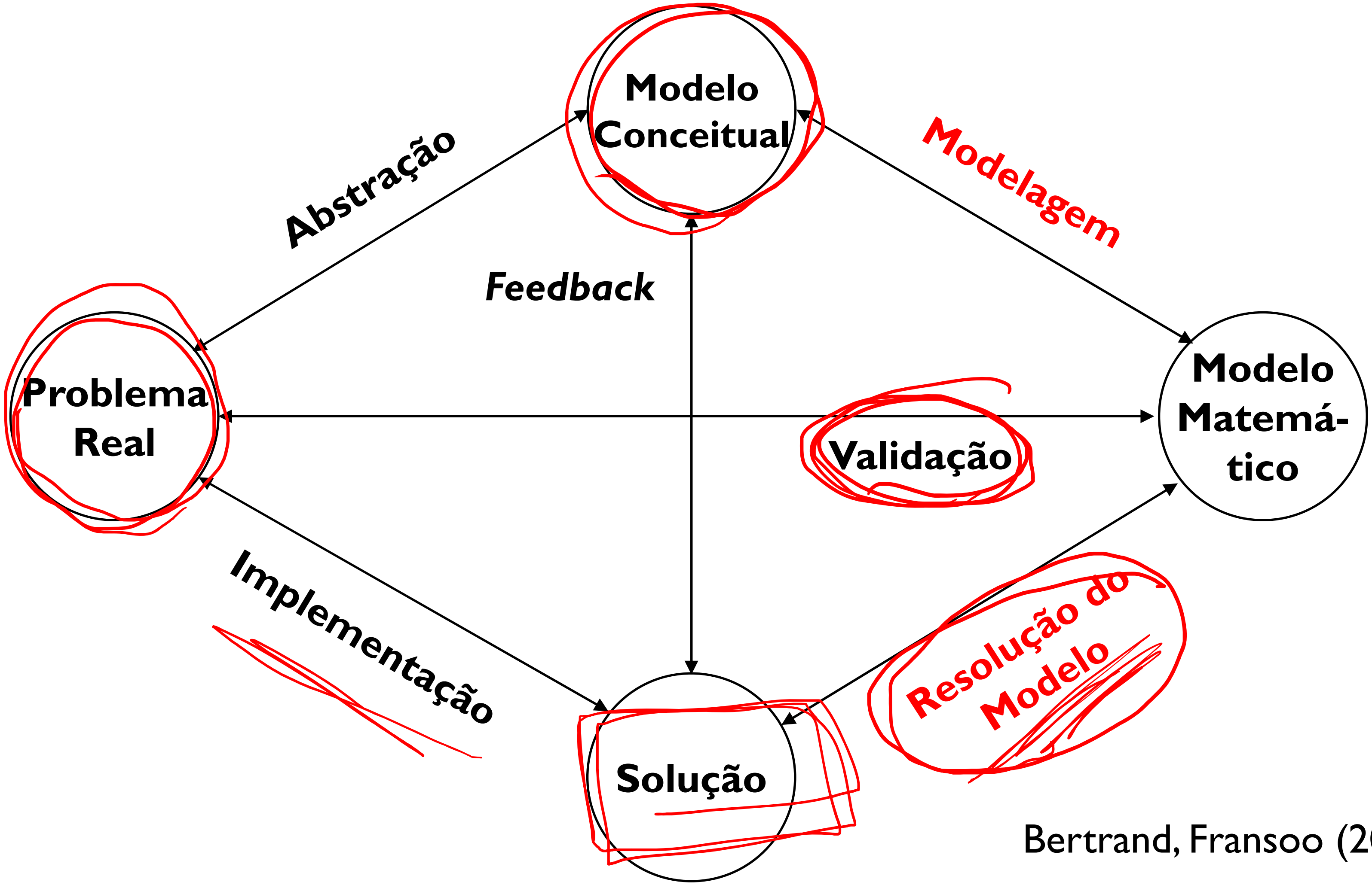
Introdução a Programação Linear

Prof. Dr. João Ferreira Netto

Introdução

- Após a etapa de modelagem matemática, surge a necessidade de encontrar respostas (soluções) para o modelo matemático construído.
- Em se tratando de um modelo com função objetivo e restrições lineares, além de variáveis reais não-negativas, teremos um modelo referente a um Problema de Programação Linear (PPL).
- É necessário um ***método de solução*** do modelo matemático.

