Faculdade de Tecnologia de Ribeirão Preto

Programação Linear

Notas de Aula 5

Inicialização do Método Simplex

e Múltiplas Soluções

Prof. Me. Júnior César Bonafim

junior.bonafim@fatec.sp.gov.br

1º semestre 2024

Até o momento iniciamos o método simplex escolhendo uma base cuja solução básica $\bar{x}_B$ na primeira iteração seja factível, ou seja, todo componente do vetor $\bar{x}_B$ seja maior ou igual a zero.

Até o momento iniciamos o método simplex escolhendo uma base cuja solução básica $\bar{x}_B$ na primeira iteração seja factível, ou seja, todo componente do vetor $\bar{x}_B$ seja maior ou igual a zero.

Isso sempre ocorre se a matriz básica B for a matriz identidade. Neste caso temos uma chamada *base trivial*.

Até o momento iniciamos o método simplex escolhendo uma base cuja solução básica $\bar{x}_B$ na primeira iteração seja factível, ou seja, todo componente do vetor $\bar{x}_B$ seja maior ou igual a zero.

Isso sempre ocorre se a matriz básica B for a matriz identidade. Neste caso temos uma chamada *base trivial*.

Nem sempre há uma base trivial disponível.

Até o momento iniciamos o método simplex escolhendo uma base cuja solução básica $\bar{x}_B$ na primeira iteração seja factível, ou seja, todo componente do vetor $\bar{x}_B$ seja maior ou igual a zero.

Isso sempre ocorre se a matriz básica B for a matriz identidade. Neste caso temos uma chamada *base trivial*.

Nem sempre há uma base trivial disponível.

Veremos os método do M-grande que inicializa o simplex neste caso.

Método do M-grande

Considere o seguinte problema na forma padrão

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Método do M-grande

Considere o seguinte problema na forma padrão

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x) = c^T x \\
\text{s.a} \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

- Vamos supor que uma base trivial não esteja disponível.

Método do M-grande

Considere o seguinte problema na forma padrão

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{s.a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Como modificar o problema para obter uma base trivial?

Considere o seguinte problema na forma padrão

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & c^T x + Mw_1 + Mw_2 + \cdots + Mw_n \\ \text{s.a} \quad & Ax + I_n w = b \\ & x \geq 0, \ \ w \geq 0 \end{aligned}$$

- Adicionamos uma variável artificial a cada restrição de modo a obter a matriz identidade necessária para inicialização do simplex.

Método do M-grande

Considere o seguinte problema na forma padrão

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + M w_1 + M w_2 + \cdots + M w_n \\ \text{s.a} \quad & Ax + I_n w = b \\ & x \geq 0, \; w \geq 0 \end{aligned}$$

- Adicionamos uma variável artificial a cada restrição de modo a obter a matriz identidade necessária para inicialização do simplex.
- M é um parâmetro de entrada que deve ser suficientemente grande ($M = 10^5$ por exemplo) para garantir $w = 0$ na solução ótima.

Considere o seguinte problema na forma padrão

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & c^T x + Mw_1 + Mw_2 + \cdots + Mw_n \\
\text{s.a} \quad & Ax + I_n w = b \\
& x \geq 0, \;\; w \geq 0
\end{aligned}
$$

- Adicionamos uma variável artificial a cada restrição de modo a obter a matriz identidade necessária para inicialização do simplex.
- M é um parâmetro de entrada que deve ser suficientemente grande ($M = 10^5$ por exemplo) para garantir $w = 0$ na solução ótima.
- Se $w \neq 0$ na solução ótima, então o problema original não é factível.

Exemplo.

Problema original

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Exemplo.

Problema original

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Forma padrão

$$\begin{aligned} \text{-min} \quad & -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Não há base trivial disponível.

Problema original na forma padrão

$$
\begin{array}{rl}
\text{-min} & -x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} & x_1 + x_2 + x_3 \qquad\quad = 4 \\
& x_1 - x_2 \qquad\quad - x_4 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

Método do M-grande

Problema original na forma padrão

$$
\begin{aligned}
\text{-min} \quad & -x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema modificado

$$
\begin{aligned}
\text{-min} \quad & -x_1 - 2x_2 + Mw_1 + Mw_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + w_1 = 4 \\
& x_1 - x_2 - x_4 + w_2 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema original na forma padrão

$$
\begin{aligned}
\text{-min} \quad & -x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 4 \\
& x_1 - x_2 \qquad - x_4 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema modificado

$$
\begin{aligned}
\text{-min} \quad & -x_1 - 2x_2 + Mw_1 + Mw_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \qquad + w_1 \qquad = 4 \\
& x_1 - x_2 \qquad - x_4 \qquad + w_2 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Inicializa-se o simplex com w_1 e w_2 na base.

