

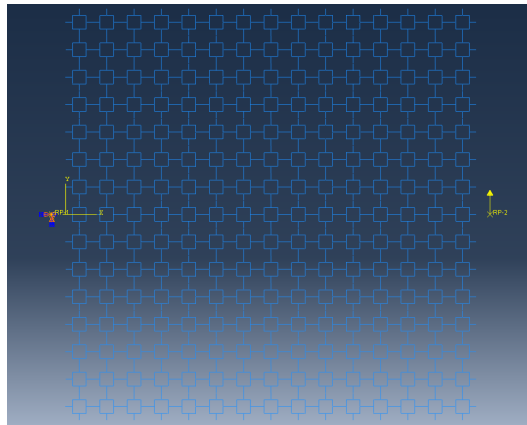
# École Centrale de Nantes

---

Option MAAS

Alessia Buonocore – Pedro Mocivuna - Lia Moraes

## Éléments Finis : Projet ARCHI



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>1 Étude d'une poutre console à section carrée : vérification de la flèche à l'extrémité par la méthode des éléments finis</b>	<b>2</b>
<b>2 Mise en œuvre numérique de l'homogénéisation</b>	<b>2</b>
2.1 Cas réseau 1D . . . . .	2
2.2 Cas matériau architecturé — hierarchical square honeycomb . . . . .	4
2.2.1 Données géométriques et matériau . . . . .	4
2.2.2 Champ de déplacement . . . . .	4
2.2.3 Implémentation sous Abaqus . . . . .	5
2.2.4 Conditions aux limites appliquées . . . . .	5
2.2.5 Détermination des constantes homogénéisées à partir de l'énergie interne (ALLSE) . . . . .	9
2.2.6 Constantes élastiques équivalentes déterminées à partir des calculs analytiques	11
2.2.7 Conclusion . . . . .	11
<b>3 Validation de l'homogénéisation</b>	<b>12</b>
3.1 Structure treillis . . . . .	12
3.2 Structure homogénéisée . . . . .	14
3.3 Comparaison avec traction . . . . .	17
3.4 Conclusion . . . . .	19
<b>4 Travail au sein des compétences</b>	<b>20</b>
4.1 Alessia Buonocore . . . . .	20
4.2 Pedro Mocivuna . . . . .	20
4.3 Lia Moraes . . . . .	20

# 1 Étude d'une poutre console à section carrée : vérification de la flèche à l'extrémité par la méthode des éléments finis

Afin de commencer les calculs à l'aide du logiciel Abaqus, une simulation 2D d'une poutre homogène en acier, de longueur 10mm et section carrée 1mm x 1mm a été réalisée. Après la modélisation géométrique et attribution de propriétés à la pièce, la poutre a été encastree à son extrémité gauche, tandis qu'une charge de -200 N dans la direction  $\vec{y}$  a été appliquée sur son extrémité droite.

Pour la création du maillage, une taille globale de 1 mm a été définie, et la configuration de poutre de Bernoulli (*Cubic Formulation*) a été utilisée. Les résultats, après la réalisation de la simulation, sont présentés sur l'image ci-dessous :

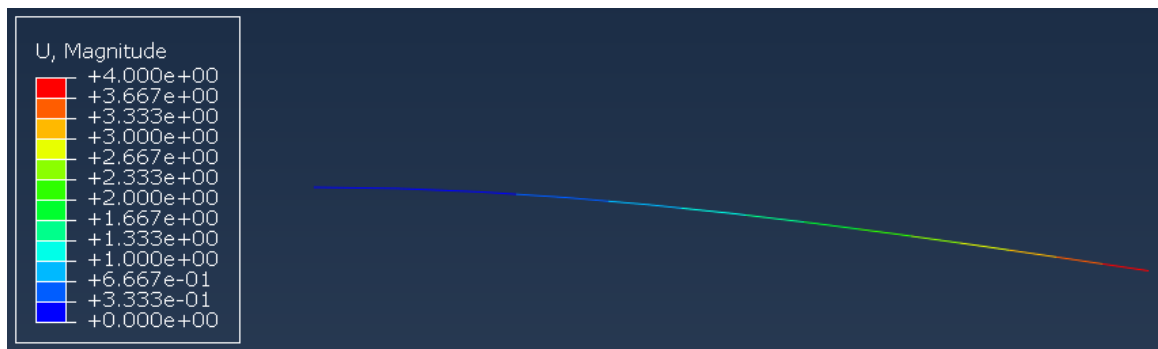


FIGURE 1 – Résultats de la simulation Abaqus : déplacement maximal à l'extrémité libre de la poutre

Ces résultats peuvent être vérifiés à partir du calcul présenté ci-dessous :

$$v = \frac{F l^3}{3 E I_{33}} \quad (1)$$

En remplaçant dans l'équation les valeurs numériques utilisées, on obtient :

$$I_{33} = \frac{h^4}{12} = \frac{1}{12}$$
$$v = \frac{-200 \cdot 10^3}{3 \cdot 200000 \cdot (1/12)}$$
$$v = -4mm$$

## 2 Mise en œuvre numérique de l'homogénéisation

### 2.1 Cas réseau 1D

Pour le cas d'une poutre 1D hétérogène, une nouvelle simulation a été réalisée. Nous avons défini une poutre d'une longueur totale de 15 mm, composée de deux matériaux ayant la même section transversale mais des modules d'Young différents comme *Representative Volume Element* (RVE) de la structure macroscopique. Le matériau de la portion du RVE située entre 0 et 10 mm présentait un module d'Young de 200 000 MPa, tandis que la partie de 10 mm à 15 mm avait un module d'Young de 180 000 MPa.

De plus, nous considérons l'extrémité droite du RVE comme le point A et l'extrémité gauche comme le point B. Nous utilisons l'équation ci-dessous pour décrire le déplacement de chaque point

du domaine :

$$\vec{u} = \mathbf{E}_{xx} \vec{x} + \vec{u}^{\text{per}} \quad (2)$$

Pour simplifier les calculs à effectuer, nous limitons les 2 degrés de liberté de translation de l'extrémité A et imposons une déformation macroscopique unitaire sur la poutre. En tenant compte du fait que le champ de déformation périodique prend la même valeur aux deux extrémités du RVE en raison de sa périodicité, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \vec{u}^{\text{per}}(A) &= \vec{u}^{\text{per}}(B) \\ \vec{u}(B) - \vec{u}(A) &= \mathbf{E}_{xx}(\vec{x}(B) - \vec{x}(A)) \\ \vec{x}(B) - \vec{x}(A) &= \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour mettre ce calcul en pratique dans Abaqus, nous avons défini un *reference point* quelconque dans le modèle, où la déformation macroscopique a été imposée. Ensuite, nous avons reformulé le calcul effectué précédemment sous la forme d'une équation compatible avec Abaqus pour la création de *constraints* du type *equation*.

$$\begin{aligned} \vec{u}_{RP} &= \mathbf{E}_{xx} \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{u}(B) - \vec{u}(A) - \vec{u}_{RP} &= 0 \end{aligned}$$

Une fois ces conditions établies, le maillage est créé en suivant les mêmes configurations que pour le problème précédent. À partir de la simulation, le résultat de l'énergie de déformation (*Strain Energy - ALLSE*) est obtenu via les *History Outputs*. Dans cette simulation, nous avons imposé une déformation macroscopique unitaire, soit  $E_{xx} = 1$ .

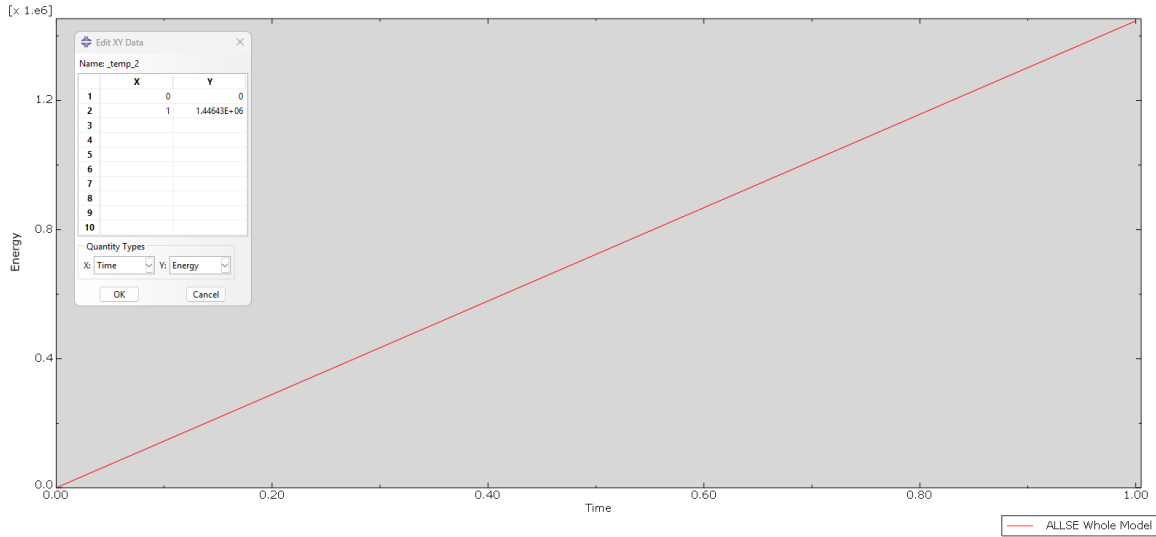


FIGURE 2 – Énergie de déformation totale (*ALLSE*) obtenue pour une déformation macroscopique unitaire ( $E_{xx} = 1$ ) – Simulation Abaqus

Nous appliquons le résultat de la simulation précédente dans l'équation suivante afin d'obtenir, enfin, le comportement homogénéisé de la poutre.

$$(ES)^{\text{hom}} \frac{(E_{xx})^2}{2} = \frac{E_d}{l} \quad (3)$$

$$(E)^{\text{hom}} = \frac{E_d}{l} \frac{2}{(E_{xx})^2} \frac{1}{(S)^{\text{hom}}} = \frac{1,44643e+06}{15} \frac{2}{(1)^2} \frac{1}{1} = 192857 \text{MPa} \quad (4)$$

Enfin, nous pouvons comparer la valeur d' $E^{\text{hom}}$  obtenue numériquement avec celle calculée à partir de la formule théorique d'homogénéisation pour une poutre 1D composée de deux matériaux en série :

$$(ES)^{\text{hom}} = \left[ \frac{1}{L} \left( \frac{l_1}{E_1 S} + \frac{l_2}{E_2 S} \right) \right]^{-1} \rightarrow E^{\text{hom}} = 192857 \text{ MPa} \quad (5)$$

Cette relation permet de confirmer la cohérence du module homogénéisé obtenu par simulation avec la valeur théorique.

