



# Ciências ULisboa

Faculdade  
de Ciências  
da Universidade  
de Lisboa

PRÁTICAS DE CARTOGRAFIA

DEGGE – LICENCIATURA EM ENGENHARIA GEOESPACIAL

2020/2021

## ALGUNS CONCEITOS

### SISTEMAS DE REFERÊNCIA ADOTADOS EM PORTUGAL

**Direção-Geral do Território (DGT)**

<https://www.dgterritorio.gov.pt/geodesia/sistemas-referencia>

Portugal Continental		
<b>ED50 - European Datum 1950</b> (Obsoleto - Substituído pelo sistema PT-TM06-ETRS89)	<b>PT-TM06/ETRS89</b> - European Terrestrial Reference System 1989	
<b>Bessel Datum Lisboa</b> (Obsoleto - Substituído pelo sistema PT-TM06-ETRS89)		
<b>Datum Lisboa</b> (Obsoleto - Substituído pelo sistema PT-TM06-ETRS89)		
<b>Datum 73</b> (Obsoleto - Substituído pelo sistema PT-TM06-ETRS89)		
Arquipélago dos Açores	Arquipélago da Madeira	Regiões Autónomas
<b>Datum S. Braz - S. Miguel</b> (Grupo Oriental do Arquipélago dos Açores)	<b>Datum Base SE</b> - Porto Santo (Arquipélago da Madeira)	<b>PTRA08-UTM/ITRF93</b> - realização do International Terrestrial Reference Frame 1993
<b>Datum Base SW - Graciosa</b> (Grupo Central do Arquipélago dos Açores)		
<b>Datum Observatório</b> - Flores (Grupo Ocidental do Arquipélago dos Açores)		

## Centro de Informação Geoespacial do Exército (CIGeoE)

<https://www.igeoe.pt/index.php?id=38&cat=3>

Portugal Continental	
Datum Lisboa militares (Obsoleto - Substituído pelo sistema TM/WGS84)	WGS84 / TM (Gauss-Kruger)

