



# École Centrale Nantes

MAAS

---

## MODYN

Étude d'un double pendule

---

**Auteurs :** Pedro Mocivuna et Lia Moraes  
**Professeurs :** Patrick Rozycki et Pascal Cosson  
**Lieu et date :** Nantes, France, Novembre 2025

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Données du problème</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Mise en équation</b>	<b>2</b>
2.1	Équations du mouvement : NCA . . . . .	2
2.1.1	Énergie cinétique . . . . .	3
2.1.2	Énergie potentielle . . . . .	4
2.1.3	Travaux virtuel d'efforts qui ne dérivent pas pas d'un potentiel . . .	4
2.1.4	Travaux virtuel d'efforts de liaison . . . . .	4
2.1.5	Équations de Lagrange . . . . .	5
2.2	Équations du mouvement : CA . . . . .	6
2.2.1	Énergie cinétique . . . . .	7
2.2.2	Énergie potentielle . . . . .	7
2.2.3	Travaux virtuel d'efforts qui ne dérivent pas pas d'un potentiel . . .	7
2.2.4	Travaux virtuel d'efforts de liaison . . . . .	8
2.2.5	Équations de Lagrange . . . . .	8
2.3	Équations du mouvement dans les vibrations . . . . .	8
2.3.1	Calcul des fréquences propres et modes propres du système . . . . .	9
2.4	Équations du mouvement prennant en compte une force . . . . .	10
2.4.1	Équations du mouvement dans les vibrations . . . . .	10
2.4.2	Calcul de la réponse vibratoire du système . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Résolution via un schéma d'intégration temporelle programmé sous Python</b>	<b>12</b>
3.1	Oscillation libre . . . . .	12
3.2	Contrôle de qualité et pertinence . . . . .	13
3.3	Oscillation forcée . . . . .	14
3.4	Conclusions sur le code . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Résolution via MotionView®/MotionSolve®</b>	<b>16</b>
4.1	Comparaison entre le code et la modélisation MotionView® . . . . .	16
4.1.1	Oscillation libre . . . . .	16
4.1.2	Oscillation forcée . . . . .	17
4.2	Fréquences et modes propres dans MotionSolve® . . . . .	17
4.3	Identification d'un node . . . . .	18

# 1 Données du problème

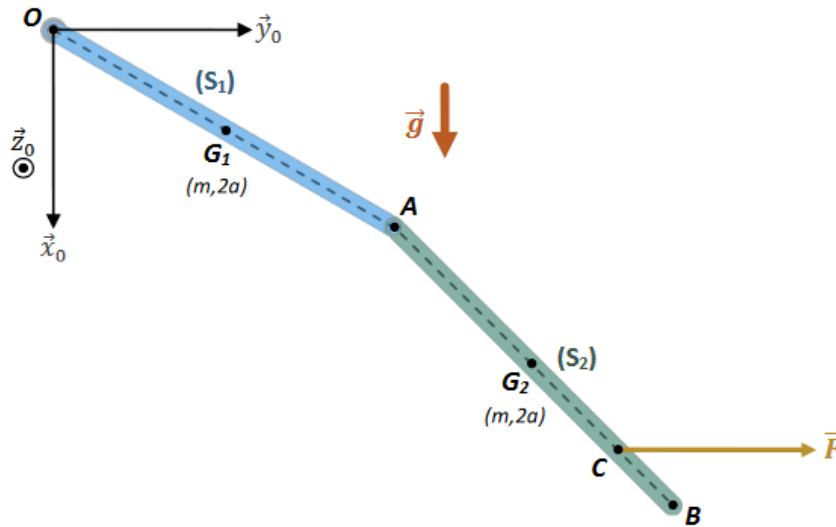


FIGURE 1 – Schématisation d'un double pendule

Paramètre	Valeur
Masse volumique $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	7860
Rayon de la section circulaire [mm]	15
Longueur [m]	2
Gravité [m/s <sup>2</sup> ]	9,81

TABLE 1 – Données numériques pour chaque barre pesante

## 2 Mise en équation

### 2.1 Équations du mouvement : NCA

Nous commençons par définir notre problème. Nous avons un problème de type 2D, caractérisé par la possibilité de translation dans les directions  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$ , ainsi que de rotation autour de  $\vec{z}_0$  pour chacun des deux solides isolés. Nous avons donc 6 paramètres primitifs. Pour ce problème, nous distinguons encore trois points de référence : le repère de base  $R_0$ , le centre de gravité  $G_1$  du solide  $S_1$  et le centre de gravité  $G_2$  du solide  $S_2$ .

En établissant les relations pour les liaisons, le pivot  $O$  est une liaison parfaite et ne permet qu'un seul degré de liberté (rotation  $\theta_1$ ) du solide  $S_1$  par rapport à  $S_0$  (bâti de référence, fixe par rapport à  $R_0$ ). De même, la liaison pivot  $A$  est parfaite et ne permet qu'une seule rotation  $\theta_2$  du solide  $S_2$  par rapport à  $S_1$ . La position des liaisons sur chaque barre par rapport à leur centre de gravité peut être décrite par :

$$O_1 \vec{G}_1 = a \cos \theta_1 \vec{x}_0 + a \sin \theta_1 \vec{y}_0 \quad (1)$$

$$A_1 \vec{G}_1 = a \cos \theta_1 (-\vec{x}_0) + a \sin \theta_1 (-\vec{y}_0) \quad (2)$$

$$A_2 \vec{G}_2 = a \cos \theta_2 \vec{x}_0 + a \sin \theta_2 \vec{y}_0 \quad (3)$$

Pour la compréhension du mouvement, nous étudions une paramétrisation non cinématique, afin de simplifier la réalisation des calculs énergétiques qui seront effectués par la suite. Ainsi, nous définissons le vecteur position des centres de gravité de chaque barre comme :

$$O \vec{G}_1 = x_1 \vec{x}_0 + y_1 \vec{y}_0 = a \cos \theta_1 \vec{x}_0 + a \sin \theta_1 \vec{y}_0 \quad (4)$$

$$O \vec{G}_2 = x_2 \vec{x}_0 + y_2 \vec{y}_0 = (2a \cos \theta_1 + a \cos \theta_2) \vec{x}_0 + (2a \sin \theta_1 + a \sin \theta_2) \vec{y}_0 \quad (5)$$

La dernière relation étant utilisée uniquement à la fin de la résolution du problème, afin de corréler les variables considérées ici comme indépendantes.

