Índice de Contenido

1 Serie de Taylor

1.1 Teorema

Si f se puede representar como una serie de potencias centrada en a, es decir, si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

para todo x tal que $|x-a| < R$. Entonces

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

1.2 Definición

Sea $f(x)$ una función infinitamente diferenciable en un intervalo abierto que contiene a $x = a$. La serie de Taylor para $f(x)$ alrededor de o centrada en $x = a$ es

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

1.3 Observación

Para el caso especial en que $a = 0$, la serie de Taylor se llama serie de Maclaurin y queda

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

1.4 Método de obtención de la serie de Taylor

1. Calcular las derivadas de $f(x)$ hasta el orden n en el punto
2. Evaluar las derivadas en el punto a
3. Tratar de encontrar un patrón en las derivadas evaluadas en el punto a
4. Escribir la serie de Taylor

1.5 Ejemplos de series de Maclaurin

Ejemplo 1
Determine la serie de Maclaurin para $f(x) = e^x$.

Si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $f'''(x) = e^x$, $\cdots$. Evaluando en $x = 0$ se tiene que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$, $f'''(0) = 1$, $\cdots$. Entonces la serie de Maclaurin para $f(x) = e^x$ es

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Ejemplo 2
Determine la serie de Maclaurin para $f(x) = \sin(x)$.

Primero calculo las derivadas de $f(x) = \sin(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) &\Rightarrow\quad& f'(x) = \cos(x) \\ f''(x) &= -\sin(x) &\Rightarrow\quad& f'''(x) = -\cos(x) \\ f''''(x) &= \sin(x) &\Rightarrow\quad& f'''''(x) = \cos(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 0$ se tiene que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f''''(0) = 0$, $f'''''(0) = 1$, $\cdots$. Entonces la serie de Maclaurin para $f(x) = \sin(x)$ es

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ejemplo 3
Determine la serie de Maclaurin para $f(x) = \cos(x)$.

Primero calculo las derivadas de $f(x) = \cos(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) &\Rightarrow\quad& f'(x) = -\sin(x) \\ f''(x) &= -\cos(x) &\Rightarrow\quad& f'''(x) = \sin(x) \\ f''''(x) &= \cos(x) &\Rightarrow\quad& f'''''(x) = -\sin(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 0$ se tiene que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$, $f''''(0) = 1$, $f'''''(0) = 0$, $\cdots$. Entonces la serie de Maclaurin para $f(x) = \cos(x)$ es

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Ejemplo 4
Determine la serie de Maclaurin para $f(x) = \ln(x+1)$.

Primero calculo las derivadas de $f(x) = \ln(x+1)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x+1) &\Rightarrow\quad& f'(x) = \frac{1}{x+1} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} &\Rightarrow\quad& f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \\ f''''(x) &= -\frac{6}{(x+1)^4} &\Rightarrow\quad& f'''''(x) = \frac{24}{(x+1)^5} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 0$ se tiene que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$, $f''''(0) = -6$, $f'''''(0) = 24$, $\cdots$. Entonces la serie de Maclaurin para $f(x) = \ln(x+1)$ es

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Ejemplo 5
Determine la serie de Maclaurin para $f(x) = \arctan(x)$.

Primero calculo las derivadas de $f(x) = \arctan(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) = \arctan(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \quad &\Rightarrow \quad f'''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} \\ f''''(x) = -\frac{8x(3x^2-1)}{(1+x^2)^4} \quad &\Rightarrow \quad f'''''(x) = \frac{8(15x^4-10x^2+1)}{(1+x^2)^5} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 0$ se tiene que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 2$, $f''''(0) = 0$, $f'''''(0) = 8$, $\cdots$. Entonces la serie de Maclaurin para $f(x) = \arctan(x)$ es

