Decomposição LU para Matrizes Tridiagonais

Exercício-Programa 1 - MAP3121

Pedro Pastro X Oliveira - NUSP 10823390

Abayomi Diana B C M Kiss - NUSP 10805441

2022

Sumário

1 Introdução

Matrizes tridiagonais são um tipo especial de matriz em que seus únicos elementos não-nulos estão na diagonal principal e nas duas diagonais secundárias adjacentes. Supondo que A seja uma matriz triangularizável pelo Método de Eliminação de Gauss, se A for tridiagonal, podemos calcular os coeficientes da triangularização através de um método chamado *decomposição LU*

A estrutura simples e facilmente modelável de uma matriz A tridiagonal pode ser utilizada para calcular os elementos da decomposição LU de forma mais eficiente do que utilizando o Método de Eliminação de Gauss.

Tomamos A matriz tridiagonal de acordo com o seguinte modelo:

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

que podemos representar através de vetores:

$$a = (0, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n), \quad b = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n), \quad c = (c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, 0)$$

Através destes vetores, iremos compor todos os cálculos envolvidos na decomposição LU e na solução do sistema linear $Ax = d$, que iremos preparar em seguida.

Ademais, também devemos destacar as matrizes tridiagonais cíclicas, comuns em problemas que envolvem questões periódicas. As matrizes tridiagonais cíclicas possuem uma estrutura como descrito abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ c_n & & & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

No caso de matrizes tridiagonais cíclicas, iremos aproveitar o algoritmo de resolução de matrizes não-cíclicas, apenas remodelando a matriz cíclica como uma submatriz $T_{n-1,n-1}$ e um par de vetores $v, w \in \mathbb{R}^{n-1}$, tais que T é a submatriz de A com diagonal $(b_1, \dots, b_{n-1})$, $v = (a_1, 0, \dots, 0, c_{n-1})^t$ e $w = (c_n, 0, \dots, 0, a_n)^t$.

2 Motivações

3 Tarefa

O enunciado das tarefas do trabalho será reescrito abaixo num formato dividido, de forma a obter maior organização e uma formatação mais clara dos resultados. Para cada Item criado, haverá uma seção especificada para a apresentação dos resultados obtidos através do código.

Devemos constatar que os valores dos elementos de a, b e c, das diagonais da matriz A, foram especificados no enunciado do EP e seguem as funções abaixo:

$$a_i = \frac{2i-1}{4i},\ 1 \leq i \leq n-1,\ a_n = \frac{2n-1}{2n};$$

$$c_i = 1 - a_i,\ 1 \leq i \leq n;$$

$$b_i = 2,\ 1 \leq i \leq n$$

O enunciado requeria que assumíssemos $n = 20$. Assim, utilizando 4 casas decimais, os vetores a, b e c utilizados são:

$a =$ [0.25, 0.375, 0.4167, 0.4375, 0.45, 0.4583, 0.4643, 0.4688, 0.4722, 0.475, 0.4773, 0.4792, 0.4808, 0.4821, 0.4833, 0.4844, 0.4853, 0.4861, 0.4868, 0.975]

$b =$ [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]

$c =$ [0.75, 0.625, 0.5833, 0.5625, 0.55, 0.5417, 0.5357, 0.5312, 0.5278, 0.525, 0.5227, 0.5208, 0.5192, 0.5179, 0.5167, 0.5156, 0.5147, 0.5139, 0.5132, 0.025]

3.1 Item A

Enunciado: Implemente o algoritmo descrito acima para a decomposição *LU* de uma matriz tridiagonal $A = n \times n$

Ambas as matrizes L e U possuem dimensão $n \times n$. Dado que estas provém da matriz tridiagonal A, também possuem suas particularidades:

- L é uma matriz triangular inferior, cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1 ($L_{i,i} = 1$) e os elementos da diagonal secundária inferior são formados pelos multiplicadores $L_{i+1,i} = l_{i+1}$.
- U é uma matriz triangular superior obtida através da triangularização de A, cujos elementos da diagonal principal são $U_{i,i} = u_i$ e os da diagonal secundária superior são os mesmos dos análogos elementos da matriz A (ou seja, $U_{i,i+1} = A_{i,i+1}$, ou ainda, $U_{i,i+1} = c_i$)

O algoritmo para a obtenção dos valores de $\{u_i\}$ e $\{l_{i+1}\}$ foi dado no enunciado do EP e será transcrito abaixo para constatação neste relatório:

