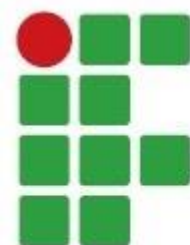


Algoritmos e Estruturas de Dados IV



INSTITUTO FEDERAL
Goiano

Campus
Iporá

Bacharelado em Ciência da Computação
2021/2

Prof. Thamer Horbylon Nascimento

thamer.nascimento@ifgoiano.edu.br

Árvores Balanceadas

Árvores AVL

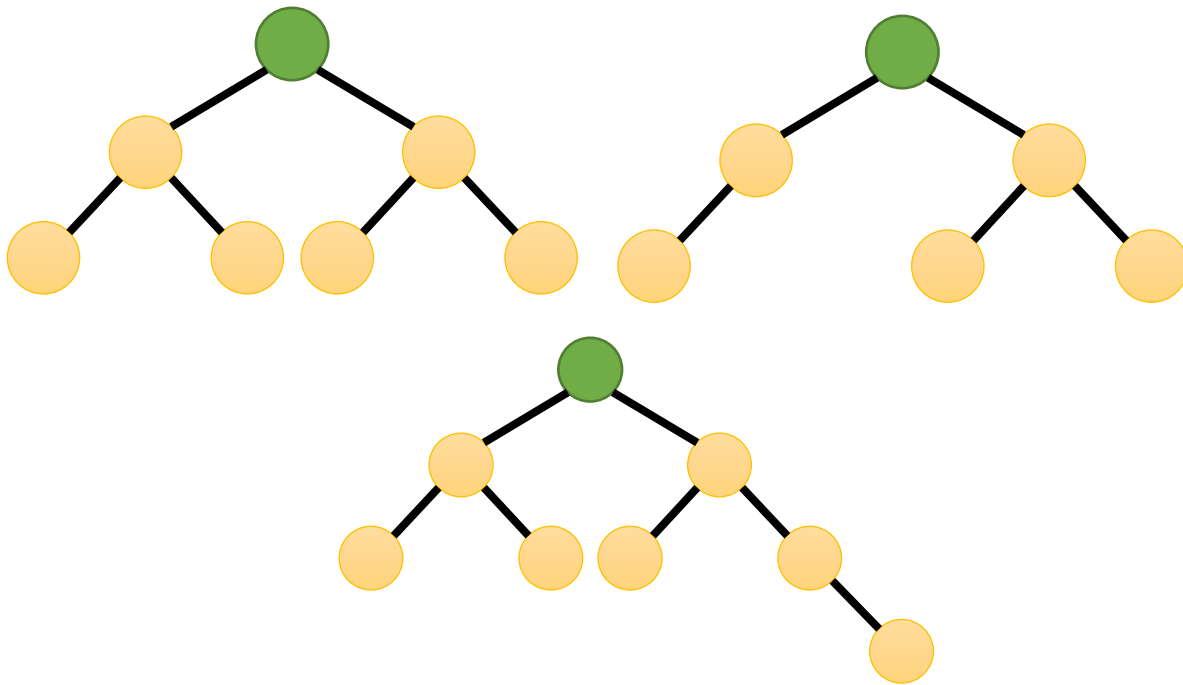
Árvores AVL

- Subtipo de árvore binária de busca.
- O nome AVL é derivado de seus criadores:
 - Adelson-Velskii e E.M. Landis.
- Possui a propriedade de autobalanceamento dinâmico.

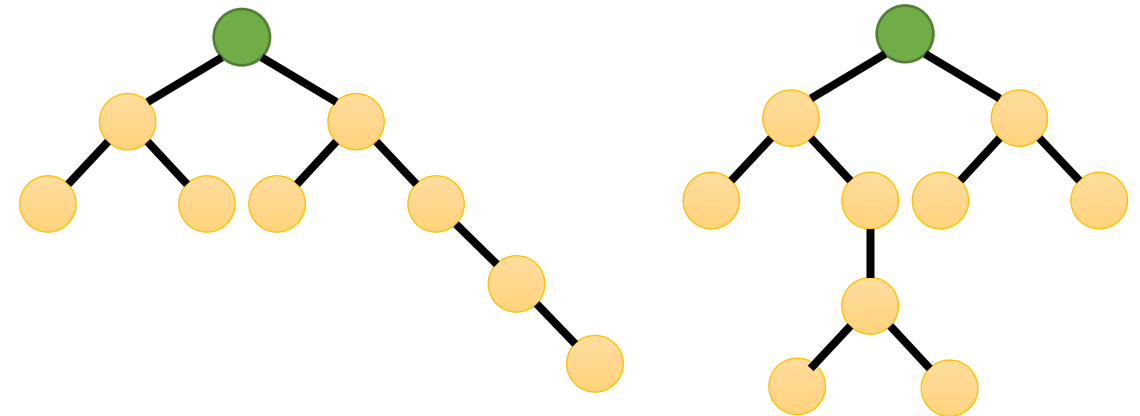
Árvores AVL

- Uma árvore é considerada balanceada se e somente se para qualquer nó, a altura de suas duas subárvores diferem de no máximo 1.
- Exemplos:

Árvores AVL



Árvores que não são AVL



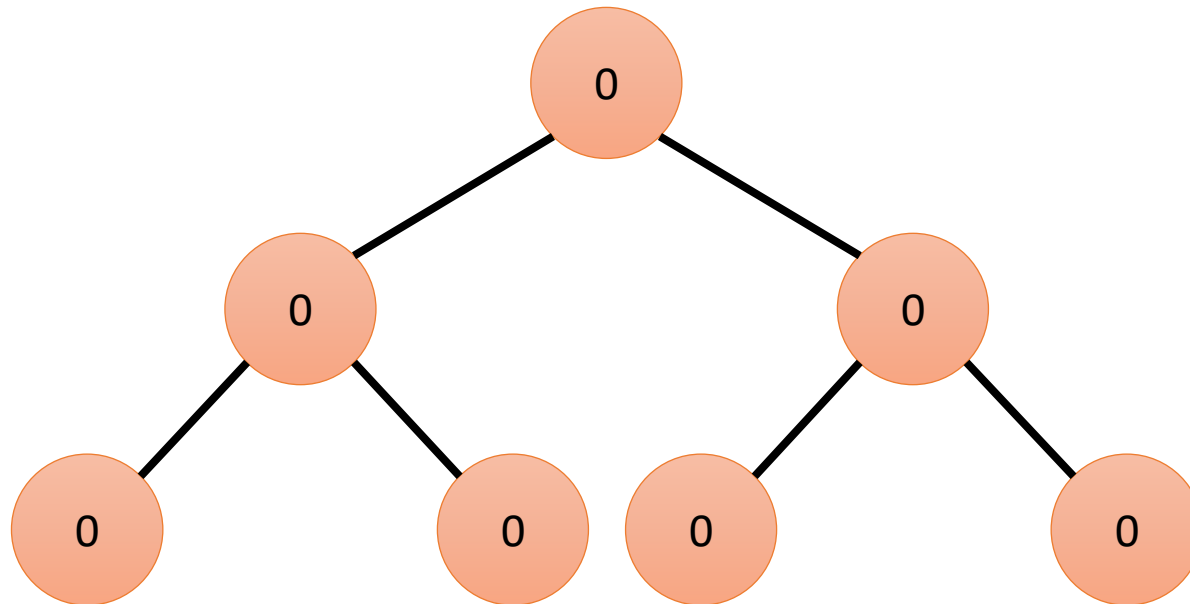
Definição

- Uma árvore vazia é uma árvore AVL.
- Sendo T uma árvore binária de busca com subárvores esquerda L e direita R , T será uma árvore AVL se:
 - L e R forem árvores AVL.
 - Fator de balanceamento das subárvores for **-1**, **0** ou **1**.
 - $|hl - hr|$, que são as alturas das subárvores L e R , respectivamente.