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Ejemplo 6
Determine la serie de Maclaurin para $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Primero calculo las derivadas de $f(x) = \frac{1}{1-x}$:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{1-x} \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \\ f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \quad &\Rightarrow \quad f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4} \\ f''''(x) = \frac{24}{(1-x)^5} \quad &\Rightarrow \quad f'''''(x) = \frac{120}{(1-x)^6} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 0$ se tiene que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 6$, $f''''(0) = 24$, $f'''''(0) = 120$, $\cdots$. Entonces la serie de Maclaurin para $f(x) = \frac{1}{1-x}$ es

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Ejemplo 7
Determine la serie de Maclaurin para $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Primero calculo las derivadas de $f(x) = \frac{1}{1+x}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x} &\Rightarrow\quad f'(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} &\Rightarrow\quad f'''(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4} \\ f''''(x) &= \frac{24}{(1+x)^5} &\Rightarrow\quad f'''''(x) &= -\frac{120}{(1+x)^6} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 0$ se tiene que $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = -6$, $f''''(0) = 24$, $f'''''(0) = -120$, $\cdots$. Entonces la serie de Maclaurin para $f(x) = \frac{1}{1+x}$ es

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Ejemplo 8
Determine la serie de Maclaurin para $f(x) = xe^x$.

Primero calculo las derivadas de $f(x) = xe^x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^x &\Rightarrow\quad f'(x) &= e^x + xe^x \\ f''(x) &= 2e^x + xe^x &\Rightarrow\quad f'''(x) &= 3e^x + xe^x \\ f''''(x) &= 4e^x + xe^x &\Rightarrow\quad f'''''(x) &= 5e^x + xe^x \\ &\vdots \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 0$ se tiene que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 3$, $f''''(0) = 4$, $f'''''(0) = 5$, $\cdots$. Entonces la serie de Maclaurin para $f(x) = xe^x$ es Entonces $f^{(n)}(0) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la serie de Maclaurin para $f(x) = xe^x$ es

$$xe^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$$

1.6 Ejemplos de series de Taylor

Ejemplo 1
Determine la serie de Taylor para $f(x) = e^x$ alrededor de $x = 1$.

Si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $f'''(x) = e^x$, $\cdots$. Evaluando en $x = 1$ se tiene que $f(1) = e$, $f'(1) = e$, $f''(1) = e$, $f'''(1) = e$, $\cdots$. Entonces la serie de Taylor para $f(x) = e^x$ alrededor de $x = 1$ es

$$e^x = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(x-1)^n$$

Ejemplo 2
Determine la serie de Taylor para $f(x) = e^x$ en $x = 2$.

Si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $f'''(x) = e^x$, $\cdots$. Evaluando en $x = 2$ se tiene que $f(2) = e^2$, $f'(2) = e^2$, $f''(2) = e^2$, $f'''(2) = e^2$, $\cdots$. Entonces la serie de Taylor para $f(x) = e^x$ alrededor de $x = 2$ es

$$e^x = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \frac{e^2}{3!}(x-2)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

Ejemplo 3
Determine la serie de Taylor para $f(x) = \sin(x)$ alrededor de $x = \frac{\pi}{2}$.

Primero calculo las derivadas de $f(x) = \sin(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) = \sin(x) &\quad\Rightarrow\quad f'(x) = \cos(x)\\
f''(x) = -\sin(x) &\quad\Rightarrow\quad f'''(x) = -\cos(x)\\
f''''(x) = \sin(x) &\quad\Rightarrow\quad f'''''(x) = \cos(x)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Evaluando en $x = \frac{\pi}{2}$ se tiene que $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f''(\frac{\pi}{2}) = -1$, $f'''(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f''''(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f'''''(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\cdots$. Entonces la serie de Taylor para $f(x) = \sin(x)$ alrededor de $x = \frac{\pi}{2}$ es

$$\sin(x) = 1 - (x - \frac{\pi}{2}) + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^3}{3!} - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-\frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ejemplo 4
Determine la serie de Taylor para $f(x) = \cos(x)$ alrededor de $x = \frac{\pi}{2}$.

