El determinante puede ser pensado como una función que a cada matriz cuadrada $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, le asocia un elemento de $\mathbb{K}$.

Definiciones y Observaciones

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$, entonces el *determinante de* A (en este caso expandido por la primera columna), denotado $\det(A)$ se define como:

(1) si $n = 1$, $\det([a]) = a$;

(n) si $n > 1$,

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11} \det A(1|1) - a_{21} \det A(2|1) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{n1} \det A(n|1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} a_{i1} \det A(i|1). \end{aligned}$$

Observación - Propiedades de determinantes
Sea A una matriz cuadrada de orden n y $k \in \mathbb{N}$, entonces:

1. $\det(A^t) = \det(A)$.
2. Si A tiene dos filas iguales, entonces $\det(A) = 0$.
3. Si A tiene una fila de ceros, entonces $\det(A) = 0$.
4. Si una fila es combinación lineal de otras filas, entonces $\det(A) = 0$.
5. Si los elementos de una fila de A son múltiplos de una constante k, entonces $\det(A) = k \det(A)$.
6. Si en un determinante se intercambian dos filas, entonces $\det(A) = -\det(A)$.
7. Si a los elementos de una fila se le suman los elementos de otra fila multiplicados por una constante, entonces $\det(A) = \det(A)$.

Determinantes por triangulación

Si A es una matriz triangular superior (es decir que son iguales a cero los elementos que están debajo de la diagonal principal), la aplicación del desarrollo por la primera columna muestra que $det(A)$ se obtiene multiplicando los elementos de esta diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow det(A) = \prod_{j=1}^{n} a_{jj}$$

Por lo tanto si se tiene una matriz que no es triangular, un método útil para obtener el determinante es reducir la matriz a triangular superior y así llegar a hacer el producto de la diagonal.

Método para matrices $n \times n$

La triangulación de una matriz $n \times n$ es un proceso algebraico que busca convertir la matriz original en una forma triangular superior o inferior mediante operaciones elementales de fila. Estas operaciones incluyen intercambio de filas, multiplicación de filas por un escalar y suma/resta de filas.

Ejemplos

Ejercicio 1
Calcular el determinante:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Solución: Efectuando las transformaciones $F_2 - 2F_1$, $F_3 - F_2$, $F_4 - F_2$,...,$F_n - F_2$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot \dots \cdot (n-2) = (-2)(n-2)!$$

Esto quiere decir que en la diagonal luego del 1 aparecerán todos los escalares hasta $n-2$.

Ejercicio 2
Calcular el determinante:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & 2 & 1 & \dots & 1 \\ n & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}.$$

Solución: Restando a cada fila, a partir de la segunda, la primera:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & 2 & 1 & \dots & 1 \\ n & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = n \cdot (n-1)! = n!$$

Ejercicio 3
Calcular el determinante:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Solución: Sumando a cada fila menos a la primera, la primera:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n!$$

Determinantes por Inducción

Para resolver determinantes por inducción fuerte en n, se sigue un enfoque inductivo para matrices de orden n.

1. **Caso base:** Si $n = 1$, entonces $\det(A) = a_{11}$ (en algunos casos se toma $n = 2$).
2. **Hipótesis de inducción:** Supongamos que el determinante vale para $n < k$. Y se debe probar que vale para $n = k + 1$.
3. **Paso inductivo:** Se expande el determinante de la matriz de orden n por la primera fila o columna, y se obtiene una expresión en términos de determinantes de matrices de orden n o menor. Se busca aplicar la hipótesis de inducción para obtener una expresión en términos de determinantes de matrices de orden n o menor.

Ejemplos

Ejercicio 1
Demuestra que si $a \neq b$ entonces el siguiente determinante de $n \times n$

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

Solución: Para esto haremos inducción fuerte sobre n:
Caso base: Tomando $n = 2$, probaremos que $\begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = \frac{a^3-b^3}{a-b}$:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} &= (a+b)^2 - ab = a^2 + 2ab + b^2 - ab = a^2 + ab + b^2 \\ &= \frac{(a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)}{(a-b)} = \frac{a^3 - b^3}{a - b} \end{aligned}$$

Hipótesis de inducción: Ahora supongamos que el determinante vale para $n \leq k$ y con esto probar que vale para $n = k + 1$ el determinante:

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{(k+1)\times(k+1)} = \frac{a^{k+2} - b^{k+2}}{a - b}$$

Paso inductivo: Calculo el determinante expandiendo por la fila 1:

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b) \cdot \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{k \times k} - ab \cdot \begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{k \times k}$$

$$= (a+b) \cdot \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b} - ab \cdot \begin{vmatrix} 1 & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{k \times k}$$

$$= (a+b) \cdot \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b} - ab \cdot 1 \begin{vmatrix} a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}_{(k-1) \times (k-1)}$$

$$= (a+b) \cdot \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b} - ab \cdot \frac{a^k - b^k}{a-b} = \frac{a^{k+2} - ab^{k+1} + ba^{k+1} - b^{k+2}}{a-b} - \frac{ba^{k+1} - ab^{k+1}}{a-b}$$

$$= \frac{a^{k+2} - b^{k+2}}{a-b}$$

Con esto queda probado que vale para todo n.