Sistemática de Resolução de Problemas de Pesquisa Operacional



Bertrand, Fransoo (2002)

Introdução

- Apesar da diversidade de modelos, quanto à função objetivo (minimizar ou maximizar) e quanto às restrições (igualdade e desigualdades), bem como quanto às variáveis, iremos trabalhar com uma ***forma padrão***, para o qual o algoritmo de solução poderá ser aplicado:
  - **Função objetivo**: minimização
  - **Restrições**: igualdade
  - **Variáveis**: não-negativas
  - **2º membro**: não-negativo (critério de viabilidade)

Forma Padrão do Problema de Programação Linear

$$\begin{cases} \min z \\ z = \mathbf{cx} \end{cases}$$

sujeito a : $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq 0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & & & a_{nm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Onde:

$\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_n]$ Vetor linha

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Vetores colunas

$\mathbf{A} = [a_{ij}]$ Matriz m x n ($n \geq m$)

Soluções Viáveis & Solução Ótima

$F = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ Conjunto de soluções viáveis do problema de programação linear ("feasible set")

$\mathbf{x}^*$ será solução ótima do problema de programação linear na forma padrão se $\mathbf{x}^* \in F$ e se, para qualquer $\mathbf{x} \in F \Rightarrow \mathbf{cx} \geq \mathbf{cx}^*$

(minimização)

menor valor possível dentro do conj. de soluções viáveis

Equivalência - Restrições de desigualdade

- Uma restrição do tipo:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i$$

é equivalente às restrições:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + s_i = b_i \\ s_i \ge 0 \quad \textit{Variável residual ou de folga} \end{cases}$$

- Analogamente, uma restrição do tipo:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i$$

é equivalente às restrições:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - s_i = b_i \\ s_i \ge 0 \quad \textit{Variável residual ou de excesso} \end{cases}$$

Equivalência - Restrições de desigualdade

- É interessante notar que:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

é equivalente às restrições:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i \end{cases}$$

Equivalência - Função Objetivo Maximização

- Seja:

$$\text{Problema P1:} \quad \max z \quad z = \mathbf{cx} \quad \text{sujeito a:} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \mathbf{x} \geq 0$$

$w = -z$

$$\text{Problema P2:} \quad \min w \quad w = -\mathbf{cx} \quad \text{sujeito a:} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \mathbf{x} \geq 0$$

Seja $\mathbf{x}^*$ solução ótima do problema P2. Então:

$-\mathbf{cx}^* \leq -\mathbf{cx}$ para qualquer $\mathbf{x} \in F$.

Logo: $\underbrace{\mathbf{cx}^* \geq \mathbf{cx}}_{\text{max possível}}$ e $\mathbf{x}^*$ é solução ótima de P1.

Equivalência - Variáveis irrestritas em sinal

- Se uma variável de decisão x_i for irrestrita em sinal, então ela pode ser substituída pelo par de variáveis x_i^+ e x_i^-

- ...tal que:

  $x_i = x_i^+ - x_i^-$

  $\underbrace{x_i^+ \geq 0}, \underbrace{x_i^- \geq 0}$

$x_i \in \mathbb{R}$

$\to x_i = x_i^+ - x_i^-$

$x_i^+ \quad x_i^- < 0$

$\geq 0 \quad \geq 0$

Exemplo

- Colocar na forma padrão o seguinte PPL:

$W = -Z$

$-4(x_1^+ - x_1^-) + 6x_2 + 6x_3 \Rightarrow$

$$\max z = -4x_1 + 6x_2 + 6x_3$$

$$\begin{cases} 4x_1 + \dfrac{5}{6}x_2 - 3x_3 \geq -29 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 13 \\ +\dfrac{7}{2}x_1 + 7x_2 + 6x_3 \leq 18 \end{cases}$$

$$x_2, x_3 \geq 0$$

$x_1^+, x_1^- \geq 0$

$x_1 = x_1^+ - x_1^-$

$$\min w = +4x_1^+ - 4x_1^- - 6x_2 - 6x_3$$

$$\begin{cases} -4x_1^+ + 4x_1^- - \dfrac{5}{6}x_2 + 3x_3 + x_4 = 29 \\ -2x_1^+ + 2x_1^- + 4x_2 + 3x_3 - x_5 = 13 \\ +\dfrac{7}{2}x_1^+ - \dfrac{7}{2}x_1^- + 7x_2 + 6x_3 + x_6 = 18 \end{cases}$$

$$x_1^+, x_1^-, x_2, \ldots, x_6 \geq 0$$

Forma Padrão de um Problema de Programação Linear

$$\min z$$

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

Resolvendo um PPL

Sistemas lineares

- Considere um problema de programação linear com n variáveis e m equações independentes.
- As seguintes possibilidades poderão acontecer: $n = m$, $n < m$, $n > m$.
- O caso de interesse em programação linear é quando $n>m$.
- Será desenvolvido um procedimento em o sistema será resolvido para m variáveis dependentes, em função de n-m variáveis independentes.

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$

$x_1(x_6, x_7)$

$x_2(x_6, x_7)$

$\vdots$

$x_5(x_6, x_7)$

Resolvendo um PPL

- Quantas formas há de escolher n-m variáveis independentes dentre n variáveis?

$$\binom{n}{n-m} = \binom{n}{m}$$

- Exemplo: $n = 100$; $m = 40$ $\binom{100}{40} = 1{,}4.10^{28}$

60 variáveis

independentes

Exemplo

- Resolver o sistema abaixo para x_3 , x_4 e x_5 em função de x_1 e x_2 , aplicando o método de eliminação de Gauss Jordan.

