Modelagem de um Sistema de Refrigeração de Chips

Exercício-Programa 3 - MAP3121

Pedro Pastro X Oliveira - NUSP 10823390

Abayomi Diana B C M Kiss - NUSP 10805441

2022

Sumário

1 Introdução

O seguinte relatório tem o objetivo de analisar o comportamento de uma função que soluciona a equação de calor unidimensional (obtida a partir da lei de Fourier) para o resfriamento de um chip eletrônico, através do método de elementos finitos, utilizando Splines lineares, uniformemente espaçadas e com n nós. Conforme instruído pele corpo docente, será feita a análise de validação do código para duas funções, a saber:

$$f_1(x) = 12x(1-x) - 2$$

$$f_2(x) = e^x + 1$$

ambas no intervalo $[0, 1]$ com número de nós igual a $n = 7, 15, 31, 63$, analisando, para tais, o valor dos elementos do vetor $[\alpha_i]_{n\times1}$, solução do sistema linear descrito no enunciado do EP e o comportamento do erro obtido a partir do método numérico, bem como analisar o comportamento de condições de fronteira não-homogeneas.

Para modelar a função f_2, utilizamos a expansão de Taylor-Maclaurin com 8 graus de precisão, ou seja:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Figura 1:

2 Validação

Cálculo de $[\alpha_i]^{(n)}_{n\times1}$

2.1 Função f_1

- $n = 7$: $[\alpha_i]^{(7)} = [-1.184, 0.4233, 0.8032, 1.0515, 0.80320.4233, -1.184]$
- $n = 15$: $[\alpha_i]^{(15)} = [-1.8229, -0.5367, -0.2024, 0.2681, 0.5832, 0.8211, 0.9607, 1.0079, 0.9607, 0.8211, 0.5832, 0.2681, -0.2024, -0.5367, -1.8229]$

- $n = 31$: $[\alpha_i]^{(31)} = [-2.1701, -1.1515, -1.017, -0.6752, -0.4188, -0.1692, 0.0525, 0.252,$
$0.4277, 0.5801, 0.709, 0.8145, 0.8965, 0.9551, 0.9902, 1.002,$
$0.9902, 0.9551, 0.8965, 0.8145, 0.709, 0.5801, 0.4277, 0.252,$
$0.0525, -0.1692, -0.4188, -0.6752, -1.017, -1.1515, -2.1701]$

- $n = 63$: $[\alpha_i]^{(63)} = [-2.3507, -1.4927, -1.5018, -1.2861, -1.138 - 0.9792, -0.8308, -0.687,$
$-0.5493, -0.4175, -0.2915, -0.1714, -0.0571, 0.0513, 0.1538, 0.2505, 0.3413,$
$0.4263, 0.5054, 0.5786, 0.646, 0.7075, 0.7632, 0.813, 0.85690.895,$
$0.9272, 0.9536, 0.9741, 0.9888, 0.9976, 1.0005, 0.9976, 0.9888, 0.9741,$
$0.9536, 0.9272, 0.895, 0.8569, 0.813, 0.7632, 0.7075, 0.646, 0.5786,$
$0.5054, 0.4263, 0.3413, 0.2505, 0.1538, 0.0513, -0.0571, -0.1714, -0.2915,$
$-0.4175, -0.5493, -0.687, -0.8308, -0.9792, -1.138, -1.2861, -1.5018, -1.4927, -2.3507]$

2.2 Função f_2

- $n = 7$, $\alpha^{(7)} = [2.6676, 2.1375, 2.4967, 2.6171, 2.94, 2.8468, 4.3913]$

- $n = 15$, $\alpha^{(15)} = [2.6, 1.9892, 2.2443, 2.2733, 2.3692, 2.4538, 2.5486, 2.648,$
$2.7549, 2.8663, 2.9932, 3.0971, 3.3243, 3.1312, 4.5488]$

- $n = 31$, $\alpha^{(31)} = [2.5675, 1.9208, 2.1367, 2.1227, 2.1718, 2.2054, 2.2446, 2.2839,$
$2.3247, 2.3667, 2.4101, 2.4549, 2.5011, 2.5487, 2.5979, 2.6486, 2.7009,$
$2.7549, 2.8106, 2.8681, 2.9274, 2.9886, 3.0517, 3.1167, 3.1844, 3.252, 3.33, 3.3795, 3.5463, 3.2864, 4.$

- $n = 63$, $\alpha^{(63)} = [2.5516, 1.8881, 2.0864, 2.0542, 2.084, 2.0975, 2.1158,$
$2.1331, 2.151, 2.1691, 2.1875, 2.2062, 2.2252, 2.2445, 2.2641, 2.284,$
$2.3042, 2.3248, 2.3456, 2.3668, 2.3883, 2.4102, 2.4324, 2.455, 2.4779,$
$2.5011, 2.5248, 2.5488, 2.5732, 2.598, 2.6231, 2.6487, 2.6747, 2.701,$
$2.7278, 2.755, 2.7827, 2.8107, 2.8392, 2.8682, 2.8976, 2.9275, 2.9579,$
$2.9887, 3.02, 3.0518, 3.0841, 3.117, 3.1503, 3.1842, 3.2185, 3.2535,$
$3.289, 3.325, 3.3617, 3.3987, 3.437, 3.4736, 3.5191, 3.5344, 3.6653, 3.3676, 4.6723]$

2.3 Análise do vetor α

Podemos notar que, para uma função polinomial bem comportada, o vetor α é simétrico entre seus extremos. Já com uma função que foge destas condições, como pôde ser visualizado em f_2, o vetor α não obteve simetria, mas manteve sua ordem de grandeza constante, independente do número de nós utilizado.