## 2.2 Cas matériau architecturé — hierarchical square honeycomb

Afin de déterminer les propriétés mécaniques équivalentes du réseau *hierarchical square*, une procédure d'homogénéisation numérique a été mise en place sur un *Representative Volume Element* (RVE). L'objectif est d'imposer au modèle un champ de déformation macroscopique uniforme  $\mathbf{E}$  et d'en déduire les contraintes moyennes, permettant ainsi d'obtenir la matrice constitutive équivalente du matériau.

### 2.2.1 Données géométriques et matériau

Les paramètres suivants définissent la cellule élémentaire et le matériau de base :

Paramètre	Valeur
Longueur du côté de la cellule $L_x = L_y$ [mm]	10
Section carrée des poutres [mm <sup>2</sup> ]	$1 \times 1$
Épaisseur des montants $t$ [mm]	1
Module d'Young du matériau constitutif $E_{\text{mat}}$ [MPa]	200 000
Coefficient de Poisson du matériau $\nu_{\text{mat}}$ [-]	0,3
Part du carré dans la surface de la période [-]	1/4

TABLE 1 – Paramètres géométriques et matériaux pour le motif 3 – hierarchical square honeycomb

### 2.2.2 Champ de déplacement

Le champ de déplacement microscopique  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  est exprimé comme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad (6)$$

où :

- $\mathbf{E}$  est le gradient de déformation macroscopique ;
- $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  représente les fluctuations microscopiques, supposées **périodiques** à l'intérieur de la cellule élémentaire.

Dans le cadre des petites déformations :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} \\ E_{yx} & E_{yy} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad E_{xy} = E_{yx} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}.$$

Pour chaque paire de points opposés  $A$  et  $B$  appartenant aux bords du réseau, on impose que la différence de déplacement soit cohérente avec la déformation macroscopique appliquée :

$$\mathbf{u}(B) - \mathbf{u}(A) = \mathbf{E}[\mathbf{x}(B) - \mathbf{x}(A)]. \quad (7)$$

### 2.2.3 Implémentation sous Abaqus

Dans le modèle par éléments finis, quatre nœuds ont été identifiés aux coins de la cellule :

$$A(0,0), \quad B(L_x,0), \quad C(L_x/2, L_y/2), \quad D(L_x/2, -L_y/2),$$

ainsi que deux *Reference Points* (Ref1 et Ref2) représentant les degrés de liberté macroscopiques associés aux déformations  $E_{xx}$ ,  $E_{yy}$  et  $\gamma_{xy}$ .

Les conditions aux limites ont été imposées à l'aide de la commande `*EQUATION` d'Abaqus, selon la logique suivante :

— **Contraintes de périodicité pure :**

$$\mathbf{u}(B) = \mathbf{u}(A), \quad \mathbf{u}(D) = \mathbf{u}(C),$$

garantissant l'égalité des déplacements sur les bords opposés ;

— **Contraintes affines via les Reference Points :**

$$\mathbf{u}(B) - \mathbf{u}(A) = L_x \mathbf{E}_x, \quad (8)$$

$$\mathbf{u}(C) - \mathbf{u}(D) = L_y \mathbf{E}_y, \quad (9)$$

où les vecteurs  $\mathbf{E}_x$  et  $\mathbf{E}_y$  sont associés aux DOF des deux points de référence (Ref1 et Ref2), représentant respectivement les déformations macroscopiques selon  $x$  et  $y$ .

Concrètement, les équations suivantes ont été introduites dans Abaqus :

1. 1A - 1B, 6 DOF  $\Rightarrow$  égalité complète des degrés de liberté entre les bords gauche et droit ;
2. 1C - 1D, 6 DOF  $\Rightarrow$  égalité complète entre les bords supérieur et inférieur ;
3. 1B - 1A - 1Ref1, DOF 1 et 2  $\Rightarrow$  différence de déplacement entre les côtés gauche et droit proportionnelle à  $E_{xx}$  et  $\gamma_{xy}$  ;
4. 1C - 1D - 1Ref2, DOF 1 et 2  $\Rightarrow$  différence de déplacement entre les côtés inférieur et supérieur proportionnelle à  $E_{yy}$  et  $\gamma_{xy}$ .

### 2.2.4 Conditions aux limites appliquées

Afin d'éliminer les mouvements rigides, le nœud  $A(0,0)$  est bloqué dans les deux directions de translation :

$$U_x(A) = 0, \quad U_y(A) = 0. \quad (10)$$

Les trois cas macroscopiques testés sont :

(1) **Traction selon  $x$  :**  $E_{xx} = \varepsilon_0 = 1$ ,  $E_{yy} = 0$ ,  $\gamma_{xy} = 0$ .

$$u_x(B) - u_x(A) = \varepsilon_0 L_x, \quad u_y(B) - u_y(A) = 0.$$

(2) **Traction selon  $y$  :**  $E_{yy} = \varepsilon_0 = 1$ ,  $E_{xx} = 0$ ,  $\gamma_{xy} = 0$ .

$$u_y(C) - u_y(D) = \varepsilon_0 L_y, \quad u_x(C) - u_x(D) = 0.$$

(3) **Cisaillement pur :**  $\gamma_{xy} = \gamma_0 = 1$ ,  $E_{xx} = E_{yy} = 0$ .

$$u_y(B) - u_y(A) = \frac{\gamma_0}{2} L_x, \quad u_x(C) - u_x(D) = \frac{\gamma_0}{2} L_y.$$

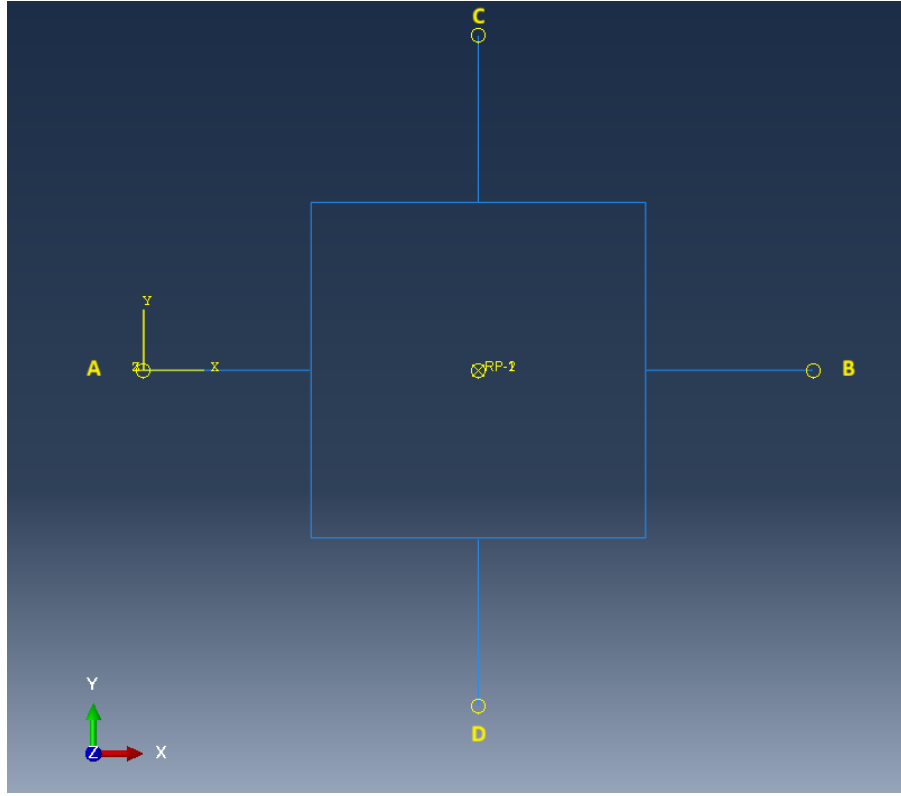


FIGURE 3 – Cellule élémentaire modélisée dans Abaqus avec les nœuds A–B–C–D et les points de référence Ref1 et Ref2.