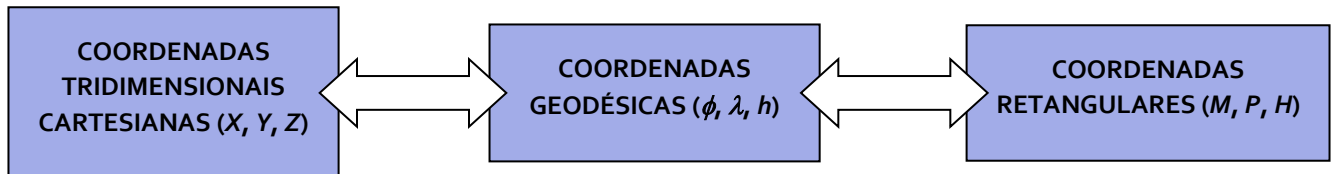
Regiões Autónomas
WGS 84 / UTM

## TIPOS DE COORDENADAS

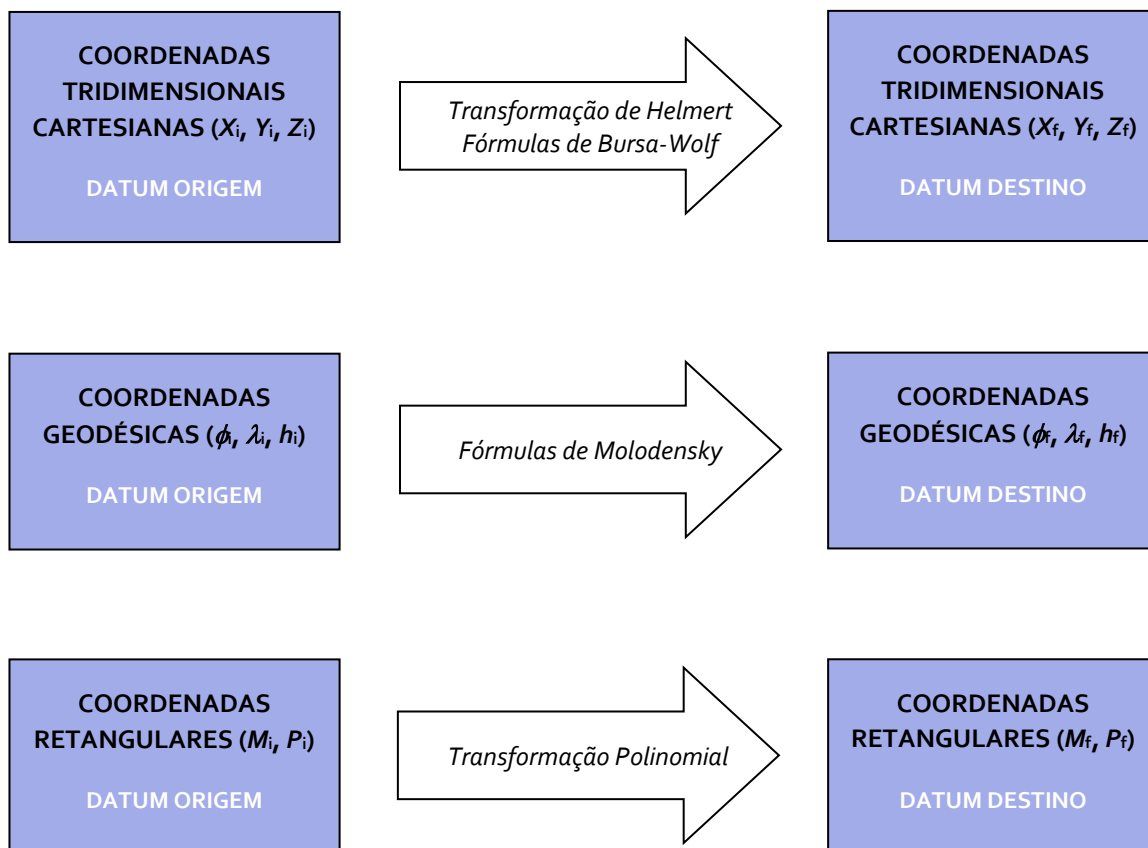
Coordenadas	V.G. Aboboreira (Beja) PT-TM06-ETRS89
Cartesianas ( $X, Y, Z$ )	$X = 4\,993\,821.5571\text{ m}$ $Y = -676\,850.4038\text{ m}$ $Z = 3\,896\,819.7516\text{ m}$
Geodésicas ou geográficas ( $\phi, \lambda, h$ )	$\phi = 37^\circ 53' 58.7635''\text{ N}$ $\lambda = 07^\circ 43' 07.2999''\text{ W Gr}$ $h = 257.85\text{ m}$
Retangulares ( $M, P$ )	$M = 36\,448.61\text{ m}$ $P = -196\,253.96\text{ m}$ $H = 202.90\text{ m}$

## TRANSFORMAÇÃO ENTRE COORDENADAS

### TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS NUM MESMO DATUM



### TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS ENTRE DIFERENTES DATA



## EXERCÍCIO 1

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação direta das coordenadas geodésicas ( $\phi, \lambda$ ) dos seguintes vértices geodésicos nas correspondentes coordenadas retangulares ( $M, P$ ).

V.G. Aboboreira (Beja)			V. G. Cabeço da Ponta (Porto Santo - Madeira)
PT-TM06/ETRS89	Datum Lisboa	Datum 73	PTRA08-UTM/ITRF93
$\phi = 37^\circ 53' 58.7635''$ N	$\phi = 37^\circ 53' 53.17608''$ N	$\phi = 37^\circ 53' 56.01135''$ N	$\phi = 33^\circ 02' 15.2697''$ N
$\lambda = 07^\circ 43' 07.2999''$ WGr	$\lambda = 07^\circ 43' 03.09455''$ WGr	$\lambda = 07^\circ 43' 10.59207''$ WGr	$\lambda = 16^\circ 21' 41.8679''$ WGr
$h = 257.85$ m	$h = 208.7901$ m	$h = 204.8015$ m	$h = 32.27$ m
$M = 36\,448.61$ m	$M = 36\,448.0117$ m	$M = 36\,445.0373$ m	$M = 372\,851.2519$ m
$P = -196\,253.96$ m	$P = -196\,254.9317$ m	$P = -196\,255.3140$ m	$P = 3\,656\,276.3028$ m

A transformação direta das coordenadas geodésicas ( $\phi, \lambda$ ) de um ponto nas correspondentes coordenadas planas ( $x, y$ ) através da projecção de Gauss (também conhecida por Transversa de Mercator) é definida por via analítica através das fórmulas obtidas por desenvolvimento em série:

$$\begin{aligned}
 y &= k_0 \cdot \left( \sigma + \frac{\lambda^2}{2} \cdot N \cdot \sin \phi \cdot \cos \phi + \frac{\lambda^4}{24} \cdot N \cdot \sin \phi \cdot \cos^3 \phi \cdot k_2 + \frac{\lambda^6}{720} \cdot N \cdot \sin \phi \cdot \cos^5 \phi \cdot k_4 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\lambda^8}{40320} \cdot N \cdot \sin \phi \cdot \cos^7 \phi \cdot k_6 \right) \\
 x &= k_0 \cdot \left( \lambda \cdot N \cdot \cos \phi + \frac{\lambda^3}{6} \cdot N \cos^3 \phi \cdot k_1 + \frac{\lambda^5}{120} \cdot N \cos^5 \phi \cdot k_3 + \frac{\lambda^7}{5040} \cdot N \cos^7 \phi \cdot k_5 \right)
 \end{aligned}$$

sendo  $k_0$  o fator de escala,  $\sigma$  o comprimento do arco de meridiano desde o paralelo origem até ao paralelo do ponto,  $\lambda$  a diferença de longitude entre o ponto e o meridiano central da projecção ( $\lambda - \lambda_0$ ),  $\phi$  a latitude geográfica do ponto,  $N$  a grande normal à latitude  $\phi$ :

