Pregunta 1

¿Cuál es la complejidad del algoritmo de Edmonds-Karp? Probarlo. (Nota: en la prueba se definen unas distancias, y se prueba que esas distancias no disminuyen en pasos sucesivos de EK. Ud. puede usar esto sin necesidad de probarlo)

Solución

Completar prueba

Pregunta 2

Probar que si, dados vértices x, z y flujo f, definimos la distancia relativa a f como la longitud del menor f-camino aumentante entre x y z (si existe), o infinito si no existe, o 0 si $x = z$, denotándola como $d_f(x, z)$, y definimos $d_k(x) = d_{f_k}(s, x)$, donde f_k es el k-ésimo flujo en una corrida de Edmonds-Karp, entonces $d_k(x) \leq d_{k+1}(x)$.

Solución

Completar prueba

Pregunta 3

Probar que si, dados vértices x, z y flujo f, definimos la distancia relativa a f como la longitud del menor f-camino aumentante entre x y z (si existe), o infinito si no existe, o 0 si $x = z$, denotándola como $d_f(x, z)$, y definimos $b_k(x) = d_{f_k}(x, t)$, donde f_k es el k-ésimo flujo en una corrida de Edmonds-Karp, entonces $b_k(x) \leq b_{k+1}(x)$. *(Este teorema solo se tomará a partir de diciembre 2025).*

Solución

Completar prueba

Pregunta 4

¿Cuál es la complejidad del algoritmo de Dinic? Probarla en ambas versiones: Dinitz original y Dinic-Even. *(No hace falta probar que la distancia en redes auxiliares sucesivos aumenta).*

Solución

Completar prueba

Pregunta 5

¿Cuál es la complejidad del algoritmo de Wave? Probarla. *(No hace falta probar que la distancia en redes auxiliares sucesivos aumenta).*

Solución

Completar prueba

Pregunta 6

Probar que la distancia en redes auxiliares sucesivos aumenta. *(Este teorema solo se tomará a partir de diciembre 2025).*

Solución

Completar prueba

Pregunta 7

Probar que si f es un flujo maximal, entonces existe un corte S tal que $v(f) = \mathrm{cap}(S)$. *(Puede usar sin necesidad de probarlo que si f es flujo y S es corte, entonces $v(f) = f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S)$).*

Solución

Definamos
$$S = \{s\} \cup \{x \in V : \text{ exista un } f\text{-camino aumentante desde } s \text{ a } x\}$$

- Como f es maximal entonces no existen f-caminos aumentantes desde s a t pues si existiese un tal f-camino aumentante, podriamos mandar un $\varepsilon > 0$ a través de el, obteniendo un flujo f^* tal que $v(f^*) = v(f) + \varepsilon > v(f)$ lo cual contradice que f sea maximal. Por lo tanto, como no existen f-caminos aumentantes desde s a t entonces $t \notin S$.
- Como $s \in S$ y $t \notin S$, entonces S **es un corte**.

Observemos que en el resto de la prueba no usaremos que f es maximal, solo que es flujo y que S es corte. Es decir, la prueba valdría para cualquier f tal que el S definido sea un corte. Esto será importante luego.

Como f es flujo y S es corte, entonces $v(f) = f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S)$. Calculemos $f(S, \bar{S})$ y $f(\bar{S}, S)$.

1. Cálculo de $f(S, \bar{S})$:
$$f(S, \bar{S}) = \sum_{x,y} f(\overrightarrow{xy})[x \in S][y \notin S][xy \in E]$$
Consideremos un par x, y de los que aparecen en esa suma. Como $x \in S$, entonces existe un f-camino aumentante entre s y x, digamos $s = x_0, x_1, \ldots, x_r = x$. Pero como $y \notin S$, entonces no existe ningún f-camino aumentante entre s e y. En particular, el camino
$$s = x_0, x_1, \ldots, x_r = x, y$$
no es un f-camino aumentante. Pero $\overrightarrow{xy} \in E$, asi que debería poder serlo.
¿Por qué $s = x_0, x_1, \ldots, x_r = x, y$ no es un f-camino aumentante a pesar de que $s = x_0, x_1, \ldots, x_r = x$ si lo es y $\overrightarrow{xy}$ existe? La única razón por la cual no es un f-camino aumentante es porque no podemos usar el lado $\overrightarrow{xy}$ por estar saturado, es decir:
$$f(\overrightarrow{xy}) = c(\overrightarrow{xy})$$
Esto es cierto para cualesquiera x, y que aparezcan en esa suma. Entonces:
$$\begin{aligned} f(S, \bar{S}) &= \sum_{x,y} f(\overrightarrow{xy})[x \in S][y \notin S][xy \in E] \\ &= \sum_{x,y} c(\overrightarrow{xy})[x \in S][y \notin S][xy \in E] \\ &= c(S, \bar{S}) = \mathrm{cap}(S) \end{aligned}$$