Cas	$E_{xx}$	$E_{yy}$	$\gamma_{xy}$	DOF activés sur Ref1 / Ref2
Traction x	$\varepsilon_0$	0	0	$U_1(\text{Ref1})$
Traction y	0	$\varepsilon_0$	0	$U_1(\text{Ref2})$
Cisaillement	0	0	$\gamma_0$	$U_2(\text{Ref1}), U_2(\text{Ref2})$

TABLE 2 – Résumé des chargements macroscopiques et DOF activés.

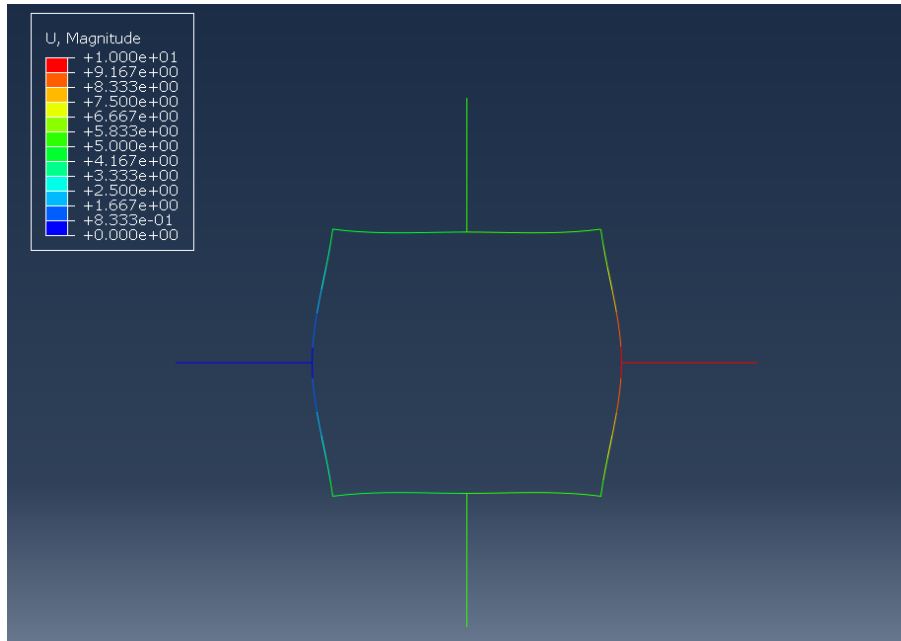


FIGURE 4 – Traction selon X : Ref1 ( $U_1 = 10$ ,  $U_2 = 0$ ), Ref2 ( $U_1 = 0$ ,  $U_2 = 0$ )

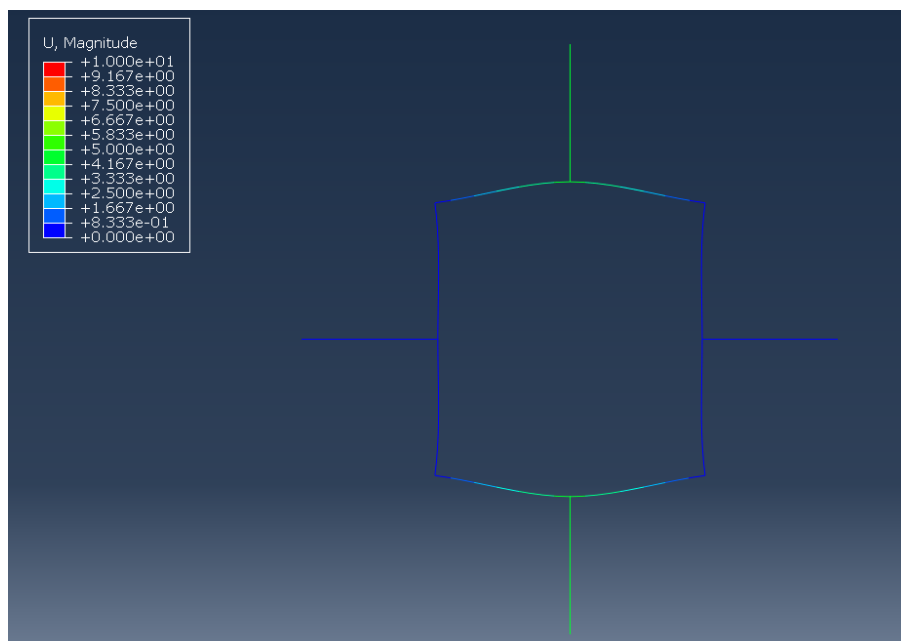


FIGURE 5 – *Traction selon Y*: Ref1 ( $U1 = 0, U2 = 0$ ), Ref2 ( $U1 = 0, U2 = 10$ )

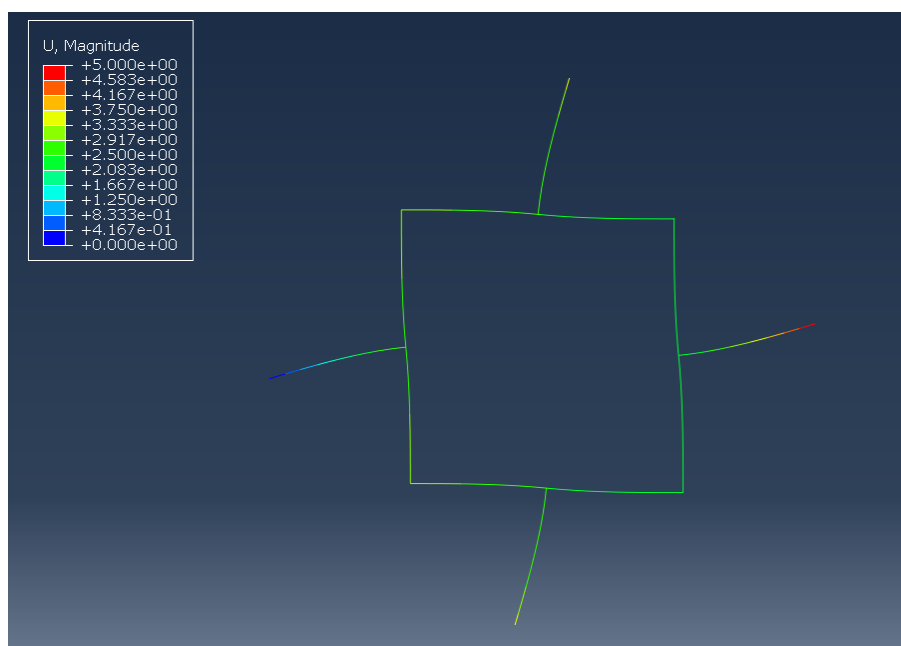


FIGURE 6 – *Cisaillement XY*: Ref1 ( $U1 = 0, U2 = 5$ ), Ref2 ( $U1 = 5, U2 = 0$ )

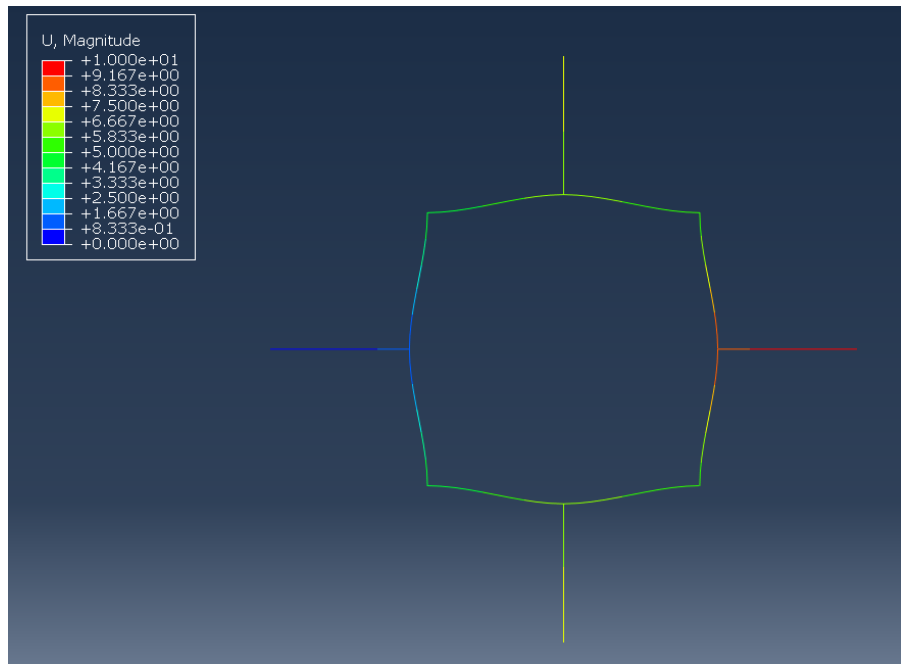


FIGURE 7 – *Traction combinée X + Y*: Ref1 ( $U1 = 10, U2 = 0$ ), Ref2 ( $U1 = 0, U2 = 10$ )