Nous pouvons alors décrire les torseurs pour les deux liaisons :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{01}\}_{O, \text{base}} &= \begin{cases} \vec{R}_{01} = X_{01} \vec{x}_0 + Y_{01} \vec{y}_0 \\ \vec{M}_{01}(O) = 0 \end{cases} & \{\mathcal{C}_{01}\}_{O, \text{base}} &= \begin{cases} \vec{\Omega}_{01} = \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 \\ \vec{v}_{01}(O) = 0 \end{cases} \\ \{\mathcal{T}_{12}\}_{A, \text{base}} &= \begin{cases} \vec{R}_{12} = X_{12} \vec{x}_0 + Y_{12} \vec{y}_0 \\ \vec{M}_{12}(A) = 0 \end{cases} & \{\mathcal{C}_{12}\}_{A, \text{base}} &= \begin{cases} \vec{\Omega}_{12} = \vec{\Omega}_{02} - \vec{\Omega}_{01} = (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \vec{z}_0 \\ \vec{v}_{12}(A) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Afin de pouvoir résoudre le problème à l'aide des équations de Lagrange, nous établissons les énergies suivantes :

### 2.1.1 Énergie cinétique

Pour une barre, nous considérons le moment d'inertie de son centre de gravité comme  $I_{G_i} = mL^2/12$ . Nous faisons alors :

$$\begin{aligned} E_c(\Sigma/R_0) &= E_c(S_1/R_0) + E_c(S_2/R_0) \\ E_c(S_i/R_0) &= \frac{1}{2}(m \dot{x}_i^2 + m \dot{y}_i^2 + I_{G_i} \dot{\theta}_i^2) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\boxed{E_c(\Sigma/R_0) = \frac{m}{2} \left[ \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \frac{a^2}{3} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \right]}$$

### 2.1.2 Énergie potentielle

N'ayant pas d'influence d'autres potentiels que le gravitationnel, avec la gravité égale à  $g, \vec{x}_0$ , nous avons :

$$\begin{aligned} E_p(\Sigma/R_0) &= E_p(S_1/R_0) + E_p(S_2/R_0) \\ E_p(S_i/R_0) &= -m O\vec{G}_i \cdot \vec{g} + cte \end{aligned} \quad (7)$$

$$\boxed{E_p(\Sigma/R_0) = -m(x_1 + x_2)g + cte}$$

### 2.1.3 Travaux virtuel d'efforts qui ne dérivent pas d'un potentiel

En considérant le corps libre de l'action de forces externes qui ne dérivent pas d'un potentiel, ce travail virtuel sera nul.

$$\boxed{\delta W_{D2} = 0}$$

### 2.1.4 Travaux virtuel d'efforts de liaison

En considérant une paramétrisation non cinématiquement admissible avec des liaisons parfaites, ce travail virtuel sera calculé par :

$$\begin{aligned} \delta W_L &= \delta W_{L_O} + \delta W_{L_A} \\ \delta W_{L_X} &= \vec{R}_{ij} \cdot \delta_{ij} \vec{X} + \vec{M}_{ij}(X) \cdot \delta_{ij} \vec{\omega}_X \end{aligned} \quad (8)$$

$$\delta W_L = L_{a_i} \delta a_i \quad (9)$$

Nous développons séparément :

$$\begin{aligned} \delta W_{L_O} &= \vec{R}_{01} \cdot \delta_{01} \vec{O} + \vec{M}_{01}(O) \cdot \delta_{01} \vec{\omega}_O = \vec{R}_{01} \cdot \delta_{01} \vec{O} \\ \vec{V}_{01}(O) &= \vec{V}_{01}(G_1) + O_1 \vec{G}_1 \times \vec{\Omega}_{01} \\ \vec{V}_{01}(O) &= [\dot{x}_1 + a \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1)] \vec{x}_0 + [\dot{y}_1 - a \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1)] \vec{y}_0 \\ \delta_{01} \vec{O} &= [\delta x_1 + a \delta \theta_1 \sin(\theta_1)] \vec{x}_0 + [\delta y_1 - a \delta \theta_1 \cos(\theta_1)] \vec{y}_0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\delta W_{L_O} = X_{01} [\delta x_1 + a \delta \theta_1 \sin(\theta_1)] + Y_{01} [\delta y_1 - a \delta \theta_1 \cos(\theta_1)]}$$

$$\begin{aligned}
\delta W_{LA} &= \vec{R}_{12} \cdot \delta_{12} \vec{A} + \vec{M}_{12}(A) \cdot \delta_{12} \vec{\omega}_A = \vec{R}_{12} \cdot \delta_{12} \vec{A} \\
\vec{V}_{12}(A) &= \vec{V}_{02}(G_2) + A_2 \vec{G}_2 \times \vec{\Omega}_{02} - (\vec{V}_{01}(G_1) + A_1 \vec{G}_1 \times \vec{\Omega}_{01}) \\
\vec{V}_{12}(A) &= [\dot{x}_2 - \dot{x}_1 + a \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + a \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2)] \vec{x}_0 \\
&\quad + [\dot{y}_2 - \dot{y}_1 - a \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) - a \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2)] \vec{y}_0 \\
\delta_{12} \vec{A} &= [\delta x_2 - \delta x_1 + a \delta \theta_1 \sin(\theta_1) + a \delta \theta_2 \sin(\theta_2)] \vec{x}_0 \\
&\quad + [\delta y_2 - \delta y_1 - a \delta \theta_1 \cos(\theta_1) - a \delta \theta_2 \cos(\theta_2)] \vec{y}_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta W_{LA} &= X_{12} [\delta x_2 - \delta x_1 + a \delta \theta_1 \sin(\theta_1) + a \delta \theta_2 \sin(\theta_2)] \\
&\quad + Y_{12} [\delta y_2 - \delta y_1 - a \delta \theta_1 \cos(\theta_1) - a \delta \theta_2 \cos(\theta_2)]
\end{aligned}$$