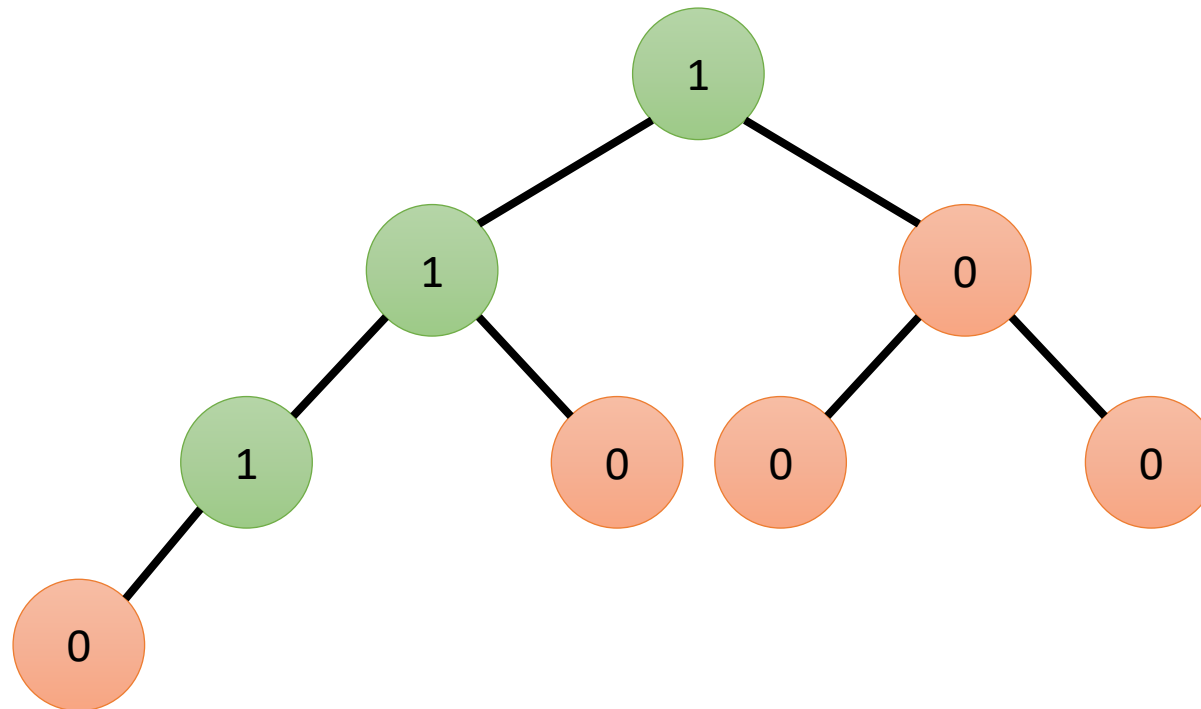
Árvores AVL

- Uma árvore é considerada balanceada se e somente se para qualquer nó, a altura de suas duas subárvores diferem de no máximo 1.
- Para preservar esta característica, a implementação deve incluir um algoritmo de rebalanceamento.
- A complexidade no pior caso de inserção, busca e exclusão é $O(\log n)$.