Variáveis independentes: x_1 e x_2

$$\min z = -4x_1 + 6x_2 + 6x_3 - 4x_4 + \frac{9}{2}x_5$$

$x_3(x_1, x_2)$

$x_4(x_1, x_2)$

$x_5(x_1, x_2)$

$$4x_1 + \frac{5}{6}x_2 + \underline{3x_3} + \underline{2x_4} + \underline{4x_5} = 29$$

$$-2x_1 + \frac{23}{6}x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 11$$

$$-\frac{7}{2}x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 18$$

$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

Método de Eliminação de Gauss-Jordan

- A regra geral para eliminação de uma dada variável x_j é:

1. Sendo i a linha em que a variável x_j será mantida com coeficiente 1, definir a_{ij} como elemento pivô e para $s \neq j$:

$$a'_{is} = a_{is} / a_{ij}; b'_i = b_i / a_{ij}$$

2. Para as demais linhas $r \neq i$:

   a) Para a coluna j: $a'_{rj} = 0$

   b) Para as demais colunas $j \neq s$

$$\begin{cases} a'_{rs} = a_{rs} - \dfrac{a_{is} a_{rj}}{a_{ij}} \\ b'_r = b_r - \dfrac{b_i a_{rj}}{a_{ij}} \end{cases}$$

Exemplo

- O elemento pivô será o coeficiente de x_3 na 1ª linha. Esta variável será eliminada do sistema, aparecendo com valor 0 nas demais linhas.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z_0$
$-z$	-4	6	6	-4	$9/2$	0
x_3	4	$5/6$	3	2	4	29
x_4	-2	$23/6$	3	-2	4	11
x_5	$-7/2$	7	6	-4	6	18

Exemplo

- O elemento pivô será o coeficiente de x_4 na 2ª linha. Esta variável será eliminada do sistema, aparecendo com valor 0 nas demais linhas.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z_0$
$-z$	-12	$13/3$	0	-8	$-7/2$	-58
x_3	$4/3$	$5/18$	1	$2/3$	$4/3$	$29/3$
x_4	-6	3	0	-4	0	-18
x_5	$-23/2$	$16/3$	0	-8	-2	-40

Exemplo

- O elemento pivô será o coeficiente de x_5 na 3ª linha. Esta variável será eliminada do sistema, aparecendo com valor 0 nas demais linhas.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z_0$
$-z$	0	$-5/3$	0	0	$-7/2$	-22
x_3	$1/3$	$7/9$	1	0	$4/3$	$20/3$
x_4	$3/2$	$-3/4$	0	1	0	$9/2$
x_5	$1/2$	$-2/3$	0	0	-2	-4

Exemplo

- Após a aplicação de Gauss-Jordan, o sistema resultante está resolvido em função de x_1 e x_2.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z_0$
$-z$	$-7/8$	$-1/2$	0	0	0	-15
x_3	$2/3$	$1/3$	1	0	0	4
x_4	$3/2$	$-3/4$	0	1	0	$9/2$
x_5	$-1/4$	$1/3$	0	0	1	2

Exemplo (todas as possibilidades de fixar 2 variáveis em 0)

≥ 0

x1	x2	x3	x4	x5	sol viável?	fo
9,6	13,2	**-6,8**	0	0	não	0
2,1818	7,6364	0	6,9546	0	sim	9,2727
4,5	3	0	0	2,125	sim	9,5625
-8	0	9,3333	16,5	0	não	22
3	0	2	0	2,75	sim	12,375
6	0	0	**-4,5**	3,5	não	9,75
0	6	2	9	0	sim	12
0	**-6**	6	0	4	não	18
0	12	0	13,5	**-2**	não	9
0	0	4	4,5	2	sim	15

Exemplo

- Com a aplicação de Gauss-Jordan, o sistema resultante gerou uma forma canônica, em que as variáveis dependentes aparecem com coeficiente 1 em sua respectiva linha e 0 nas demais; a função objetivo é escrita apenas em função das variáveis independentes.

$$\min z = 15 \quad -7/8x_1 \quad -1/2x_2$$

$$\begin{array}{lllllll}
\frac{2}{3}x_1 & +\frac{1}{3}x_2 & +x_3 & & & = 4 \\
\frac{3}{2}x_1 & -\frac{3}{4}x_2 & & +x_4 & & = 9/2 \\
-\frac{1}{4}x_1 & +\frac{1}{3}x_2 & & & +x_5 & = 2
\end{array}$$

$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

Exemplo

- Neste caso, foi obtida a seguinte solução:

$$\begin{cases} x_3 = 4 - 2/3x_1 - 1/3x_2 \\ x_4 = 9/2 - 3/2x_1 + 3/4x_2 \\ x_5 = 2 + 1/4x_1 - 1/3x_2 \\ z = 15 - 7/8x_1 - 1/2x_2 \end{cases}$$

- Particularmente, fazendo $x_1 = x_2 = 0$ (variáveis não básicas), teremos $x_3 = 4$, $x_4 = 9/2$ e $x_5 = 2$ (variáveis básicas).