Primero calculo las derivadas de $f(x) = \cos(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) = \cos(x) &\quad\Rightarrow\quad f'(x) = -\sin(x)\\
f''(x) = -\cos(x) &\quad\Rightarrow\quad f'''(x) = \sin(x)\\
f''''(x) = \cos(x) &\quad\Rightarrow\quad f'''''(x) = -\sin(x)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Evaluando en $x = \frac{\pi}{2}$ se tiene que $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f'(\frac{\pi}{2}) = -1$, $f''(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f'''(\frac{\pi}{2}) = 1$, $f''''(\frac{\pi}{2}) = 0$, $f'''''(\frac{\pi}{2}) = -1$, $\cdots$. Entonces la serie de Taylor para $f(x) = \cos(x)$ alrededor de $x = \frac{\pi}{2}$ es

$$\cos(x) = 0 - (x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{(x-\frac{\pi}{2})^4}{4!} - \frac{(x-\frac{\pi}{2})^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!}$$

Ejemplo 5
Determine la serie de Taylor para $f(x) = \ln(x+1)$ alrededor de $x = 1$.

Primero calculo las derivadas de $f(x) = \ln(x+1)$:

$$\begin{aligned}
f(x) = \ln(x+1) &\quad\Rightarrow\quad f'(x) = \frac{1}{x+1}\\
f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} &\quad\Rightarrow\quad f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}\\
f''''(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} &\quad\Rightarrow\quad f'''''(x) = \frac{24}{(x+1)^5}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Evaluando en $x = 1$ se tiene que $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$, $f'''(1) = 2$, $f''''(1) = -6$, $f'''''(1) = 24$, $\cdots$. Entonces la serie de Taylor para $f(x) = \ln(x+1)$ alrededor de $x = 1$ es

$$\ln(x+1) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

2 Polinomio de Taylor

Sea f tal que existen $f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)$. Para $n \geq 0$, definimos el **polinomio de Taylor de f de orden n centrado en a** como

$$T_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$$

2.1 Ejemplo

Ahora veamos cómo utilizar esta definición para calcular varios polinomios de Taylor para $f(x) = \ln(x)$ en $x = 1$.
Para calcular los polinomios de Taylor necesitamos evaluar f y sus primeras 3 derivadas en $x = 1$:

$$\begin{aligned}
f(1) &= \ln(1) = 0 \\
f'(1) &= \frac{1}{1} = 1 \\
f''(1) &= -\frac{1}{1^2} = -1 \\
f'''(1) &= \frac{2}{1^3} = 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&T_{0,1}(x) = 0, \\
&T_{1,1}(x) = 0 + 1(x-1) = x - 1, \\
&T_{2,1}(x) = 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2, \\
&T_{3,1}(x) = 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3
\end{aligned}$$

2.2 Observaciones

- Notar que la n-ésima suma parcial de la serie de Taylor de f centrada en a es el polinomio de Taylor de f de orden n centrado en a.
- Notar qur $T_{1,a}$ es la recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$.

2.3 Teorema de Taylor con resto

Si $f \in C^{(n)}[a,b]$ y existe $f^{n+1}(a,b)$, es decir que se puede diferenciar $n+1$ entonces para todo par $x, c \in [a,b]$ se tiene que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + E_n(x),$$

donde

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \quad \xi \in (x,c).$$

Y si existe un número real M tal que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$ entonces se tiene que

$$|E_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

para todo $x \in [a,b]$.

2.4 Teorema de Convergencia de las series de Taylor

Sea f una función tal que existe $f^{(n)}(a)$ $\forall n \geq 0$. Entonces, se cumple que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \forall x \in (a-c, a+c) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} E_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a-c, a+c)$$

2.4.1 Observación

Con este teorema, podemos demostrar que una serie de Taylor par f en a converge a f si podemos probar que el resto $E_n(x) \to 0$.

