- En cada ejercicio **JUSTIFIQUE CLARAMENTE** sus respuestas.
- Enumere todas las hojas y escriba su nombre y apellido en cada una.

Ejercicio 1. Se desea estimar el valor de e utilizando la función $f(x) = e^x$.

(a) Calcular una expresión general para el polinomio de Taylor de orden n centrado en 0 de la función $f(x) = e^x$, $P_{n,0}(x)$.

(b) Estimar el valor de e evaluando el polinomio de Taylor de orden 4, $P_{4,0}(x)$, en un valor adecuado de x.

(c) Dar una cota para el error de la aproximación obtenida en el inciso anterior. (Ayuda: usar que $2 < e < 3$ donde sea necesario.)

Ejercicio 2. Sean $g(x) = \dfrac{2 - e^x + x^2}{9} + 1.5$ y el intervalo $I = [1, 2.5]$.

(a) Mostrar que $g(x)$ tiene un único punto fijo en I.

(b) Si se aplica el método de punto fijo iniciando con un $x_0 \in I$, estimar el número de iteraciones necesarias para que $|x_n - x_*| \leq 10^{-4}$.

Ejercicio 3. Evaluar el polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ en $x = 2.19$ utilizando aritmética de punto flotante de 4 dígitos decimales. Evaluarlo luego con la misma aritmética, usando la expresión alternativa $P(x) = ((x-3)x+3)x - 1$ (Esquema de Horner). Comparar ambos resultados con el resultado exacto $P(2.19) = 1.685159$ y sacar conclusiones.

Ejercicio 4. Se consideran las siguientes tres opciones para aproximar la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[1, 4]$:

- Polinomio de Taylor $T(x)$ de grado 2 centrado en $x = 1$.
- Polinomio interpolante $P(x)$ de grado 2 que coincide con $f(x)$ en $x = 1, \frac{9}{4}, 4$.
- Spline lineal $S(x)$ que coincide con $f(x)$ en $x = 1, \frac{9}{4}, 4$.

(a) Estimar el error que se obtiene al aproximar $\sqrt{3}$ con cada una de las funciones T, P y S. (No es necesario construir las tres funciones).

(b) Según lo obtenido en (a) ¿Cuál de las 3 funciones T, P y S aproxima mejor a $\sqrt{3}$?

(c) Evaluar explícitamente en 3 la función obtenida en (b).

Ejercicio 5. (a) ¿Es posible que el algoritmo de bisección converja a una raíz de $f(x)$ en $[a, b]$ aún si no se cumple en el inicio del mismo que $f(a)f(b) < 0$? (Asumir que no se chequea esta condición al comienzo del mismo).

(b) Si cuatro puntos distintos $(x_0, y_0), \ldots, (x_3, y_3)$ son interpolados por un polinomio de grado 2 ¿Es posible encontrar un polinomio de grado 3 que interpole los datos?

Ejercicio 2. Sean $g(x) = \dfrac{2 - e^x + x^2}{9} + 1.5$ y el intervalo $I = [1, 2.5]$.

(a) Mostrar que $g(x)$ tiene un único punto fijo en I.

(b) Si se aplica el método de punto fijo iniciando con un $x_0 \in I$, estimar el número de iteraciones necesarias para que $|x_n - x_*| \leq 10^{-4}$.

a) Sea $g(x) = \dfrac{2-e^x+x^2}{9} + 1.5$ en $I=[1,2,5]$, si quiero ver que tiene un punto Fijo en I debo probar existencia y unicidad:

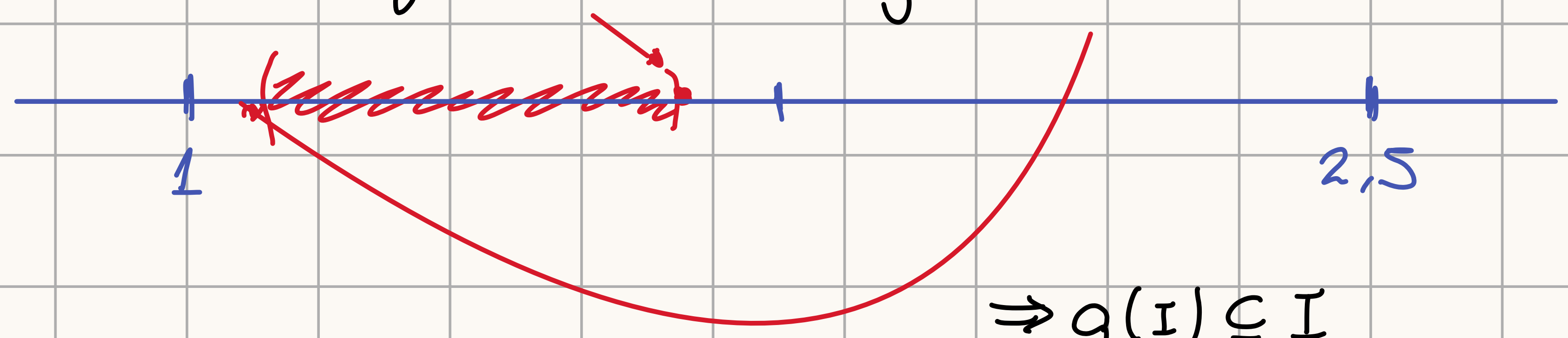
• Existencia: $g \in C[1,2.5]$, $g(I) \subseteq I$:

$$g'(x) = \frac{-e^x+2x}{9}, \quad g'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{2x-e^x}{9}<0 \Leftrightarrow 2x-e^x<0$$

$\boxed{e^x \text{ crece mas rápido que } 2x \text{ para todo } x \in [1,2,5] \Rightarrow g \text{ es decreciente en } I}$

Por lo tanto basta con evaluar en los extremos:

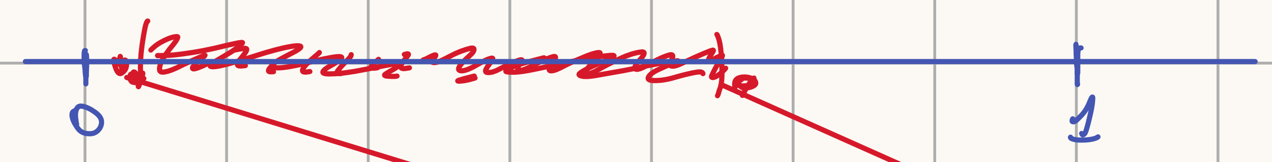
$g(1) \approx 1{,}53$, $g(2{,}5) \approx 1{,}06$



$\Rightarrow g(I) \subseteq I$

• Unicidad: $|g'(x)| \leq K < 1 \quad \forall x \in I$:

$g''(x) = \dfrac{-e^x+2}{9}$, $g''(x)<0 \Leftrightarrow -e^x+2<0 \Leftrightarrow e^x>2 \Leftrightarrow x>\ln(2)$, quiere decir que $g'(x)$ es decreciente $\forall x>\ln(2)$ y por lo tanto lo es en $[1,2.5]$, por lo que basta con evaluar en los extremos:



$|g'(1)| \approx 0{,}08$ $\quad |g'(2{,}5)| \approx 0{,}79$

El punto fijo existe y es único en $I=[1,2.5]$

b) Supongamos que x^* es un punto fijo, es decir $g(x^*)=x^*$, entonces $|x_n-x^*|$ debe ser $<10^{-4}$, por colorario se tiene que $|x_n-x^*| \leq K^n|2.5-1| = K^n \cdot 1.5 \approx 0{,}79^n \cdot 1{,}5 \leq 10^{-4} \Leftrightarrow 0{,}79^n \leq 10^{-4} \cdot 1{,}5$

$\Leftrightarrow n \cdot \ln(0{,}79) \geq \ln(10^{-4} \cdot 1{,}5)$

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(10^{-4} \cdot 1{,}5)}{\ln(0{,}79)}$