3 Estimativas de Erro

3.1 Função f_1

- $n = 7$, $\varepsilon^{(7)} = [0.3415, 0.6703, 0.9574, 1.1144, 0.9899, 0.4072, 0.7344, 2.2732]$

- $n = 15$, $\varepsilon^{(15)} = [0.196, 0.3989, 0.6141, 0.8471, 1.1032, 1.3879, 1.7049, 2.0544, 2.4273, 2.794, 3.0857, 3.1684, 2.8218, 1.7683, 0.137, 2.3004]$

- $n = 31$, $\varepsilon^{(31)} = [0.1002, 0.2019, 0.306, 0.4133, 0.5245, 0.6407, 0.7626, 0.8915, 1.0283, 1.1745, 1.3314, 1.5005, 1.6838, 1.8834, 2.1018, 2.3418, 2.6069, 2.901, 3.2287, 3.5953, 4.0061, 4.4659, 4.977, 5.5344, 6.1169, 6.6696, 7.0741, 7.1043, 6.3856, 4.4347, 1.0377, 2.3071]$

- $n = 63$, $\varepsilon^{(63)} = [0.0503, 0.1009, 0.1519, 0.2034, 0.2556, 0.3085, 0.3622, 0.4169, 0.4726, 0.5295, 0.5877, 0.6473, 0.7084, 0.7713, 0.8359, 0.9026, 0.9714, 1.0425, 1.116, 1.1923, 1.2715, 1.3538, 1.4394, 1.5287, 1.6219, 1.7193, 1.8212, 1.9281, 2.0404, 2.1584, 2.2827, 2.414, 2.5527, 2.6996, 2.8555, 3.0214, 3.1981, 3.387, 3.5892, 3.8065, 4.0404, 4.2932, 4.567, 4.8648, 5.1899, 5.5459, 5.9375, 6.37, 6.8496, 7.3836, 7.9804, 8.6492, 9.3992, 10.2382, 11.1682, 12.1772, 13.2227, 14.2, 14.8886, 14.871, 13.4534, 9.736, 3.3719, 2.3088]$

3.2 Função f_2

- $n = 7$, $\varepsilon^{(7)} = [0.3237, 0.7647, 1.3861, 2.3872, 4.353, 8.7398, 18.6802, 40.1938]$

- $n = 15$, $\varepsilon^{(15)} = [0.1502, 0.3264, 0.5322, 0.7728, 1.0555, 1.3904, 1.7928, 2.2858, 2.9088, 3.7387, 4.9485, 6.965, 10.8666, 19.3283, 38.7385, 83.684]$

- $n = 31$, $\varepsilon^{(31)} = [0.0722, 0.1505, 0.2353, 0.327, 0.4262, 0.5334, 0.6494, 0.7749, 0.911, 1.0589, 1.2199, 1.3959, 1.5889, 1.8016, 2.037, 2.2994, 2.5936, 2.9263, 3.306, 3.7441, 4.256, 4.8634, 5.5983, 6.5111, 7.6889, 9.3005, 11.7098, 15.7679, 23.55840.265, 78.7692, 170.6684]$

- $n = 63$, $\varepsilon^{(63)} = [0.0353, 0.0722, 0.1106, 0.1505, 0.1921, 0.2354, 0.2804, 0.3272, 0.3758, 0.4264, 0.479, 0.5337, 0.5906, 0.6498, 0.7113, 0.7754, 0.8421, 0.9116, 0.9841, 1.0596, 1.1385, 1.2209, 1.307, 1.3972, 1.4916, 1.5905, 1.6944, 1.8036, 1.9185, 2.0396, 2.1675, 2.3027, 2.4459, 2.598, 2.7597, 2.932, 3.1163, 3.3137, 3.5258, 3.7544, 4.0017, 4.2701, 4.5626, 4.8828, 5.235, 5.6245, 6.0578, 6.5429, 7.0901, 7.7126, 8.4274, 9.2574, 10.2337, 11.4004, 12.8233, 14.6065, 16.9316, 20.1471, 24.9925, 33.1633, 48.7615, 82.0158, 158.7848, 344.6381]$

3.3 Análise

Como podemos notar, nos nós iniciais, houve grande compatibilidade da função $\tilde{u}_n(x)$ com a função exata $u(x)$ a que estávamos tentando nos aproximar. Porém, conforme foram aumentando os nós, os erros cresceram consideravelmente. Em especial, isso pode ser notado com maior incidência na função f_2, que foi definida através de séries de Taylor, o que corrobora que, em graus maiores, haja um erro consideravelmente maior.