Examen Final de Análisis Numérico

03/07/2024

Parte Práctica

1. Considere la siguiente tabla de datos:

x	-2	-1	0	1	2
y	1	4	11	16	13

   (a) Muestre que el polinomio interpolante de Newton tiene grado exactamente 3.

   (b) Supongamos que se agrega como nuevo dato a $x_6 = 3$ con $y_6 = -4$. ¿Cuál es el nuevo grado del polinomio interpolante para la nueva tabla de datos? Justifique.

2. Se desea aproximar la integral de $f(x) = x\cos(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$ utilizando la regla de Simpson compuesta. Determine la cantidad de subintervalos n que se deben usar para que se obtenga una aproximación con un error menor a 10^{-4}.

3. Se desea aproximar la función $f(x) = x^2 - 3x + 1$ por una función lineal en el intervalo $I = [0, 1]$.

   (a) Escriba la fórmula del error cuadrático para este problema.

   (b) Calcule los coeficientes del polinomio que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos.

   (c) Dé el valor del error para el polinomio obtenido en el inciso anterior.

4. Un ceramista fabrica tazas y platos para vender. Por cada kilo de arcilla puede fabricar tres tazas o cinco platos. Cada taza se vende por \$5000 y cada plato se vende por \$3500. El costo de la arcilla es de \$10000 el kilo, y puede comprar a lo sumo 16 kg. Si desea fabricar al menos tantas tazas como platos, ¿cuántas tazas y cuántos platos debe buscar para maximizar su ganancia? ¿Cuántos kilos de arcilla debe comprar?

5. ~~(Sólo alumnos libres) Sea $f(x) = (x^2-9)(x^2-3)(x-5)$. Para cada intervalo, determine a qué raíz de f converge el método de bisección, justificando adecuadamente su respuesta.~~

   ~~(a) [-2, 4]~~

   ~~(b) [-0.5, 5.5]~~

   ~~(c) [-6, 6]~~

Parte Teórica

(a) ¿A qué llamamos norma matricial inducida? Dé ejemplos de ellas.

(b) Dé las definiciones de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para resolver el sistema lineal $Ax = b$.

(a) Dado un conjunto de datos (x_0, y_0), (x_1, y_1), $\ldots$, (x_n, y_n), ¿cuál es la diferencia en general entre interpolarlos y aproximarlos?

(b) Si una regla gaussiana es exacta para polinomios de grado 9 en el intervalo (a, b), con peso $w(x)$, ¿cómo se eligen los nodos x_i para construirla?

1. Considere la siguiente tabla de datos:

x	-2	-1	0	1	2
y	1	4	11	16	13

(a) Muestre que el polinomio interpolante de Newton tiene grado exactamente 3.

(b) Supongamos que se agrega como nuevo dato a $x_6 = 3$ con $y_6 = -4$. ¿Cuál es el nuevo grado del polinomio interpolante para la nueva tabla de datos? Justifique.

Polinomio interpolante de Newton

Primero planteo las diferencias divididas con los datos dados:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
-2	1	3	2	-1	0
-1	4	7	-1	-1	
0	11	5	-4		
1	16	-3			
2	13				

a) Luego, el polinomio interpolante en la forma de Newton es:

$$\boxed{p(x) = 1 + 3(x+2) + 2(x+2)(x+1) - 1(x+2)(x+1)x}$$

El cual es exactamente de grado 3

b) Cuando se agrega un nuevo dato $(x_6, f(x_6)) = (3, -4)$, debo redefinir la tabla de diferencias divididas:

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}, x_{i+5}]$
-2	1	3	2	-1	0	0
-1	4	7	-1	-1	0	
0	11	5	-4	-1		
1	16	-3	-7			
2	13	-17				
3	-4					

El polinomio sigue siendo el mismo, de grado 3

$$\boxed{p(x) = 1 + 3(x+2) + 2(x+2)(x+1) - 1(x+2)(x+1)x}$$

2. Se desea aproximar la integral de $f(x) = x\cos(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$ utilizando la regla de Simpson compuesta. Determine la cantidad de subintervalos n que se deben usar para que se obtenga una aproximación con un error menor a 10^{-4}.

