Faculdade de Tecnologia de Ribeirão Preto

Programação Linear

Notas de Aula 3

Forma Padrão

Prof. Me. Júnior César Bonafim

junior.bonafim@fatec.sp.gov.br

1º semestre 2024

Modelo na forma padrão

Os modelos de otimização podem ser de maximização ou minimização e possuírem restrições de maior ou igual, menor ou igual e igualdade.

Modelo na forma padrão

Os modelos de otimização podem ser de maximização ou minimização e possuírem restrições de maior ou igual, menor ou igual e igualdade.

Estas características podem aparecer em várias combinações. A fim de conseguir um método que não dependa do tipo de modelo, escrevemos todos os modelos em uma forma chamada *forma padrão*.

Forma padrão

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & f(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_x \\
\text{s.a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

Forma padrão

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_x \\
\text{s.a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

- Minimização

Forma padrão

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_x \\
\text{s.a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

- Minimização
- Restrições de igualdade

Forma padrão

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_x \\
\text{s.a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1, \dots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

- Minimização
- Restrições de igualdade
- Variáveis não-negativas

Forma padrão

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_x \\
\text{s.a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

- Minimização
- Restrições de igualdade
- Variáveis não-negativas
- $b_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, m$

Modelo na forma padrão

Consideremos o problema geral abaixo e o coloquemos na forma padrão

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_x \\
\text{s.a} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1 \leq 0, \; x_2 \; \text{livre}, \dots, \; x_n \leq C
\end{aligned}
$$

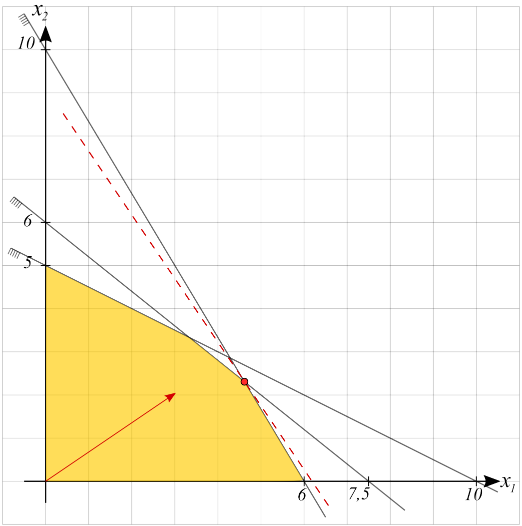
Para este fim vamos utilizar as seguintes equivalências:

Modelo na forma padrão

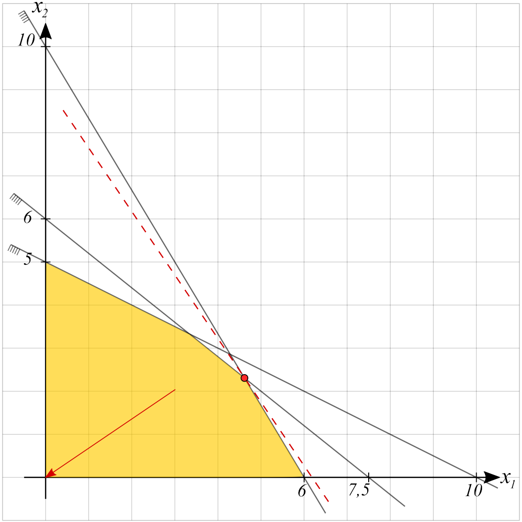
Para este fim vamos utilizar as seguintes equivalências:

- $\max f(x) = -\min - f(x)$

$$\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
& 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
& 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
-\ \text{min} \quad & -f(x_1, x_2) = -3x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
& 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
& 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Modelo na forma padrão

Para este fim vamos utilizar as seguintes equivalências:

- $\max f(x) = -\min -f(x)$

Modelo na forma padrão

Para este fim vamos utilizar as seguintes equivalências:

- $\max f(x) = -\min -f(x)$
- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$

Modelo na forma padrão

Para este fim vamos utilizar as seguintes equivalências:

- max $f(x) = -\text{min} - f(x)$
- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$

  sendo $x_1^a \geq 0$ uma variável de folga (*slack*)

Modelo na forma padrão

Para este fim vamos utilizar as seguintes equivalências:

- $\max\ f(x) = -\min -f(x)$
- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$

  sendo $x_1^a \geq 0$ uma variável de folga (*slack*)
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2$

Modelo na forma padrão

Para este fim vamos utilizar as seguintes equivalências:

- max $f(x) = -$min $- f(x)$
- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$

  sendo $x_1^a \geq 0$ uma variável de folga (*slack*)
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \Rightarrow a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - x_2^a = b_2$

  sendo $x_2^a \geq 0$ uma variável de excesso (*surplus*)