### 2.1.5 Équations de Lagrange

Nous formulons les équations de Lagrange de notre système à partir de la formule suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{a}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial a_i} + \frac{\partial E_p}{\partial a_i} = L_{a_i} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{x_1} &\rightarrow m\ddot{x}_1 - mg = X_{01} - X_{12} \\
\mathcal{L}_{x_2} &\rightarrow m\ddot{x}_2 - mg = X_{12} \\
\mathcal{L}_{y_1} &\rightarrow m\ddot{y}_1 = Y_{01} - Y_{12} \\
\mathcal{L}_{y_2} &\rightarrow m\ddot{y}_2 = Y_{12} \\
\mathcal{L}_{\theta_1} &\rightarrow \frac{ma^2}{3} \ddot{\theta}_1 = X_{01} a \sin \theta_1 - Y_{01} a \cos \theta_1 + X_{12} a \sin \theta_1 - Y_{12} a \cos \theta_1 \\
\mathcal{L}_{\theta_2} &\rightarrow \frac{ma^2}{3} \ddot{\theta}_2 = X_{12} a \sin \theta_2 - Y_{12} a \cos \theta_2
\end{aligned}$$

Nous formulons les équations de Lagrange de notre système à partir de la formule suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{ma^2}{3} \ddot{\theta}_1 &= m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 - 2g) a \sin \theta_1 - m(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) a \cos \theta_1 \\
&\quad + m(\ddot{x}_2 - g) a \sin \theta_1 - m\ddot{y}_2 a \cos \theta_1 \\
\frac{ma^2}{3} \ddot{\theta}_2 &= m(\ddot{x}_2 - g) a \sin \theta_2 - m\ddot{y}_2 a \cos \theta_2
\end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant les relations 4 et 5 pour obtenir les équations de Lagrange

non linéarisées :

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= -a \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 - a \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\
\ddot{y}_1 &= -a \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + a \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\
\ddot{x}_2 &= -2a \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 - 2a \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 - a \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 - a \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\
\ddot{y}_2 &= -2a \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 + 2a \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - a \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 + a \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{16}{3} \ddot{\theta}_1 + 2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2 - 2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + 3 \frac{g}{a} \sin \theta_1 &= 0 \\
\frac{4}{3} \ddot{\theta}_2 + 2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1 + 2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1^2 + \frac{g}{2} \sin \theta_2 &= 0
\end{aligned}$$

## 2.2 Équations du mouvement : CA

Pour une analyse cinématiquement admissible, nous partons d'une autre approche. Nous établissons ci-dessous le format suivant pour la matrice de transformation entre la base 0 ( $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ ) et la base de chaque solide  $S_i$  ( $\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i$ ) :

$$R_i \equiv R_z(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

Nous convertissons alors les distances entre les centres de gravité et le repère  $R_0$  pour la base 0 :

$$\begin{aligned}
O\vec{G}_1^{(0)} &= R_1 \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \theta_1 \\ a \sin \theta_1 \end{bmatrix}, \\
O\vec{A}^{(0)} &= R_1 \begin{bmatrix} 2a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \cos \theta_1 \\ 2a \sin \theta_1 \end{bmatrix}, \\
O\vec{G}_1^{(0)} &= O\vec{A}^{(0)} + R_2 \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \cos \theta_1 + a \cos \theta_2 \\ 2a \sin \theta_1 + a \sin \theta_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

### 2.2.1 Énergie cinétique

Nous calculons alors la vitesse des centres de gravité des solides dans la base 0 :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{G_1} &= \frac{dR_1}{dt} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = a\dot{\theta}_1 \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \|\mathbf{v}_{G_1}\|^2 &= a^2\dot{\theta}_1^2, \\ \mathbf{v}_{G_2} &= \frac{dR_1}{dt} \begin{bmatrix} 2a \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{dR_2}{dt} \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_{G_2} &= 2a\dot{\theta}_1 \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \\ \cos \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} + a\dot{\theta}_2 \begin{bmatrix} -\sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \|\mathbf{v}_{G_2}\|^2 &= 4a^2\dot{\theta}_1^2 + a^2\dot{\theta}_2^2 + 4a^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)\end{aligned}$$

À partir de cela, nous utilisons les équations suivantes pour déterminer l'énergie cinétique totale du système :

$$I_{Gz} = \frac{m}{12}(2a)^2 = \frac{1}{3}ma^2, \quad T = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}_{G_1}\|^2 + \frac{1}{2}I_{Gz}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}_{G_2}\|^2 + \frac{1}{2}I_{Gz}\dot{\theta}_2^2$$

$$T = ma^2 \left[ \frac{8}{3}\dot{\theta}_1^2 + \frac{2}{3}\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right]$$

### 2.2.2 Énergie potentielle

Le potentiel gravitationnel étant le seul potentiel présent dans ce système, avec la gravité  $\vec{g} = g\vec{x}_0$ , nous avons :

$$V = -mO\vec{G}_i^{(0)} \cdot \vec{g}$$

$$x_{G_1} = a \cos \theta_1, \quad x_{G_2} = 2a \cos \theta_1 + a \cos \theta_2$$

$$V = -mg(x_{G_1} + x_{G_2}) = -mga(3 \cos \theta_1 + \cos \theta_2) + cte$$

### 2.2.3 Travaux virtuel d'efforts qui ne dérivent pas d'un potentiel

En considérant le corps libre de l'action de forces externes qui ne dérivent pas d'un potentiel, ce travail virtuel sera nul.

