Fórmulas de Integração Numérica de Gauss

Exercício-Programa 2 - MAP3121

Pedro Pastro X Oliveira - NUSP 10823390

Abayomi Diana B C M Kiss - NUSP 10805441

2022

Sumário

1 Introdução e motivação

Dado uma função $f(x)$ com domínio $D = \mathbb{R}$, podemos escrever a integral de f de a até b por:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j) + E_n(f),$$

onde os nós $x_j \in [a, b]$ e os pesos w_j são determinados com base no erro $E(f)$ escolhido.

Para os fins deste trabalho, iremos focar na chamada Regra de Quadratura Gaussiana, construída para produzir um resultado exato para polinômios de grau menor ou igual a $2n-1$ para uma escolha adequada de x_i e w_i, $i = 1, \ldots, n$. Assim, para $E(f) = 0$, os valores de x_j e w_j são tabelados para cada número n de nós e para o intervalo $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Para demais intervalos $[a, b]$, podemos encontrar os valores de x_j e w_j através das seguintes formas:

- $x_j^{(2)} = \frac{b-a}{2} x_j^{(1)} + \frac{b+a}{2}$, sendo $x_j^{(2)}$ o novo valor do nó x_j para o intervalo $[a, b]$ e $x_j^{(1)}$ o valor tabelado para o intervalo $[-1, 1]$
- $w_j^{(2)} = \frac{b-a}{2} w_j^{(1)}$, sendo $w_j^{(2)}$ o novo valor do nó w_j para o intervalo $[a, b]$ e $w_j^{(1)}$ o valor tabelado para o intervalo $[-1, 1]$

Para o cálculo de integrais duplas, numa região R do plano xy em que:

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\},$$

podemos definir a integral de $f(x)$ em R como:

$$I = \iint_R f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)dy \right) dx$$

Pelas fórmulas de Gauss com n nós, o valor da integral pode ser aproximado por:

$$I = \sum_{i=1}^{n} u_i F(x_i) \quad \text{com} \quad F(x_i) = \sum_{j=1}^{n} v_{ij} f(x_i, y_{ij}),$$

onde x_i e u_i são os nós e pesos no intervalo $[a, b]$ e y_{ij} e v_{ij} são os nós e os pesos nos intervalos $[c(x_i), d(x_i)]$.

O Método da Quadratura Gaussiana é especialmente vantajoso, comparado com outros métodos como o dos trapézios ou de Simpson, pois podemos escolher os pontos onde queremos avaliar a função $f(x)$, o que leva a uma maior precisão dos resultados.

2 Tarefas

A seguir, serão elucidadas as técnicas para a resolução de cada problema proposto no EP2. Primeiramente, será elucidado o enunciado de cada exemplo (em negrito), e após, o método de pensar e resolver cada exercício será explicado com mais detalhes.

Para os fins deste EP, foram definidos valores $n \in \{6, 8, 10\}$ como os números padrões de nós e pesos para cada variável descrita em cada integral, com os respectivos nós e pesos, tabelados para o intervalo $[-1, 1]$, também definidos e disponibilizados pelo corpo docente.

Para fins de constatação, cada resposta às integrais neste trabalho será a companhada das siglas u.a. ou u.v., significando que a resposta está dada em unidades de área ou volume, respectivamente.

2.1 Exemplo 1

Enunciado: Calcule os volumes do cubo cujas arestas tem comprimento 1 e do tetraedro com vértices (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) e (0, 0, 1). Você deve obter resultados exatos, exceto por erros de arredondamento (por que?).

O volume V do cubo de arestas com comprimento 1 pode ser encontrado como:

$$V = \iiint_V 1\, dxdydz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 1\, dxdydz = 1 \text{ u.v.}$$

O volume do tetraedro descrito acima será dado por:

$$V = \iiint_V 1\, dxdydz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1\, dzdydx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{6} \text{ u.v.}$$

Os resultados acima foram precisamente encontrados pelo código, para qualquer valor de n, com a diferença do erro de arredondamento padrão de *python* de ordem 10^{-17}. Isso se deve pois a função acima é um polinômio simples e bem comportado.

2.2 Exemplo 2

Enunciado: A área A da região no primeiro quadrante limitada pelos eixos e pela curva $y = 1 - x^2$ pode ser obtida por

$$A = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y}} dx \right) dy = \frac{2}{3} \text{ u.a.}$$

Calcule numericamente as duas integrais duplas acima e observe os resultados.

Através do código, calculamos a primeira integral com os seguintes resultados:

- $n = 6 \Rightarrow A = 0.6666666666666667$ u.a.
- $n = 8 \Rightarrow A = 0.6666666666666666$ u.a.
- $n = 10 \Rightarrow A = 0.6666666666666667$ u.a.