Modelo na forma padrão

Para este fim vamos utilizar as seguintes equivalências:

- max $f(x) = -$min $- f(x)$
- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$

  sendo $x_1^a \geq 0$ uma variável de folga (*slack*)
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \Rightarrow a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - x_2^a = b_2$

  sendo $x_2^a \geq 0$ uma variável de excesso (*surplus*)
- para $b_i < 0$, multiplicamos a restrição por -1

  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$

Para este fim vamos utilizar as seguintes equivalências:

- max $f(x) = -\text{min} - f(x)$
- $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \Rightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1$

  sendo $x_1^a \geq 0$ uma variável de folga (*slack*)
- $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \Rightarrow a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - x_2^a = b_2$

  sendo $x_2^a \geq 0$ uma variável de excesso (*surplus*)
- para $b_i < 0$, multiplicamos a restrição por -1

  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \Rightarrow -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n \geq -b_i$

Para as variáveis temos:

- $x_j \leq 0$

Para as variáveis temos:

- $x_j \leq 0 \Rightarrow$ substituímos $x_j = -x'_j$, com $x'_j \geq 0$.

Modelo na forma padrão

Para as variáveis temos:

- $x_j \leq 0 \Rightarrow$ substituímos $x_j = -x'_j$, com $x'_j \geq 0$.
- $x_j \geq l$

Para as variáveis temos:

- $x_j \leq 0 \Rightarrow$ substituímos $x_j = -x'_j$, com $x'_j \geq 0$.
- $x_j \geq l \Rightarrow$ substituímos $x_j = x'_j + l$, sendo $x'_j \geq 0$.

Modelo na forma padrão

Para as variáveis temos:

- $x_j \leq 0 \Rightarrow$ substituímos $x_j = -x'_j$, com $x'_j \geq 0$.
- $x_j \geq l \Rightarrow$ substituímos $x_j = x'_j + l$, sendo $x'_j \geq 0$.
- $x_j \leq u$

Modelo na forma padrão

Para as variáveis temos:

- $x_j \leq 0 \Rightarrow$ substituímos $x_j = -x'_j$, com $x'_j \geq 0$.
- $x_j \geq l \Rightarrow$ substituímos $x_j = x'_j + l$, sendo $x'_j \geq 0$.
- $x_j \leq u$ Tratamos como nova restrição

Para as variáveis temos:

- $x_j \leq 0 \Rightarrow$ substituímos $x_j = -x'_j$, com $x'_j \geq 0$.
- $x_j \geq l \Rightarrow$ substituímos $x_j = x'_j + l$, sendo $x'_j \geq 0$.
- $x_j \leq u$ Tratamos como nova restrição
- x_j livre

Para as variáveis temos:

- $x_j \leq 0 \Rightarrow$ substituímos $x_j = -x'_j$, com $x'_j \geq 0$.
- $x_j \geq l \Rightarrow$ substituímos $x_j = x'_j + l$, sendo $x'_j \geq 0$.
- $x_j \leq u$ Tratamos como nova restrição
- x_j livre $\Rightarrow$ substituímos $x_j = x_j^+ - x_j^-$ com $x_j^+,\ x_j^- \geq 0$

Exemplo

Coloque na forma padrão

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
& 0,1x_1 + 0,2x_2 \geq 1 \\
& 0,4x_1 + 0,5x_2 = 3 \\
& x_1 \text{ livre}, x_2 \geq 2
\end{aligned}
$$

Exemplo

Coloque na forma padrão

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \geq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 = 3 \\ & x_1 \text{ livre}, x_2 \geq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\min \quad & -3x_1^+ + 3x_1^- - 2x_2' - 4 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1^+ - 0,5x_1^- + 0,3x_2' + x_1^a = 2,4 \\ & 0,1x_1^+ - 0,1x_1^- + 0,2x_2' - x_2^a = 0,6 \\ & 0,4x_1^+ - 0,4x_1^- + 0,5x_2' = 2 \\ & x_1^+,\ x_1^-,\ x_2',\ x_1^a,\ x_2^a \geq 0 \end{aligned}$$

Exercício

Coloque na forma padrão

a) $$\begin{aligned} \max \quad & -5x_1 - 3x_2 + 7x_3 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 7 \\ & 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 5, \; x_3 \text{ livre} \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 7 \\ & 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & -4x_1 - 9x_2 + 4x_3 \leq -4 \\ & x_1 \geq -2, \; 0 \leq x_2 \leq 4, \; x_3 \geq 0 \end{aligned}$$