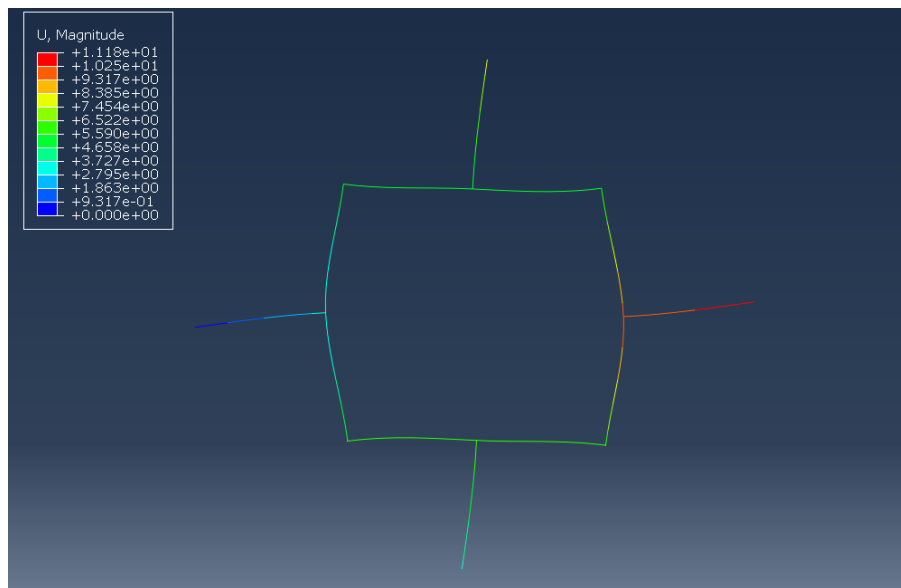


FIGURE 8 – *Traction X + cisaillement XY*: Ref1 ( $U1 = 10, U2 = 5$ ), Ref2 ( $U1 = 5, U2 = 0$ )

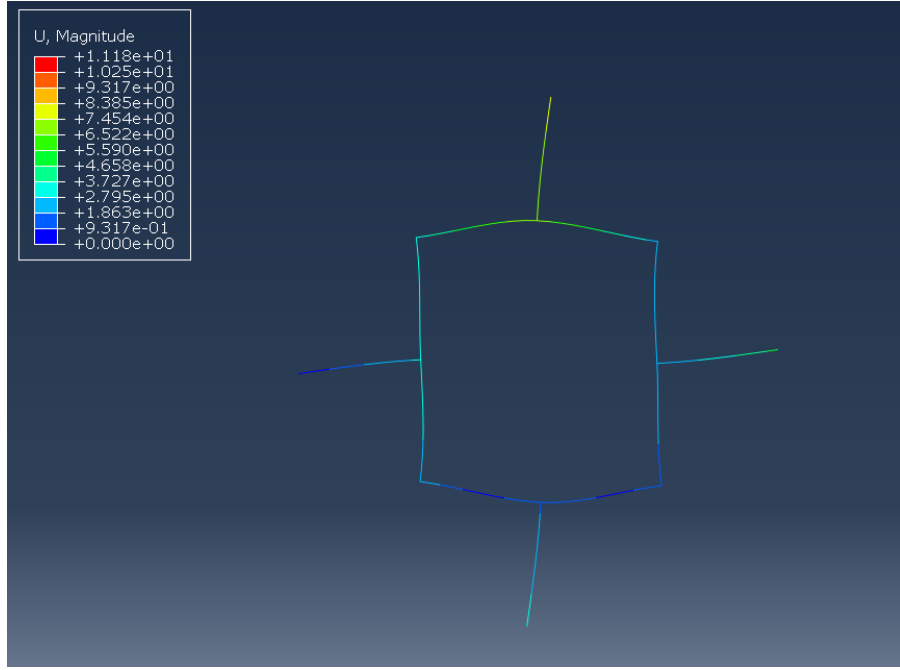


FIGURE 9 – *Traction Y + cisaillement XY*: Ref1 ( $U1 = 0, U2 = 5$ ), Ref2 ( $U1 = 5, U2 = 10$ )

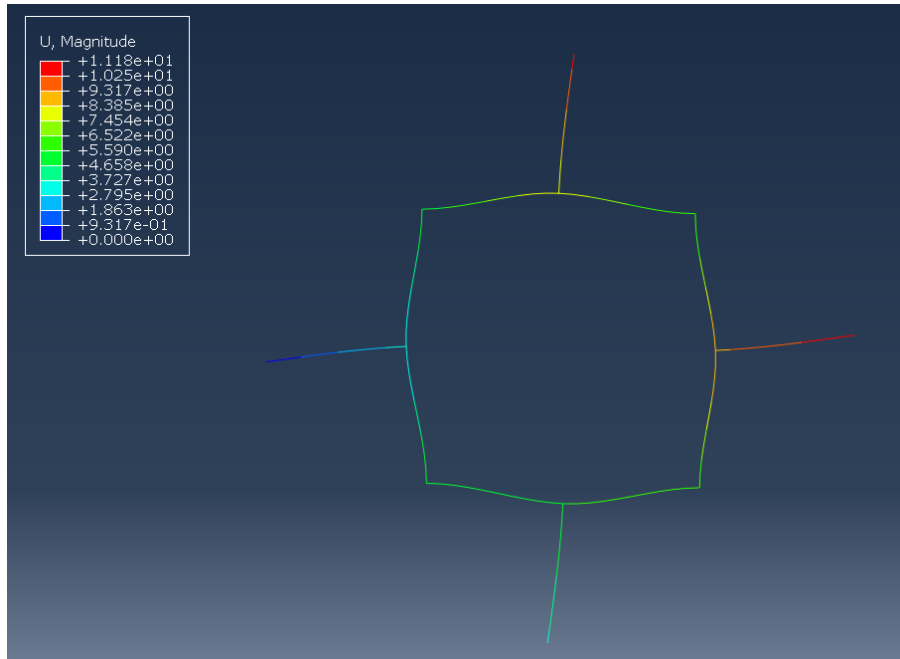


FIGURE 10 – *Traction X + Traction Y + cisaillement XY*: Ref1 ( $U1 = 10, U2 = 5$ ), Ref2 ( $U1 = 5, U2 = 10$ )

## Illustration de la simulation sous Abaqus

### 2.2.5 Détermination des constantes homogénéisées à partir de l'énergie interne (ALLSE)

Les constantes équivalentes du matériau homogénéisé ont été obtenues à partir de l'énergie totale de déformation  $W_{\text{déformation}}$  fournie par Abaqus (ALLSE). En considérant la relation énergie-déformation suivante :

$$\frac{1}{2} \vec{E}^T [\mathbf{A}^{\text{hom}}] \vec{E} = \frac{W_{\text{déformation}}}{|V|} \quad (11)$$

Énergie (ALLSE)	Valeur
$W_1$ (traction $x$ )	287645
$W_2$ (traction $y$ )	287645
$W_3$ (cisaillement)	26315,8
$W_{12}$ (chargement combiné $E_{xx}+E_{yy}$ )	864865
$W_{13}$ (chargement combiné $E_{xx}+\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ )	313961
$W_{23}$ (chargement combiné $E_{yy}+\frac{1}{2}\gamma_{xy}$ )	313961
Volume de la cellule $ V $	100

TABLE 3 – Énergies de déformation (ALLSE) lues dans Abaqus

où  $\vec{E}$  représente le vecteur des déformations macroscopiques imposées :

$$\vec{E} = \begin{Bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{xy} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Chaque chargement élémentaire permet d'isoler une composante du tenseur homogénéisé  $\mathbf{A}^{\text{hom}}$ , à partir des valeurs d'énergie  $W_i$  extraites d'Abaqus et du volume de la cellule  $|V|$ .

$$\vec{E} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow a_{11}^{\text{hom}} = \frac{2W_1}{|V|} = 5752,9 \quad (13)$$

$$\vec{E} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow a_{22}^{\text{hom}} = \frac{2W_2}{|V|} = 5752,9 \quad (14)$$

$$\vec{E} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow a_{33}^{\text{hom}} = \frac{2W_3}{|V|} = 526,3 \quad (15)$$

$$\vec{E} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow a_{12}^{\text{hom}} = \frac{W_{12} - W_1 - W_2}{|V|} = 2895,1 \quad (16)$$

$$\vec{E} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow a_{13}^{\text{hom}} = \frac{W_{13} - W_1 - W_3}{|V|} = 0 \quad (17)$$

$$\vec{E} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \rightarrow a_{23}^{\text{hom}} = \frac{W_{23} - W_2 - W_3}{|V|} = 0 \quad (18)$$

Le tenseur de rigidité homogénéisé et son inverse sont donc donnés par :

$$\mathbf{A}^{\text{hom}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5752,9 & 2895,1 & 0 \\ 2895,1 & 5752,9 & 0 \\ 0 & 0 & 526,3 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$[\mathbf{A}^{\text{hom}}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} & -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} & 0 \\ -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad (20)$$

À partir de ces relations, les constantes élastiques équivalentes ( $E_x$ ,  $E_y$ ,  $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{yx}$ ,  $G_{xy}$ ) se déduisent directement. Les valeurs numériques issues des simulations Abaqus sont synthétisées ci-dessous :

Propriété équivalente	Valeur obtenue
Module d'Young $E_x = E_y$ [MPa]	4295
Module de cisaillement $G_{xy}$ [MPa]	526,3
Coefficient de Poisson $\nu_{xy} = \nu_{yx}$ [-]	0,5031

TABLE 4 – Constantes équivalentes calculées à partir de  $W_{\text{déformation}}$  (ALLSE).

### 2.2.6 Constantes élastiques équivalentes déterminées à partir des calculs analytiques

Les modules élastiques effectifs ont également été évalués à partir des relations théoriques présentées dans la Figure 11.