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}$$

( $a, e^2$ ) os parâmetros característicos do elipsóide de referência e  $\rho$  o raio de curvatura do meridiano à latitude  $\phi$ :

$$\rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \phi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$e^2 = f \cdot (2 - f)$$

onde  $e$  é a excentricidade do elipsóide e  $f$  é o achatamento do elipsóide; e ainda

$$k_1 = \frac{N}{\rho} - \operatorname{tg}^2 \phi$$

$$k_2 = \frac{N}{\rho} + 4 \cdot \frac{N^2}{\rho^2} - \operatorname{tg}^2 \phi$$

$$k_3 = 4 \cdot \frac{N^3}{\rho^3} \cdot (1 - 6 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi) + \frac{N^2}{\rho^2} \cdot (1 + 8 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi) - 2 \cdot \frac{N}{\rho} \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi$$

$$k_4 = 8 \cdot \frac{N^4}{\rho^4} \cdot (11 - 24 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi) - 28 \cdot \frac{N^3}{\rho^3} \cdot (1 - 6 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi) + \frac{N^2}{\rho^2} \cdot (1 - 32 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi) - 2 \cdot \frac{N}{\rho} \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi$$

$$k_5 = 61 - 479 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + 179 \cdot \operatorname{tg}^4 \phi - \operatorname{tg}^6 \phi$$

$$k_6 = 1385 - 3111 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + 543 \cdot \operatorname{tg}^4 \phi + \operatorname{tg}^6 \phi$$

Na projeção de Gauss, aplicada à cartografia portuguesa, usa-se um factor de escala  $k_0 = 1$ , dada a pequena largura da nossa faixa continental. A projecção UTM é a projeção de Gauss aplicada a cada um dos 60 fusos, de  $6^\circ$  cada, em que podemos dividir o globo terrestre, tomando-se  $k_0 = 0,9996$  (valor escolhido de modo a tornar iguais as deformações da carta no meridiano médio e nos meridianos limítrofes do fuso).

O comprimento aproximado do arco de meridiano  $\sigma$  entre quaisquer duas latitudes  $\phi_0$  e  $\phi$  é determinado através de:

$$\sigma = a \cdot (1 - e^2) \cdot \left\{ A \cdot (\phi - \phi_0) - \frac{B}{2} \cdot (\sin 2\phi - \sin 2\phi_0) + \frac{C}{4} \cdot (\sin 4\phi - \sin 4\phi_0) - \frac{D}{6} \cdot (\sin 6\phi - \sin 6\phi_0) + \frac{E}{8} \cdot (\sin 8\phi - \sin 8\phi_0) - \frac{F}{10} \cdot (\sin 10\phi - \sin 10\phi_0) \right\}$$

com

$$A = 1 + \frac{3}{4} \cdot e^2 + \frac{45}{64} \cdot e^4 + \frac{175}{256} \cdot e^6 + \frac{11025}{16384} \cdot e^8 + \frac{43659}{65536} \cdot e^{10} + \dots$$

$$B = \frac{3}{4} \cdot e^2 + \frac{15}{16} \cdot e^4 + \frac{525}{512} \cdot e^6 + \frac{2205}{2048} \cdot e^8 + \frac{72765}{65536} \cdot e^{10} + \dots$$

$$C = \frac{15}{64} \cdot e^4 + \frac{105}{256} \cdot e^6 + \frac{2205}{4096} \cdot e^8 + \frac{10395}{16384} \cdot e^{10} + \dots$$

$$D = \frac{35}{512} \cdot e^6 + \frac{315}{2048} \cdot e^8 + \frac{31185}{131072} \cdot e^{10} + \dots$$

