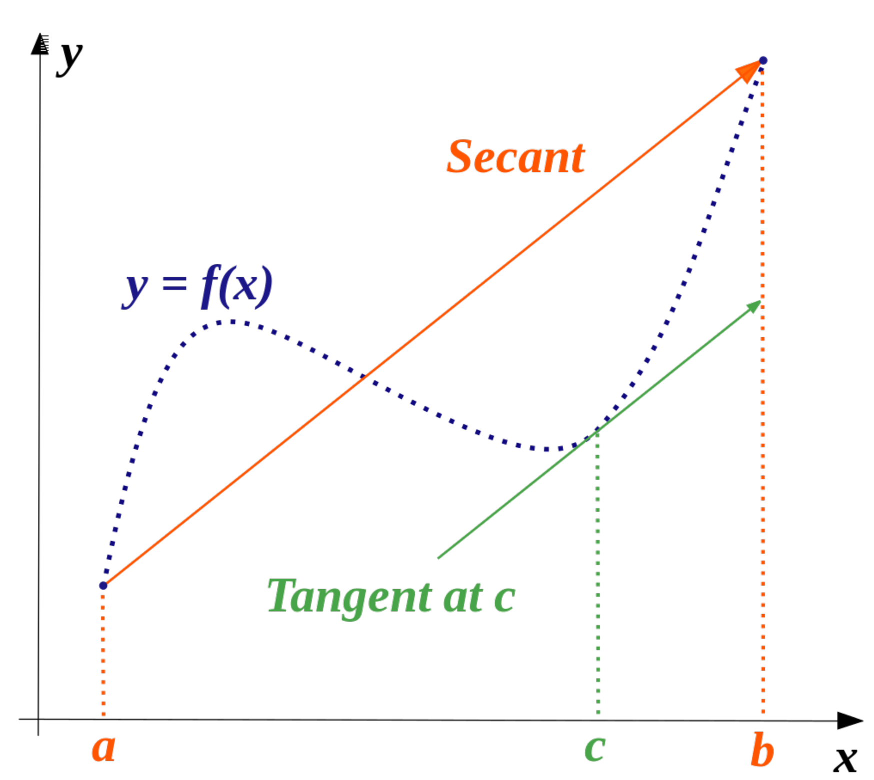

Fig. 2: Teorema del valor medio.

Teorema de Taylor

Si $f \in C^{(n)}[a, b]$ y existe $f^{n+1}(a, b)$ entonces para todo par $x, c \in [a, b]$ se tiene que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k + E_n(x),$$

donde

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - c)^{n+1}, \quad \xi \in (x, c).$$

Observación: tomando $y = c$, $(x - c) = h$ y por lo tanto $x = y + h$, entonces

$$f(y + h) = f(y) + f'(y)h + \frac{f''(y)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(y)}{n!}h^n + E_n(h).$$

para algún $c \in (y, y + h)$.

Teorema de Taylor del resto integral

Si $f \in C^{(n+1)}[a, b]$ entonces para todo par $x, c \in [a, b]$ se tiene que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k + R_n(x)$$

donde

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt.$$

Sucesión convergente

Una sucesión $\{x_n\}$ es convergente si existe un número L tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|x_n - L| < \varepsilon$.

Convergencia lineal, superlineal y cuadrática

Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente a x_{ast}.

- Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ tiene tasa de convergencia (al menos) **lineal** si existe una constante c tal que $0 < c < 1$ y un $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$|x_{n+1} - x_*| \leq c|x_n - x_*|, \quad \forall n \geq N.$$
- Se dice que la tasa de convergencia es (al menos) **superlineal** si existe una sucesión $\{\epsilon_n\}$ que converge a 0 y un $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$|x_{n+1} - x_*| \leq \epsilon_n|x_n - x_*|, \quad \forall n \geq N.$$
- Se dice que la tasa de convergencia es (al menos) **cuadrática** si existe una constante positiva c y un $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$|x_{n+1} - x_*| \leq c|x_n - x_*|^2, \quad \forall n \geq N.$$

Notación $\mathcal{O}$ grande y o chica

Introducimos una notación para comparar sucesiones y funciones. Sean $\{x_n\}$ y $\{\alpha_n\}$ dos sucesiones.

- Decimos que
$$\{x_n\} = \mathcal{O}(\alpha_n)$$
si existe una constante $C > 0$ y un $r \in \mathbb{N}$ tal que
$$|x_n| \leq C|\alpha_n|, \quad \forall n \geq r.$$
- Decimos que
$$\{x_n\} = O(\alpha_n)$$
si existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}$ que converge a 0, con $\varepsilon_n \geq 0$ y un $r \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| \leq \varepsilon_n|\alpha_n|, \quad \forall n \geq r.$

Esta notación también se puede extender a funciones. Se dice que

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad \text{cuando} \quad x \to \infty$$

si existe una constante $C > 0$ y un $r \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|, \quad \forall x \geq r$. Análogamente, se dice que

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{cuando} \quad x \to \infty$$

si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Ejemplo de notación O con sucesiones

Si

$$\frac{1}{n \cdot ln(n)} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\frac{1}{n \cdot ln(n)} \leq \varepsilon_n\left(\frac{1}{n}\right).$$

basta tomar $\varepsilon_n = \frac{1}{ln(n)}$.

Ejemplo de notación $\mathcal{O}$ con funciones

$$\sqrt{x^2 + 1} = \mathcal{O}(x) \quad \text{si} \quad x \to \infty.$$

pues

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \leq C,$$

luego basta tomar $C = 2$ y $r = 1$.