El error de la regla de Simpson compuesta esta dado por:

$$-\frac{(b-a)}{180}\cdot h^4\cdot f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{180\cdot n^4}\cdot f^{(4)}(\xi)$$

Ahora bien, se tiene que:

- $f(x) = x\cdot\cos(x)$
- $f'(x) = \cos(x) - x\,\text{sen}(x)$
- $f^{(2)}(x) = -\text{sen}(x) - \text{sen}(x) - x\cos(x) = -2\,\text{sen}(x) - x\cdot\cos(x)$
- $f^{(3)}(x) = -2\cos(x) - \cos(x) + x\,\text{sen}(x) = -3\cos(x) + x\,\text{sen}(x)$
- $f^{(4)}(x) = 3\,\text{sen}(x) + \text{sen}(x) + x\cos(x) = 4\,\text{sen}(x) + x\cos(x)$
- $(b-a) = 2+2 = 4$

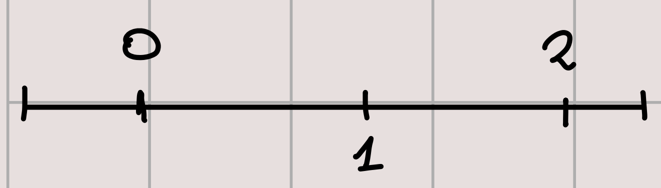
Se busca lo siguiente

$$\left|-\frac{(b-a)^5}{180\cdot n^4}\cdot f^{(4)}(\xi)\right| \le 10^{-4} \Rightarrow \frac{1}{45n^4}\cdot 4\,\text{sen}(\xi) + x\cos(\xi) \le 10^{-4}$$

Como $1 \le \text{sen}(x) \le 1$, entonces $-4 \le 4\cdot\text{sen}(\xi) \le 4$, luego se tiene x una función impar y $\cos(x)$ par, por lo que $x\cdot\cos(x)$ es impar, luego para encontrar el máximo y mínimo absoluto en el intervalo $[-2, 2]$ no basta con tomar los extremos, ya que no conozco el comportamiento de $x\cdot\cos(x)$, para ello analizo la derivada: $(x\cdot\cos(x))' = \cos(x) - x\,\text{sen}(x)$, para encontrar los ceros de la función, ejecuto el algoritmo de bisección:

(llamo $h(x) = x\cdot\cos(x)$)

Basta tomar la mitad, ya que la paridad está definida.



1) $h'(0) = 1$, $h'(2) = -2{,}23$, $h'(1) = -0{,}3$
2) $h'(0) = 1$, $h'(1) = -0{,}3$, $h'(0{,}5) = 0{,}64$
3) $h'(1) = -0{,}3$, $h'(0{,}5) = 0{,}64$, $h'(0{,}75) = 0{,}22$
4) $h'(1) = -0{,}3$, $h'(0{,}75) = 0{,}22$, $h'(0{,}875) = -0{,}03$

tomo 0,875 como raíz aproximada

Como 0,875 es aproximadamente la raíz, los extremos de $h(x)$ en $[-2, 2]$ son:

$h(0{,}875) = 0{,}56$
$h(-0{,}875) = -0{,}56$
$h(-2) = 0{,}83$
$h(2) = -0{,}83$

Con esto entonces: $\frac{1}{45n^4}\cdot 4\,\text{sen}(\xi) + x\cos(\xi) \le \frac{1}{45n^4}\cdot 4 - 2\cdot\cos(-2) \le 10^{-4}$

$$\Rightarrow n \ge \sqrt[4]{\frac{4}{(10^{-4} + 2\cos(-2))\cdot 45}}$$, tomando 2 subintervalos ya es exacta.

3. Se desea aproximar la función $f(x) = x^2 - 3x + 1$ por una función lineal en el intervalo $I = [0, 1]$.

(a) Escriba la fórmula del error cuadrático para este problema.