Exercício

- Colocar o seguinte PPL em sua forma canônica

$$\text{Min } F = 8\,x1 + 4\,x2 - 5\,x3$$

s.a.

$$2\,x1 + 3\,x2 - 4\,x3 \le 25$$

$$3\,x1 - 2\,x2 + 5\,x3 \ge 12$$

$$-x1 + 2\,x2 + 2\,x3 = 10$$

Representação Geométrica

- Vamos fazer uma representação geométrica deste problema no plano das variáveis independentes.

$$\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \cancel{x_3} = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \leq 4$$

$$\frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{4}x_2 + \cancel{x_4} = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{4}x_2 \leq \frac{9}{2}$$

$$-\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \cancel{x_5} = 2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Exercício (Winston)

- A Woodcarving, Inc. de Giapetto fabrica dois tipos de brinquedos de madeira: soldados e trens. Um soldado é vendido por US$ 27 e usa US$ 10 em matérias-primas.
- Cada soldado fabricado aumenta os custos variáveis de mão-de-obra e custos indiretos de Giapetto em US$ 14.
- Um trem é vendido por US$ 21 e usa US$ 9 em matérias-primas. Cada trem construído aumenta os custos variáveis de mão-de-obra e custos indiretos da Giapetto em US$ 10.
- A fabricação de soldados e trens de madeira requer dois tipos de mão de obra qualificada: carpintaria e acabamento. Um soldado exige 2 horas de trabalho de acabamento e 1 hora de trabalho de carpintaria. Um trem requer 1 hora de acabamento e 1 hora de trabalho de carpintaria. A cada semana, a Giapetto pode obter toda a matéria-prima necessária, mas apenas 100 horas de acabamento e 80 horas de carpintaria. A demanda por trens é ilimitada, mas no máximo 40 soldados são comprados a cada semana. Giapetto quer maximizar o lucro semanal (custos de receita).
- Formule um modelo matemático da situação de Giapetto que possa ser usado para maximizar o lucro semanal de Giapetto.

Exercício

	Utilização dos setores (horas/unidade)		Disponibilidade semanal
	Soldado	Trem	
ACABAMENTO	**2**	**1**	100 horas
CARPINTARIA	**1**	**1**	80 horas

Exercício

1. Variáveis de decisão

s = quantidade de soldados produzidos por semana

t = quantidade de trens produzidos por semana

2. Função objetivo

Maximizar o lucro semanal do sr. Giapetto

max z = $(27-10-14)s + (21-10-9)t \;=\; \mathbf{3s + 2t}$

3. Restrições

3.1. Disponibilidade da mão de obra

ACABAMENTO: $2s + t \leq 100$

CARPINTARIA: $s + t \leq 80$

3.2. Demanda máxima por soldados

$s \leq 40$

3.3. Não negatividade $s, t \geq 0$

Exemplo

- Resolver o sistema abaixo para x_3 , x_4 e x_5 em função de x_1 e x_2, aplicando o método de eliminação de Gauss Jordan.

Variáveis independentes: x_1 e x_2

$$\min z = -4x_1 + 6x_2 + 6x_3 - 4x_4 + \frac{9}{2}x_5$$

$x_3(x_1, x_2)$

$$4x_1 + \frac{5}{6}x_2 + 3\underline{x_3} + 2\underline{x_4} + 4\underline{x_5} = 29$$

$x_4(x_1, x_2)$

$$-2x_1 + \frac{23}{6}x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 11$$

$x_5(x_1, x_2)$

$$-\frac{7}{2}x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 18$$

$$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$$

Exemplo

- Com a aplicação de Gauss-Jordan, o sistema resultante gerou uma forma canônica, em que as variáveis dependentes aparecem com coeficiente 1 em sua respectiva linha e 0 nas demais; a função objetivo é escrita apenas em função das variáveis independentes.

$$\min z = 15 \quad -7/8x_1 \quad -1/2x_2$$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}x_1 &+ \frac{1}{3}x_2 + x_3 &&= 4\\
\frac{3}{2}x_1 &- \frac{3}{4}x_2 + x_4 &&= 9/2\\
-\frac{1}{4}x_1 &+ \frac{1}{3}x_2 + x_5 &&= 2
\end{aligned}$$

$$x_1,\ldots,x_5 \geq 0$$

Exemplo

- Neste caso, foi obtida a seguinte solução:

$$\begin{cases} x_3 = 4 - 2/3x_1 - 1/3x_2 \\ x_4 = 9/2 - 3/2x_1 + 3/4x_2 \\ x_5 = 2 + 1/4x_1 - 1/3x_2 \\ z = 15 - 7/8x_1 - 1/2x_2 \end{cases}$$

- Particularmente, fazendo $x_1=x_2=0$ (variáveis não básicas), teremos $x_3=4$, $x_4=9/2$ e $x_5=2$ (variáveis básicas).

