Ejercicio 1
Justificar apropiadamente.

(a) (*5pts.*) Sea A una matriz $n \times n$. Probar que si A tiene dos filas iguales o una nula, entonces $det(A) = 0$.

(b) (*5pts.*) Probar la falsedad o no de la siguiente afirmación: si A y B son matrices invertibles, entonces $A + B$ es invertible.

(c) (*5pts.*) Sean A, B y C matrices $n \times n$ tales que $det(A) = -1$, $det(B) = 2$ y $det(C) = 3$. Calcular $det(A^2 B C^t B^{-1})$.

(d) (*5pts.*) Dar la Definición del núcleo de una transformación lineal.

Ejercicio 2
(*20pts.*) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} c & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular $det(A)$ y $det(B)$ en función de a, b y c.

Ejercicio 3
(*20pts.*) Decidir si existe y si es así darlo, un vector ortogonal a $(1, 2, 2)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

Ejercicio 4
(*10pts.*) Sea $T : M_{2\times 3} \to \mathbb{R}^7$ una transformación lineal tal que su núcleo es generado por las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) (*5pts.*) Determinar la dimensión de la imagen de T.

Ejercicio 5
Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida como

$$T(x, y) = (4x - y, 3x + 2y)$$

(a) (*10pts.*) Dar $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ con $\mathcal{B}\mathcal{B}' = \{(-1, 1), (4, 3)\}$.

(b) (*5pts.*) Determinar el núcleo e imagen de T.

Ejercicio 6
Considere la transformaciónlineal $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ definida como

$$T(p(x)) = x \cdot p(x) + p(0)$$

(a) (*10pts.*) Determinar el nuceo e imagen de T.

(b) (*5pts.*) Decidir si T es inyectiva y/o sobreyectiva.

(c) (*10pts.*) Decidir si T es diagonizable.