$$E = \frac{315}{16384} \cdot e^8 + \frac{3465}{65536} \cdot e^{10} + \dots$$

$$F = \frac{3465}{131072} \cdot e^{10} + \dots$$

	PT-TM06/ETRS89	Datum Lisboa	Datum 73	PTRA08-UTM/ITRF93
<b>Elipsoide de referência:</b>	GRS80 a = 6 378 137 m f = 1 / 298.257 222 101	Hayford (ou Internacional 1924) a = 6 378 388 m f = 1/297	Hayford (ou Internacional 1924) a = 6 378 388 m f = 1/297	GRS80 a = 6 378 137 m f = 1 / 298.257 222 101
<b>Projeção cartográfica:</b>	Transversa de Mercator	Transversa de Mercator	Transversa de Mercator	Transversa de Mercator
<b>Latitude da origem das coordenadas retangulares:</b>	39° 40' 05.73" N	39° 40' 00" N	39° 40' 00" N	0°
<b>Longitude da origem das coordenadas retangulares:</b>	08° 07' 59.19" W	08° 07' 54.862" W	08° 07' 54.862" W	33° W (fuso 25) 27° W (fuso 26) 15° W (fuso 28)
<b>Falsa origem das coordenadas retangulares:</b>	Em M: 0 m Em P: 0 m	Em M: 0 m Em P: 0 m	Em M: +180.598 m Em P: -86.990 m	Em M: +500 000 m Em P: 0 m
<b>Coefficiente de redução de escala no meridiano central:</b>	1	1	1	0.9996

## EXERCÍCIO 2

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação inversa das coordenadas retangulares ( $M$ ,  $P$ ) dos vértices geodésicos utilizados no exercício 1 nas correspondentes coordenadas geodésicas ( $\phi$ ,  $\lambda$ ).

Para efectuar a transformação inversa das coordenadas planas Gauss (ou UTM) nas correspondentes coordenadas geodésicas basta utilizar um processo iterativo:

- 1) Toma-se como ponto de partida um valor aproximado para  $\phi$  ( $\phi_{ap}$ ), saído de um cálculo anterior ou considerando um valor aproximado para o arco de meridiano  $\sigma$ :

$$\sigma_{ap} = \frac{P}{k_0}$$

sendo  $P$  a distância à perpendicular; donde a primeira aproximação para  $\phi$  é dada por:

$$\phi = \phi_0 + \frac{\sigma_{ap}}{A \cdot a \cdot (1 - e^2)}$$

- 2) Com base neste valor aproximado da latitude recalcula-se o comprimento de arco de meridiano  $\sigma$  usando a expressão:

$$\sigma = a \cdot (1 - e^2) \cdot \left\{ A \cdot (\phi - \phi_0) - \frac{B}{2} \cdot (\sin 2\phi - \sin 2\phi_0) + \frac{C}{4} \cdot (\sin 4\phi - \sin 4\phi_0) - \frac{D}{6} \cdot (\sin 6\phi - \sin 6\phi_0) + \frac{E}{8} \cdot (\sin 8\phi - \sin 8\phi_0) - \frac{F}{10} \cdot (\sin 10\phi - \sin 10\phi_0) \right\}$$

- 3) Com este novo valor para  $\sigma$  podemos determinar a correcção a aplicar a  $\phi$  através de:

$$\Delta\phi = \frac{(\sigma_{ap} - \sigma)}{\rho}$$

onde

$$\rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \phi)^{\frac{3}{2}}}$$



sendo o novo valor da latitude igual a:

$$\phi' = \phi + \Delta\phi$$

- 4) Entra-se de seguida num processo iterativo, recalculando  $\sigma$ ,  $\rho$  e  $\Delta\phi$  e o novo valor da  $\phi'$  até que  $\Delta\phi$  seja inferior à precisão desejada ( $10^{-10}$ );
- 5) Com o valor da latitude  $\phi'$  resultante do processo iterativo, calcula-se a latitude e longitude do ponto, através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \phi = \phi' - & \left( \frac{t}{k_0 \cdot \rho} \right) \cdot \left( \frac{M^2}{2 \cdot k_0 \cdot N} \right) + \left( \frac{t}{k_0 \cdot \rho} \right) \cdot \left( \frac{M^4}{24 \cdot k_0^3 \cdot N^3} \right) \cdot (-4\psi^2 + 9\psi \cdot (1 - t^2) + 12t^2) - \\ & - \left( \frac{t}{k_0 \cdot \rho} \right) \cdot \left( \frac{M^6}{720 \cdot k_0^5 \cdot N^5} \right) \cdot (8\psi^4 \cdot (11 - 24t^2) - 12\psi^3 \cdot (21 - 71t^2) + 15\psi^2 \cdot (15 - 98t^2 + 15t^4) + \\ & + 180\psi \cdot (5t^2 - 3t^4) - 360t^4) + \left( \frac{t}{k_0 \cdot \rho} \right) \cdot \left( \frac{M^8}{40320 \cdot k_0^7 \cdot N^7} \right) \cdot (1385 + 3633t^2 + 4095t^4 + 1575t^6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_0) \cdot \cos \phi' = & \left( \frac{M}{k_0 \cdot N} \right) - \left( \frac{M^3}{6 \cdot k_0^3 \cdot N^3} \right) \cdot (\psi + 2t^2) + \\ & + \left( \frac{M^5}{120 \cdot k_0^5 \cdot N^5} \right) \cdot (-4\psi^3 \cdot (1 - 6t^2) + \psi^2 \cdot (9 - 68t^2) + 72\psi t^2 + 24t^4) - \\ & - \left( \frac{M^7}{5040 \cdot k_0^7 \cdot N^7} \right) \cdot (61 + 662t^2 + 1320t^4 + 720t^6) \end{aligned}$$

sendo  $M$  a distância à meridiana,  $\psi = \frac{N}{\rho}$ , calculado com o valor da latitude  $\phi'$ , e  $t = \tan \phi'$ .