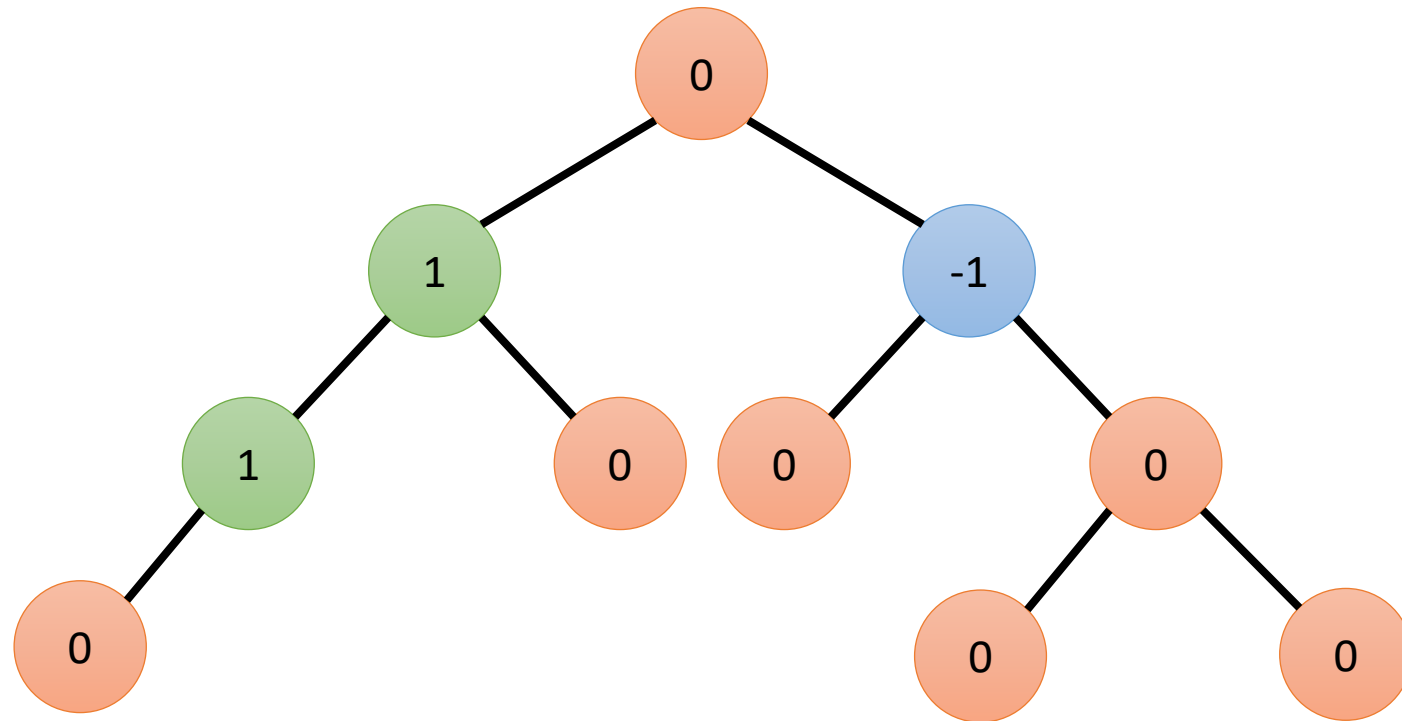
Fator de Balanceamento



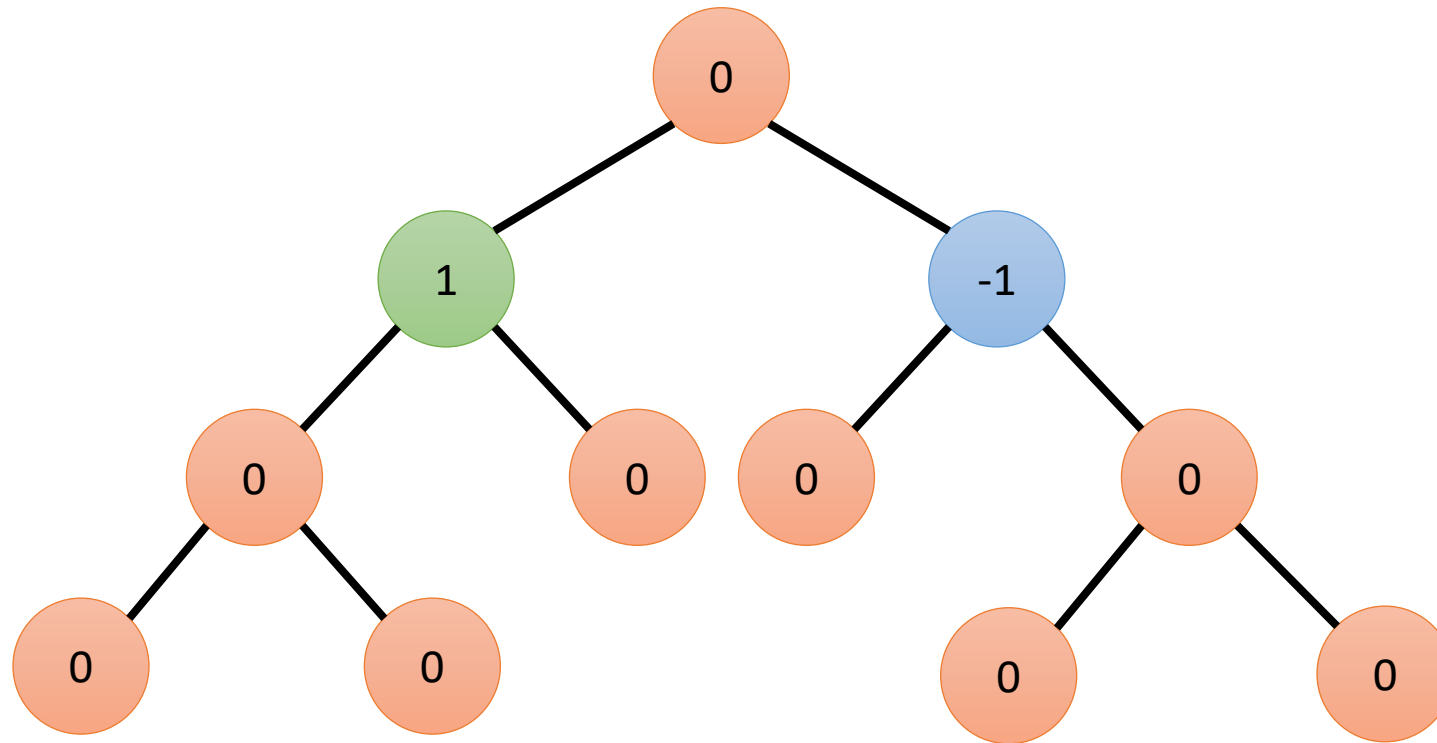
Fator de Balanceamento



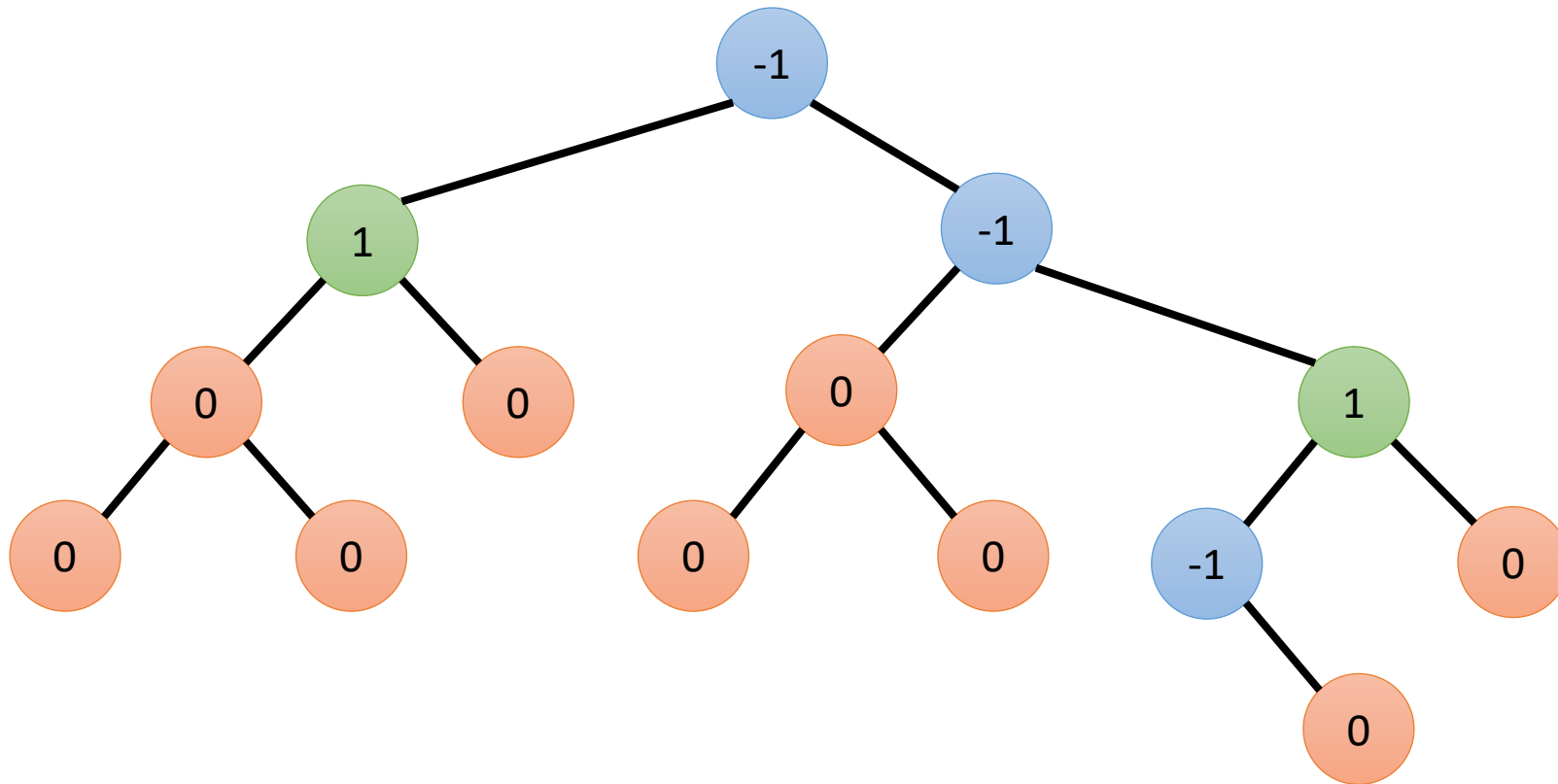
Fator de Balanceamento



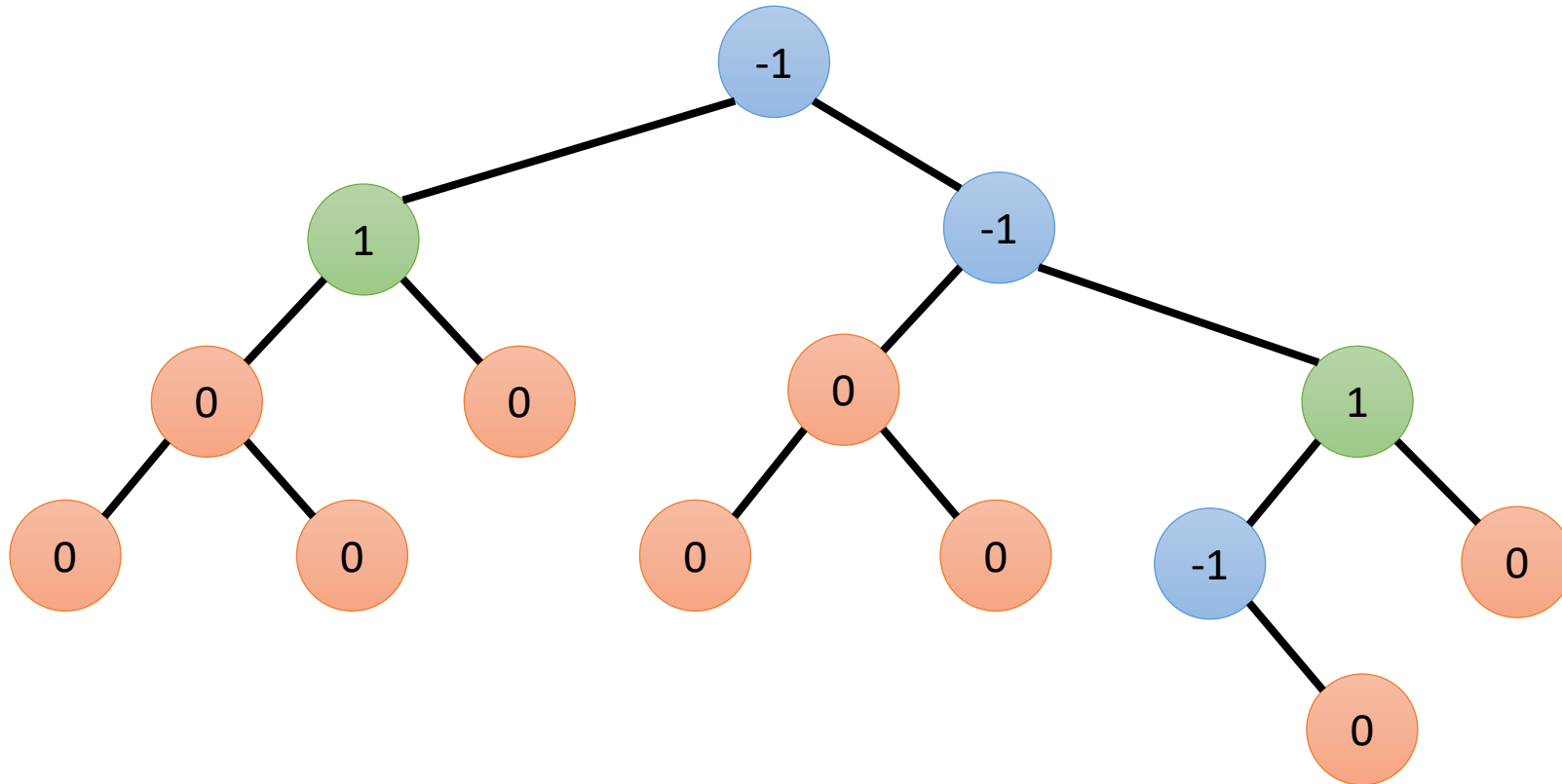
Fator de Balanceamento



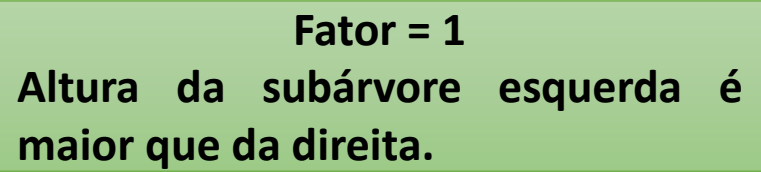
Fator de Balanceamento



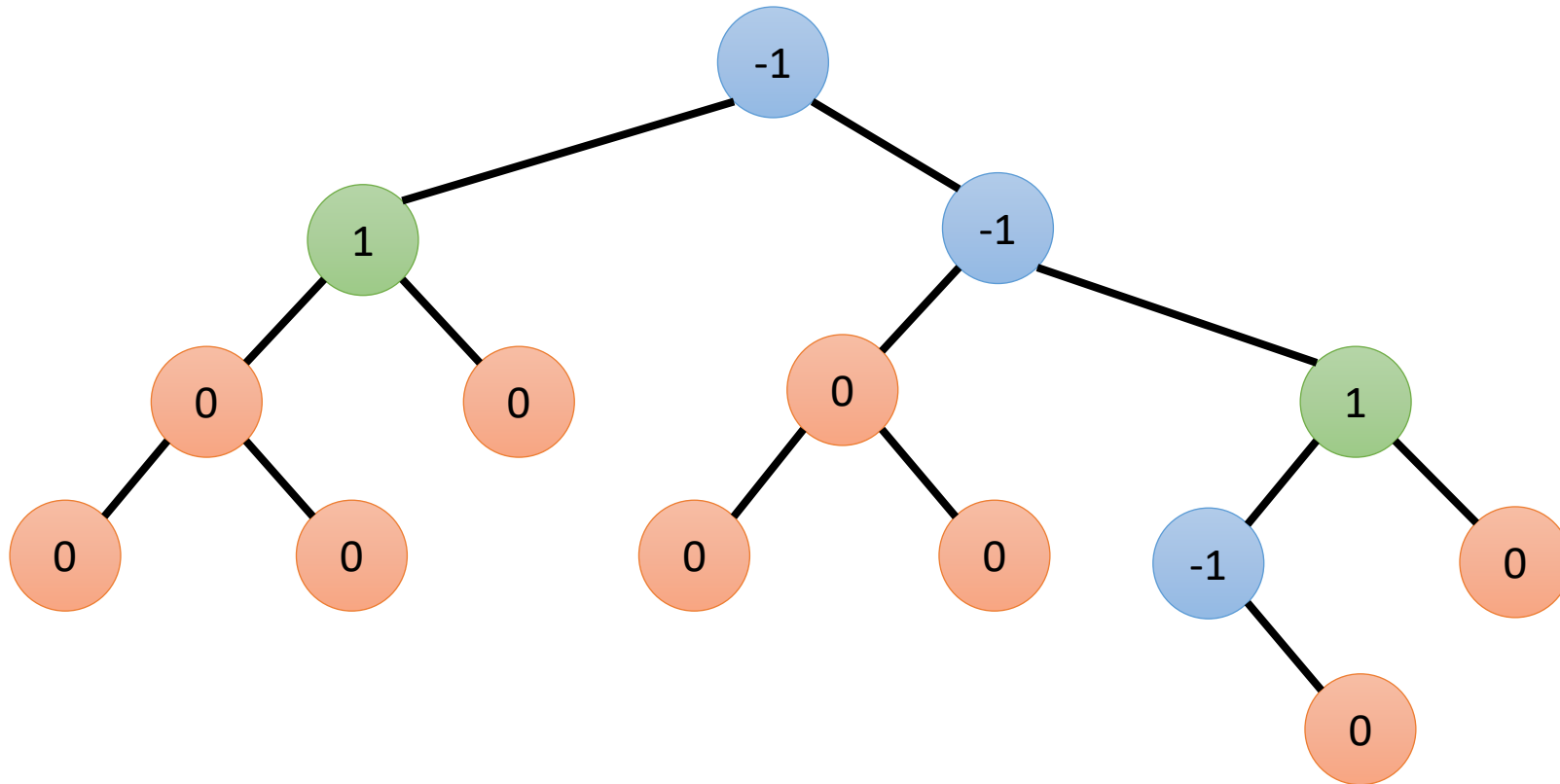
Fator de Balanceamento



Fator = 0
Alturas das subárvores são iguais.



Fator de Balanceamento



Fator = -1
Altura da subárvore direita é maior
que da esquerda.

Fator de Balanceamento