$$-\frac{7}{8}x_1 - \frac{1}{2}x_2$$

Representação Geométrica

- Vamos fazer uma representação geométrica deste problema no plano das variáveis independentes.

$$\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \cancel{x_3} = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \le 4$$

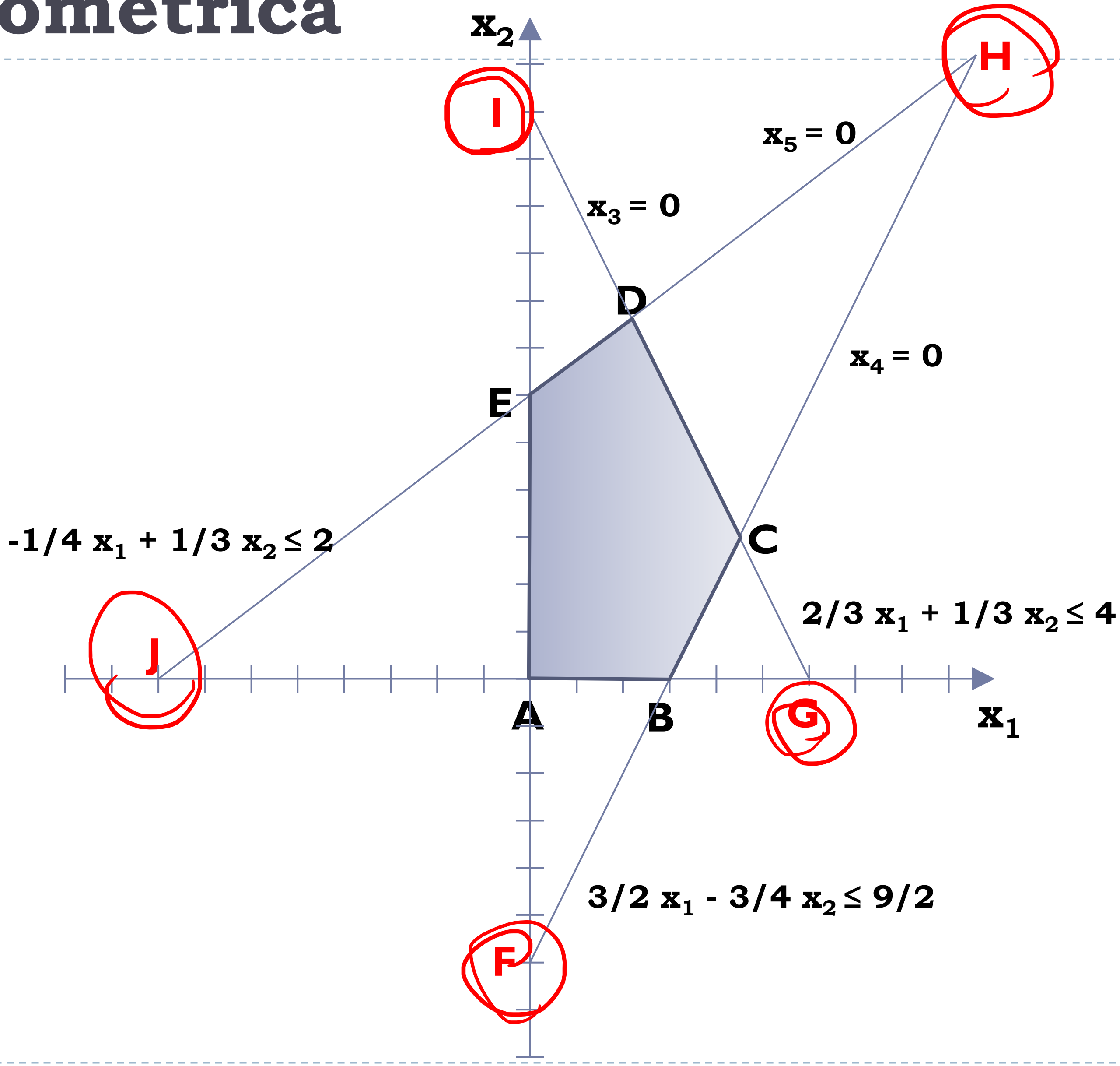
$$\frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{4}x_2 + \cancel{x_4} = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{4}x_2 \le \frac{9}{2}$$

$$-\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \cancel{x_5} = 2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \le 2$$

