Parte Práctica

1. Se sabe que la función $f(x) = e^x - 1 - 2x$ tiene 2 raíces, una en $x = 0$ y otra en el intervalo $[1, 2]$. Considere las siguientes funciones de iteración para encontrar la raíz no nula:

$$x_{n+1} = \frac{e^{x_n} - 1}{2}, \qquad x_{n+1} = \ln(1 + 2x_n).$$

Decida si existe un intevarlo de convergencia para cada una de ellas. Justifique.

2. Aproxime la función $f(x) = e^{-3x}$ para $x \in (0, \infty)$, por un polinomio cuadrático utilizando el método de cuadrados mínimos respecto a la función de peso $\omega(x) = e^{-x}$ y considerando los polinomios de Laguerre.

Ayuda: Los Polinomios de Laguerre están definidos como

$$\phi_k(x) = \frac{e^x}{k!} \frac{d^k}{dx^k}(x^k e^{-x})$$

para todo $x \in [0, \infty), k = 0, 1, 2, \ldots$ *Además, se sabe que para cada* n *natural vale que* $\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx = n!$

3. Considere el problema

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & -2x_1 - 3x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 \leq 8, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array}$$

Grafique las restricciones, resuelva usando el método Simplex, de el minimizador y el valor mínimo.

4. Considere la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Deduzca la iteración de Jacobi para resolver el sistema lineal $Ax = b$ para algún vector $b \in \mathbb{R}^3$.

(b) ¿Es esta iteración convergente? Justifique la respuesta.

~~5. **Sólo alumnos libres.**~~

~~(a) Determine el polinomio interpolante de grado menor o igual a 3 en la forma de Newton, que interpola los siguientes datos:~~

$$(1,0), \quad (2,-1), \quad (3,0), \quad (4,1).$$

~~(b) Asuma que se obtiene un dato adicional $(5,0)$. Recalcule el polinomio interpolante en la forma de Newton. (Nota: se evaluará la forma en que se haga este item, no solamente el resultado).~~

Parte Teórica

1. De la definición de una función spline en general y de las condiciones para que sea un spline cúbico natural.

2. De una deducción de la regla de Simpson para una función en el intervalo $[0,1]$.

3. Demuestre el teorema de convergencia del método de bisección.

1. Se sabe que la función $f(x) = e^x - 1 - 2x$ tiene 2 raíces, una en $x = 0$ y otra en el intervalo $[1, 2]$. Considere las siguientes funciones de iteración para encontrar la raíz no nula:

$$x_{n+1} = \frac{e^{x_n} - 1}{2}, \qquad x_{n+1} = \ln(1 + 2x_n).$$

Decida si existe un intevarlo de convergencia para cada una de ellas. Justifique.

Separo en dos casos:

- Tomo la primera fórmula:

$x_{n+1} = \dfrac{e^{x_n} - 1}{2} \Rightarrow g(x) = \dfrac{e^x - 1}{2}$ tengo que buscar I tal que:
- $g(I) \subseteq I$ (Existencia)
- $|g'(x)| < 1 \ \forall x \in I$ (Unicidad)

$g'(x) = \dfrac{1}{2} e^x$ lo cual debe ser < 1, entonces:

$\dfrac{1}{2} e^x < 1 \Rightarrow e^x < 2 \Rightarrow x < \ln(2) \approx 0{,}69 \not\subseteq [1,2]$ No existe intervalo

- Segunda fórmula:

$x_{n+1} = \ln(1 + 2x_n) \Rightarrow g(x) = \ln(1 + 2x)$ tengo que buscar I tal que:
- $g(I) \subseteq I$ (Existencia)
- $|g'(x)| < 1 \ \forall x \in I$ (Unicidad)

$g'(x) = \dfrac{2}{1+2x} = 2 \cdot (1+2x)^{-1}$, $\ 2 \cdot (1+2x)^{-1} < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{1+2x} < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{2} < x$, entonces propongo $I = [1,2]$

Como $\ln(x)$ es creciente, g es creciente, para probar el intervalo basta con probar en los extremos

$g(1) = \ln(1+2) = 1{,}09 > 1$ y $g(2) = \ln(1+4) = 1{,}61 < 2 \Rightarrow$ El intervalo $I = [1,2]$ es válido

2. Aproxime la función $f(x) = e^{-3x}$ para $x \in (0, \infty)$, por un polinomio cuadrático utilizando el método de cuadrados mínimos respecto a la función de peso $\omega(x) = e^{-x}$ y considerando los polinomios de Laguerre.

