Análisis Numérico 1 - Parte Práctica

16 de Diciembre de 2020

1. Considere la regla de cuadratura
$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(\alpha) + f(-\alpha).$$
   (a) ¿Para qué valores de α (si existe) esta fórmula es exacta para polinomios de grado menor o igual a 1.
   (b) ¿Para qué valores de α (si existe) esta fórmula es exacta para polinomios de grado menor o igual a 3.
   (c) ¿Para qué valores de α (si existe) esta fórmula es exacta para polinomios de la forma $a + bx + cx^3 + dx^4$?

2. A partir del año 2016 se censó año a año el tamaño de la población en un criadero de conejos y los datos fueron los siguientes:

t (año)	2016	2017	2018	2019
P(población)	2981	4915	8103	17155

   Se cree que los datos siguen un comportamiento dado por una función exponencial de la forma $P(t) = P_0 e^{k(t-2016)}$.
   (a) Utilice el método de cuadrados mínimos para estimar los valores de P_0 y k.
   (b) Calcule la población aproximada correspondiente al año pasado (2019) usando lo realizado en el inciso anterior.
   (c) Construir un polinomio que interpole los datos en los años 2017, 2018 y 2019. Utilizarlo para estimar la población en el año 2016. ¿Es una buena estimación? ¿Por qué?

1. Considere la regla de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(\alpha) + f(-\alpha).$$

(a) ¿Para qué valores de α (si existe) esta fórmula es exacta para polinomios de grado menor o igual a 1.

(b) ¿Para qué valores de α (si existe) esta fórmula es exacta para polinomios de grado menor o igual a 3.

(c) ¿Para qué valores de α (si existe) esta fórmula es exacta para polinomios de la forma $a + bx + cx^3 + dx^4$?

a) Para que la regla sea exacta para polinomios de grado 1 se debe cumplir lo siguiente:

- $f(x) = 1 \quad \int_{-1}^{1} 1\,dx = f(\alpha) + f(-\alpha) = 1 + 1 = 2$ ✓
- $f(x) = x \quad \int_{-1}^{1} x\,dx = f(\alpha) + f(-\alpha) = \alpha - \alpha = 0$ ✓

No se obtienen restricciones $\Rightarrow$ vale para todo α.

b) Para que la regla sea exacta para polinomios de grado 3 se debe cumplir lo siguiente:

- $f(x) = 1 \quad \int_{-1}^{1} 1\,dx = f(\alpha) + f(-\alpha) = 1 + 1 = 2$ ✓
- $f(x) = x \quad \int_{-1}^{1} x\,dx = f(\alpha) + f(-\alpha) = \alpha - \alpha = 0$ ✓
- $f(x) = x^2 \quad \int_{-1}^{1} x^2 dx = f(\alpha) + f(-\alpha) = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 = 2/3 \Rightarrow \alpha = \sqrt{1/3}$
- $f(x) = x^3 \quad \int_{-1}^{1} x^3 dx = f(\alpha) + f(-\alpha) = \alpha^3 - \alpha^3 = 0 = 0$

Vale para $\alpha = \sqrt{1/3}$.

b) Para que la regla sea exacta para polinomios de grado 4 se debe cumplir lo siguiente:

- $f(x) = 1 \quad \int_{-1}^{1} 1\,dx = f(\alpha) + f(-\alpha) = 1 + 1 = 2$ ✓
- $f(x) = x \quad \int_{-1}^{1} x\,dx = f(\alpha) + f(-\alpha) = \alpha - \alpha = 0$ ✓
- $f(x) = x^2 \quad \int_{-1}^{1} x^2 dx = f(\alpha) + f(-\alpha) = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 = 2/3 \Rightarrow \alpha = \sqrt{1/3}$
- $f(x) = x^3 \quad \int_{-1}^{1} x^3 dx = f(\alpha) + f(-\alpha) = \alpha^3 - \alpha^3 = 0 = 0$
- $f(x) = x^4 \quad \int_{-1}^{1} x^4 dx = f(\alpha) + f(-\alpha) = \alpha^4 + \alpha^4 = 2\alpha^4 = 2/4$

Sólo vale para $\alpha = 0$

2. A partir del año 2016 se censó año a año el tamaño de la población en un criadero de conejos y los datos fueron los siguientes:

t (año)	2016	2017	2018	2019
P(población)	2981	4915	8103	17155

Se cree que los datos siguen un comportamiento dado por una función exponencial de la forma $P(t) = P_0 e^{k(t-2016)}$.

(a) Utilice el método de cuadrados mínimos para estimar los valores de P_0 y k.

(b) Calcule la población aproximada correspondiente al año pasado (2019) usando lo realizado en el inciso anterior.

(c) Construir un polinomio que interpole los datos en los años 2017, 2018 y 2019. Utilizarlo para estimar la población en el año 2016. ¿Es una buena estimación? ¿Por qué?

a) Para aproximar por cuadrados mínimos primero debo transformar la función a un polinomio:

$P(t) = P_0 e^{k(t-2016)} \Leftrightarrow \ln(P(t)) = \ln(P_0 \cdot e^{k(t-2016)}) = \ln(P_0) + k \cdot (t-2016)$, con esto cambio la tabla:

t (año)	2016	2017	2018	2019
P_x (nueva imagen)	8	8,5	9	9,75

Ahora planteo el sistema $(A^T A)x = A^T y$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2016 & 1 \\ 2017 & 1 \\ 2018 & 1 \\ 2019 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2016 & 2017 & 2018 & 2019 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} k \\ \ln(P_0) \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 8 \\ 8,5 \\ 9 \\ 9.75 \end{bmatrix}$$

o o o