Respuesta: se deben realizar al menos 38 iteraciones para obtener un error menor a 10^{-4}

Pedro Villar

Ejercicio 3. Evaluar el polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ en $x = 2.19$ utilizando aritmética de punto flotante de 4 dígitos decimales. Evaluarlo luego con la misma aritmética, usando la expresión alternativa $P(x) = ((x-3)x+3)x - 1$ (Esquema de Horner). Comparar ambos resultados con el resultado exacto $P(2.19) = 1.685159$ y sacar conclusiones.

Aritmético de punto flotante de 4 dígitos

- $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ en $x = 2{,}19$
  - $fl(x) = fl(2{,}19) = fl(0{,}2190 \cdot 10) = 0{,}2190 \cdot 10^1$
  - $fl(x^2) = fl(0{,}219 \cdot 10^1 \cdot 0{,}219 \cdot 10^1) = fl(0{,}047961 \cdot 10^2) = 0{,}4796 \cdot 10^1$
  - $fl(x^3) = fl(0{,}219 \cdot 10^1 \cdot 0{,}4796 \cdot 10^1) = fl(0{,}1050324 \cdot 10^2) = 0{,}1050 \cdot 10^2$
  - $fl(3x^2) = fl(0{,}3 \cdot 10 \cdot 0{,}4796 \cdot 10^1) = fl(0{,}14388 \cdot 10^2) = 0{,}1439 \cdot 10^2$
  - $fl(3x) = fl(0{,}3 \cdot 10^1 \cdot 0{,}2190 \cdot 10^1) = fl(0{,}0657 \cdot 10^2) = 0{,}6570 \cdot 10^1$
  - $fl(x^3 - 3x^2) = fl(0{,}1050 \cdot 10^2 - 0{,}1439 \cdot 10^2) = fl(-0{,}0389 \cdot 10^2) = -0{,}3890 \cdot 10^1$
  - $fl(x^3 - 3x^2 + 3x) = fl(-0{,}3890 \cdot 10^1 + 0{,}6570 \cdot 10^1) = fl(0{,}2667 \cdot 10^1) = 0{,}2667 \cdot 10^1$
  - $\underline{fl(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = fl(0{,}2667 \cdot 10^1 - 0{,}1 \cdot 10^1) = fl(0{,}1667 \cdot 10^1) = 0{,}1667 \cdot 10^1}$
- $P(x) = ((x-3)x+3)x+3)x - 1$ en $x = 2{,}19$
  - $fl(x-3) = fl(0{,}2190 \cdot 10^1 - 0{,}3 \cdot 10^1) = fl(-0{,}0810 \cdot 10^1) = -0{,}8100 \cdot 10^0$
  - $fl((x-3) \cdot x) = fl(-0{,}8100 \cdot 10^0 \cdot 0{,}2190 \cdot 10^1) = fl(-0{,}17739 \cdot 10^1) = -0{,}1774 \cdot 10^1$
  - $fl((x-3) \cdot x + 3) = fl(-0{,}1774 \cdot 10^1 + 0{,}3 \cdot 10^1) = fl(0{,}1226 \cdot 10^1) = 0{,}1226 \cdot 10^1$
  - $fl(((x-3) \cdot x + 3) \cdot x) = fl(0{,}1226 \cdot 10^1 \cdot 0{,}2190 \cdot 10^1) = fl(0{,}0268494 \cdot 10^2) = 0{,}2685 \cdot 10^1$
  - $\underline{fl((x-3)x+3) \cdot x - 1) = fl(0{,}2685 \cdot 10^1 - 0{,}1 \cdot 10^1) = fl(0{,}1685 \cdot 10^1) = 0{,}1685 \cdot 10^1}$

Comparación

- El algoritmo de Horner nos permite expresar a los polinomios de una forma tal que a la hora de evaluar se realicen menos operaciones, y a su vez menor pérdida de dígitos, ya que el error cometido es propocional a la cantidad de operaciones en punto flotante. Por ello, es mas exacto el segundo resultado.