Já a segunda integral apresentou resultados menos consistentes conforme alteramos o número de nós:

- $n = 6 \Rightarrow A = 0.6670464379156136$ u.a.
- $n = 8 \Rightarrow A = 0.6668355801001766$ u.a.
- $n = 10 \Rightarrow A = 0.6667560429365088$ u.a.

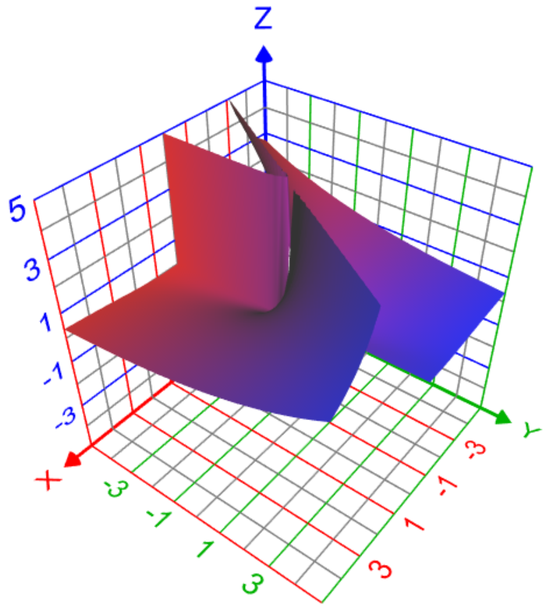
Esta divergência entre os resultados da integral da função $\sqrt{1-y}$ se deve pois ela não se corresponde a um polinômio de expoentes inteiros (como x^k, $k \in \mathbb{Z}$), ao contrário da equação $1 - x^2$.

2.3 Exemplo 3

Enunciado: Considere a superfície descrita por $z = e^{y/x}$, $0.1 \leq x \leq 0.5$, $x^3 \leq y \leq x^2$. Calcule a sua área e o volume da região abaixo dela, sendo a área de uma superfície descrita por $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}$ é igual a

$$\iint_R \sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1} dxdy.$$

A curva $z = e^{y/x}$ pode ser visualizada através de plotagem gráfica:



Como descrito pela equação acima, e sendo f_x e f_y, respectivamente, as derivadas parciais da função $f(x,y) = \mathrm{e}^{y/x}$ com respeito a x e y, a equação pôde ser reescrita, com as devidas simplificações, como:

$$A_R = \int_{0.1}^{0.5} \int_{x^3}^{x^2} \frac{\sqrt{(x^2+y^2)\mathrm{e}^{\frac{2y}{x}} + x^4}}{x^2} \, dydx$$

Esta dupla integral, segundo o cálculo do código, e para cada valor de n, é dada por:

- $n = 6 \Rightarrow A_R = 1.2366994669775793$ u.a.
- $n = 8 \Rightarrow A_R = 1.239054663886141$ u.a.
- $n = 10 \Rightarrow A_R = 1.2392032000750617$ u.a.

Para o cálculo do volume da região abaixo da curva z descrita é dada por:

$$V_z = \iint_R \mathrm{e}^{y/x} dxdy = \int_{0.1}^{0.5} \int_{x^3}^{x^2} \mathrm{e}^{y/x} dydx = \int_{0.1}^{0.5} -x\left(\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^{x}\right) dx$$

Através do código, calculamos este volume para os valores de n:

- $n = 6 \Rightarrow V_z = 0.03330556611623718$ u.v.
- $n = 8 \Rightarrow V_z = 0.033305566116232074$ u.v.
- $n = 10 \Rightarrow V_z = 0.033305566116232074$ u.v.

2.4 Exemplo 4

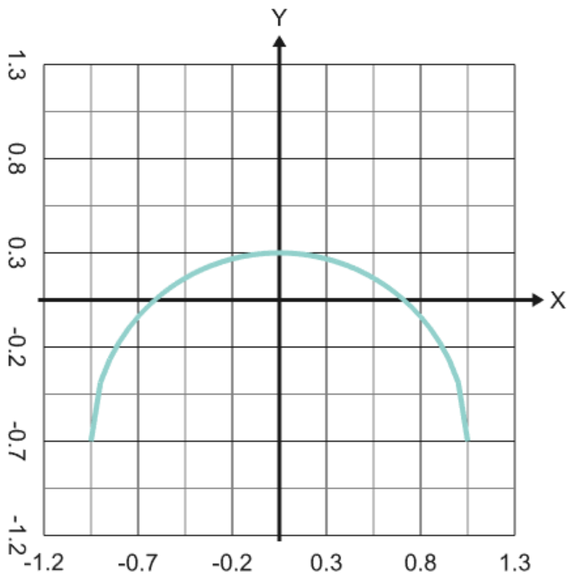
Enunciado: Considere uma região fechada R do plano xy e seja uma reta γ no mesmo plano que não intercepta o interior de R. O volume V do sólido de revolução obtido da rotação da região R em torno de γ é igual a

$$V = 2\pi \iint_R d_\gamma(x, y)dxdy$$

onde $d_\gamma(x, y)$ é a distância do ponto (x, y) à reta γ. Use esta expressão para calcular o volume da calota esférica de altura $\frac{1}{4}$ da esfera de raio 1, e o volume do sólido de revolução obtido da rotação da região, em torno do eixo y, delimitada por $x = 0$, $x = e^{y^2}$, $y = -1$, $y = 1$

A função $d_\gamma(x, y)$ como descrita pode ser definida alternativamente em ambos os exemplos, devido a uma simplificação utilizável em ambos os casos: o fato de que a reta γ corresponder à função $x = 0$.