$$\underline{x_1} \ge 0; \underline{x_2} \ge 0$$

$X_3, X_4, X_5 \geq 0$

Representação Geométrica



Representação Geométrica

Soluções Viáveis

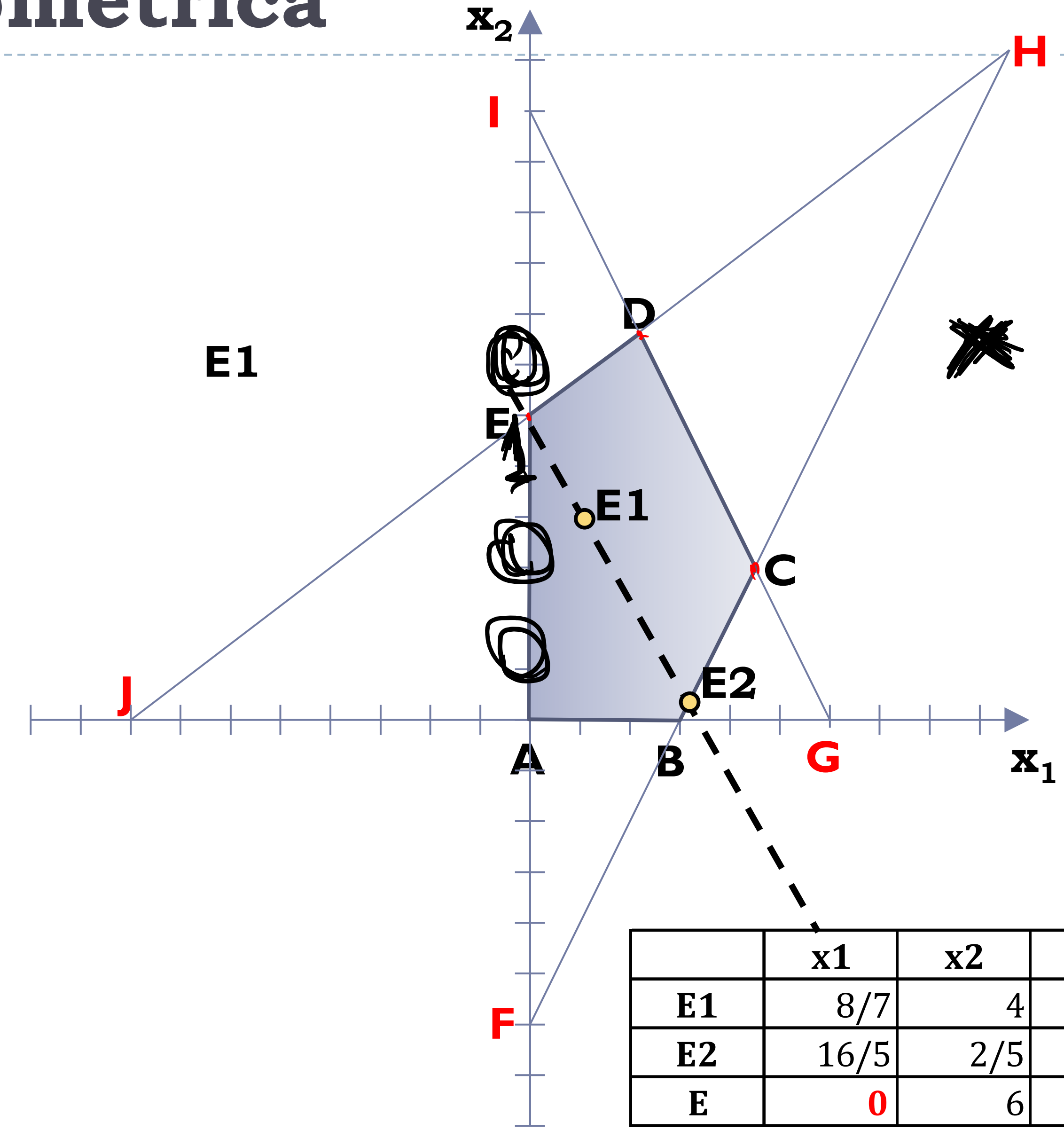
	x1	x2	x3	x4	x5	z
A	0	0	4	9/2	2	15
B	3	0	2	0	11/4	99/8
C	9/2	3	0	0	51/24	153/16
D	24/11	84/11	0	153/22	0	102/11
E	0	6	2	9	0	12

Soluções Inviáveis

	x1	x2	x3	x4	x5	z
F	0	**-6**	6	0	4	18
G	6	0	0	**-9/2**	7/2	39/4
H	48/5	66/5	**-99/10**	0	0	0
I	0	12	0	27/2	**-2**	9
J	**-8**	0	28/3	33/2	0	22