- Rotações:
 - Realizada se o fator de balanceamento não for: **-1, 0 ou 1**.

Rotações

- As posições dos nós de uma subárvore são intercambiáveis.
- Rotações simples:
 - Rotação para a esquerda.
 - Rotação para a direita.
- Combinações (rotações complexas):
 - Rotação Esquerda-direita.
 - Rotação Direita-esquerda.

Rotação para a Esquerda

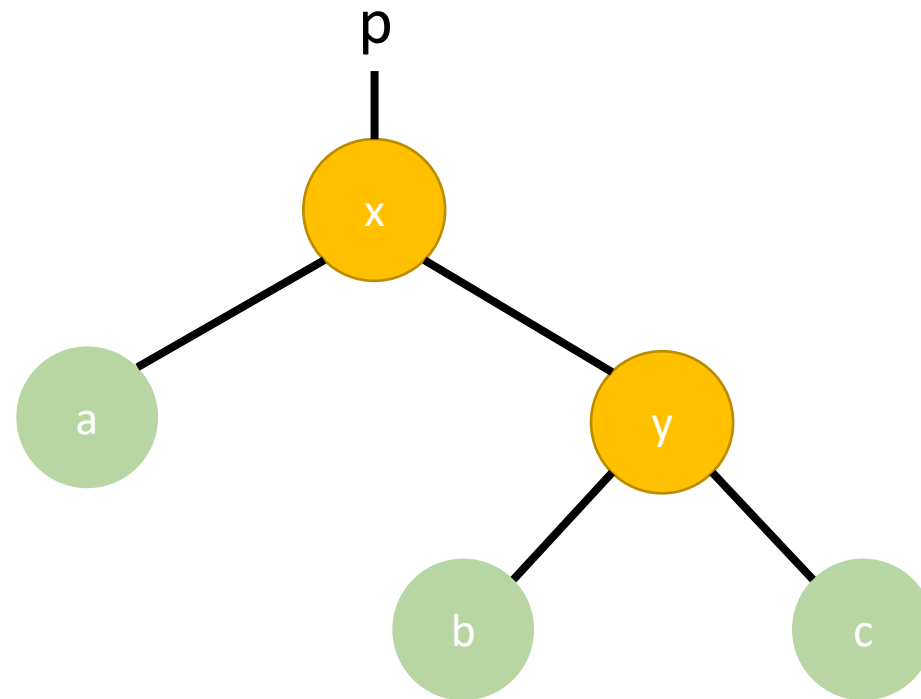
- Nó pai e direita, são transformados em nós esquerda e pai.

Rotação para a Esquerda

- Nó pai e direita, são transformados em nós esquerda e pai.
 - Pai → Esquerda.
 - Direita → Pai.

