Faculdade de Tecnologia de Ribeirão Preto

Programação Linear

Revisão de Sistemas Lineares

Prof. Me. Júnior César Bonafim

junior.bonafim@fatec.sp.gov.br

1º semestre 2024

Faremos agora uma breve revisão sobre resolução de sistemas lineares na forma matricial utilizando a biblioteca Numpy.

Faremos agora uma breve revisão sobre resolução de sistemas lineares na forma matricial utilizando a biblioteca Numpy.

Dado um sistema linear quadrado n por n, obtemos sua forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Faremos agora uma breve revisão sobre resolução de sistemas lineares na forma matricial utilizando a biblioteca Numpy.

Dado um sistema linear quadrado n por n, obtemos sua forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = \ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = \ b_2 \\ \qquad\qquad \vdots & \quad \ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = \ b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Faremos agora uma breve revisão sobre resolução de sistemas lineares na forma matricial utilizando a biblioteca Numpy.

Dado um sistema linear quadrado n por n, obtemos sua forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Revisão de Sistemas Lineares
Forma Matricial

Faremos agora uma breve revisão sobre resolução de sistemas lineares na forma matricial utilizando a biblioteca Numpy.

Dado um sistema linear quadrado n por n, obtemos sua forma matricial da seguinte maneira:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Faremos agora uma breve revisão sobre resolução de sistemas lineares na forma matricial utilizando a biblioteca Numpy.

Dado um sistema linear quadrado n por n, obtemos sua forma matricial da seguinte maneira:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Ax = b$$

A fim de determinar a solução de tal sistema fazemos

A fim de determinar a solução de tal sistema fazemos

$$Ax = b$$

A fim de determinar a solução de tal sistema fazemos

$$Ax = b$$

$$\Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad \text{onde } A^{-1} \text{ é a inversa da matriz A}$$

A fim de determinar a solução de tal sistema fazemos

$$Ax = b$$

$$\Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \quad \text{onde } A^{-1} \text{ é a inversa da matriz A}$$

$$\Rightarrow I_n x = A^{-1}b \quad \text{onde } I_n \text{ é a matriz identidade de ordem } n$$

A fim de determinar a solução de tal sistema fazemos

$$
\begin{aligned}
& Ax = b \\
\Rightarrow & A^{-1}Ax = A^{-1}b \qquad \text{onde } A^{-1} \text{ é a inversa da matriz A} \\
\Rightarrow & I_n x = A^{-1}b \qquad \text{onde } I_n \text{ é a matriz identidade de ordem } n \\
\Rightarrow & x = A^{-1}b
\end{aligned}
$$

Exemplo: Resolva o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Exemplo: Resolva o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = & 6 \end{cases}$$

Forma matricial

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}}$$

Exemplo: Resolva o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 6 \end{cases}$$

Forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x}$$

Exemplo: Resolva o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 6 \end{cases}$$

Forma matricial $\qquad A \qquad x \quad = \quad b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Assim

$$x = A^{-1}b$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3,5 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3,5 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3,5 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3,5 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3,5 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$I_n x = A^{-1}b \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3,5 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3,5 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$I_n x = A^{-1}b \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1}b \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3,5 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3,5 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$I_n x = A^{-1}b \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1}b \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Em Python utilizando a biblioteca Numpy

```python
import numpy as np # importando numpy

# definindo a matriz A
A = np.matrix([[1, 2, 3],
               [2, 2, 4],
               [4, 2, 5]])

# definindo a matriz b
b = np.matrix([[1],
               [0],
               [6]])

# calculando a solução
x = np.linalg.inv(A) * b
```

Exercício: Resolva o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + 8x_4 &= -4 \end{cases}$$

Solução: $x = (-0.059946, 0.299728, -0.430518, -0.771117)$