2. Cálculo de $f(\bar{S}, S)$:
$$f(\bar{S}, S) = \sum_{x,y} f(\overrightarrow{xy})[x \notin S][y \in S][xy \in E]$$
Consideremos un par x, y de los que aparecen en esa suma. Como $y \in S$, entonces existe un f-camino aumentante entre s e y, digamos $s = x_0, x_1, \ldots, x_r = y$. Pero como $x \notin S$, entonces no existe un f-camino aumentante entre s y x. En particular
$$s = x_0, x_1, \ldots, x_r = y, x$$

NO ES un f-camino aumentante. Pero $\overrightarrow{xy} \in E$, asi que PODRIA serlo, usando y, x como lado backward.

¿Porqué $s = x_0, x_1, \ldots, x_r = y, x$ no es un f-camino aumentante a pesar de que $s = x_0, x_1, \ldots, x_r = y$ si lo es y $\overrightarrow{xy}$ existe? La única razón es que no podemos usarlo como lado backward por estar vacio, es decir, que $f(\overrightarrow{xy}) = 0$.

Esto es cierto para cualesquiera x, y que aparezcan en esa suma. Entonces:

$$\begin{aligned} f(\bar{S}, S) &= \sum_{x,y} f(\overrightarrow{xy})[x \notin S][y \in S][xy \in E] \\ &= \sum_{x,y} 0[x \notin S][y \in S][xy \in E] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces probamos que para este S:

- $f(S, \bar{S}) = \text{cap}(S)$
- $f(\bar{S}, S) = 0$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} v(f) &= f(S, \bar{S}) - f(\bar{S}, S) \\ &= \text{cap}(S) - 0 = \text{cap}(S) \end{aligned}$$

Pregunta 8

Probar que si G es conexo y no regular, entonces $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Solución

Completar prueba

Pregunta 9

Probar que 2-COLOR es polinomial.

Solución

Completar prueba

Pregunta 10

Enunciar y probar el Teorema de Hall.

Solución

Completar prueba

Pregunta 11

Enunciar y probar el teorema del matrimonio de Kőnig.

Solución

Completar prueba

Pregunta 12

Probar que si G es bipartito entonces $\chi'(G) = \Delta(G)$. *(Este teorema solo se tomará a partir de diciembre 2025).*

Solución

Completar prueba

Pregunta 13

Demostrar las complejidades $O(n^4)$ y $O(n^3)$ del algoritmo Húngaro. *(Solo a partir de diciembre 2025).*

Solución

Completar prueba

Pregunta 14

Enunciar el teorema de la cota de Hamming y probarlo.

Solución

Completar prueba

Pregunta 15

Probar que si H es matriz de chequeo de C, entonces:

$$\delta(C) = \min\{j \mid \exists \text{ un conjunto de } j \text{ columnas LD de } H\}$$

(LD significa "linealmente dependiente").

Solución

Completar prueba

Pregunta 16

Sea C un código cíclico de dimensión k y longitud n, y sea $g(x)$ su polinomio generador. Probar que:

i) C está formado por los múltiplos de $g(x)$ de grado menor que n.

ii) $C = \{v(x) \cdot g(x) : v(x) \text{ es un polinomio cualquiera}\}$

iii) $gr(g(x)) = n - k$

iv) $g(x)$ divide a $1 + x^n$

Solución

Completar prueba

Pregunta 17

Probar que 3SAT es NP-completo.

Solución

Completar prueba

Pregunta 18

Probar que 3-COLOR es NP-completo.

Solución

Completar prueba

Pregunta 19

Probar que Matrimonio3D (matrimonio trisexual) es NP-completo.

Solución

Completar prueba