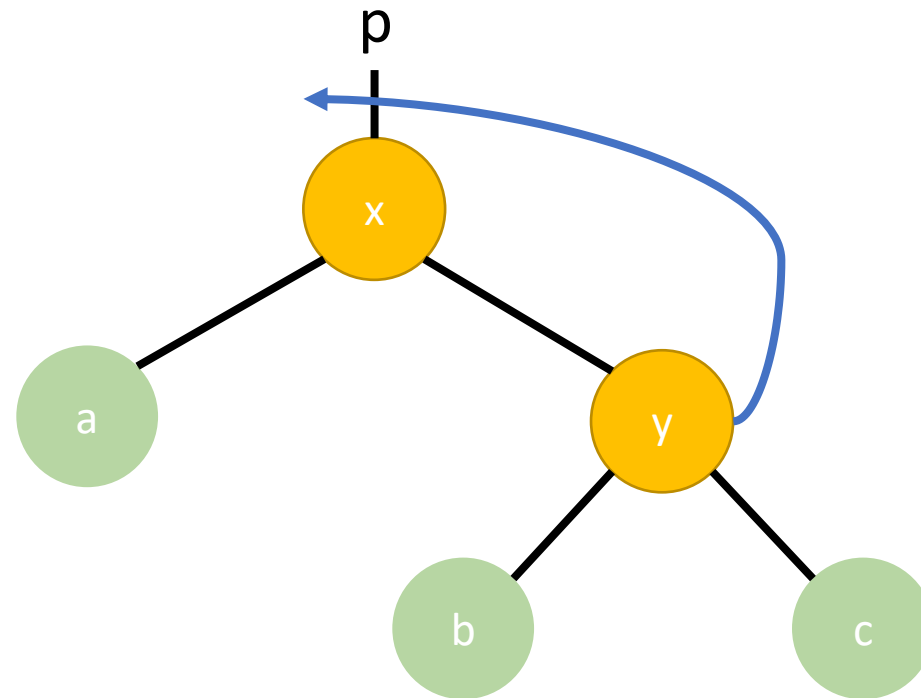
Rotação para a Esquerda

- Considere o nó inicial



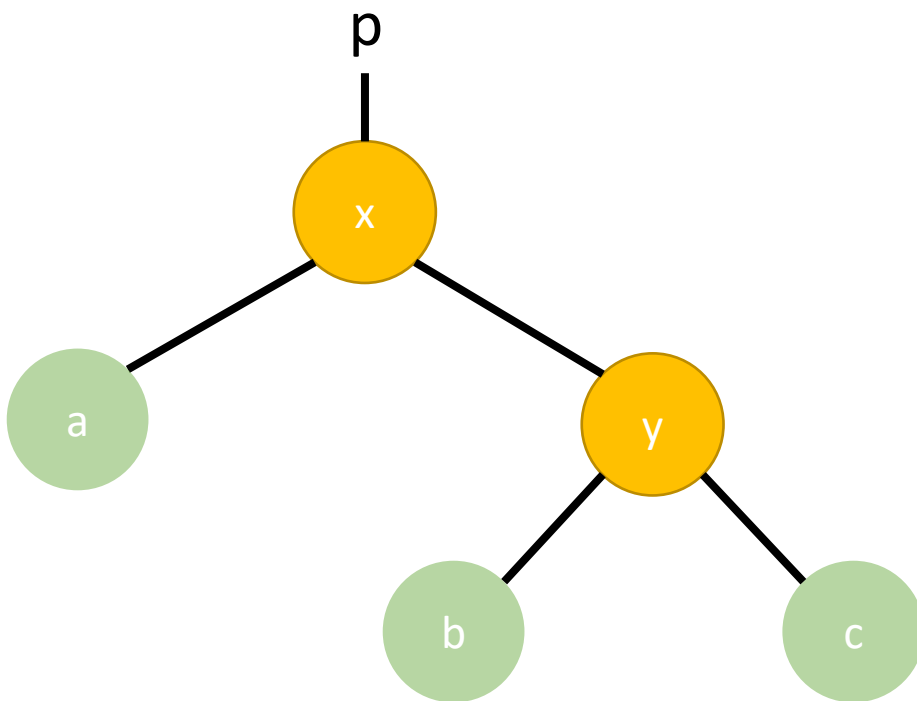
Rotação para a Esquerda

- Considere o nó inicial



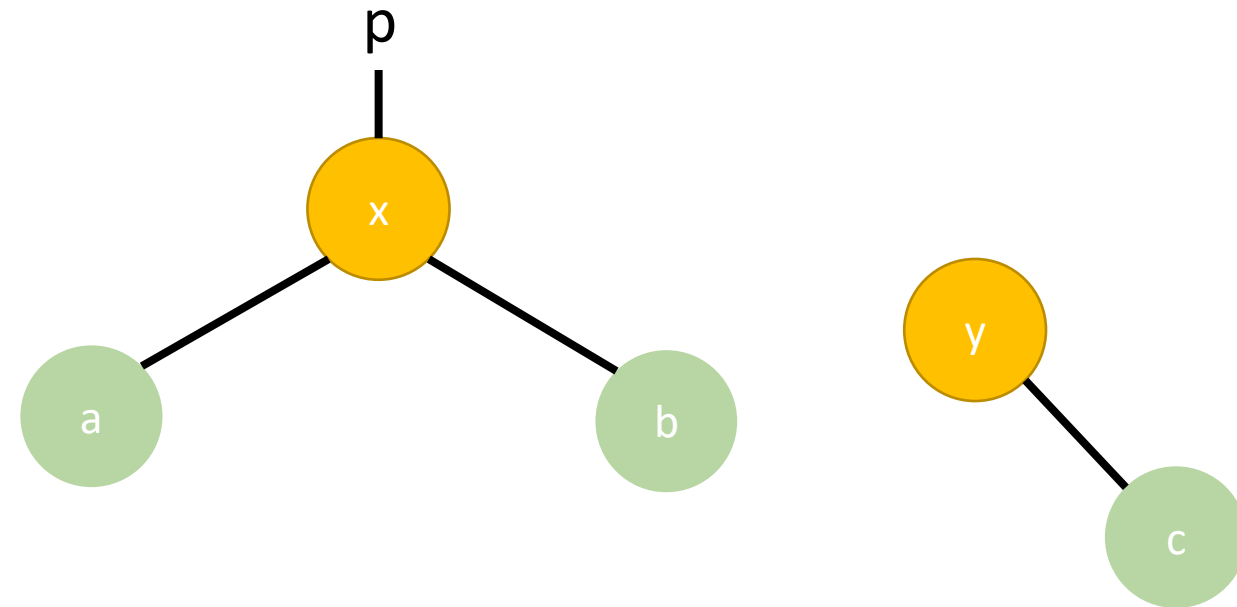
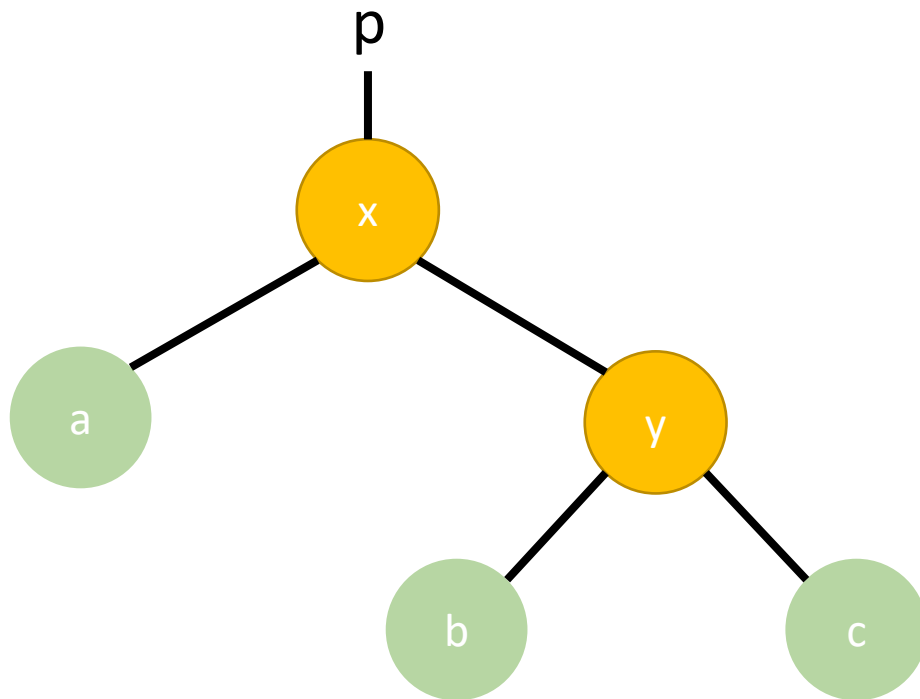
Rotação para a Esquerda

- Se **y** tem uma subárvore à esquerda, faça **x** pai da subárvore esquerda de **y**.



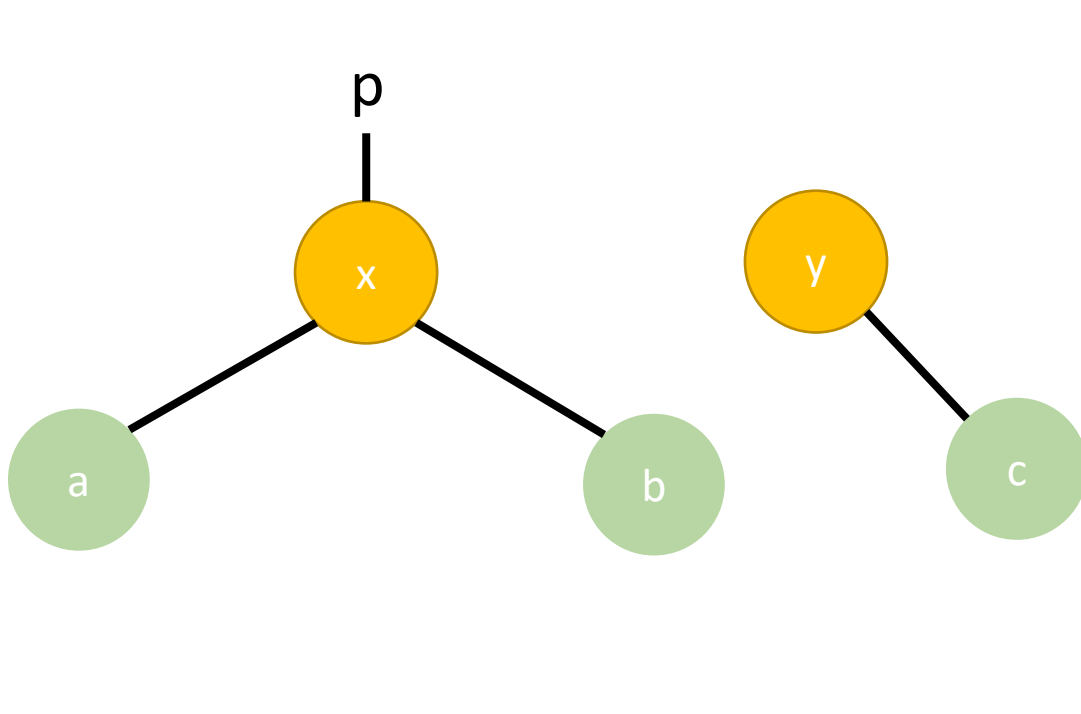
Rotação para a Esquerda

- Se **y** tem uma subárvore à esquerda, faça **x** pai da subárvore esquerda de **y**.