Tomemos inicialmente o exercício da calota esférica. Definindo uma função $f(x) = \sqrt{1 - x^2} - 3/4$, com $x \in [-1, 1]$, cuja raiz positiva será dada por $\frac{\sqrt{7}}{4}$. Seu comportamento no plano Oxy é observável no gráfico abaixo:



Nota-se que a área definida por $x, y \geq 0 \cap y \leq f(x)$ é a área da seção radial da calota esférica de altura $\frac{1}{4}$ da esfera de raio $R = 1$. Como o eixo de rotação $\gamma : x = 0$ é tal que $f(x_0, y) = f(-x_0, y)$, podemos concluir que a distância de um ponto arbitrário (x_0, y_0) a

γ é, simplesmente, a componente x_0 do ponto. Desse modo, podemos reescrever a função $d_\gamma(x, y)$ como:

$$d_\gamma(x, y) = x$$

Assim, a integral do volume V_c, neste caso, simplificar-se-á para:

$$V_c = 2\pi \iint_R d_\gamma(x, y) dx dy = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{7}}{4}} x f(x) dx$$

Geometricamente, o volume da calota pode ser dado segundo a equação:

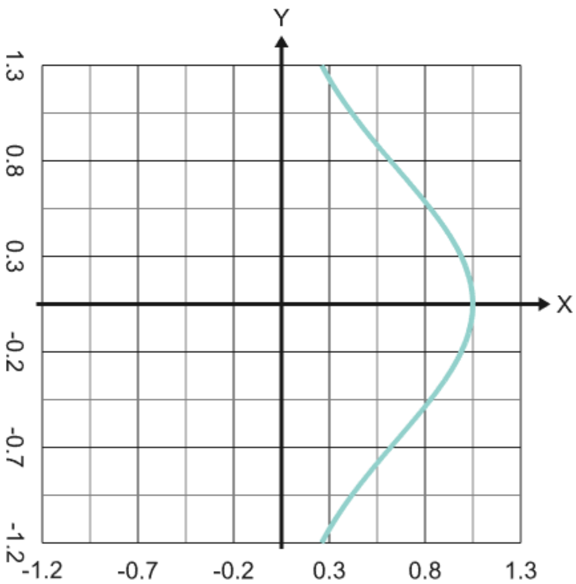
$$V_c = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(3 \cdot 1 - \frac{1}{4}\right) = 0.17998707911191522 \text{ u.v.},$$

sendo $R = 1$ o raio da esfera e $h = \frac{1}{4}$ sua altura.

Através do código, calculamos o volume da calota, em função de n:

- $n = 6 \Rightarrow V_c = 0.17998708490297846$ u.v.
- $n = 8 \Rightarrow V_c = 0.17998707912971604$ u.v.
- $n = 10 \Rightarrow V_c = 0.17998707911197637$ u.v.

Nos voltemos, agora, ao problema do sólido de revolução obtido da função $x = e^{-y^2}$, sendo $y \in [-1, 1]$, ilustrada no gráfico abaixo:



Para o problema em questão, o eixo de rotação será, novamente, a reta $\gamma : x = 0$. Podemos notar a relação semelhante entre o volume do sólido gerado e a área A_d de um disco de raio $r = f(y)$, sendo, portanto, $A_d = \pi[f(y)]^2$. Através disso, podemos inferir que o volume do sólido gerado será o aproximadamente o somátorio dos volumes dos discos de raio $r = f(y)$, com altura $h = \Delta y$, ao longo da região $y \in [-1, 1]$. O volume de cada disco i será dado por $v_i = \pi[f(y_i)]^2\Delta y_i$. Para maior precisão, definimos $\Delta y \to 0$, que implica em $n \to \infty$ número de disco, ou seja:

$$V_s = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(y_i)]^2 \Delta y_i = \pi \int_{-1}^{1} [f(y_i)]^2 dy = \pi \int_{-1}^{1} (e^{-y^2})^2 dy,$$

que corresponde ao volume do sólido de revolução descrito.

Em respeito ao código, para cada valor de n, o volume será dado por:

- $n = 6 \Rightarrow V_s = 3.75816503289671$ u.v.
- $n = 8 \Rightarrow V_s = 3.758249262439439$ u.v.
- $n = 10 \Rightarrow V_s = 3.7582496332093864$ u.v.