Ejercicio 4. Se consideran las siguientes tres opciones para aproximar la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[1, 4]$:

- Polinomio de Taylor $T(x)$ de grado 2 centrado en $x = 1$.
- Polinomio interpolante $P(x)$ de grado 2 que coincide con $f(x)$ en $x = 1, \frac{9}{4}, 4$.
- Spline lineal $S(x)$ que coincide con $f(x)$ en $x = 1, \frac{9}{4}, 4$.

(a) Estimar el error que se obtiene al aproximar $\sqrt{3}$ con cada una de las funciones T, P y S. (No es necesario construir las tres funciones).

(b) Según lo obtenido en (a) ¿Cuál de las 3 funciones T, P y S aproxima mejor a $\sqrt{3}$?

(c) Evaluar explícitamente en 3 la función obtenida en (b).

a) Polinomio de Taylor grado 2 centrado en $x=1$:

$$E_T(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-1)^3 = \frac{\frac{3}{8\sqrt{\xi^5}}}{6}(x-1)^3 \quad \text{Luego} \quad |E_T(3)| = \frac{\frac{3}{\cancel{8}\sqrt{1^5}}}{6}\cdot \cancel{8} \boxed{=\frac{1}{2}}$$

Polinomio interpolante $P(x)$, grado 2, puntos $x=1, 9/4, 4$.

$$E_I(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-1)(x-9/4)(x-4) \quad \text{con } \xi \in [1,4]$$

$$|E_I(4)| = \frac{3/8}{6}\cdot 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{16}\cdot 2\cdot\frac{3}{4} = \boxed{\frac{3}{32}}$$

Spline lineal $S(x)$ que coincide con $f(x)$ en $x=1, 9/4, 4$

$$E_S(x) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2}(x-9/4)(x-4), \text{ Luego } |E_S(3)| = \frac{\frac{1}{4(3/2)^3}}{2}(3-9/4)(3-4) = \boxed{\frac{1}{36}}$$

b) El spline lineal aproxima mejor a $f(x)$,

c)
$$S(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } 1 \le x \le 9/4 \\ cx+d & \text{si } 9/4 \le x \le 4 \end{cases}$$

$S_2(9/4) = \sqrt{9/4} = 3/2 \longleftrightarrow c\cdot(9/4)+d = 3/2$

$S_2(4) = \sqrt{4} = 2 \longleftrightarrow c\cdot 4 + d = 2$

$$\begin{cases} c\cdot(9/4)+d = 3/2 \\ c\cdot 4+d = 2 \end{cases} \xrightarrow{f_2 - f_1} \begin{cases} c\cdot(9/4)+d = 3/2 \\ c\cdot(7/4) = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} c = 2/7 \\ d = 2 - 4\cdot 2/7 = 6/7 \end{array}$$

$$S_2(x) = (2/7)\cdot x + (6/7), \quad S_2(3) = (2/7)\cdot 3 + (6/7) \boxed{= \frac{12}{7}}$$

Ejercicio 5. (a) ¿Es posible que el algoritmo de bisección converja a una raíz de $f(x)$ en $[a, b]$ aún si no se cumple en el inicio del mismo que $f(a)f(b) < 0$? (Asumir que no se chequea esta condición al comienzo del mismo).

(b) Si cuatro puntos distintos $(x_0, y_0), \ldots, (x_3, y_3)$ son interpolados por un polinomio de grado 2 ¿Es posible encontrar un polinomio de grado 3 que interpole los datos?

a) Sí, es posible que converja, el algoritmo va a tomar el primer intervalo válido, más allá que ambos sean válidos.

b) Por teorema, si se tienen $(x_0, y_0), \ldots, (x_3, y_3)$ va a existir un único polinomio de grado menor o igual a 3 que los interpola, por lo tanto No, no es posible.