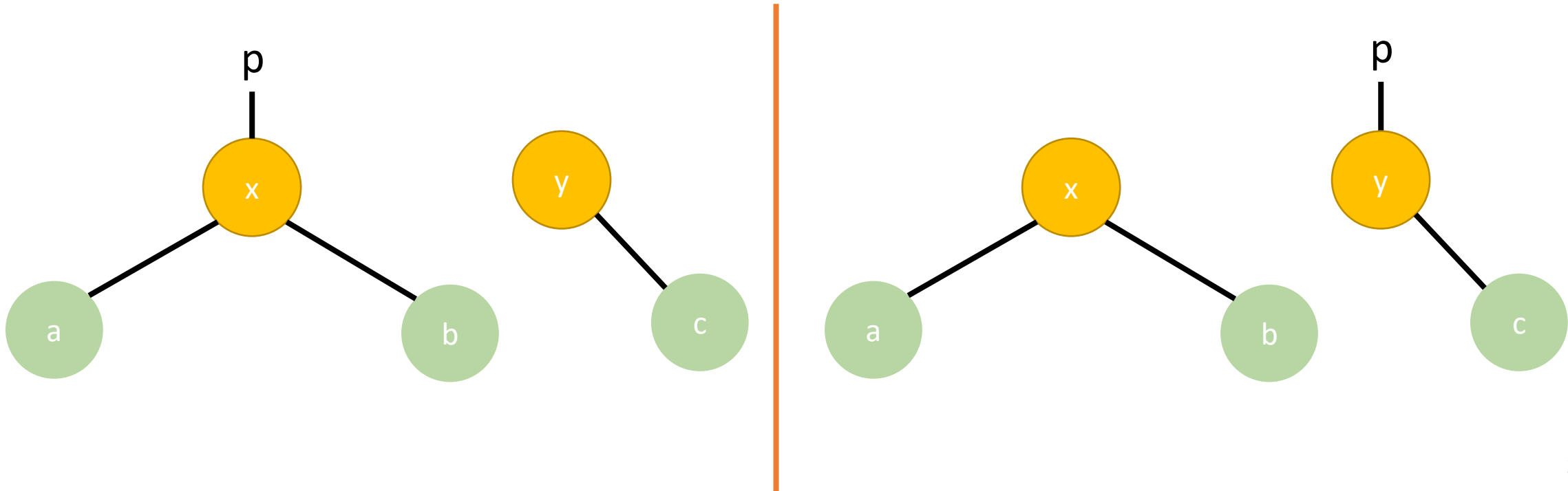
Rotação para a Esquerda

- Se x é a raiz, então, faça y a raiz da árvore.
- Senão, se x é filho à esquerda de p , faça y o filho à esquerda de p .
- Senão, faça y o filho à direita de p .



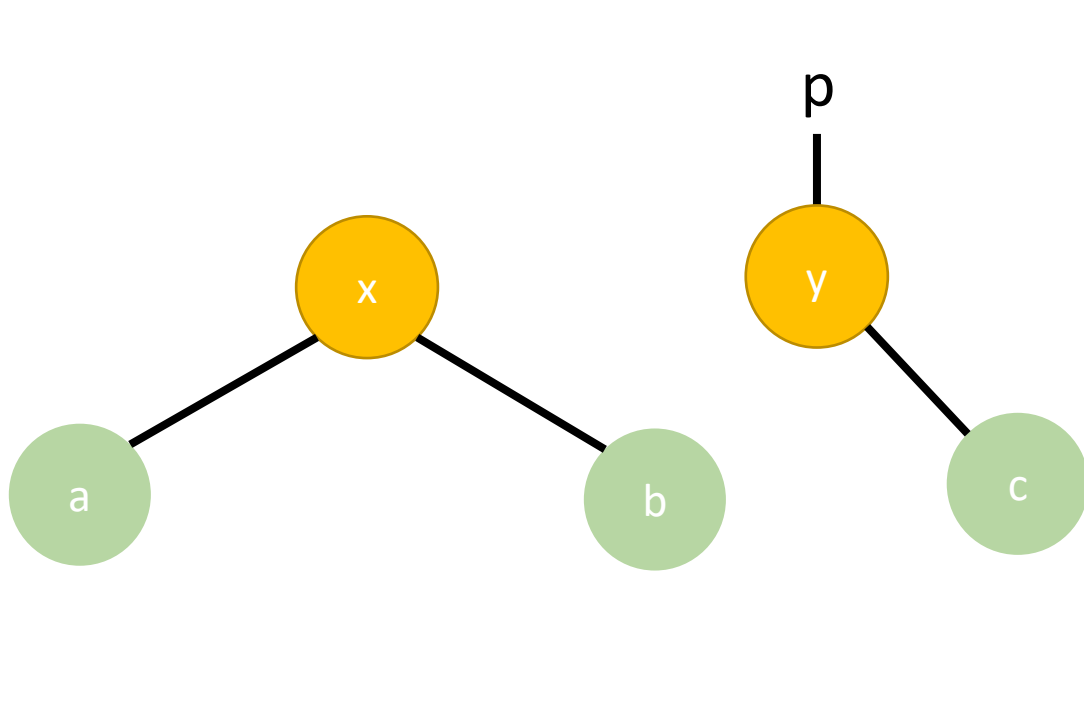
Rotação para a Esquerda

- Se x é a raiz, então, faça y a raiz da árvore.
- Senão, se x é filho à esquerda de p , faça y o filho à esquerda de p .
- Senão, faça y o filho à direita de p .



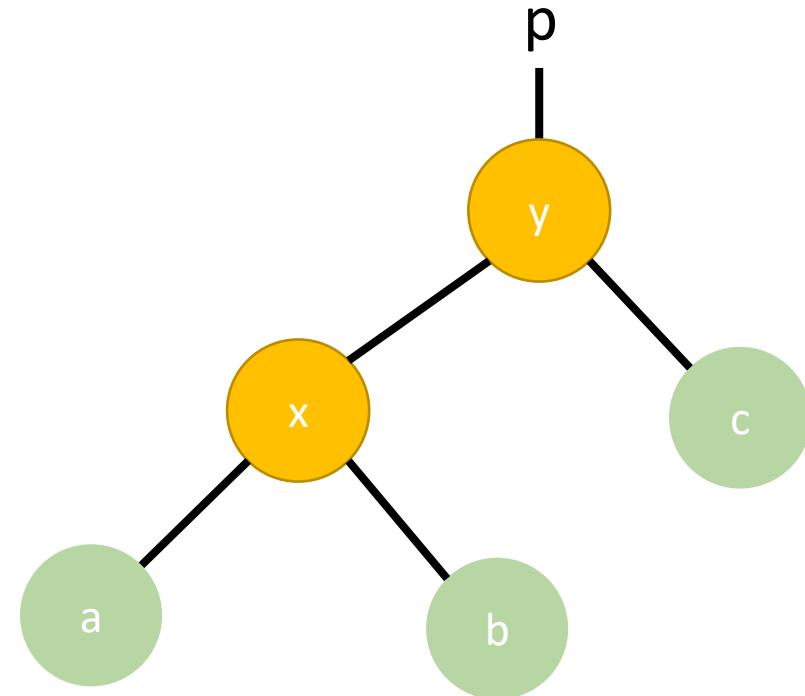
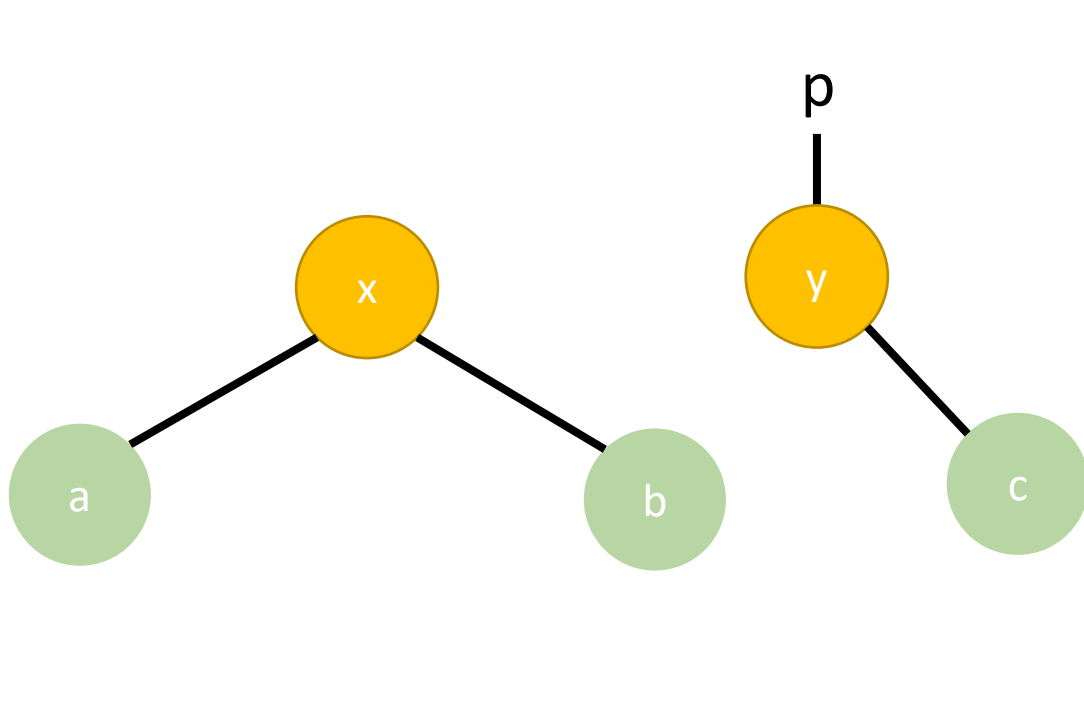
Rotação para a Esquerda