$$\delta W_{D2} = 0$$

### 2.2.4 Travaux virtuel d'efforts de liaison

En considérant toutes les liaisons pivot parfaites, dans une approche cinématiquement admissible, nous avons :

$$\boxed{\delta W_L = 0}$$

### 2.2.5 Équations de Lagrange

Nous utilisons le format suivant pour calculer les équations de Lagrange :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i}$$

D'où nous avons :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = ma^2 \left[ \frac{16}{3} \dot{\theta}_1 + 2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = ma^2 \left[ \frac{4}{3} \dot{\theta}_2 + 2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = ma^2 \left[ \frac{16}{3} \ddot{\theta}_1 + 2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2 + 2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_2 - \theta_1) \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = ma^2 \left[ \frac{4}{3} \ddot{\theta}_2 + 2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1 + 2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_2 - \theta_1) \right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 2 ma^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = -2 ma^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 3 mga \sin \theta_1 \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = mga \sin \theta_2$$

Enfin, nous obtenons l'équation suivante pour l'analyse cinématiquement admissible :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{16}{3} \ddot{\theta}_1 + 2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2 - 2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + 3 \frac{g}{a} \sin \theta_1 &= 0 \\ \frac{4}{3} \ddot{\theta}_2 + 2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1 + 2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + \frac{g}{a} \sin \theta_2 &= 0 \end{aligned}}$$

## 2.3 Équations du mouvement dans les vibrations

Pour résoudre notre système, nous effectuons une linéarisation en tenant compte de l'hypothèse de petites oscillations :

$$\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad \cos(\theta_2 - \theta_1) = 1 \quad \sin \theta_i = \theta_i$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{16}{3}\ddot{\theta}_1 + 2\ddot{\theta}_2 + 3\frac{g}{a}\theta_1 &= 0 \\ 2\ddot{\theta}_1 + \frac{4}{3}\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{a}\theta_2 &= 0\end{aligned}}$$

### 2.3.1 Calcul des fréquences propres et modes propres du système

Ce système d'équations linéaires peut être réécrit sous forme matricielle.

$$M \ddot{q} + K q = 0, \quad M = ma^2 \begin{bmatrix} \frac{16}{3} & 2 \\ 2 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}, \quad K = mga \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La résolution du problème aux valeurs propres nous fournit les fréquences et modes propres du système.

$$\det(K - \omega^2 M) = 0$$

$$K - \omega^2 M = ma \begin{bmatrix} 3g - \frac{16}{3}\omega^2 a & -2\omega^2 a \\ -2\omega^2 a & g - \frac{4}{3}\omega^2 a \end{bmatrix}$$

$$\det(K - \omega^2 M) = \left(3g - \frac{16}{3}\omega^2 a\right) \left(g - \frac{4}{3}\omega^2 a\right) - 4\omega^4 a^2 \longleftrightarrow \lambda = \frac{\omega^2 a}{g}$$

$$28\lambda^2 - 84\lambda + 27 = 0$$

$$\lambda = \frac{21 \pm 6\sqrt{7}}{14} \longrightarrow \omega^2 = \frac{21 \pm 6\sqrt{7}}{14} \frac{g}{a}$$

$$\boxed{\omega_1^2 = 2,6339 \frac{g}{a} \quad \omega_2^2 = 0,3661 \frac{g}{a}}$$

$$(K - \omega_i^2 M) \cdot \Phi_i = 0 \iff \frac{mag}{7} \begin{bmatrix} -35 \pm 16\sqrt{7} & -21 \pm 6\sqrt{7} \\ -21 \pm 6\sqrt{7} & -7 \pm 4\sqrt{7} \end{bmatrix} \cdot \Phi_i = 0$$

$$\boxed{\Phi_1 = \begin{bmatrix} \frac{1-2\sqrt{7}}{9} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} \frac{1+2\sqrt{7}}{9} \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_1 = \frac{1-2\sqrt{7}}{9}, \quad \alpha_2 = \frac{1+2\sqrt{7}}{9},$$

$$N_i = \Phi_i^T M \Phi_i = ma^2 \begin{bmatrix} \alpha_i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{16}{3} & 2 \\ 2 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nous calculons alors la masse modale  $N_i$  du mode  $i$  et normalisons les modes propres :

$$N_1 = ma^2 \frac{896 + 280\sqrt{7}}{243}, \quad N_2 = ma^2 \frac{896 - 280\sqrt{7}}{243},$$

$$\phi_i = \frac{\Phi_i}{\sqrt{N_i}}$$

## 2.4 Équations du mouvement prennant en compte une force

Pour le cas général, l'équation du mouvement subit une modification pour inclure une force. Nous insérons un travail virtuel qui ne dérive pas d'un potentiel dans nos équations, décrit par :

$$\begin{aligned}\delta W_{D2} &= \delta \vec{OC}^{(0)} \cdot \vec{F} = \sum_i D_{i2} \delta q_i \\ \delta \vec{OC}^{(0)} &= \sum_i \frac{\partial \vec{OC}^{(0)}}{\partial q_i} \delta q_i \\ D_{i2} &= \frac{\partial \vec{OC}^{(0)}}{\partial q_i} \cdot \vec{F}\end{aligned}$$