2.4.2 Ejemplos

Ejemplo 1
Usando el teorema de Taylor con resto, demostrar que la serie de Maclaurin para $f(x) = e^x$ converge a $f(x) = e^x$ para todo x en su intervalo de convergencia.

Como se sabe, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es la serie de Maclaurin para $f(x) = e^x$. Para determinar su intervalo de convergencia, utilizamos el criterio del cociente. Dado que

$$\frac{|a_{n+1}|}{a_n} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1},$$

tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

para todo x. Por lo tanto, la serie converge absolutamente para todo x, y así, el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$. Para probar ahora que la serie converge a e^x para todo x, utilziamos el hecho de que $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo $n \geq 0$ y e^x es una función crecciente en $(-\infty, \infty)$. Por lo tanto, para cualquier número real b, el valor máximo de e^x para todo $|x| \leq b$ es e^b. Entonces,

$$|E_n(x)| \leq \frac{e^b}{(n+1)!}|x|^{(n+1)}$$

Como acabamos de probar que la serie converge absolutamente para todo x, podemos tomar b tan grande como queramos. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} E_n(x) = 0$ para todo x, y así la serie de Maclaurin para $f(x) = e^x$ converge a $f(x) = e^x$ para todo x.

2.5 Teorema de Taylor del resto integral

Si $f \in C^{(n+1)}[a,b]$ entonces para todo par $x, c \in [a,b]$ se tiene que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + E_n(x)$$

donde

$$E_n(x) = \frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

2.6 Ejemplos y Aplicaciones

Ejemplo 1
Dar la serie de Taylor de $f(x) = sen(x)$ y probar que f coincide con la serie de Maclaurin.

Ya tenemos la serie de Maclaurin para $f(x) = \sin(x)$, que es

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ahora notemos que $f^{(n+1)} = \pm sen(t)$ o $\pm \cos(t)$, en cualquier caso vale para $f^{(n+1)} \leq 1$. Luego se sabe que el resto es mayor o igual a 0

$$|R_n(x)| \geq 0 = \frac{|f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!}|x|^{(n+1)} \geq \frac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)!} = 0$$

es decir, $\lim_{n\to\infty} E_n(x) = 0$ para todo x, entonces la serie de Maclaurin para $f(x) = \sin(x)$ converge a $f(x) = \sin(x)$ para todo x es decir que coincide la expresión

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ejemplo 2
Usando la fórmula de Maclaurin de la función exponencial, estimar el valor de e con un error menor que 10^{-6}.

Se tiene la serie de Maclaurin para $f(x) = e^x$, que es

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Para $x = 1$, obtenemos

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + E_n(1)$$

Como sabemos que $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para todo $n \geq 0$, entonces $E_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}$ para algún $c \in [0,1]$. Despejando el resto se tiene que

$$|E_n(1)| = \left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \right) \right|$$

Ahora suponemos que $e < 3$ y que por lo tanto $e^c < 3$ para algún $c \in [0,1]$. Entonces

$$\frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Luego,

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

tomando $n = 9$,

$$\frac{3}{10!} < 10^{-6}$$

Esto quiere decir que tomando el polinomio de orden 9, se tiene que el error es menor que 10^{-6}.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!}$$

Ejemplo 3
Usando la fórmula de Maclaurin de la función $f(x) = \ln(1+x)$, estimar el valor de $\ln(\frac{3}{2})$.

Por lo pronto sabemos que hay que evaluar el polinomio en $x = \frac{1}{2}$. Sabemos que la serie de Maclaurin para $f(x) = \ln(1+x)$ es

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{(n+1)}}{n+1}$$

para $x \in (-1, 1]$. Entonces, como $x = \frac{1}{2}$ pertenece a dicho intervalo, se puede asegurar que cualquier truncamiento de la serie evaluado en $x = \frac{1}{2}$ es una aproximación de $\ln(\frac{3}{2})$. Y es obvio que cuanto más términos se tomen, más precisa será la aproximación.