Name	Unit cell	Effective Young's modulus	Poisson's ratio
Hierarchical square*		$\frac{t/L}{1 - (r/L) + 2.5(r/L)^3 / (t/L)^2}$	$\frac{0.6(r/L)^3}{(r/L)^3 - 0.4(t/L)^2(r/L) + 0.4(t/L)^2}$
Name	Unit cell	Effective shear modulus	Principal direction
Hierarchical square		$\frac{0.5(t/L)^3}{1 - 3(r/L) - 6(r/L)^2 + 20(r/L)^3 + (t/L)^2(r/L)}$	$\frac{k\pi}{4}$

FIGURE 11 – Expressions analytiques pour  $E$ ,  $\nu$  et  $G$  d'un réseau hiérarchique (référence).

Propriété	Valeur obtenue
Module d'Young $E_{\text{eq}}$ [MPa]	4295,2
Module de cisaillement $G_{\text{eq}}$ [MPa]	526,3
Coefficient de Poisson $\nu_{\text{eq}}$ [-]	0,5033

TABLE 5 – Constantes élastiques équivalentes déterminées analytiquement.

### 2.2.7 Conclusion

On peut conclure, d'après la forme de la matrice homogénéisée, que le matériau hétérogène présente un comportement élastique orthotrope. En outre, l'analyse des résultats — avec un module de Young et un coefficient de Poisson identiques dans les directions  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  — montre qu'il existe une symétrie dans le plan  $xy$ . Il s'agit donc d'un matériau orthotrope avec une isotropie dans le plan  $xy$ .

### 3 Validation de l'homogénéisation

Pour valider les calculs réalisés, on a construit deux modèles : l'un constitué d'un motif périodique  $15 \times 15$  de la cellule hétérogène, modélisé sous forme de poutre ; et l'autre, une plaque homogène de mêmes dimensions globales, intégrant comme propriétés mécaniques les valeurs résultantes calculées à partir du matériau hétérogène.

Dans les deux modèles, le côté gauche est bloqué en translations et rotations, tandis qu'une force répartie de résultante 200N dirigée selon y est appliquée sur le côté droit.

#### 3.1 Structure treillis

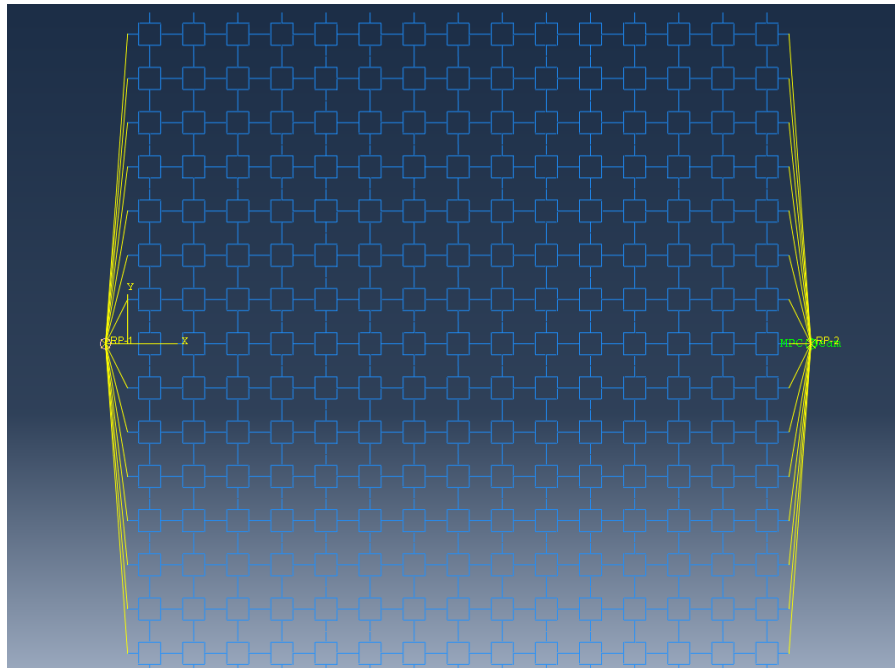


FIGURE 12 – *Reference points (RP) aux deux extrémités - structure treillis*

Deux points de référence (RP) ont été créés : un à gauche pour bloquer le mouvement et un à droite pour appliquer le chargement. Les nœuds du bord gauche ont été reliés au RP-1 en utilisant une *Constraint* du type *Couplage*, tandis que ceux du bord droit ont été reliés au RP-2 à l'aide d'un *MPC Constraints - Beam*. Le choix de ce dernier type de *Constraint* pour l'application de la charge s'explique par le fait qu'elle est distribuée sur les nœuds de l'extrémité droite, et non sur des éléments de surface du bord. Le type *Beam* permet l'application d'un effort distribué équivalent, tout en respectant la continuité entre les cellules du matériau analysé.

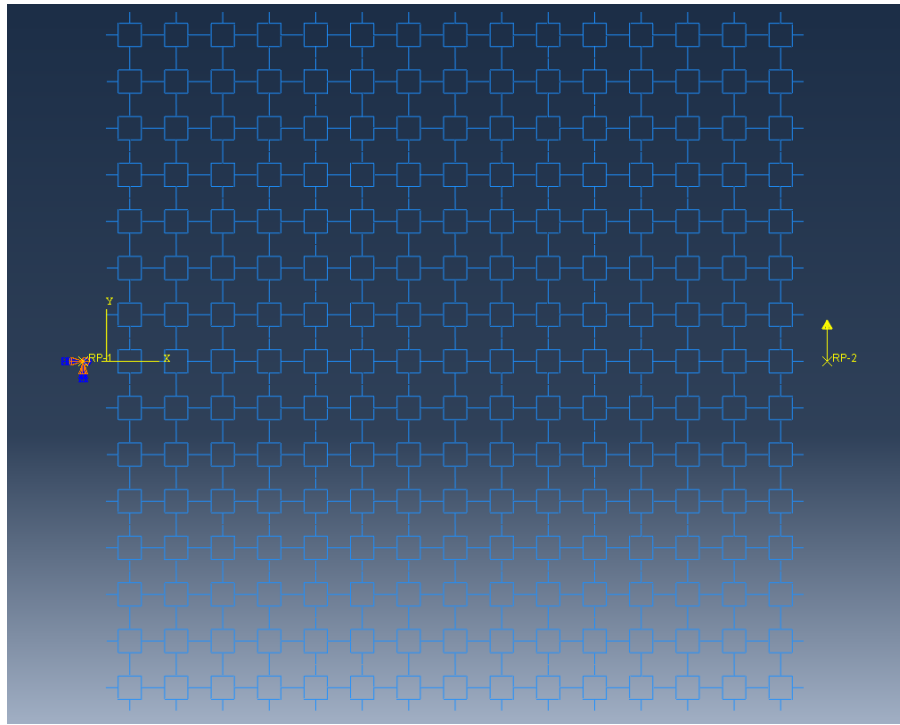


FIGURE 13 – *Conditions aux limites - structure treillis*

Le bord gauche est totalement bloqué. La charge verticale  $F_y = 200$  N est appliquée au RP situé à droite.

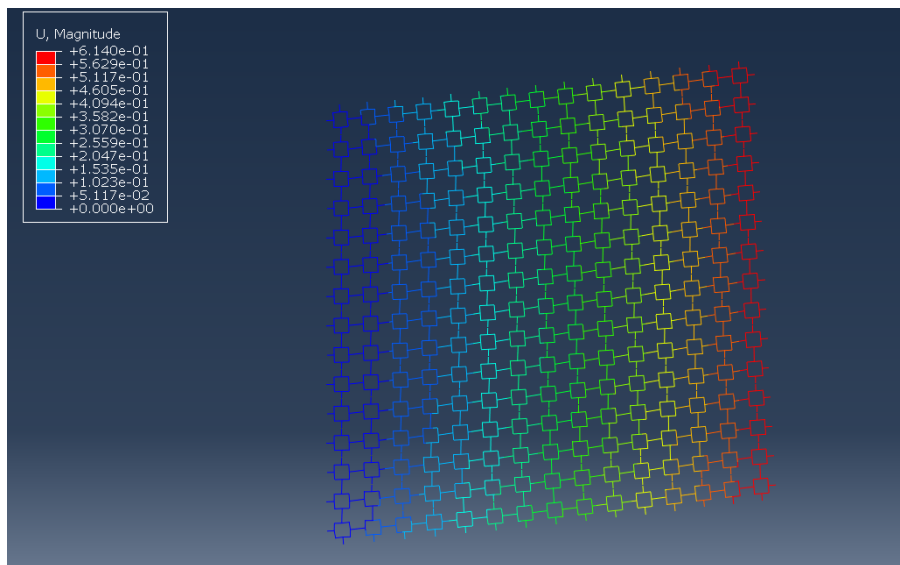


FIGURE 14 – *Champ de déplacement U de la structure treillis sous charge verticale*