(b) Calcule los coeficientes del polinomio que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos.

(c) Dé el valor del error para el polinomio obtenido en el inciso anterior.

a) La fórmula del error cuadrado para este problema está dada por:

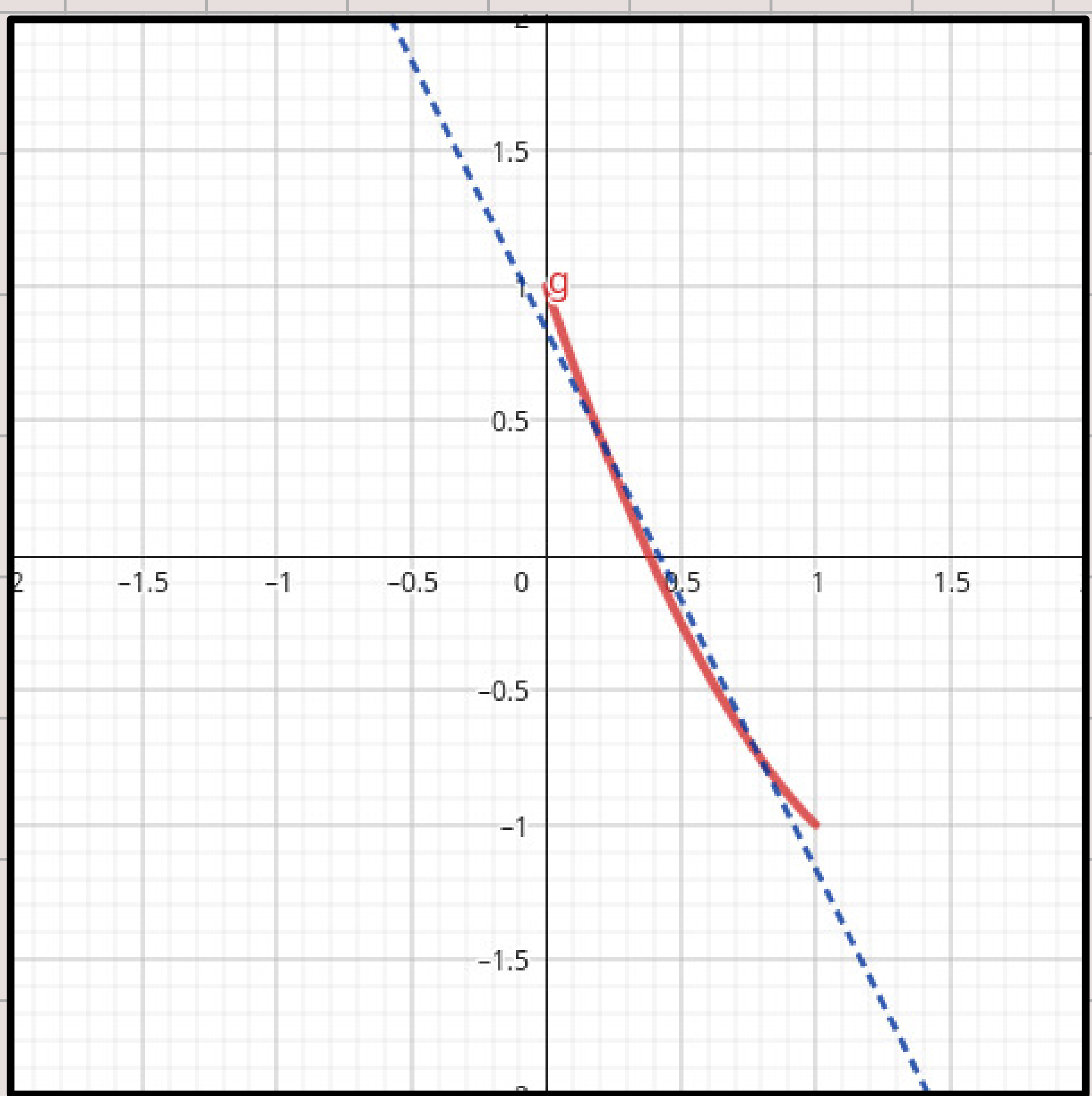
$$E(a_0,a_1) = \int_a^b [f(x) - p(x)]^2 \, dx$$