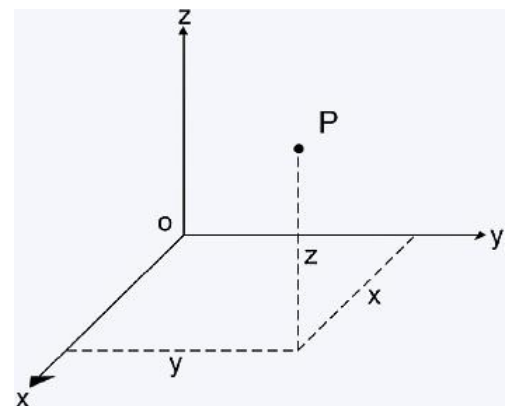
### EXERCÍCIO 3

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação direta entre coordenadas geodésicas ( $\phi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ) dos seguintes vértices geodésicos nas correspondentes coordenadas cartesianas tridimensionais ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ).

V.G. Aboboreira (Beja)	V. G. Cabeço da Ponta (Porto Santo - Madeira)
PT-TM06/ETRS89	PTRA08-UTM/ITRF93
$\phi = 37^\circ 53' 58.7635''$ N	$\phi = 33^\circ 02' 15.2697''$ N
$\lambda = 07^\circ 43' 07.2999''$ WGr	$\lambda = 16^\circ 21' 41.8679''$ WGr
$h = 257.85$ m	$h = 32.27$ m
$X = 4\,993\,821.5571$ m	$X = 5\,135\,480.8889$ m
$Y = -676\,850.4038$ m	$Y = -1\,507\,717.9053$ m
$Z = 3\,896\,819.7516$ m	$Z = 3\,457\,470.4300$ m

Considerando um triedro cartesiano OXYZ centrado com o elipsóide de referência, com o eixo dos ZZ coincidente com o seu eixo de revolução, com o eixo dos XX assente no semi-plano origem das longitudes geodésicas e o eixo dos YY escolhido de modo a tornar o triedro directo, as coordenadas geodésicas ( $\phi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ) de um ponto genérico relacionam-se com as suas coordenadas cartesianas tridimensionais ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) por meio das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 X &= (N + h) \cdot \cos \phi \cdot \cos \lambda \\
 Y &= (N + h) \cdot \cos \phi \cdot \sin \lambda \\
 Z &= \left[ (1 - e^2) \cdot N + h \right] \cdot \sin \phi
 \end{aligned}$$



sendo  $N$  a grande normal ao elipsóide de referência à latitude  $\phi$ ,  $h$  a altitude elipsoidal do ponto e  $(a, e^2)$  os seus parâmetros de forma. Estas expressões correspondem à transformação directa das coordenadas geodésicas ( $\phi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ) de um ponto nas correspondentes coordenadas cartesianas tridimensionais ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ).

## EXERCÍCIO 4

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação inversa entre coordenadas cartesianas tridimensionais ( $X, Y, Z$ ) dos vértices geodésicos utilizados no exercício 3 nas correspondentes coordenadas geodésicas ( $\phi, \lambda, h$ ).

A transformação inversa das coordenadas cartesianas tridimensionais ( $X, Y, Z$ ) de um ponto nas correspondentes coordenadas geodésicas ( $\phi, \lambda, h$ ) é executada recorrendo a um processo iterativo:

- 1) A longitude  $\lambda$  pode ser facilmente calculada a partir das coordenadas cartesianas tridimensionais utilizando a seguinte expressão:

$$\lambda = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right)$$

- 2) A latitude é obtida por um processo iterativo dado que as quantidades  $\phi$  e  $h$  são dependentes uma da outra, pelo que se utiliza um valor aproximado para a latitude o qual é calculado por:

$$\phi_{ap} = \arctg\left(\frac{Z}{P \cdot (1 - e^2)}\right)$$

com  $P$  igual a:

$$P = (X^2 + Y^2)^{1/2}$$

- 3) Com base neste valor aproximado da latitude calcula-se o valor de  $N$ , e em seguida o valor para a altitude elipsoidal  $h$  usando a expressão:

$$h = \frac{P}{\cos \phi} - N$$

- 4) O processo iterativo continua recalculando o valor de  $\phi$ , com  $N$  e  $h$  calculados no passo anterior, utilizando a expressão:

$$\phi = \arctg\left(\frac{Z + e^2 \cdot N \cdot \sin \phi}{P}\right)$$

- 5) Com este novo valor da latitude  $\phi$ , recalcula-se o valor de  $N$ , da altitude elipsoidal  $h$  e em seguida um novo valor para a latitude  $\phi$  e assim sucessivamente até alcançar a precisão desejada para a transformação ( $\phi_i - \phi_{i-1} = 10^{-10}$ ).