Representação Geométrica

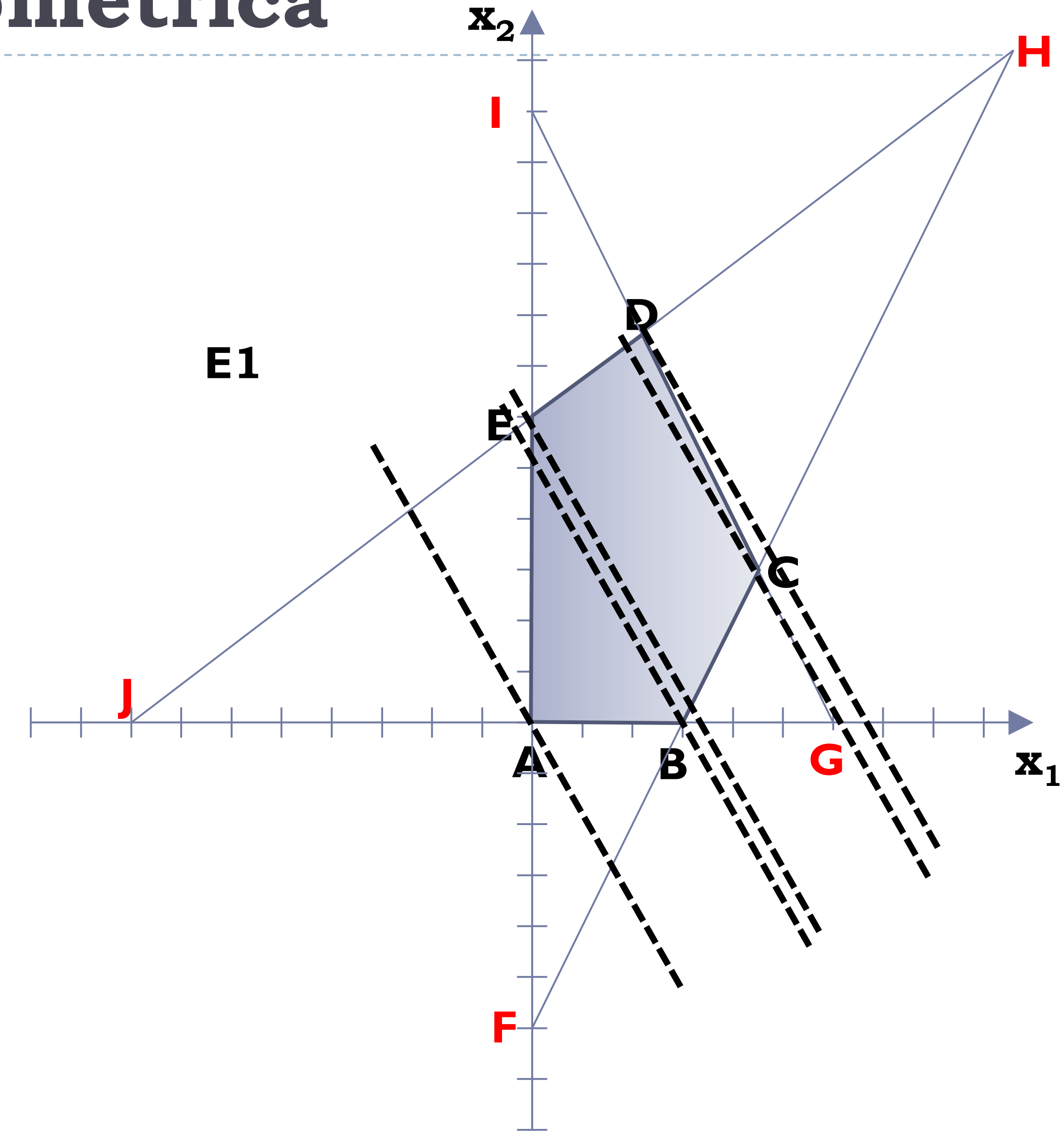
0 6 2 9 0 12



Neste exemplo, cada vértice possui *n-m* variáveis nulas, correspondendo a uma forma canônica distinta.

	x1	x2	x3	x4	x5	z
E1	8/7	4	40/21	81/4	20/21	12
E2	16/5	2/5	26/15	**0**	8/3	12
E	**0**	6	2	9	**0**	12

Representação Geométrica



Exemplo

- Voltando à forma canônica inicial...

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z_0$
$-z$	$-7/8$	$-1/2$	0	0	0	-15
x_3	$2/3$	$1/3$	1	0	0	4
x_4	$3/2$	$-3/4$	0	1	0	$9/2$
x_5	$-1/4$	$1/3$	0	0	1	2

Exemplo

- Será que a solução indicada por esta forma canônica é ótima?
- Pela análise da função objetivo, se x_1 assumir um valor positivo, a função z irá variar a uma taxa de -7/8. O mesmo vale para x_2 , cuja função irá variar a uma taxa de -1/2.

$$z = 15 - 7/8x_1 - 1/2x_2$$

- Vamos escolher reescrever a forma canônica em função de x_1 (a variável com a taxa mais negativa), introduzindo-a na base. Para isso, vamos verificar o impacto que isto gera nas demais variáveis da base.

Exemplo

- Sendo um pressuposto que todas as variáveis sejam não-negativas, vamos verificar o máximo valor que x_1 poderá assumir sem tornar nenhuma variável negativa.

$$x_3 = 4 - 2/3x_1 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{4}{2/3} = 6$$

$$X_3 = 4 - \frac{2}{3} * 6$$

$$x_4 = 9/2 - 3/2x_1 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{9/2}{3/2} = 3$$

$$X_4 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} * 3$$

$$x_5 = 2 + 1/4x_1 \quad \Rightarrow x_1 \text{ não zera } x_5$$

$$X_5 = 2 + \frac{1}{4} X_1$$

- O máximo valor que x_1 pode assumir é 3, quando x_4 passa a valer 0. Desta forma, uma nova forma canônica será escrita para x_3, x_1 e x_5 em função de x_2 *e* x_4 (x_4 deixará de ser variável básica, dando lugar a x_1).