$u_1 = b_1$

para $i = 2, \ldots, n$ **faça**

$l_i = a_i / u_{i-1}$

$u_i = b_i - l_i c_{i-1}$

fim

Apresentação dos resultados

Como discutido anteriormente, para $n = 20$ e os algoritmos devidamente empregados, os vetores u e l deduzidos são dados por (observação: a sequência de comandos que o usuário deve digitar para a obtenção destes resultados é (20 0 1)):

L = [0.1875, 0.2241, 0.2352, 0.2416, 0.2459, 0.249, 0.2513, 0.2532, 0.2546, 0.2558, 0.2568, 0.2577, 0.2584, 0.259, 0.2596, 0.2601, 0.2605, 0.2609, 0.5225]

U = [2, 1.8594, 1.8599, 1.8628, 1.8641, 1.8648, 1.8651, 1.8654, 1.8655, 1.8656, 1.8657, 1.8657, 1.8658, 1.8658, 1.8659, 1.8659, 1.8659, 1.8659, 1.8659, 1.7319]

3.2 Item B

Implemente também o algoritmo para a resolução de um sistema linear tridiagonal usando a decomposição LU da matriz.

Nesta etapa iremos encontrar x da solução do sistema linear $Ax = d$. A é a matriz tridagonal descrita anteriormente, através de seus vetores representativos a, b e c. O vetor coluna d, do lado direito da equação, também teve seus valores parametrizados no enunciado do EP, sendo:

$$d_i = \cos\left(\frac{2\pi i^2}{n^2}\right),\ 1 \leq i \leq n$$

Desse modo, novamente para $n = 20$, os elementos de d serão dados por:

$d = [0.9999, 0.998, 0.99, 0.9686, 0.9239, 0.8443, 0.7181, 0.5358, 0.294, 0,$
$-0.3239, -0.6374, -0.8838, -0.998, -0.9239, -0.6374, -0.1719, 0.3681, 0.8181, 1]$

Para a obtenção da solução x do sistema linear descrito, o enunciado do EP também nos concedeu acesso a um algoritmo, que será transcrito abaixo para fins de constatação:

Passo 1: Encontrar y tal que $Ly = d$:

$y_1 = d_1$

para $i = 2, \ldots, n$ **faça**

$y_i = d_i - l_i y_{i-1}$

fim

Passo 2: Encontrar x tal que $Ux = y$:

$x_n = y_n/u_n$

para $i = n-1, \ldots, 1$ **faça**

$x_i = (y_i - c_i x_{i+1})/u_i$

fim

Apresentação dos resultados

Novamente, para $n = 20$ e com 4 casas decimais, os valores encontrados para os elementos de x foram (observação: a sequência de comandos que o usuário deve digitar para a obtenção deste resultado é (20 0 1) ou (20 0 0)):

$x = [0.3784, 0.324, 0.333, 0.3241, 0.3107, 0.285, 0.2438, 0.1835, 0.1027, 0.0036,$
$-0.1067, -0.2147, -0.3011, -0.3433, -0.321, -0.2245, -0.064, 0.1262, 0.2858, 0.3607]$

3.3 Item C

Teste os algoritmos na resolução do sistema linear tridiagonal cíclico $Ax = d$

Segundo as equações disponibilizadas no enunciado do EP, a solução do sistema linear tridiagonal cíclico é o vetor dado por $x = (\tilde{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n$, onde:

$$x_n(\mathbb{R}) = \frac{d_n - c_n\tilde{y}_1 - a_n\tilde{y}_{n-1}}{b_n - c_n\tilde{z}_1 - a_n\tilde{z}_{n-1}} \quad \text{e} \quad \tilde{x}(\mathbb{R}^{n-1}) = \tilde{y} - x_n\tilde{z}$$

onde $\tilde{y}$ é a solução do sistema linear $T\tilde{y} = \tilde{d}$, $\tilde{z}$ é a solução do sistema linear $T\tilde{z} = v$ e $\tilde{d} = (d_1, \ldots, d_{n-1})^t$.

Apresentação dos resultados

Mais uma vez, para $n = 20$ e com 4 casas decimais, os valores do vetor $x = (\tilde{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n$ será (observação: a sequência de comandos que o usuário deve digitar para a obtenção deste resultado é (20 1):

$x =$ [0.3303, 0.3337, 0.3308, 0.3246, 0.3105, 0.285, 0.2438, 0.1835, 0.1027, 0.0036, -0.1067, -0.2147, -0.3011, -0.3433, -0.321, -0.2245, -0.0639, 0.1258, 0.2871, 0.3559]