Ayuda: Los Polinomios de Laguerre están definidos como

$$\phi_k(x) = \frac{e^x}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^k e^{-x})$$

para todo $x \in [0, \infty), k = 0, 1, 2, \ldots$ *Además, se sabe que para cada* n *natural vale que* $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$

Primero que nada, se tiene que $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$ pero en este caso se tiene $f(x) = e^{-3x}$, entonces:

- $\int_0^\infty x^n e^{-kx} dx = \int_0^\infty x^n e^{-u}\frac{du}{k} = \int_0^\infty (u/k)^n e^{-u}\frac{du}{k} = \frac{1}{k^{n+1}}\int u^n e^{-u} du = \frac{n!}{k^{n+1}}$

Hipótesis

Sustitución: tomo $u = kx \Rightarrow du = 3\,dx$, $x = 3/u$

Ahora bien obtengo los polinomios a usar:

- $\Phi_0(x) = \frac{e^x}{0!}\cdot(x^0 e^{-x}) = e^x\cdot(e^{-x}) = e^{x-x} = 1$

- $\Phi_1(x) = \frac{e^x}{1!}\cdot(x\cdot e^{-x}) = e^x(e^{-x} - xe^{-x}) = 1 - x$

- $\Phi_2(x) = \frac{e^x}{2}\frac{d^2}{dx^2}(x^2e^{-x}) = \frac{1}{2}\cdot(x^2 - 4x + 2)$

1) $2xe^{-x} - x^2e^{-x}$, 2) $2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x} = e^{-x}(2 - 2x - 2x + x^2)$

Por teorema, si se tienen $\{\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\}$ ortogonales en $[0, \infty)$ respecto al peso $\omega(x)$ la aproximación cuadrática queda dada por:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{2} a_k\Phi_k(x) = a_0\Phi_0(x) + a_1\Phi_1(x) + a_2\Phi_2(x) \quad \text{donde} \quad a_k = \frac{\int_0^\infty \omega(x) f(x)\Phi_k(x)dx}{\int_0^\infty \omega(x)(\Phi_k(x))^2dx}$$

- $a_0 = \frac{\int_0^\infty e^{-x}e^{-3x}dx}{\int_0^\infty e^{-x}dx} = \int_0^\infty e^{-x}e^{-3x}dx = \int_0^\infty e^{-4x}dx = \frac{1}{4}$

- $a_1 = \frac{\int_0^\infty e^{-x}e^{-3x}(1-x)dx}{\int_0^\infty e^{-x}(1-x)^2dx} = \frac{\int_0^\infty e^{-4x}dx - \int_0^\infty xe^{-4x}dx}{\int_0^\infty e^{-x}(1-2x+x^2)dx} = \frac{\int_0^\infty e^{-4x}dx - \int_0^\infty xe^{-4x}dx}{\int_0^\infty (e^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x})dx} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}}{\cancel{1} - \cancel{1} + 2} = \frac{3}{32}$

- $a_2 = \frac{\int_0^\infty e^{-x}e^{-3x}\,1/2\,(x^2-4x+2)dx}{\int_0^\infty e^{-x}(1/2(x^2-4x+2))^2dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-4x}(x^2-4x+2)}{\frac{1}{4}\int_0^\infty e^{-x}(x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x + 4)dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^\infty (x^2e^{-4x} - 4xe^{-4x} + 2e^{-4x})dx}{\frac{1}{4}\int_0^\infty (x^4e^{-x} - 8x^3e^{-x} + 20x^2e^{-x} - 16xe^{-x} + 4e^{-x})dx}$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{32} - \frac{4}{16} + \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{4}(24 - 8\cdot 6 + 40 - 16 + 4)} = \frac{9}{24}$$

Por lo tanto el polinomio es:

$$\boxed{\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{32}(1-x) + \frac{9}{24}\left(1/2\,(x^2-4x+2)\right)}$$

Pedro Villar

3. Considere el problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & -2x_1 - 3x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 \leq 8, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Grafique las restricciones, resuelva usando el método Simplex, de el minimizador y el valor mínimo.

Minimización con Simplex (Tableau)

• Primero debo expresar el problema en forma estándar

$$\text{minimizar} \quad -2x_1 - 3x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + s_1 = 8 \\ & -x_1 + 2x_2 + s_2 = 4 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

base	x_1	x_2	s_1	s_2	LD
$-z$	-2	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	8
s_2	-1	2	0	1	4

• x_2 entra a la base,

• s_2 sale ya que $2 = \min\{8, 2\}$

$\xrightarrow{f_2/2}$ $f_1 - f_2$, $F_0 + 3F_2$

base	x_1	x_2	s_1	s_2	LD
$-z$	$-7/2$	0	0	$3/2$	6
s_1	$3/2$	0	1	$-1/2$	6
x_2	$-1/2$	1	0	$1/2$	2

• x_1 entra a la base,

• s_1 sale ya que $4 = \min\{4, 4\}$

$\xrightarrow{F_1 \cdot 2/3}$ $F_0 + 7/2\, F_1$, $F_2 + 1/2\, F_1$

base	x_1	x_2	s_1	s_2	LD
$-z$	0	0	$7/3$	$1/3$	$46/3$
x_1	1	0	$2/3$	$-1/3$	4
x_2	0	1	$1/2$	$1/3$	4

$\longrightarrow$ Se llega a la solución óptima

$(x_1, x_2, s_1, s_2) = (4, 4, 0, 0)$

4. Considere la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Deduzca la iteración de Jacobi para resolver el sistema lineal $Ax = b$ para algún vector $b \in \mathbb{R}^3$.