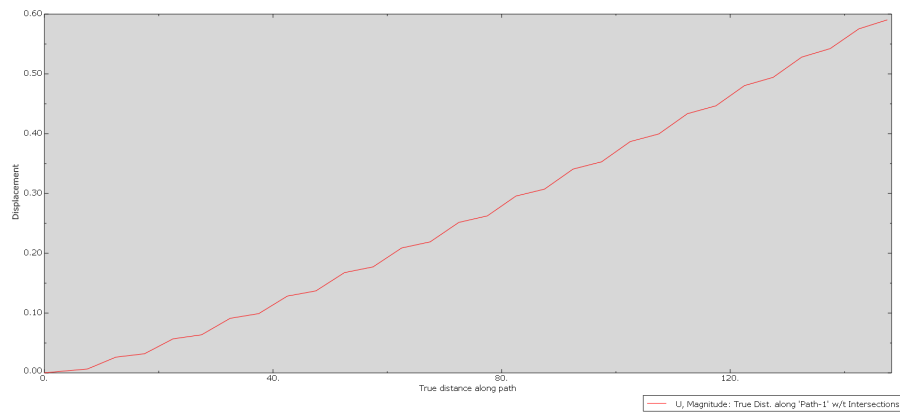


FIGURE 15 – Déplacement le long d'une ligne moyenne — structure treillis

## 3.2 Structure homogénéisée

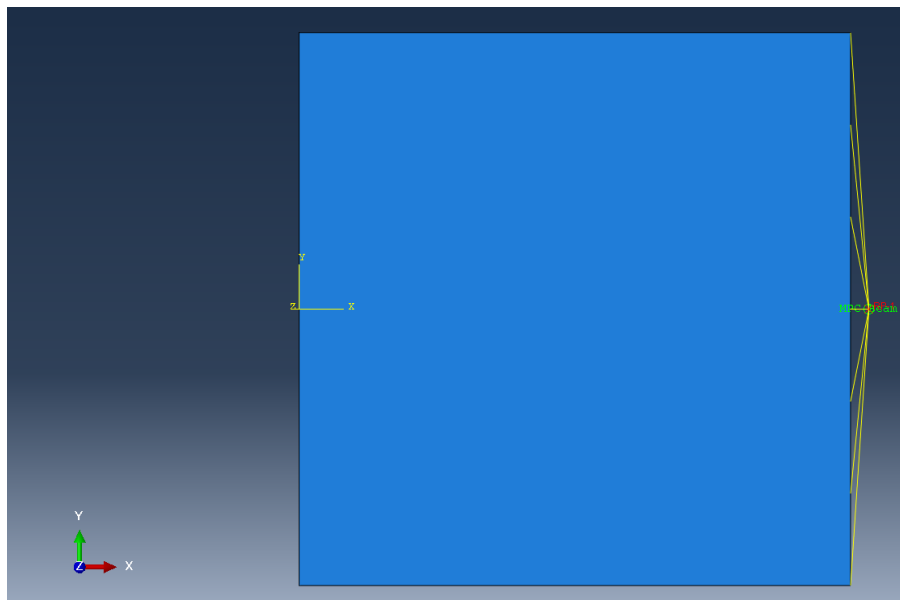


FIGURE 16 – Structure homogénéisée : RP uniquement à droite pour l'application du chargement

Le modèle homogénéisé reprend la même géométrie globale que le treillis, mais les propriétés mécaniques utilisées proviennent de l'homogénéisation du matériau périodique. Dans ce cas, le surface gauche a été bloqué en translations et rotations, tandis qu'une force ponctuelle de 200N a été appliquée dans la direction y au moyen d'un point de référence relié au bord droit par un *MPC Constraint - Beam*.

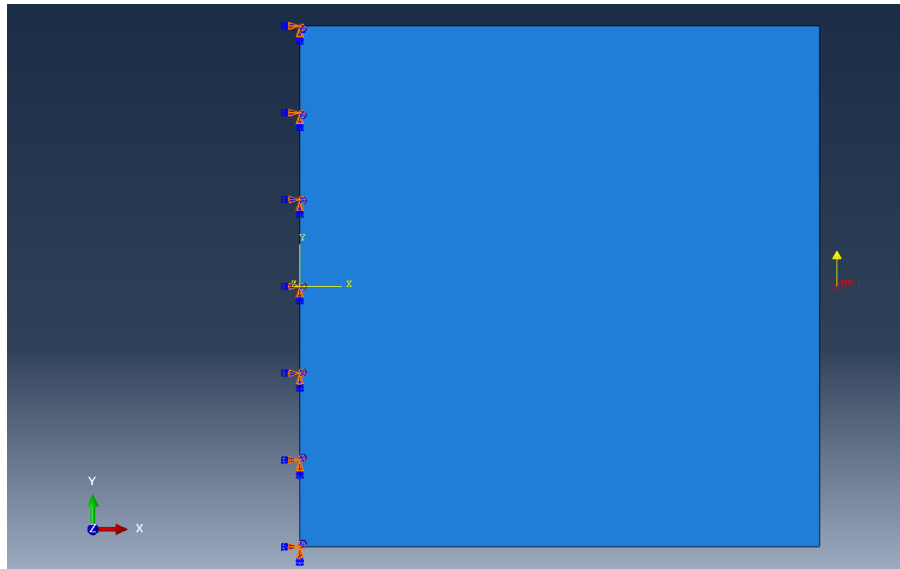


FIGURE 17 – Conditions aux limites - structure homogénéisée

Le même schéma de chargement est appliqué pour permettre une comparaison directe des déplacements et réactions entre les deux modèles.

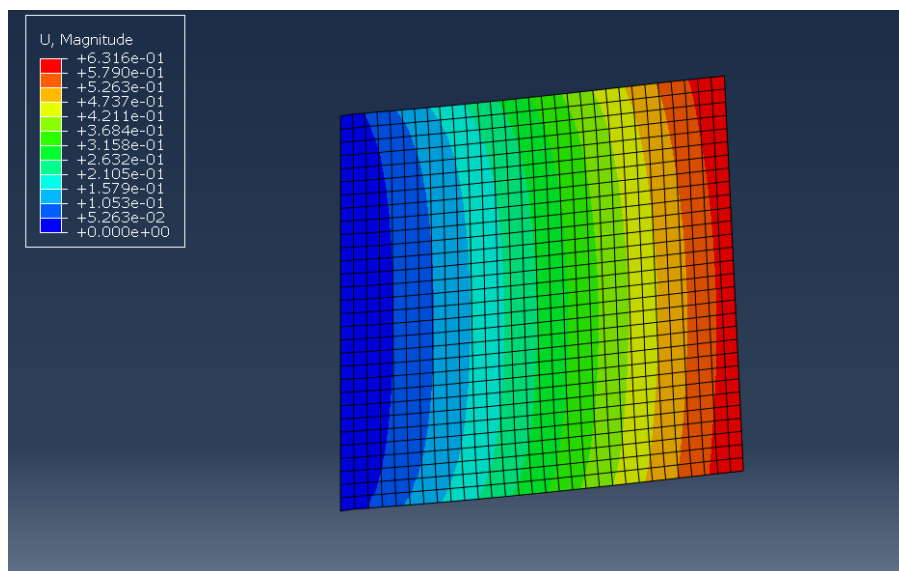


FIGURE 18 – Champ de déplacement  $U_2$  pour la structure homogénéisée

La distribution du déplacement vertical est similaire à celle observée pour la structure treillis, ce qui indique que le modèle homogénéisé reproduit correctement la flexion globale.

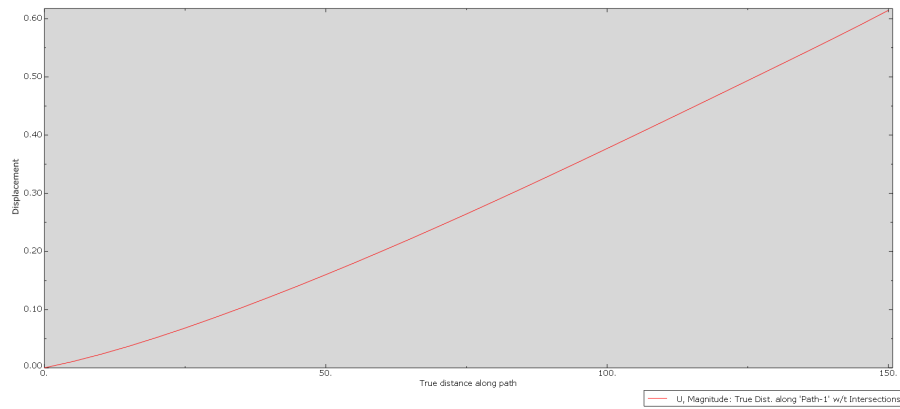


FIGURE 19 – Déplacement le long d'une ligne moyenne — structure homogénéisée

De même, nous avons réalisé la simulation en appliquant une *Load* de type *Surface traction - Shear* dans la direction *y* sur la face droite du modèle homogénéisé, représentant une charge distribuée de 1,3333N/mm, correspondant à un effort totale de 200N. Des résultats numériques similaires ont été obtenus, comme le montre la figure ci-dessous.