Nous calculons alors la valeur de la composante à insérer dans les équations de Lagrange :

$$\begin{aligned}\vec{OC}^{(0)} &= \vec{OA}^{(0)} + R_2 \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \cos \theta_1 + b \cos \theta_2 \\ 2a \sin \theta_1 + b \sin \theta_2 \end{bmatrix} \\ \vec{F} &= F_0 \sin(wt) \vec{y}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \sin(wt) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \vec{OC}^{(0)}}{\partial q_1} &= \begin{bmatrix} -2a \sin \theta_1 \\ 2a \cos \theta_1 \end{bmatrix} & \frac{\partial \vec{OC}^{(0)}}{\partial q_2} &= \begin{bmatrix} -b \sin \theta_2 \\ b \cos \theta_2 \end{bmatrix} \\ D_{12} &= 2a F_0 \cos \theta_1 \sin(wt) & D_{22} &= b F_0 \cos \theta_2 \sin(wt)\end{aligned}$$

Après l'insertion des valeurs, nous avons :

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{16}{3} \ddot{\theta}_1 + 2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2 - 2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + 3 \frac{g}{a} \sin \theta_1 &= \frac{2 F_0}{m a} \cos \theta_1 \sin(wt) \\ \frac{4}{3} \ddot{\theta}_2 + 2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1 + 2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + \frac{g}{a} \sin \theta_2 &= \frac{b F_0}{m a^2} \cos \theta_2 \sin(wt)\end{aligned}}$$

### 2.4.1 Équations du mouvement dans les vibrations

En utilisant à nouveau l'hypothèse des petites oscillations, nous simplifions de sorte que :

$$\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad \cos(\theta_2 - \theta_1) = 1 \quad \sin \theta_i = \theta_i \quad \cos \theta_i = 1$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{16}{3} \ddot{\theta}_1 + 2 \ddot{\theta}_2 + 3 \frac{g}{a} \theta_1 &= \frac{2 F_0}{m a} \sin(wt) \\ 2 \ddot{\theta}_1 + \frac{4}{3} \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{a} \theta_2 &= \frac{b F_0}{m a^2} \sin(wt)\end{aligned}}$$

### 2.4.2 Calcul de la réponse vibratoire du système

Nous réécrivons alors sous forme matricielle :

$$M \ddot{q} + K q = F(t)$$

$$M = ma^2 \begin{bmatrix} \frac{16}{3} & 2 \\ 2 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}, \quad K = mga \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} 2aF_0 \sin(\omega t) \\ bF_0 \sin(\omega t) \end{bmatrix}.$$

Ici, nous utilisons la transformation modale pour représenter nos variables physiques comme une superposition des modes propres :

$$q(t) = \phi \eta(t) \quad \phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \quad \eta(t) = \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = f_i(t), \quad f_i(t) = \phi_i^T F(t).$$

Pour une excitation sinusoïdale sans amortissement, la réponse stationnaire est :

$$\eta_i(t) = \frac{f_{i0}}{\omega_i^2 - \omega^2} \sin(\omega t),$$

où  $f_i(t) = f_{i0} \sin(\omega t)$ .

Ainsi, la force modale est :

$$f_i(t) = \phi_i^T F(t) = \frac{F_0}{\sqrt{N_i}} (2a\alpha_i + b) \sin(\omega t),$$

de sorte que

$$f_{i0} = \frac{F_0}{\sqrt{N_i}} (2a\alpha_i + b).$$

$$\eta_i(t) = \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2} \frac{F_0}{\sqrt{N_i}} (2a\alpha_i + b) \sin(\omega t),$$

Ainsi, la réponse particulière en coordonnées physiques est :

$$q(t) = \phi_i \cdot \eta_i(t) = F_0 \sin(\omega t) \sum_{i=1}^2 \frac{(2a\alpha_i + b)}{N_i (\omega_i^2 - \omega^2)} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

avec

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{a} \left( \frac{3}{2} \pm \frac{3}{7} \sqrt{7} \right), \quad \alpha_{1,2} = \frac{1 \mp 2\sqrt{7}}{9}.$$

### 3 Résolution via un schéma d'intégration temporelle programmé sous Python

Pour cette section, nous avons élaboré en langage Python deux programmes d'intégration dans le temps par la méthode de Runge-Kutta, un pour le cas non linéarisé et un autre pour le cas linéaire, et un par la méthode de Newmark, pour le cas linéarisé.

Les codes utilisés pour la réalisation des procédures de cette section seront annexés au travail. Le développement ci-dessous se limitera donc aux réponses obtenues.

#### 3.1 Oscillation libre

Nous souhaitons ici l'évolution temporelle de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sur une durée de 5 s, en tenant compte de  $\theta_1(0) = \theta_1^0 = 24^\circ$  et  $\theta_2(0) = \theta_2^0 = 13^\circ$ .

En appliquant ces valeurs à notre code de mouvement dans le cas général, nous obtenons :

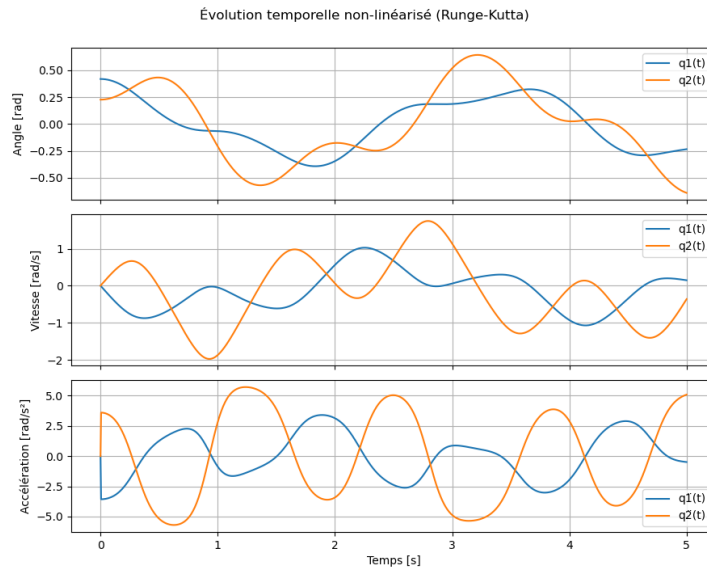


FIGURE 2 – Graphiques du mouvement du système en oscillation libre (cas général)