Ejercicio 2

Sea $A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ probar que $det(A_n) = n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución: **Caso base:** Para la prueba hacemos inducción fuerte sobre n, para el caso base, tomamos $n = 1$ y $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2 = 1+1, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1 = 3 = 2+1$$

Hipótesis de inducción: Ahora supongamos que el determinante vale para $n \leq k$ y con esto probar que vale para $n = k+1$ el determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(k+1)\times(k+1)} = k+2$$

Paso inductivo: Calculo el determinante expandiendo por la fila 1:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(k+1)\times(k+1)} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{k\times k} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{k\times k}$$

$$= 2(k+1) + (-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(k-1)\times(k-1)}$$

$$= 2(k+1) + (-1)k = 2k + 2 - k = k+2$$

Con esto queda probado que $det(A_n) = n+1$ vale para todo n natural.z

Ejercicio 3

Calcular el determinante de orden n de:

$$A = \begin{bmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{bmatrix}$$

Solución: Como no tenemos una fórmula, todavía no podemos hacer inducción fuerte para calcular el determinante, analicemos los resultados cuando la matriz es de orden 1,2 y 3:

$$\left|1+x^2\right| = 1+x^2, \quad \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4 \quad \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 \\ x & 1+x^2 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4+x^6$$

Se puede observar un patrón el determinante se va formando como $1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$, entonces la fórmula es

$$det(A) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}$$

Caso base: Tomando $n=2$, ya está probado en el paso anterior que

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4 = \sum_{k=0}^{2} x^{2k}$$

Hipótesis de inducción: Ahora supongamos que el determinante vale para $n \leq k$ y con esto probar que vale para $n=k+1$ el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(k+1)\times(k+1)} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k+2}$$

Paso inductivo: Desarrollo el determinante por la primera columna=

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix}_{(k+1)\times(k+1)} = (1+x^2)\sum_{k=0}^{n} x^{2k} - x \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix}_{k\times k}$$

$$= (1+x^2)\sum_{k=0}^{n} x^{2k} - x^2 \sum_{k=0}^{n} x^{2k-2} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k+2}$$

Con esto queda probado que vale para todo n vale el determinante.

Ejercicio 4
Calcular el determinante de orden n:

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 2x & x^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & x^2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2x \end{vmatrix}$$

Solución: Como no tenemos una fórmula, todavía no podemos hacer inducción fuerte para calcular el determinante, analicemos los resultados cuando la matriz es de orden 1,2 y 3:

$$D_1(x) = |2x| = 2x,$$

$$D_2(x) = \begin{vmatrix} 2x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 3x^2,$$

$$D_3(x) = \begin{vmatrix} 2x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} = 4x^3$$

Esto nos permite conjeturar una fórmula

$$D_n(x) = (n+1)x^n$$

Ahora hagamos inducción fuerte sobre n para demostrar la fórmula: **Caso base:** El caso base ya está demostrado con $n = 1$ y $n = 2$

$$D_1(x) = |2x| = 2x, \qquad D_2(x) = \begin{vmatrix} 2x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 3x^2$$

Hipótesis de inducción: Ahora supongamos que el determinante vale para $n \leq k$ y con esto probar que vale para $n = k+1$ el determinante:

$$D_{k+1}(x) = \begin{vmatrix} 2x & x^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & x^2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2x \end{vmatrix}_{(k+1)\times(k+1)} = (k+2)x^{k+1}$$

Paso inductivo: Desarrollando por la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 2x & x^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & x^2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2x \end{vmatrix}_{(k+1)\times(k+1)} = 2x \begin{vmatrix} 2x & x^2 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2x \end{vmatrix}_{k\times k} - \begin{vmatrix} x^2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2x \end{vmatrix}_{k\times k}$$

$$\begin{aligned} &= 2xD_k(x) - x^2 D_{k-1}(x) = 2x(k+1)x^k - x^2 k x^{k-1} \\ &= (k+2)x^{k+1} \end{aligned}$$

Con esto queda probado que el determinante vale para todo n.