Exemplo

1ª Solução Básica

$$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 4; x_4 = 9/2; x_5 = 2; z = 15$$

$\frac{3}{2} * \frac{3}{2}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z_0$
$-z$	$-7/8$	$-1/2$	0	0	0	-15
x_3	$2/3$	$1/3$	1	0	0	4
x_4	$3/2$	$-3/4$	0	1	0	$9/2$
x_5	$-1/4$	$1/3$	0	0	1	2

$1 \quad -1/2 \quad 0 \quad \frac{2}{3} \quad 0 \; 3$

- O elemento *pivot* será o coeficiente de x_1 na 2ª linha (linha da variável que irá sair). Esta variável será eliminada do sistema, aparecendo com valor 0 nas demais linhas.

Exemplo

2ª Solução Básica

$$x_1 = 3; x_2 = 0; x_3 = 2; x_4 = 0; x_5 = 11/4; z = 99/8$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z_0$
$-z$	0	$-15/16$	0	$7/12$	0	$-99/8$
x_3	0	$2/3$	1	$-4/9$	0	2
x_1	1	$-1/2$	0	$2/3$	0	3
x_5	0	$5/24$	0	$1/6$	1	$11/4$

- A solução não é ótima pois o coeficiente de x_2 na função objetivo é negativo, indicando que há possibilidade de melhoria.

Exemplo

- O elemento *pivot* será o coeficiente de x_2 na 1ª linha (linha da variável que irá sair). Esta variável será eliminada do sistema, aparecendo com valor 0 nas demais linhas.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z_0$
$-z$	0	$-15/16$	0	$7/12$	0	$-99/8$
x_3	0	$2/3$	1	$-4/9$	0	2
x_1	1	$-1/2$	0	$2/3$	0	3
x_5	0	$5/24$	0	$1/6$	1	$11/4$

Exemplo

3ª Solução Básica

$$x_1 = 9/2; x_2 = 3; x_3 = 0; x_4 = 0; x_5 = 51/24; z = 153/16$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z_0$
$-z$	0	0	$45/32$	$-1/24$	0	$-153/16$
x_2	0	1	$3/2$	$-2/3$	0	3
x_1	1	0	$3/4$	$1/3$	0	$9/2$
x_5	0	0	$-5/16$	$11/36$	1	$51/24$

- A solução não é ótima pois o coeficiente de x_4 na função objetivo é negativo, indicando que há possibilidade de melhoria.

Exemplo

- O elemento *pivot* será o coeficiente de x_5 na 3ª linha (linha da variável que irá sair). Esta variável será eliminada do sistema, aparecendo com valor 0 nas demais linhas.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z_0$
$-z$	0	0	$45/32$	$-1/24$	0	$-153/16$
x_2	0	1	$3/2$	$-2/3$	0	3
x_1	1	0	$3/4$	$1/3$	0	$9/2$
x_5	0	0	$-5/16$	$11/36$	1	$51/24$

Exemplo

4^a Solução Básica

$x_1 = 24/11; x_2 = 84/11; x_3 = 0; x_4 = 153/22; x_5 = 0; z = 102/11$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z_0$
$-z$	0	0	$30/22$	0	$3/22$	$-102/11$
x_2	0	1	$9/11$	0	$24/11$	$84/11$
x_1	1	0	$12/11$	0	$-12/11$	$24/11$
x_4	0	0	$-45/44$	1	$36/11$	$153/22$

- A solução é ótima pois o coeficiente das variáveis não-básicas na função objetivo são positivas.

Resumo...

- Os pontos candidatos a solução ótima são os pontos extremos do espaço de solução (vértices).
- Cada vértice pode ser representado por uma forma canônica (há situações em que mais de uma forma canônica representará o mesmo vértice).
- No exemplo introdutório: i) Quantidade de vértices: $\binom{n}{n-m} = \binom{5}{2} = 10$; ii) Em cada vértice tem-se exatamente (n-m=2) variáveis iguais a zero; iii) Dentre o número total de vértices, foi constatado que 5 vértices são viáveis e 5 inviáveis.

Algoritmo Ingênuo

- Uma possível forma de encontrar a solução ótima de um PPL pode ser por meio de um procedimento ingênuo com a seguinte estrutura:

1. Enumerar (gerar) todos os vértices.
2. Verificar se a base associada a cada vértice é viável e comparar o valor da função objetivo com os demais vértices examinados, para identificar o vértice ótimo.

- Este procedimento obrigatoriamente terá que gerar todos os vértices (mesmo os inviáveis), e somente será capaz de achar a solução ótima no final da análise de todos eles. Isto viabiliza a solução apenas de problemas de pequeno porte.

Resolvendo um PPL
Determinação da Solução Inicial

PPL – Forma Padrão

Escolha de uma base viável

→

Método de Gauss-Jordan

PPL – Forma Canônica