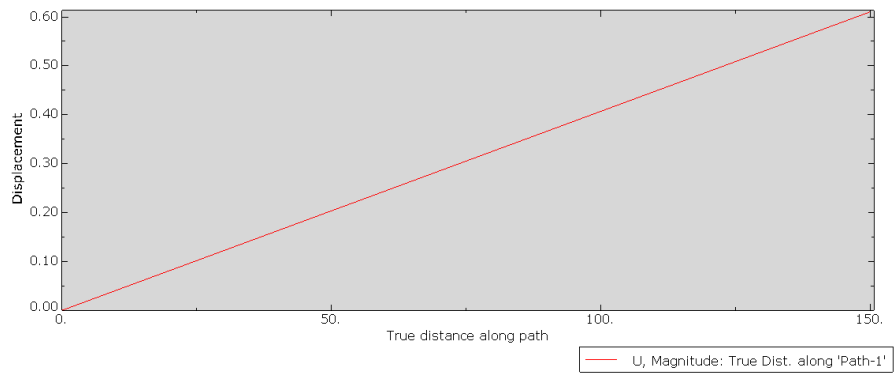


FIGURE 20 – Déplacement le long d'une ligne moyenne — structure homogénéisée avec *Surface traction*

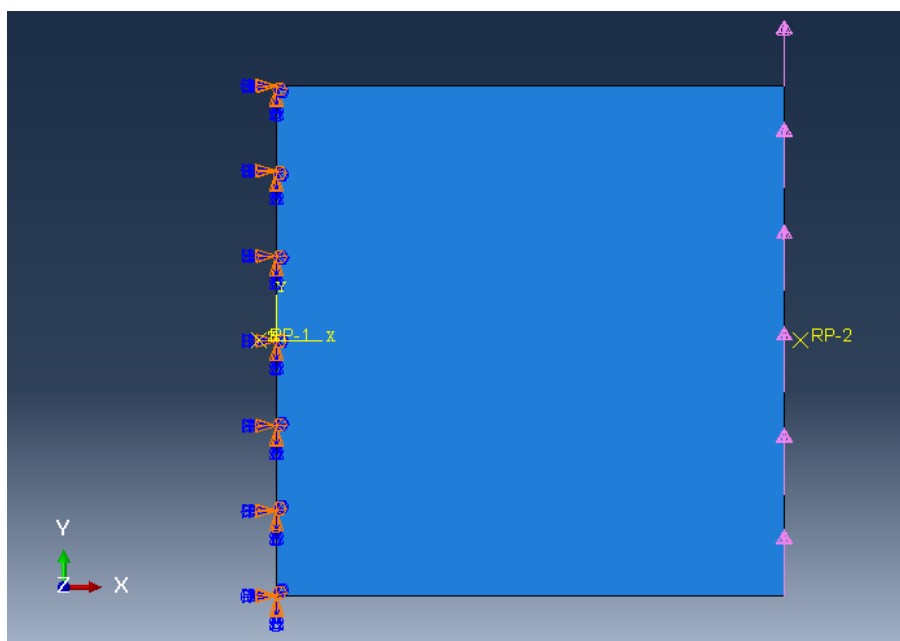


FIGURE 21 – Conditions aux limites - structure homogénéisée avec *Surface traction*

### 3.3 Comparaison avec traction

De même, nous avons réalisé une étude comparative des poutres en traction. Contrairement au procédé appliqué pour le cisaillement, on a imposé comme condition limite sur le bord gauche une restriction de translation dans la direction  $x$ , et sur le bord droit une force de traction de 200N.

Dans la structure hétérogène, on a utilisé des points de référence pour imposer les nouvelles conditions.

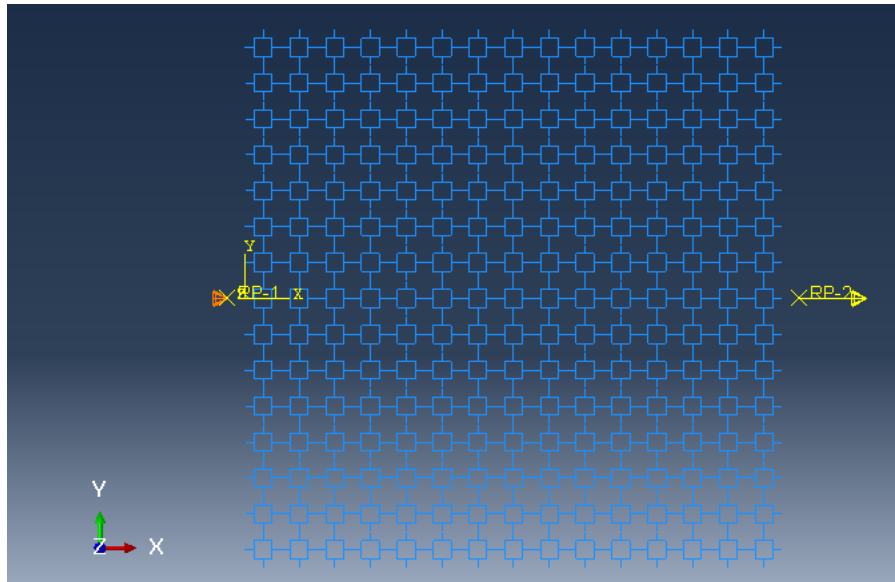


FIGURE 22 – Conditions aux limites - structure treillis avec traction

Les résultats obtenus sont les suivants :

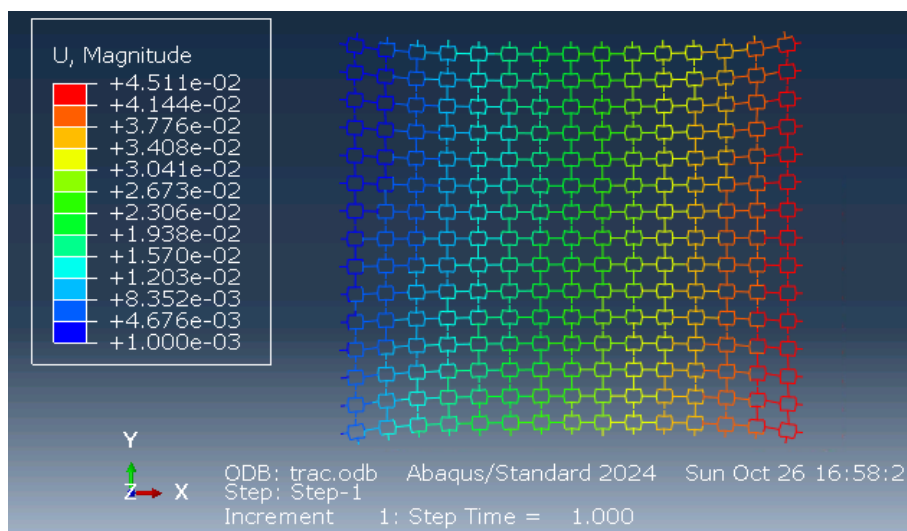


FIGURE 23 – Champ de déplacement  $U_1$  pour la structure treillis

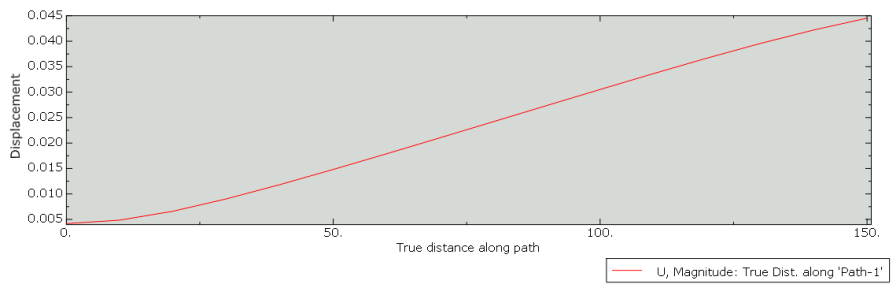


FIGURE 24 – Déplacement  $U_1$  d'une ligne moyenne — structure treillis

En utilisant l'outil *Tools - Query - Distance* dans Abaqus, nous avons obtenu que la longueur totale de la ligne moyenne déformée en traction est de 150,044539 mm. Nous effectuons ensuite le calcul suivant afin de confirmer l'homogénéisation du matériau étudié :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Sigma_{xx}}{E_x^{hom}} \quad (21)$$

Où  $\Sigma_{xx}$  représente la contrainte macroscopique imposée à notre système d'étude, calculée par :

$$\Sigma_{xx} = \frac{\Sigma F}{A} \quad (22)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \Sigma_{xx} &= \frac{200}{150 \times 1} \\ \frac{E_x^{hom} \cdot 0,044539}{150} &= \frac{200}{150} \\ E_x^{hom} &= 4490,45 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Le résultat calculé pour le module de Young homogénéisé présente une erreur de seulement 4,5% par rapport au résultat obtenu précédemment. En réalisant la simulation de traction sur la structure homogénéisée avec le module de Young calculé précédemment, on peut constater la similarité des résultats :