## EXERCÍCIO 5

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação entre as coordenadas cartesianas tridimensionais (X, Y, Z) - Transformação de Helmert/Fórmulas de Bursa-Wolf - de dois *data* distintos.

Ponto	
Datum 73	PT-TM06/ETRS89
X= 4 815 286 m	X= 4 815 062.1368 m
Y= -578 951 m	Y= -578 841.2009 m
Z= 4 129 745 m	Z= 4 129 782.0548 m

A transformação de sete parâmetros de Helmert, expressa em formato matricial, é designada por fórmula de Bursa-Wolf e tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + (1 + \alpha) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -R_z & R_y \\ R_z & 1 & -R_x \\ -R_y & R_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

onde (X, Y, Z) são as coordenadas de um dado ponto no sistema de referência geocêntrico origem, (X<sub>n</sub>, Y<sub>n</sub>, Z<sub>n</sub>) são as coordenadas desse mesmo ponto no sistema de referência geocêntrico destino, (ΔX, ΔY, ΔZ) são as componentes do vetor que une os centros dos dois elipsóides, (R<sub>x</sub>, R<sub>y</sub>, R<sub>z</sub>) são os ângulos de rotação em torno dos eixos de referencial de origem e α é o factor de escala (expresso em partes por milhão - ppm).

**Nota:** A fórmula apresentada encontra-se em conformidade com a norma ISO 19111:2007. No entanto, é de ter em conta outras versões utilizadas em alguns programas que se reflectem nos sinais e/ou no sentido das rotações.

De seguida apresentam-se os parâmetros da transformação de Bursa-Wolf do datum Lisboa e datum 73 para PT-TM06-ETRS89 retirados do sítio da Direção-Geral do Território (<https://www.dgterritorio.gov.pt/geodesia/transformacao-coordenadas/portugal-continental>) em fevereiro de 2021.

Parâmetros de Transformação de Bursa-Wolf do Datum Lisboa e Datum 73 para PT-TM06-ETRS89		
	Datum Lisboa para PT-TM06/ETRS89	Datum 73 para PT-TM06/ETRS89
$\Delta X$ (m)	-283.088	-230.994
$\Delta Y$ (m)	-70.693	+102.591
$\Delta Z$ (m)	+117.445	+25.199
$R_x$ (")	-1.157	+0.633
$R_y$ (")	+0.059	-0.239
$R_z$ (")	-0.652	+0.900
$\alpha$ (ppm)	-4.058	+1.950

## EXERCÍCIO 6

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação entre as coordenadas geodésicas ( $\phi, \lambda, h$ ) - Fórmulas de Molodensky - de dois *data* distintos.

Ponto	
Datum 73	PT-TM06/ETRS89
$\phi = 40^\circ 36' 10''$ N	$\phi = 40^\circ 36' 12.92913''$ N
$\lambda = 6^\circ 51' 17''$ WGr	$\lambda = 6^\circ 51' 13.48258''$ WGr
$h = 826$ m	$h = 884.0728$ m

A transformação de Molodensky tem cinco parâmetros tendo a seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_n = \phi + \frac{-\Delta X \sin \phi \cos \lambda - \Delta Y \sin \phi \sin \lambda + \Delta Z \cos \phi + \Delta a \frac{e^2 N \sin \phi \cos \phi}{a} + \Delta f \sin \phi \cos \phi \left( \frac{a}{b} \rho + \frac{b}{a} N \right)}{\rho + h} \\ \lambda_n = \lambda + \frac{-\Delta X \sin \lambda + \Delta Y \cos \lambda}{(N + h) \cos \phi} \\ h_n = h + \Delta X \cos \phi \cos \lambda + \Delta Y \cos \phi \sin \lambda + \Delta Z \sin \phi - \Delta a \left( \frac{a}{N} \right) + \Delta f \left( \frac{b}{a} N \sin^2 \phi \right) \end{array} \right.$$

onde  $\phi_n, \lambda_n, h_n$  são a latitude, longitude (em radianos) e a altitude elipsoidal (em metros) a obter,  $\phi, \lambda, h$  são a latitude, longitude (em radianos) e a altitude elipsoidal (em metros) originais,  $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$  as componentes do vetor que une os centros dos dois elipsóides,  $a, b$  os semi-eixos maior e menor do elipsóide origem,  $e, f$  a primeira excentricidade e o achatamento do elipsóide origem,  $\Delta a, \Delta f$  a diferença entre os semi-eixos maiores e os achatamentos dos dois elipsóides,  $N$  o raio de curvatura do primeiro vertical (Grande Normal) e  $\rho$  o raio de curvatura do meridiano.