Método do M-grande

Problema original na forma padrão

$$
\begin{aligned}
\text{-min} \quad & -x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1 - x_2 - x_4 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema modificado

$$
\begin{aligned}
\text{-min} \quad & -x_1 - 2x_2 + Mw_1 + Mw_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + w_1 = 4 \\
& x_1 - x_2 - x_4 + w_2 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, w_1, w_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Inicializa-se o simplex com w_1 e w_2 na base.

Exercício. Resolva o exercício 4 da Lista 2.

Se em uma dada iteração não existirem custos relativos negativos e ao menos um deles for igual a zero, temos uma solução ótima encontrada, mas se promovermos a entrada na base da variável com custo relativo zero, teremos uma nova solução ótima e então qualquer combinação convexa destas duas soluções nos dará também uma solução ótima. Temos então o caso de múltiplas soluções.

Exemplo

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$

$s_3 = 0$

$s_4 = 1$

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$

$s_3 = 0$

$s_4 = 1$

Solução ótima encontrada: $\bar{x}_I = (2,8\ ;\ 1,8)$

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$

$s_3 = 0$

$s_4 = 1$

Solução ótima encontrada: $\bar{x}_I = (2,8\ ;\ 1,8)$

x_3 entra na base e continuando o método, x_5 sai da base.

Múltiplas Soluções

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$

$s_3 = 0$

$s_4 = 1$

Solução ótima encontrada: $\bar{x}_I = (2,8\ ;\ 1,8)$

x_3 entra na base e continuando o método, x_5

sai da base.

Iteração 4: $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$

$s_4 = 1$

$s_5 = 0$

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$

$s_3 = 0$

$s_4 = 1$

Solução ótima encontrada: $\bar{x}_I = (2,8\ ;\ 1,8)$

x_3 entra na base e continuando o método, x_5 sai da base.

Iteração 4: $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$

$s_4 = 1$

$s_5 = 0$

Solução ótima: $\bar{x}_{II} = (1,38\ ;\ 3,92)$

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ e $\mathcal{N} = \{3, 4\}$

$s_3 = 0$

$s_4 = 1$

Solução ótima encontrada: $\bar{x}_I = (2,8 \; ; \; 1,8)$

x_3 entra na base e continuando o método, x_5 sai da base.

Iteração 4: $\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{5, 4\}$

$s_4 = 1$

$s_5 = 0$

Solução ótima: $\bar{x}_{II} = (1,38 \; ; \; 3,92)$

Se continuarmos o método, x_5 entrará na base e x_3 sairá retornando então à iteração 3.

Iteração 3: $\mathcal{B} = \{1,2,5\}$ e $\mathcal{N} = \{3,4\}$

$s_3 = 0$

$s_4 = 1$

Solução ótima encontrada: $\bar{x}_I = (2,8\ ;\ 1,8)$

x_3 entra na base e continuando o método, x_5 sai da base.

Iteração 4: $\mathcal{B} = \{1,2,3\}$ e $\mathcal{N} = \{5,4\}$

$s_4 = 1$

$s_5 = 0$

Solução ótima: $\bar{x}_{II} = (1,38\ ;\ 3,92)$

Se continuarmos o método, x_5 entrará na base e x_3 sairá retornando então à iteração 3. Portanto o método termina e qualquer combinação convexa de $\bar{x}_I$ e $\bar{x}_{II}$,

$$\alpha\bar{x}_I + (1-\alpha)\bar{x}_{II}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

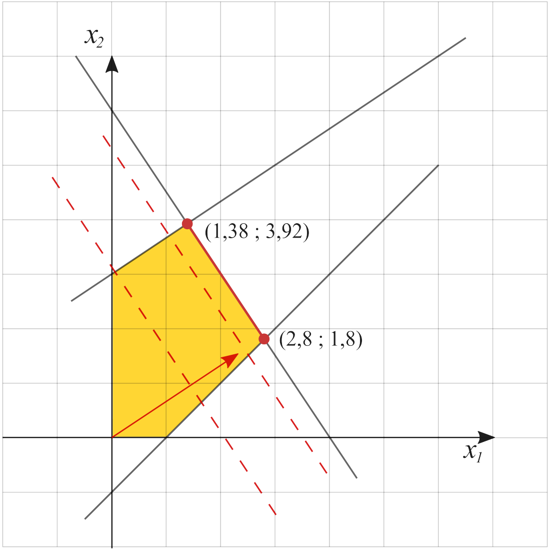
será solução ótima do problema.

Por exemplo

$$0,2\bar{x}_I + 0,8\bar{x}_{II} = (1,664\ ;\ 3,496)$$

também é solução ótima.

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Exercício. (3 da lista 2) Encontre três soluções ótimas do problema a seguir pelo método simplex:

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & -x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
& 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
& 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$