- Faça de x a subárvore à esquerda de y .

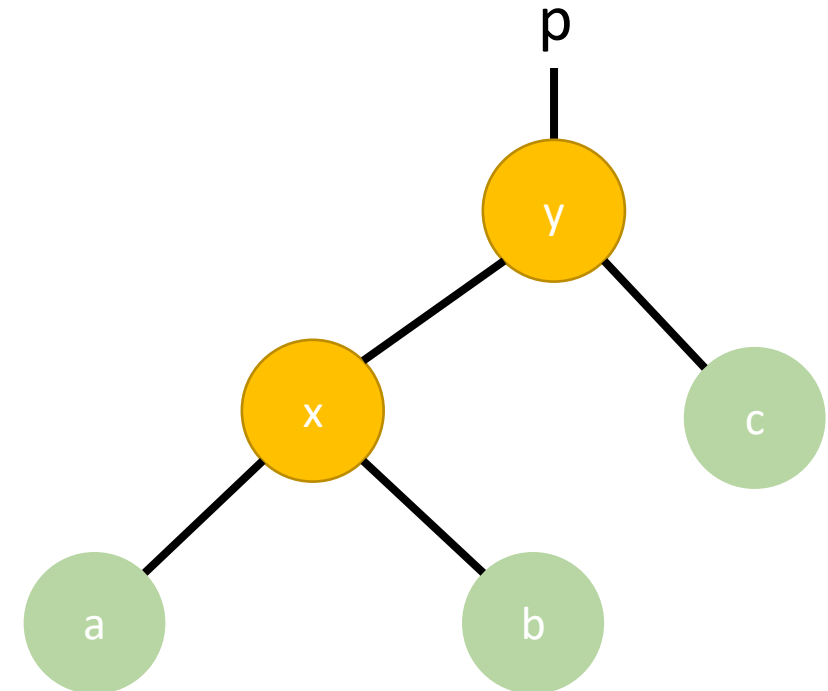
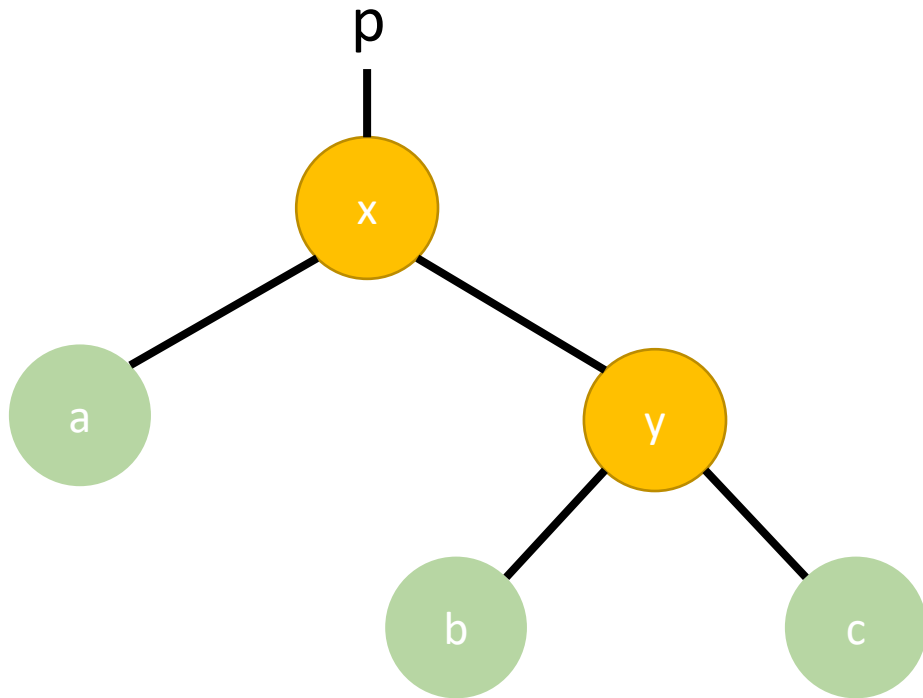


Rotação para a Esquerda

- Faça de x a subárvore à esquerda de y .

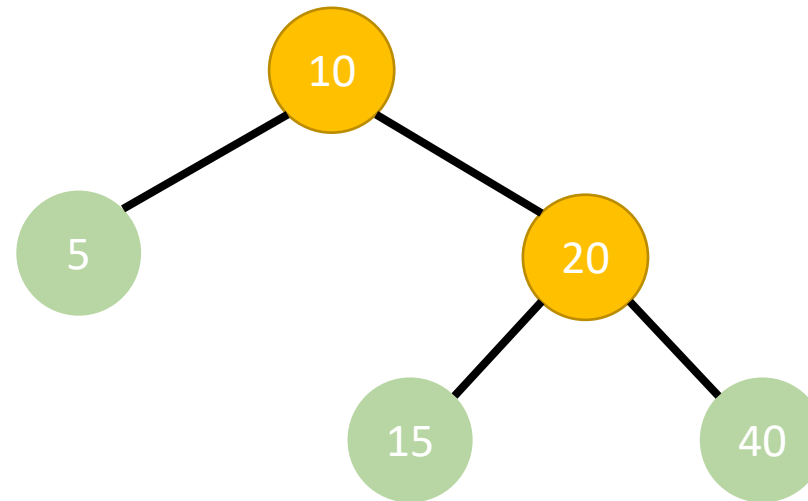


Rotação para a Esquerda



Exercícios

- Faça a rotação para a esquerda dos nós **10** e **20** da árvore abaixo.



- Utilizando como base o algoritmo de rotação para a esquerda, crie um algoritmo de rotação para a direita.

Rotação para a Direita

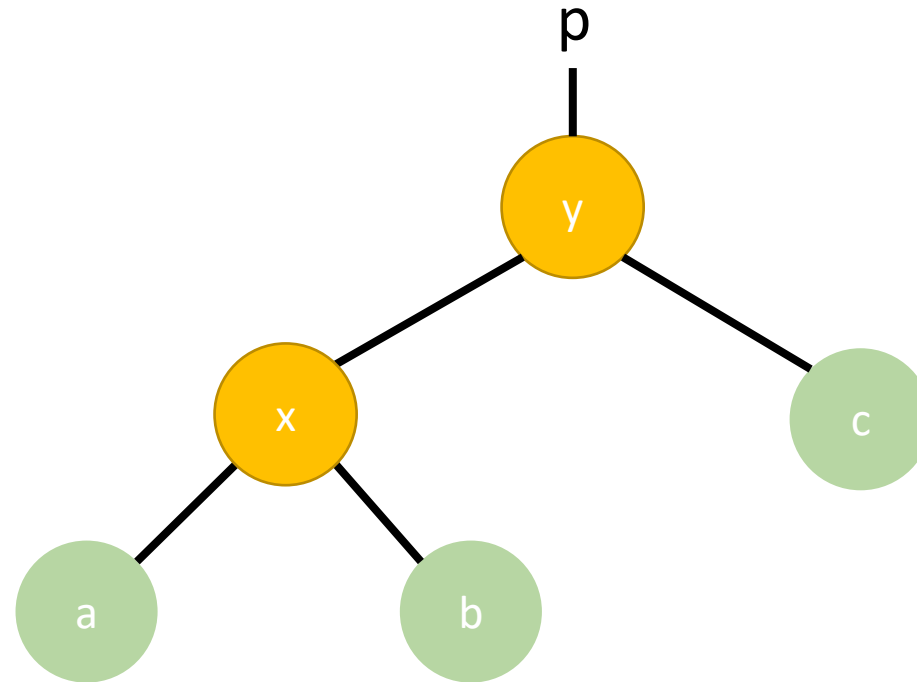
- Nó pai e esquerda, são transformados em nós direita e pai.