$$b = a \cdot (1 - f)$$

De seguida apresentam-se os parâmetros da transformação de Molodensky do datum Lisboa e datum 73 para PT-TM06-ETRS89 retirados do sítio da Direção-Geral do Território (<https://www.dgterritorio.gov.pt/geodesia/transformacao-coordenadas/portugal-continental>) em fevereiro de 2021.

Parâmetros de Transformação de Molodensky do Datum Lisboa e Datum 73 para PT-TM06-ETRS89		
	Datum Lisboa para PT-TM06/ETRS89	Datum 73 para PT-TM06/ETRS89
$\Delta X$ (m)	-303.861	-223.150
$\Delta Y$ (m)	-60.693	+110.132
$\Delta Z$ (m)	+103.607	+36.711
$\Delta a$ (m)	-251.000	-251.000
$\Delta f$ (m)	$-1.4192686 \times 10^{-5}$	$-1.4192686 \times 10^{-5}$



## EXERCÍCIO 7

Executar um programa, numa linguagem escolhida pelos alunos, que realize a transformação entre as coordenadas retangulares ( $M, P$ ) - Transformação Polinomial - de dois *data* distintos.

Ponto	
Datum 73	PT-TM06/ETRS89
$M = 20\,000\text{ m}$	$M = 19\,999.7773\text{ m}$
$P = 20\,000\text{ m}$	$P = 20\,000.1413\text{ m}$
$h = 100\text{ m}$	$h = 155.6977\text{ m}$

A transformação polinomial de grau 2 permite transformar coordenadas retangulares num determinado datum nas coordenadas retangulares num outro datum:

$$M_n = a_0 + a_1u + a_2v + a_3u^2 + a_4uv + a_5v^2$$

$$P_n = b_0 + b_1u + b_2v + b_3u^2 + b_4uv + b_5v^2$$

onde  $M_n, P_n$  são as coordenadas rectangulares a obter,  $X, Y$  as coordenadas rectangulares originais,  $a_i, b_i$  os coeficientes de transformação,  $X_0, Y_0, h, k$  os parâmetros de normalização e  $u$  e  $v$  têm a seguinte forma:

$$u = \frac{X - X_0}{h} \quad v = \frac{Y - Y_0}{k}$$

De seguida apresentam-se os parâmetros da transformação polinomial do datum Lisboa e datum 73 para PT-TM06-ETRS89 retirados do sítio da Direção-Geral do Território (<https://www.dgterritorio.gov.pt/geodesia/transformacao-coordenadas/portugal-continental>) em fevereiro de 2021.

Coeficientes de Transformação Polinomial de Grau 2 do Datum Lisboa e Datum 73 para PT-TM06-ETRS89		
	Datum Lisboa para PT-TM06/ETRS89	Datum 73 para PT-TM06/ETRS89
$a_0$	+1.38051	+0.28961
$a_1$	+129998.56256	+129999.16977
$a_2$	-1.69483	-5.26888
$a_3$	-0.57226	+0.32257
$a_4$	-2.9606	-0.87853
$a_5$	-2.45601	-1.22237
$b_0$	+0.80894	-0.08867
$b_1$	+1.31669	+2.39595
$b_2$	+279995.74505	+279997.91435
$b_3$	+0.24888	+0.15146
$b_4$	+2.65999	+1.11109
$b_5$	-3.86484	-1.06143
$x_0$	0	0
$y_0$	0	0
$h$	+130000	+130000
$k$	+280000	+280000

## EXERCÍCIO 8

Considerando as coordenadas geodésicas e as correspondentes coordenadas retangulares dos vértices geodésicos ABOBOREIRA (Beja, Baixo Alentejo) e CABEÇUDO (Mogadouro, Trás-os-Montes), calcule a:

Coordenadas PT-TM06-ETRS89	V.G. Aboboreira	V.G. Cabeçudo
<b>Geodésicas ou geográficas (<math>\phi, \lambda</math>)</b>	$\phi = 37^\circ 53' 58.7635''$ N $\lambda = 07^\circ 43' 07.2999''$ W Gr	$\phi = 41^\circ 19' 50.6809''$ N $\lambda = 06^\circ 26' 02.2698''$ W Gr
<b>Retangulares (<math>M, P</math>)</b>	$M = 36\,448.61$ m $P = -196\,253.96$ m	$M = 142\,243.53$ m $P = 186\,002.69$ m