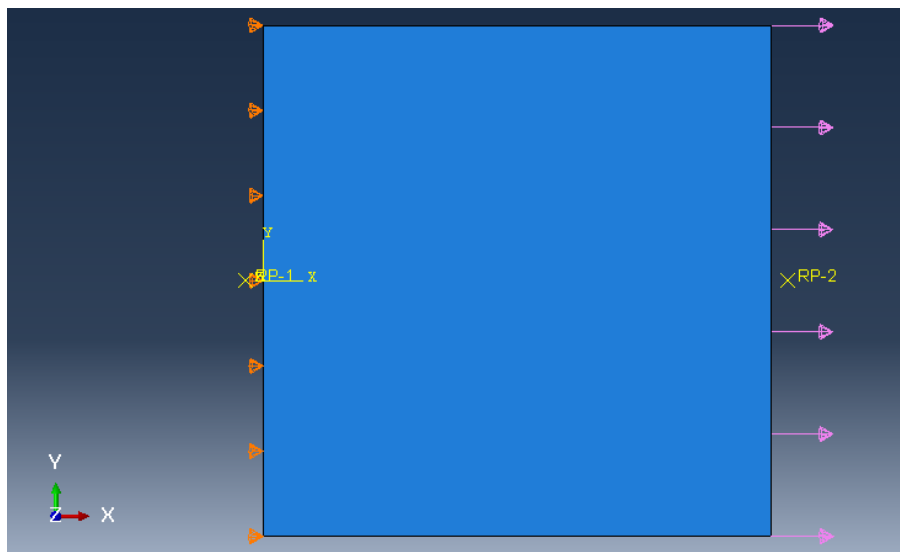


FIGURE 25 – Conditions aux limites - structure homogénéisée avec traction

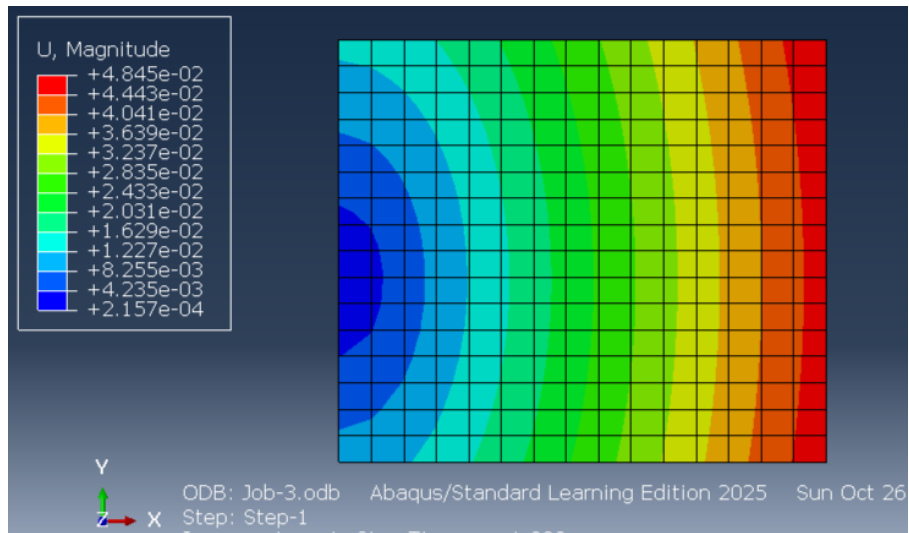


FIGURE 26 – *Champ de déplacement  $U_1$  pour la structure homogénéisée*

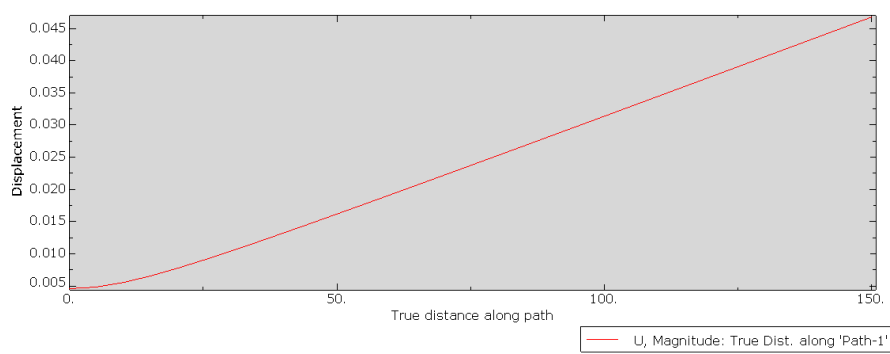


FIGURE 27 – *Déplacement  $U_1$  d'une ligne moyenne — structure homogénéisée*

### 3.4 Conclusion

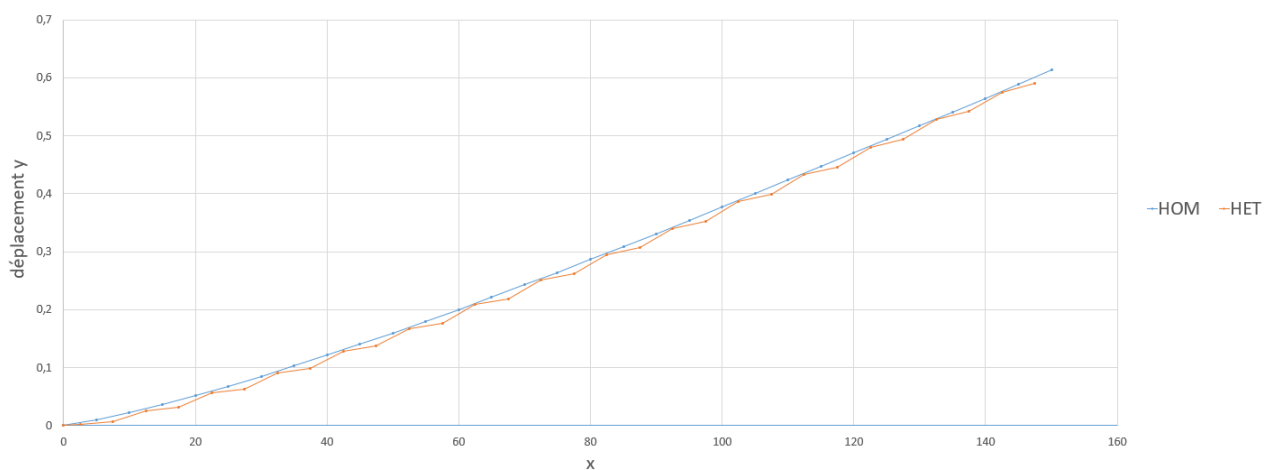


FIGURE 28 – *Comparaison des déplacements  $U_2$  entre la structure treillis et la structure homogénéisée*

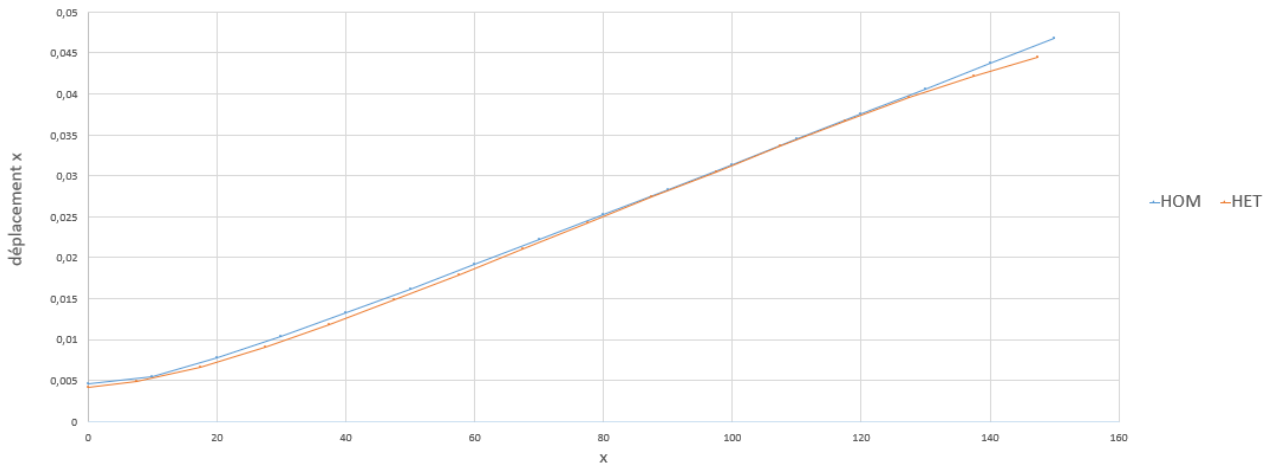


FIGURE 29 – Comparaison des déplacements  $U_1$  entre la structure treillis et la structure homogénéisée (cas traction)

La comparaison des déplacements moyens montre une très bonne concordance entre les deux modèles. Les courbes présentent une évolution similaire avec des écarts faibles. Cette cohérence valide la méthode d'homogénéisation employée et confirme que le matériau équivalent reproduit correctement la réponse globale du treillis sous flexion.

## 4 Travail au sein des compétences

### 4.1 Alessia Buonocore

Ma contribution au travail a été fortement liée à la réalisation de calculs permettant de vérifier les données obtenues dans le cas 1D et matériau architecturé. Parmi mes principales activités, j'ai vérifié les calculs des équations de déformation à imposer dans Abaqus, calculé les résultats attendus de l'homogénéisation à partir de l'article de référence de la situation-problème, et déterminé les valeurs homogénéisées à partir des valeurs énergétiques issues des simulations pour comparaison. J'ai également organisé les textes explicatifs des procédures utilisées pour les calculs du cas matériau architecturé, rédigé la conclusion et vérifié manuellement les calculs de la poutre en console et du cas 3D.

### 4.2 Pedro Mocivuna

J'ai réalisé la modélisation complète du problème 3D, la simulation ainsi que la génération des données et des graphiques pour la comparaison. J'ai rédigé les procédures à suivre dans Abaqus pour cette homogénéisation et effectué les calculs qui ont été confirmés par mes collègues. De la même manière, j'ai vérifié les calculs réalisés et la pertinence des équations pour le cas matériau architecturé et rédigé une partie de l'analyse de la poutre en console.

### 4.3 Lia Moraes

J'ai été responsable de la modélisation du problème d'homogénéisation du cas réseau 1D et du matériau architecturé dans Abaqus, ainsi que de la réalisation et de la collecte des données des simulations. J'ai également effectué les calculs des équations de déformation imposées (confirmés par Alessia) et réalisé les calculs du comportement homogénéisé à partir des valeurs obtenues via l'article cité et de la formule matricielle. J'ai rédigé, avec Pedro, la procédure de l'étude de la poutre en console, rédigé le Cas réseau 1D, et contribué à la modélisation des efforts et des conditions limites du cas 3D.