ANÁLISIS NUMÉRICO / ANÁLISIS NUMÉRICO I — Examen Final

10 de Marzo de 2021

Justificar todas las respuestas.
Deberán resolver el examen en forma manuscrita (en papel, con letra clara), para luego escanear y subirlo como un único archivo PDF de menos de 20MB.

1. Un vendedor prepara combos de regalo de tres modelos distintos para vender durante el día. El combo A incluye un peluche, 6 bombones y una rosa, y se vende por $1000. El combo B incluye un peluche y 24 bombones, y se vende por $2000. El combo C incluye 18 bombones y 6 rosas, y se vende por $800. Tiene un stock de 16 peluches, 240 bombones y 15 rosas.

   a. El vendedor quiere preparar las cantidades de cada combo que maximice sus ganancias. Determinar cuáles son las incógnitas y cuál es la función objetivo del problema.

   b. Escribir las restricciones del problema.

   c. Escribir el problema de programación lineal en forma estándar, y construir la matriz de simplex asociada (sin resolver).

2. La función $f(x) = cos(2\pi x) - 2x$ tiene una única raíz en el intervalo $[0, 1]$. Realizar tres iteraciones del método de bisección en dicho intervalo. Determinar una cota ajustada para el error de la aproximación.

3. **Solo para libres**: Determinar el grado de precisión de la aproximación

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{3}f(1) + \frac{1}{3}f\left(\frac{3}{2}\right)$$

Pedro Villar

1. Un vendedor prepara combos de regalo de tres modelos distintos para vender durante el día. El combo A incluye un peluche, 6 bombones y una rosa, y se vende por $1000. El combo B incluye un peluche y 24 bombones, y se vende por $2000. El combo C incluye 18 bombones y 6 rosas, y se vende por $800. Tiene un stock de 16 peluches, 240 bombones y 15 rosas.

   a. El vendedor quiere preparar las cantidades de cada combo que maximice sus ganancias. Determinar cuáles son las incógnitas y cuál es la función objetivo del problema.

   b. Escribir las restricciones del problema.

   c. Escribir el problema de programación lineal en forma estándar, y construir la matriz de simplex asociada (sin resolver).

Datos

$A = (1p + 6b + 1r) \cdot \$1000$

$B = (1p + 24b + 0r) \cdot \$2000$

$C = (0p + 18b + 6r) \cdot \$800$

$\underbrace{\cdot\, 16p + 240b + 15r}_{\text{stock para usar}}$

a) Función objetivo Incógnitas: p, b, r

maximizar $(1p + 6b + 1r) \cdot \$1000 + (1p + 24b + 0r) \cdot \$2000 + (0p + 18b + 6r) \cdot \$800$

b) Reestricciones

$2p \leq 16 \longrightarrow$ 16 peluches

$30b \leq 240 \longrightarrow$ 240 bombones

$7r \leq 15 \longrightarrow$ 15 rosas

c) $\min \ -(1p + 6b + 1r) \cdot \$1000 - (1p + 24b + 0r) \cdot \$2000 - (0p + 18b + 6r) \cdot \$800$

s.a $2p + s_1 = 16$

$30b + s_2 = 240$

$7r + s_3 = 15$

$p, b, r, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

base	p	b	r	s_1	s_2	s_3	LD
$-z$	-3k	-68,4k	-5,8k	0	0	0	0
s_1	2	0	0	1	0	0	16
s_2	0	30	0	0	1	0	240
s_3	0	0	7	0	0	1	15

Pedro Villar

2. La función $f(x) = cos(2\pi x) - 2x$ tiene una única raíz en el intervalo $[0, 1]$. Realizar tres iteraciones del método de bisección en dicho intervalo. Determinar una cota ajustada para el error de la aproximación.

Primera iteración • $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(c) = f(1/2) = -2$

Segundo iteración • $f(0) = 1$, $f(1/2) = -2$, $f(c) = f(1/4) = -1/2$

Tercera iteración • $f(0) = 1$, $f(1/4) = -1/2$, $f(c) = f(1/8) = \boxed{\frac{-1+2\sqrt{2}}{4}}$

$|r - x^*| \leq 1/2^{n+1}(b_0 - a_0) = 1/2^4 = \boxed{\frac{1}{16}} \longleftarrow$ Cota de aproximación

3. **Solo para libres**: Determinar el grado de precisión de la aproximación

$$\int_0^2 f(x)dx \approx \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{3}f(1) + \frac{1}{3}f\left(\frac{3}{2}\right)$$

Para determinar el grado de precisión n: pruebo exactitud para $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

- $f(x) = 1$ $\quad \int_0^2 dx = \frac{1}{3} f(1/2) + \frac{4}{3} f(1) + \frac{1}{3} f(3/2) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = 2$ ✓
- $f(x) = x$ $\quad \int_0^2 x\,dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \cdot 1 + \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{2} = 2$ ✓
- $f(x) = x^2$ $\quad \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{3} + \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{9}^{3}}{4} = \frac{13}{6} \neq \frac{8}{3}$ ✗

$\boxed{\text{Tiene grado de presición 1}}$