- deformação linear  $k$  em cada um dos vértices;
- convergência de meridianos  $\gamma$  em cada um dos vértices;
- correção tangente à corda  $\beta''$  para a distância entre os 2 vértices;
- correção de redução dos comprimentos finitos  $s_1 - s$  para a distância entre os 2 vértices<sup>(1)</sup>.

$$k = 1 + \frac{x^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot N_0}$$

$$\gamma = -(\lambda - \lambda_0) \cdot \sin \phi$$

$$\beta'' = \frac{1}{6 \cdot \rho_0 \cdot N_0 \cdot \sin 1''} \cdot (2 \cdot x_A + x_B) \cdot (y_B - y_A)$$

$$s_1 - s = \frac{s_1}{6 \cdot \rho_0 \cdot N_0} \cdot (x_B^2 + x_B \cdot x_A + x_A^2)$$

<sup>(1)</sup> Para calcular o valor de  $s_1$ , ou seja a geodésica entre os 2 vértices geodésicos, aceda ao seguinte link:  
<https://geographiclib.sourceforge.io/cgi-bin/GeodSolve>

## Online geodesic calculations using the [GeodSolve](#) utility

Geodesic calculation:

- ☒ Inverse:  $lat1\ lon1\ lat2\ lon2 \rightarrow azi1\ azi2\ s12$
- ☐ Direct:  $lat1\ lon1\ azi1\ s12 \rightarrow lat2\ lon2\ azi2$

Input (ex. «40.6 -73.8 49°01'N 2°33'E» [inverse], «40d38'23"N 073d46'44"W 53d30' 5850e3» [direct]):

41.33074469 -6.433963833 37.89965653 -7.718694417

Output format: ☒ decimal degrees ☐ degrees minutes seconds  
 Heading at point 2: ☒ forward azimuth ☐ back azimuth  
 Longitude: ☒ reduce to  $[-180^\circ, 180^\circ]$  ☐ unroll  
 Output precision:   
 Equatorial radius:  meters  
 Flattening:

Select action:

Geodesic (input in black, output in blue):

```

ellipsoid (a f)      = 6378137 1/298.257222101
status               = OK

lat1 lon1 fazi1 (°) = 41.33074469 -6.43396383 -163.43634739
lat2 lon2 fazi2 (°) = 37.89965653 -7.71869442 -164.25591684
s12 (m)              = 396583.142
  
```

## EXERCÍCIO 9

Sabendo que os coeficientes da expressão do módulo da deformação linear na projeção de Bonne são respetivamente  $e = 1 + \lambda^2 (\sin \phi - r/R)^2$ ,  $f = -\lambda (\sin \phi - r/R)$ ,  $g = 1$ , calcule os:

- elementos da elipse de Tissot (semieixo maior e menor e respetivas direções);
- módulos da deformação angular máxima e os respetivos azimutes dessas deformações;

para um ponto com as seguintes coordenadas  $\phi = 50^\circ$  N,  $\lambda = 10^\circ$  EGr, sobre o elipsóide de Hayford ( $a = 6\,378\,388$  m;  $f = 1/297$ ). Considere o seguinte valor para a latitude da origem da projeção  $\phi_0 = 45^\circ$  N.

$$R = R_0 - \sigma$$

$$R_0 = N_0 \cdot \cot \phi_0$$

$$r = N \cdot \cos \phi$$

$$\begin{cases} k_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[ (e+g) + \sqrt{(e-g)^2 + 4 \cdot f^2} \right]} \\ k_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[ (e+g) - \sqrt{(e-g)^2 + 4 \cdot f^2} \right]} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2f}{(e-g)}$$

$$\operatorname{tg} \delta_m = \pm \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} - \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \right)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \pm \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

nestas equações  $e$ ,  $f$  e  $g$  são os valores das equações que se encontram em cima no enunciado do exercício, enquanto que nas expressões seguintes  $a$ ,  $e$  e  $f$ , referem-se, respetivamente, ao semieixo maior, à excentricidade e achatamento do elipsóide.

$$e^2 = f \cdot (2 - f)$$

$$N = \frac{a}{\left(1 - e^2 \cdot \sin^2 \phi\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\sigma = a \cdot (1 - e^2) \cdot \left\{ A \cdot (\phi - \phi_0) - \frac{B}{2} \cdot (\sin 2\phi - \sin 2\phi_0) + \frac{C}{4} \cdot (\sin 4\phi - \sin 4\phi_0) - \frac{D}{6} \cdot (\sin 6\phi - \sin 6\phi_0) + \frac{E}{8} \cdot (\sin 8\phi - \sin 8\phi_0) - \frac{F}{10} \cdot (\sin 10\phi - \sin 10\phi_0) \right\}$$