ANÁLISIS NUMÉRICO I — Examen Final

24 de Febrero de 2021

1. Para cinco instantes de tiempo se un experimento se registró la siguiente tabla:

t	-2	-1	0	1	2
u	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2

Mostrar que si los datos se ajustan mediante cuadrados mínimos por una función cuadrática $\Psi(t)$, la aproximación en $t = 0$ es dada por:

$$\Psi(0) = \frac{1}{35}(-3u_{-2} + 12u_{-1} + 17u_0 + 12u_1 - 3u_2)$$

2. Dado el sistema $Ax = b$, donde $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$:

   a) Deduzca la iteración de Gauss-Seidel para resolver el sistema lineal $Ax = b$.

   b) Determine si la sucesión $\{x^{(k)}\}$ generada por el método de Gauss-Seidel es convergente justificando su respuesta.

3. Determinar N de modo que la regla del trapecio compuesta otorgue el valor de $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ con seis dígitos correctos después del punto decimal, suponiendo que e^{-x^2} se puede calcular de manera precisa.

Pedro Villar

1. Para cinco instantes de tiempo se un experimento se registró la siguiente tabla:

t	-2	-1	0	1	2
u	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2

Mostrar que si los datos se ajustan mediante cuadrados mínimos por una función cuadrática $\Psi(t)$, la aproximación en $t=0$ es dada por:

$$\Psi(0) = \frac{1}{35}(-3u_{-2} + 12u_{-1} + 17u_0 + 12u_1 - 3u_2)$$

Para aproximar mediante cuadrados mínimos planteo la tabla del método algebraico:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} U_{-2} \\ U_{-1} \\ U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad (A^TA) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(A^Tb) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{-2} \\ U_{-1} \\ U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4U_{-2} + U_{-1} + U_1 + 4U_2 \\ -2U_{-2} - U_{-1} + U_1 + 2U_2 \\ U_{-2} + U_{-1} + U_0 + U_1 + U_2 \end{bmatrix}$$

El sistema a resolver queda:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 34 & 0 & 10 & 4U_{-2} + U_{-1} + U_1 + 4U_2 \\ 0 & 10 & 0 & -2U_{-2} - U_{-1} + U_1 + 2U_2 \\ 10 & 0 & 5 & U_{-2} + U_{-1} + U_0 + U_1 + U_2 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 \leftrightarrow F_1]{F_3/10} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & \frac{1}{10}(U_{-2} + U_{-1} + U_0 + U_1 + U_2) \\ 0 & 10 & 0 & -2U_{-2} - U_{-1} + U_1 + 2U_2 \\ 34 & 0 & 10 & 4U_{-2} + U_{-1} + U_1 + 4U_2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 - 34F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & \frac{1}{10}(U_{-2} + U_{-1} + U_0 + U_1 + U_2) \\ 0 & 10 & 0 & -2U_{-2} - U_{-1} + U_1 + 2U_2 \\ 0 & 0 & -7 & \frac{3}{5}U_{-2} - \frac{12}{5}U_{-1} - \frac{17}{5}U_0 - \frac{12}{5}U_1 + \frac{3}{5}U_2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3/-7} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & \frac{1}{10}(U_{-2} + U_{-1} + U_0 + U_1 + U_2) \\ 0 & 10 & 0 & -2U_{-2} - U_{-1} + U_1 + 2U_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{35}U_{-2} + \frac{12}{35}U_{-1} + \frac{17}{35}U_0 + \frac{12}{35}U_1 - \frac{3}{35}U_2 \end{array}\right]$$

Sea $\Psi(x) = ax^2 + bx + c$, $\Psi(0) = c$, por lo que para verificar la condición basta probar el último termino si coincide:

$$\boxed{\begin{aligned} \Psi(0) = c &= -\frac{3}{35}U_{-2} + \frac{12}{35}U_{-1} + \frac{17}{35}U_0 + \frac{12}{35}U_1 - \frac{3}{35}U_2 \\ &= \frac{1}{35}\left(-3U_{-2} + 12U_{-1} + 17U_0 + 12U_1 - 3U_2\right) \end{aligned}}$$

2. Dado el sistema $Ax = b$, donde $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$:

a) Deduzca la iteración de Gauss-Seidel para resolver el sistema lineal $Ax = b$.

b) Determine si la sucesión $\{x^{(k)}\}$ generada por el método de Gauss-Seidel es convergente justificando su respuesta.

a) La fórmula de iteración está dada por $X_{n+1} = (M^{-1}N)X_n + M^{-1}b$, en el caso de Gauss-Seidel se toma $M = (L+D)$ y $N = -U$:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/4 & 1/8 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (M^{-1}N) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/4 & 1/8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{X_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} X_n + \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -1/4 & 1/8 \end{bmatrix} b}$$

b) La sucesión es convergente ya que A es diagonalmente, es decir, $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$.

3. Determinar N de modo que la regla del trapecio compuesta otorgue el valor de $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ con seis dígitos correctos después del punto decimal, suponiendo que e^{-x^2} se puede calcular de manera precisa.

Se busca que la siguiente aproximación $\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \int_0^1 p(x)dx$ tenga un error menor a 10^{-6}:

el error de la regla del trapecio compuesta está dada por:

$$E_T(f) = \underbrace{-\frac{b-a}{12}}_{-\frac{b-a}{12} \leq \frac{1}{12}} h^2 \underbrace{f''(\xi)}_{(4x^2-2)e^{-x^2} \leq 2\cdot 1} \leq \frac{1}{12_6}\cdot 2^1 h^2 = \frac{1}{6}h^2 \leq 10^{-6} \Rightarrow h \leq \sqrt{10^{-6}\cdot 6} \Rightarrow \frac{1}{N} \leq \sqrt{10^{-6}\cdot 6}$$

$(4x^2-2)$: creciente, basta tomar el extremo derecho

e^{-x^2}: como e^{x^2} es creciente $\Rightarrow e^{-x^2}$ decrece, tomo el extremo izquierdo

$$\Rightarrow n \geq \frac{1}{\sqrt{10^{-6}\cdot 6}} \approx 408{,}25$$

<u>Basta tomar $N=409$ para obtener un error menor a 10^{-6}</u>