Si nous considérons l'hypothèse des petites oscillations, nous obtiendrions le graphique suivant grâce au code :

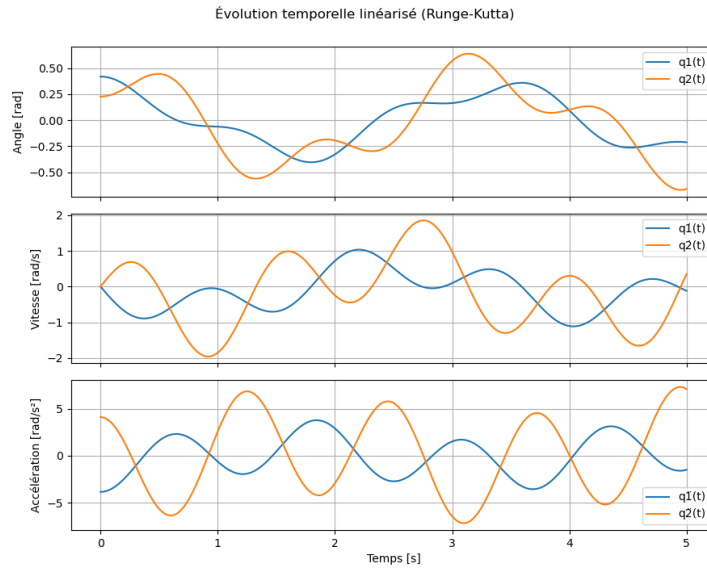


FIGURE 3 – Graphiques du mouvement du système en oscillation libre (cas vibration) - Runge-Kutta

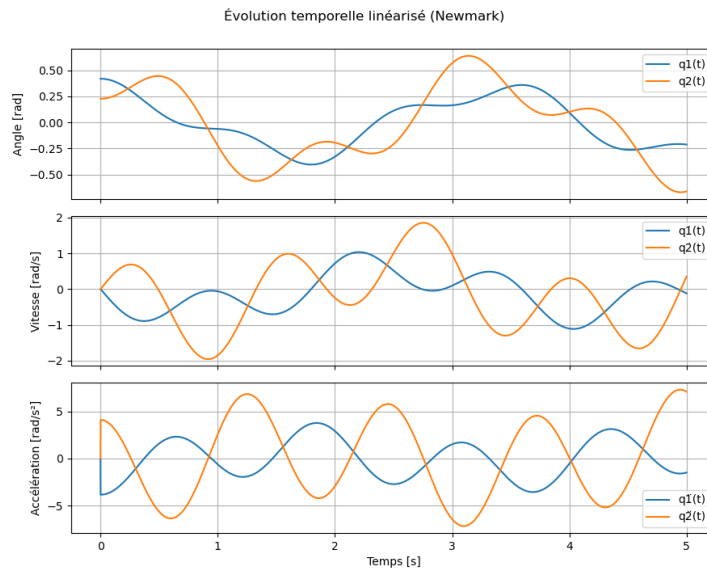


FIGURE 4 – Graphiques du mouvement du système en oscillation libre (cas vibration) - Newmark

### 3.2 Contrôle de qualité et pertinence

Nous pouvons utiliser les outils suivants pour contrôler la qualité et la pertinence de notre code par rapport aux résultats réels.

Tout d'abord, nous avons la convergence par raffinement du pas de temps. La réduction progressive du pas de temps utilisé pour le calcul permet de se rapprocher d'une notion de temps continue. Ainsi, si le raffinement du pas entraîne des valeurs de solution de plus en plus proches les unes des autres, ou convergentes, alors la résolution s'avère cohérente

avec le résultat attendu et donc de qualité.

La génération de graphiques pour comparer les valeurs est essentielle, car l'observation de la courbe du comportement des variables étudiées peut être comparée à celles générées par d'autres méthodes (comme cela sera vu ultérieurement avec le logiciel MotionView®/MotionSolve®). De plus, cela permet de calculer et d'afficher des résultats intermédiaires, que nous pouvons appliquer directement dans les équations pour vérifier l'adéquation au modèle mathématique.

Nous avons utilisé ces deux premières interventions dans notre code. Nous considérons également l'existence des options suivantes pour garantir la qualité et la pertinence des données.

Le calcul de l'erreur entre les itérations, surtout avec des pas de temps réduits, établit une manière de mesurer la différence entre deux valeurs consécutives observées. En s'assurant qu'il n'existe pas de grands écarts entre les valeurs, nous pouvons garantir l'absence de discontinuités, c'est-à-dire de comportements du système contraires aux lois de la physique.

Enfin, dans le souci de vérifier la cohérence du système avec la physique, nous pouvons calculer son énergie et la comparer au cours du temps. Si aucune différence significative n'est observée, nous pouvons, par conservation de l'énergie, valider les résultats comme pertinents.

### 3.3 Oscillation forcée

Ici, toujours en travaillant avec  $\theta_1(0) = \theta_1^0 = 24^\circ$  et  $\theta_2(0) = \theta_2^0 = 13^\circ$ , nous mettons à jour les conditions pour incorporer une force  $F = 100, \sin\left(\frac{4\pi}{3}t\right)$ , appliquée au point  $C$  décrit par  $\vec{AC} = 0,75\vec{x}_2$ . Nous calculons à nouveau dans le code l'évolution des angles sur une durée de 5 s.