(b) ¿Es esta iteración convergente? Justifique la respuesta.

a) La iteración de Jacobi está dada por: $X_{n+1} = (M^{-1}N)x^n + M^{-1} \cdot b$ donde $M = D$ y $N = -(L+U)$

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & -3/4 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\Rightarrow X_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & -3/4 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \cdot X_n + \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}$$

b) La matriz es diagonalmente dominante, es decir $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} |a_{ij}|$, para $i = 1,2,3$.

$\Rightarrow$ converge para cualquier $X_0 \in \mathbb{R}^3$.

Pedro Villar

Parte Teórica

1. De la definición de una función spline en general y de las condiciones para que sea un spline cúbico natural.
2. De una deducción de la regla de Simpson para una función en el intervalo $[0,1]$.
3. Demuestre el teorema de convergencia del método de bisección.

1) Se llama spline a la llamada interpolación por partes o a trozos, se toman subintervalos en los cuales se forman polinomios unidos según ciertas condiciones de continuidad.
Para que un spline cúbico se de de forma natural, hay que imponer dos condiciones adicionales:

$S''(x_0)=S_0''(x_0)=0$ y $S''(x_{n-1})=S_{n-1}''(x_n)=0$.

2) Para deducir la regla de simpson en $[0,1]$, se tiene que formar el polinomio interpolante tomando como nodos a $x_0=0$, $x_1=1/2$, $x_2=1$:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \int_0^1 p(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\,l_i(x)\,dx = \int_0^1 \left(f(0)\,l_0(x)+f(1/2)\,l_1(x)+f(1)\,l_2(x)\right)dx$$

$$= f(0)\int_0^1 l_0(x)\,dx + f(1/2)\int_0^1 l_1(x)\,dx + f(1)\int_0^1 l_2(x)\,dx$$

$$= f(0)\int_0^1 \frac{(x-1/2)(x-1)}{(0-1/2)(0-1)}\,dx + f(1/2)\int_0^1 \frac{x(x-1)}{(1/2)(1/2-1)}\,dx + f(1)\int_0^1 \frac{x\cdot(x-1/2)}{1\,(1/2)}\,dx$$

$$= 2f(0)\int_0^1 (x-1/2)(x-1)\,dx - 4f(1/2)\int_0^1 x(x-1)\,dx + 2f(1)\int_0^1 x(x-1/2)\,dx$$

$$= 2f(0)\int_0^1 (x^2-x-1/2x+1/2)\,dx - 4f(1/2)\int_0^1 (x^2-x)\,dx + 2f(1)\int_0^1 (x^2-1/2x)\,dx$$

$$= 2f(0)\left(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}+\cancel{\frac{1}{2}}\right) - 4f(1/2)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) + 2f(1)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) \quad \boxed{= \frac{f(0)}{6} - \frac{2f(1/2)}{3} + \frac{f(1)}{6}}$$

3) Sean $[a_0,b_0],\dots,[a_n,b_n]$ los intervalos del método de bisección, si $c_n=\frac{1}{2}(a_n+b)$ y $r=\lim_{n\to\infty} c_n$, entonces $|r-c_n|\le \frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}$.
Como $a_0\le a_1\le a_2\le\dots\le b_0$, $\{a_n\}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente, por lo tanto converge, y $\{b_n\}$ decrece y es acotada inferiormente, también converge. Además $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n-a_n)$, y aplicando esta ecuación devuelta: $b_n-a_n=\frac{1}{2^2}(b_{n-1}-a_{n-1})\le\dots\le \frac{1}{2^{n+1}}(b_0-a_0) \Rightarrow |r-c_n|\le 1/2^{n+1}$, luego puede probar que $f(r)=0$, como $f(a_n)\cdot f(b_n)<0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n)\cdot f(b_n)\le 0 \Rightarrow f(\lim_{n\to\infty} a_n)\cdot f(\lim_{n\to\infty} b_n)\le 0$
$\Rightarrow f(r)\cdot f(r)\le 0 \Rightarrow f(r)=0$ //.