b) Aproximación por cuadrados mínimos: $p(x) = a_1 x + a_0$

$$\begin{cases} a_0 \int_0^1 dx + \int_0^1 x\,dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 1)\,dx \\ a_0 \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 x^2\,dx = \int_0^1 x(x^2 - 3x + 1)\,dx \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 1/2 = -1/6 \\ a_0 \cdot 1/2 + a_1 \cdot 1/3 = -1/4 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & -1/6 \\ 1/2 & 1/3 & -1/4 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2 - f_1/2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/12 & -1/6 \end{array}\right] \xrightarrow{f_2 \cdot 12} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{f_1 - f_2/2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5/6 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\boxed{\text{El polinomio obtenido es: } p(x) = -2x + 5/6}$$



c) $E(a_0,a_1) = \int_0^1 [(x^2 - 3x + 1) - (-2x + 5/6)]^2 dx = \int_0^1 (x^2 - x + 1/6)^2 dx = \int_0^1 (x^2 - x + 1/6)(x^2 - x + 1/6)\,dx$

$= \int_0^1 (x^4 - x^3 + 1/6\,x^2 - x^3 + x^2 - 1/6\,x + 1/6\,x^2 - 1/6\,x + 1/36)\,dx = \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) dx = \frac{1}{180}$

4. Un ceramista fabrica tazas y platos para vender. Por cada kilo de arcilla puede fabricar tres tazas o cinco platos. Cada taza se vende por \$5000 y cada plato se vende por \$3500. El costo de la arcilla es de \$10000 el kilo, y puede comprar a lo sumo 16 kg. Si desea fabricar al menos tantas tazas como platos, ¿cuántas tazas y cuántos platos debe buscar para maximizar su ganancia? ¿Cuántos kilos de arcilla debe comprar?

$$\text{Ganancia} = \underbrace{\$5000 \cdot t}_{\text{cant. tazas}} + \underbrace{\$3500 \cdot p}_{\text{cant. platos}} - \underbrace{\$10.000\,(p/5 + t/3)}_{\text{cant de plata gastada}}$$

Reestricciones:
- $p/5 + t/3 \leq 16$] la cantidad de kilos no debe superar 16
- $t - p \geq 0$] deben haber al menos p tazas.

- Provisoriamente saco las unidades y hago el siguiente cambio $x_1 = t$, $x_2 = p$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{minimizar} & z = -5000x_1 - 3500x_2 + 10000(x_1/5 + x_2/3) \\ \text{s.a} & x_1/5 + x_2/3 \leq 16 \\ & x_1 - x_2 \geq 0 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}}$$

- Lo expreso como forma estándar:

minimizar $z = -5000x_1 - 3500x_2 + 10000(x_1/5 + x_2/3) = -3000x_1 - \frac{500}{3}x_2$

s.a $x_1/5 + x_2/3 \leq 16 \longrightarrow x_1/5 + x_2/5 + s_1 = 16$

$x_1 - x_2 \geq 0 \longrightarrow x_2 - x_1 \leq 0 \longrightarrow -x_1 + x_2 + s_2 = 0$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min & z = -3000x_1 - \frac{500}{3}x_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 \\ \text{s.a} & x_1/5 + x_2/3 + s_1 = 16 \\ & -x_1 + x_2 + s_2 = 0 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}}$$

Con esto se tiene: $A = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \end{bmatrix}$ $A \in \mathbb{R}^{2\times4}$ y Rango(A) = 3