Dans le cas général, nous avons obtenu :

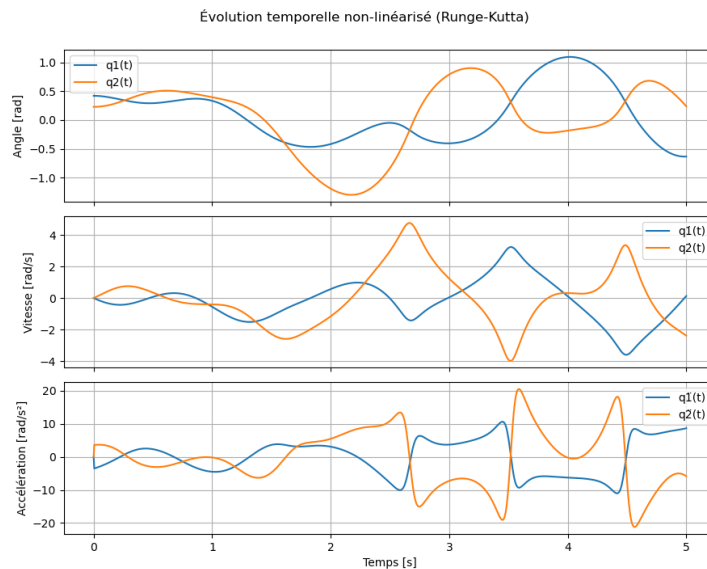


FIGURE 5 – Graphiques du mouvement du système en oscillation forcée (cas général)

Dans le cas des petites oscillations, nous avons :

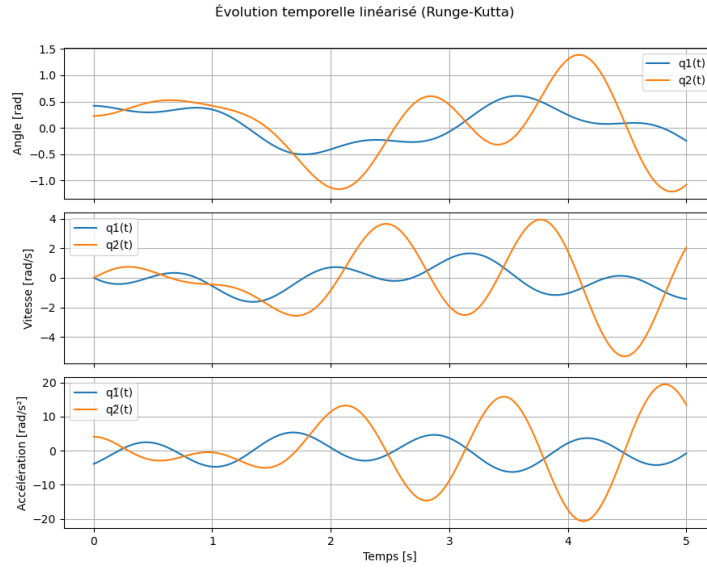


FIGURE 6 – Graphiques du mouvement du système en oscillation forcée (cas vibration) - Runge-Kutta

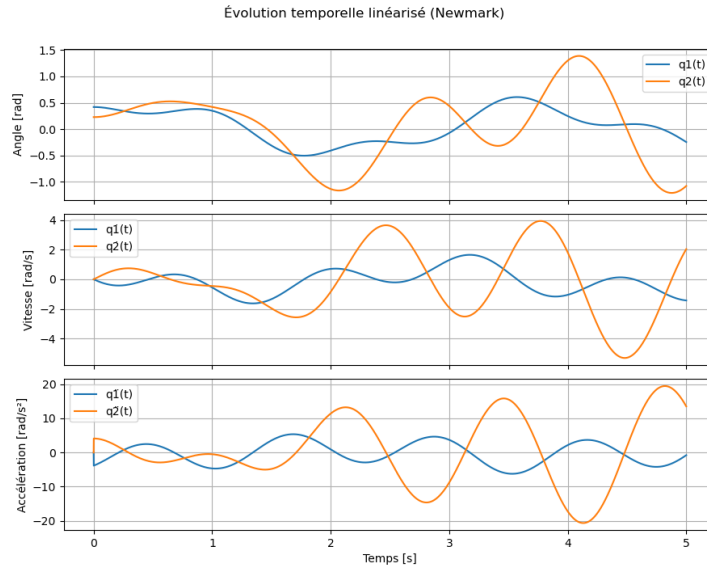


FIGURE 7 – Graphiques du mouvement du système en oscillation forcée (cas vibration) - Newmark

### 3.4 Conclusions sur le code

Nous observons alors, en comparant ces graphiques, que malgré la similarité des réponses obtenues pour les angles, la comparaison des vitesses et accélérations angulaires ne donne pas le même résultat. Cela nous permet de confirmer que le système en oscillation ne présente pas toujours un comportement purement vibratoire (c'est-à-dire que son équation de mouvement ne peut pas toujours être considérée comme linéaire).

Au fur et à mesure que les angles augmentent pendant le mouvement, le système quitte progressivement le domaine de validité de l'hypothèse des petites oscillations. Cela se manifeste clairement sur les graphiques : les amplitudes croissent avec le temps et la dynamique devient fortement non linéaire, alors que le modèle linéarisé conserve un comportement régulier et harmonique. La différence entre les deux approches s'amplifie donc considérablement, montrant que seule la modélisation complète permet de décrire fidèlement le mouvement du double pendule.

## 4 Résolution via MotionView®/MotionSolve®

Nous avons modélisé le système dans MotionView® en suivant les spécifications de la situation problème. Le fichier réalisé dans le logiciel est annexé au travail.

