Definiciones y Teoremas

Definición 1
Sea A una matriz cuadrada de orden n. Decimos que A es diagonalizable si A es semejante a una matriz diagonal, es decir, existe una matriz P de orden n inversible tal que:

$$P^{-1}AP = D$$

donde D es una matriz diagonal. Es un caso especial de semejanza. Una matriz es diagonalizable cuando es semejante a una matriz diagonal.

Teorema 1
Una matriz A de orden n es *diagonizable* si y sólo si tiene n vectores linealmente independientes. En tal caso, la matriz diagonal D semejante a A está dada por

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de A. Y si P es una matriz cuyas columnas son los vectores característicos linealmente independientes de A, entonces $P^{-1}AP = D$.

Corolario 1
Si la matriz A de orden n tiene n autovalores diferentes, entonces A es diagonizable.

Teorema 2
Una transformación lineal $T : V \to V$ es diagonalizable si y sólo si existe una base de V formada por vectores propios de T.

Método para diagonalizar una matriz

1. Encontrar los autovalores de la matriz A resolviendo la ecuación característica $|A - xId_n| = 0$.

2. Para cada autovalor λ_i, encontrar los vectores característicos asociados resolviendo el sistema homogéneo $(A - \lambda_i Id_n)x = 0$.

3. Si se encuentran n vectores característicos linealmente independientes, entonces la matriz A es diagonalizable.

4. Si la matriz A es diagonalizable, entonces la matriz diagonal D semejante a A está dada por

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de A. Y si P es una matriz cuyas columnas son los vectores característicos linealmente independientes de A, entonces $P^{-1}AP = D$.

Ejemplos

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por

$$T(x, y, z) = (x - y + 4z, 3x + 2y - z, 2x + y - z)$$

Ejercicio 1
Encuentre la matriz asociada a la transformación lineal T.

Solución: La matriz asociada a la transformación lineal T es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2
Encuentre los autovalores de la matriz A.

Solución: Los autovalores de la matriz A son las raíces del polinomio característico $|A - xId_3| = 0$. Entonces, resolvemos la ecuación

$$|A - xId_3| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-x & -1 & 4 \\ 3 & 2-x & -1 \\ 2 & 1 & -1-x \end{vmatrix} = 0$$

Calculo el determinante expandiendo por la columna 1:

$$(1-x)\begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ 1 & -1-x \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1-x \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 2-x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-x)[(2-x)(-1-x) - (-1)1] - (-1)[(-3-x) - 2(-1)] + 4[(3)(1) - (2-x)(2)] = 0$$

$$(1-x)[-2 - 2x + x + x^2] + 1[-3 - x + 2] + 4[3 - 4 + 2x] = 0$$

$$-2 - 2x + x + x^2 + 2x + 2x^2 - x^2 - x^3 - 3 - x + 2 + 12 - 16 + 8x = 0$$

$$-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = 0$$

A simple vista notamos que $x = 1$ es una raíz del polinomio, entonces $x - 1$ es un factor del polinomio. Dividimos el polinomio por $x - 1$ para encontrar los otros dos factores:

$$-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = (x - 1)(-x^2 + x + 6)$$

Resolvemos la ecuación cuadrática $-x^2 + x + 6 = 0$ para encontrar los otros dos autovalores:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)(6)}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-2} = \frac{-1 \pm 5}{-2}$$

Entonces, los autovalores de la matriz A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = 3$.

Ejercicio 3
Encuentre los vectores característicos asociados a cada autovalor.

Solución: Para el autovalor $\lambda_1 = 1$, resolvemos el sistema homogéneo $(A - \lambda_1 Id_3)x = 0$:

$$(A - \lambda_1 Id_3)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Reduzco la matriz a su forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1/3} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1/3 & -4/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2/(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1/3 & -4/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2/3} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De acá salen las ecuaciones: $x + z = 0$ y $y - 4z = 0$. Entonces, $x = -z$ e $y = 4z$. Por lo tanto las soluciones son de la forma $x = -z$, $y = 4z$ y $z = z$. El vector característico asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ es $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para el autovalor $\lambda_2 = -2$, resolvemos el sistema homogéneo $(A - \lambda_2 Id_3)x = 0$:

$$(A - \lambda_2 Id_3)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Reduzco la matriz a su forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1/3} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 4/3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5/3 & -5/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2/5}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5/3 & -5/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 5F_2/3} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 + F_2/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De acá salen las ecuaciones: $x + z = 0$ y $y - z = 0$. Entonces, $x = -z$ e $y = z$. Por lo tanto las soluciones son de la forma $x = -z$, $y = z$ y $z = z$. El vector característico asociado al autovalor $\lambda_2 = -2$ es $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para el autovalor $\lambda_3 = 3$, resolvemos el sistema homogéneo $(A - \lambda_3 Id_3)x = 0$:

$$(A - \lambda_3 Id_3)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Reduzco la matriz a su forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1/(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -2 \\ 0 & -5/2 & 5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -2 \\ 0 & -5/2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2/(-5/2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De acá salen las ecuaciones: $x - z = 0$ y $y - 2z = 0$. Entonces, $x = z$ e $y = 2z$. Por lo tanto las soluciones son de la forma $x = z$, $y = 2z$ y $z = z$. El vector característico asociado al autovalor $\lambda_3 = 3$ es $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4
Encuentre la matriz diagonal D semejante a A y la matriz P cuyas columnas son los vectores característicos linealmente independientes de A.

Solución: La matriz diagonal D semejante a A está dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

donde 1, -2 y 3 son los autovalores de A. Y si P es una matriz cuyas columnas son los vectores característicos linealmente independientes de A, entonces $P^{-1}AP = D$. Entonces, la matriz P cuyas columnas son los vectores característicos linealmente independientes de A es

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$