Busco expresar $A = [B \mid N]$ con $B \in \mathbb{R}^{2\times2}$ y $N \in \mathbb{R}^{2\times2}$, aplico tableau:

base	x_1	x_2	s_1	s_2	LD
$-z$	-3000	$-\frac{500}{3}$	0	0	0
s_1	$1/5$	$1/3$	1	0	16
s_2	-1	1	0	1	0

$\xrightarrow[f_0 + 3000f_2]{-f_2,\ f_1 - 1/5 f_2}$

base	x_1	x_2	s_1	s_2	LD
$-z$	0	$-\frac{9500}{3}$	0	3000	0
s_1	0	$8/15$	1	$1/5$	16
x_1	1	-1	0	-1	0

$\xrightarrow[f_2 + f_1,\ f_0 + \frac{9500}{3}f_1]{f_1\,\frac{15}{8}}$

base	x_1	x_2	s_1	s_2	LD
$-z$	0	0	$\frac{11875}{2}$	$\frac{8775}{2}$	$\frac{11875}{12}$
x_2	0	1	$15/8$	$3/8$	$16/5$
x_1	1	0	$15/8$	$-5/8$	$16/5$

Entro x_1 sale s_2

Entra x_2 sale s_1

$$\boxed{\text{La solución es: } (x_1, x_2) = (16/5, 16/5)}$$

Pedro Villar

Parte Teórica

(a) ¿A qué llamamos norma matricial inducida? Dé ejemplos de ellas.

(b) Dé las definiciones de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para resolver el sistema lineal $Ax = b$.

(a) Dado un conjunto de datos (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n), ¿cuál es la diferencia en general entre interpolarlos y aproximarlos?

(b) Si una regla gaussiana es exacta para polinomios de grado 9 en el intervalo (a, b), con peso $w(x)$, ¿cómo se eligen los nodos x_i para construirla?

a) Norma matricial inducida: sea $\|.\|$ una norma vectorial en $\mathbb{R}^n$ y A una matriz cuadrada en $\mathbb{R}$, la norma matricial inducida se define como: $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, por ejemplo:

- $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
- $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

b) Para hallar soluciones de sistemas de ecuaciones lineales estudiamos dos métodos, directos e iterativos en este caso Jacobi y Gauss-Seidel son métodos iterativos, es decir generaron una sucesión de vectores $\{x^k\}$ a partir de x_0, que bajo ciertas hipótesis, convergen a la solución de un sistema lineal. Básicamente, ambos métodos se basan en separar de un sistema $Ax=b$, a A en $(M-N)$ con M no singular y se tiene:

$$Ax = b$$
$$(M-N)x = b$$
$$Mx - Nx = b$$
$$Mx = Nx + b$$
$$x = M^{-1}(Nx+b) = (M^{-1}N)x + M^{-1}b$$

• Donde $(M^{-1} \cdot N)$ es nuestra matriz de iteración.

$$\Rightarrow \underline{x^{n+1} = (M^{-1} \cdot N)\, x^n + M^{-1} b}$$

La diferencia entre ambos métodos, va a estar en la forma en la que se toman M y N. En el método de Jacobi, se tomará $M = D$ (D=diagonal, L=triangular inferior, U=triangular superior, con $A = L+D+U$) y luego $N = M-A = D-(L+D+U) = -(L+D)$, a diferencia de Gauss-Seidel, donde se toma $M = L+D$ y $N = -U$.

a) Si se interpolan los n puntos dados, se exige que una función de grado $\leq n$ pase exactamente por dichos puntos, pero no siempre esto es conveniente, por ejemplo, si se tienen n puntos colocados de forma que sugieren que la relación es similar a la lineal, se podría obtener con interpolación el polinomio de grado menor o igual a n, o bien buscar aproximar un modelo lineal que pase lo más cerca posible de dichos puntos, a esto se le llama aproximarlos.

b) Si es exacta para polinomios de grado $9 = 2 \cdot 5 - 1$, se buscan las 5 raíces del polinomio $\phi_5(x)$ perteneciente a la familia de polinomios ortogonales definida en el intervalo y peso buscado, esas raíces serán los nodos a utilizar.

Pedro Villar