### 4.1 Comparaison entre le code et la modélisation MotionView®

Ici, nous présentons la comparaison entre les graphiques obtenus via la modélisation dans MotionView® et ceux issus de la résolution par Runge-Kutta en Python :

#### 4.1.1 Oscillation libre

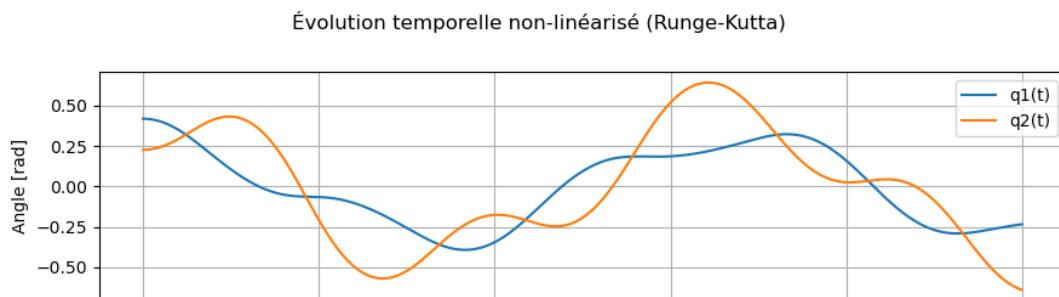


FIGURE 8 – Graphique du mouvement du système par simulation

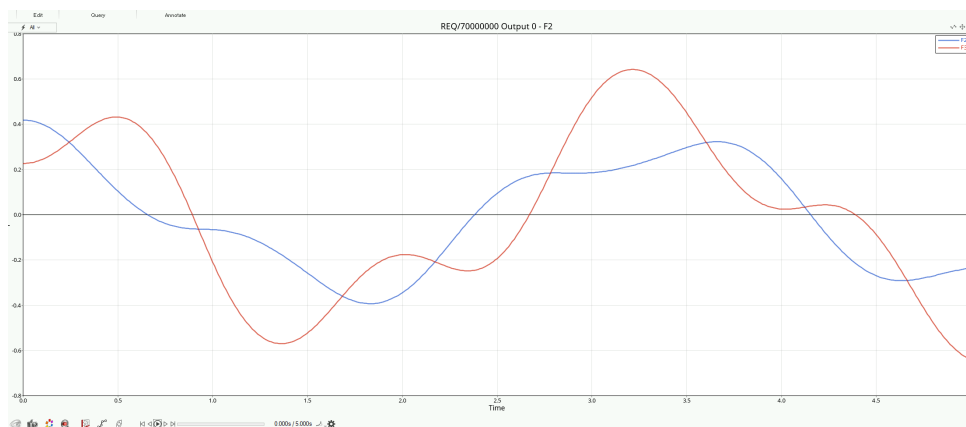


FIGURE 9 – Graphique du mouvement du système par code

D'après les images, nous pouvons constater que, dans le mouvement général en oscillations libres du système, nous avons obtenu le même résultat pour les deux méthodes de résolution.

#### 4.1.2 Oscillation forcée

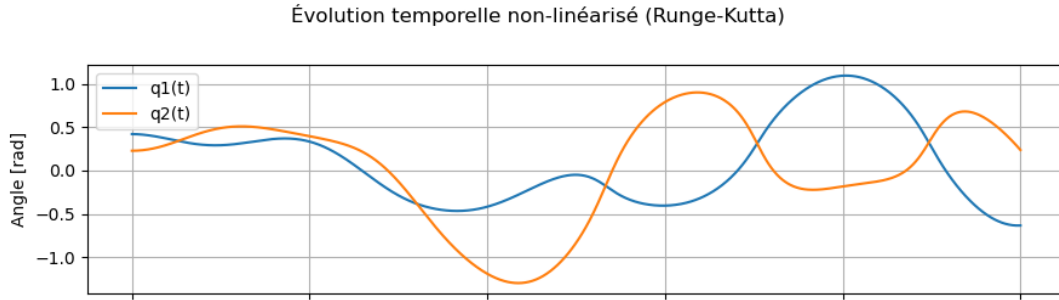


FIGURE 10 – Graphique du mouvement du système par simulation

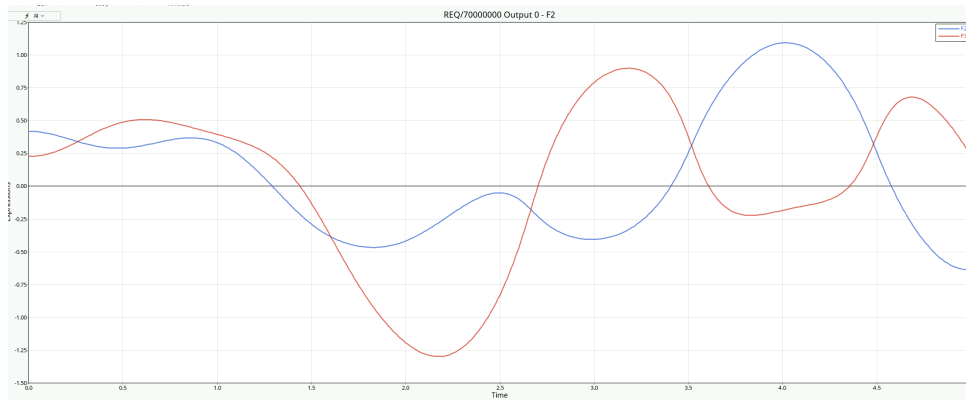


FIGURE 11 – Graphique du mouvement du système par code

De la même manière, nous avons obtenu les mêmes résultats graphiques pour les oscillations forcées avec les deux méthodes de résolution.

## 4.2 Fréquences et modes propres dans MotionSolve®

En raison de limitations liées à la version du logiciel utilisé, il n'a pas été possible d'obtenir les fréquences propres et les modes propres normalisés dans MotionSolve®. Nous avons toutefois inclus, dans notre code Python pour le cas linéarisé, quelques lignes permettant de calculer ces valeurs :

$$w_1^2 = 25.8385 \quad w_2^2 = 3.5915$$

$$w_1 = 5.0832 \quad w_2 = 1.8951$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} -0.0808 \\ -0.1156 \end{bmatrix} \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} -0.1790 \\ 0.3754 \end{bmatrix}$$

### 4.3 Identification d'un node

En raison des limitations de la version 2023.1 du logiciel utilisé, il n'a pas été possible de trouver ni d'utiliser l'outil nécessaire à la réalisation de cette analyse.