Rotação para a Direita

- Nó pai e esquerda, são transformados em nós direita e pai.
 - Pai → Direita.
 - Esquerda → Pai.

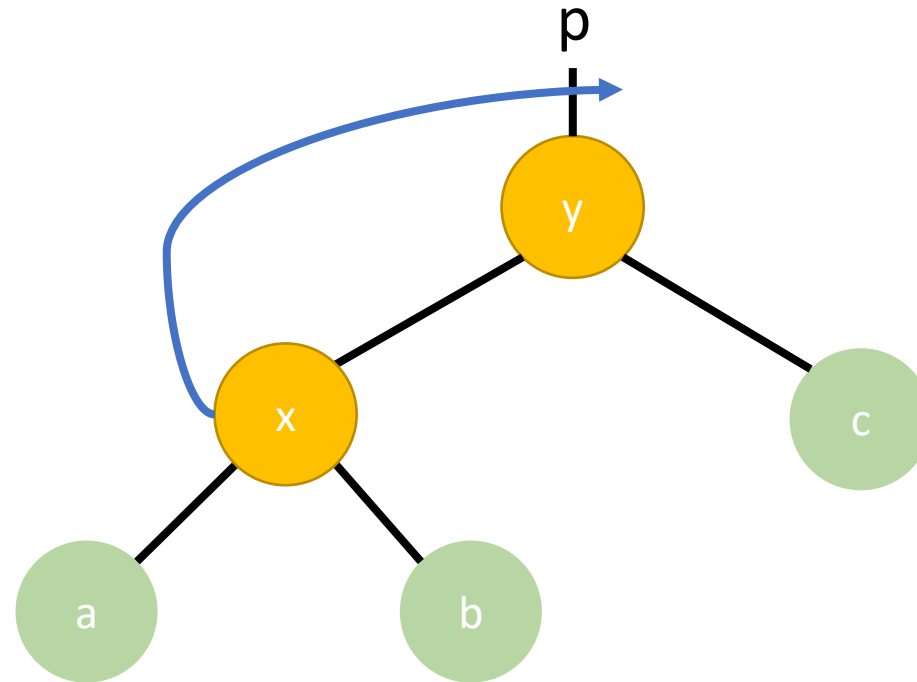
Rotação para a Direita

- Considere o nó inicial



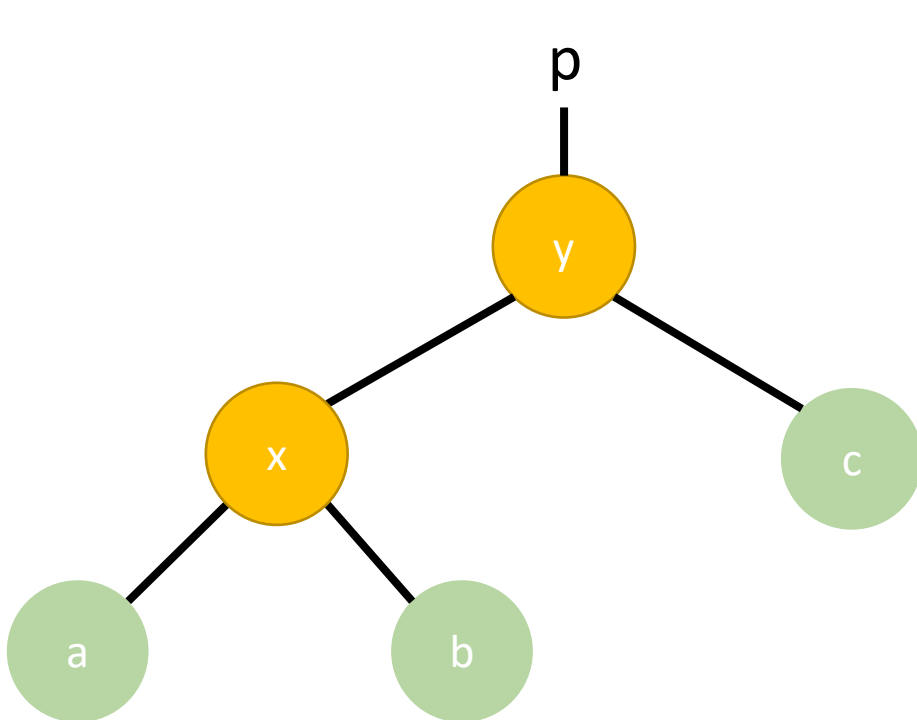
Rotação para a Direita

- Considere o nó inicial



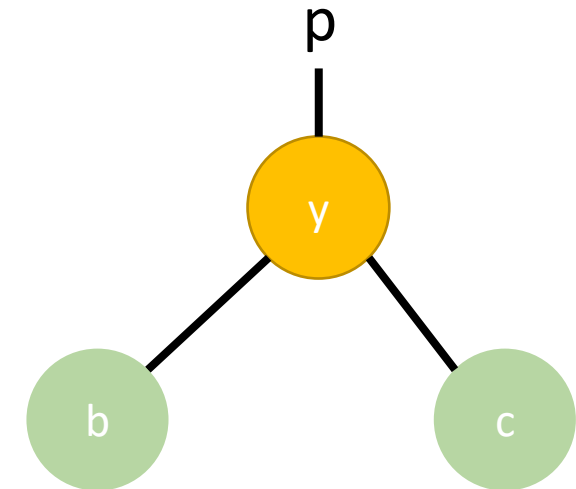
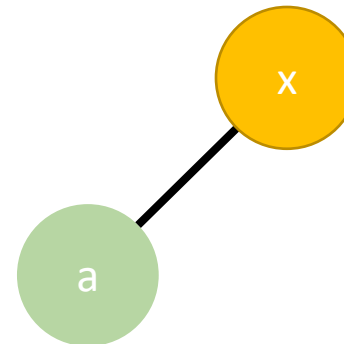
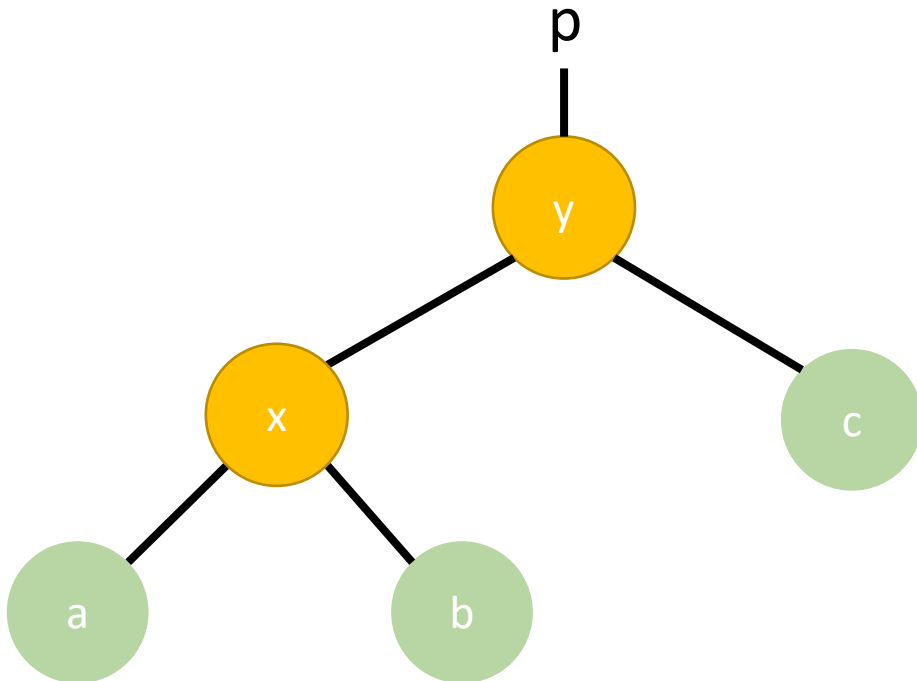
Rotação para a Direita

- Se x tem uma subárvore à direita, faça y pai da subárvore à direita de x .



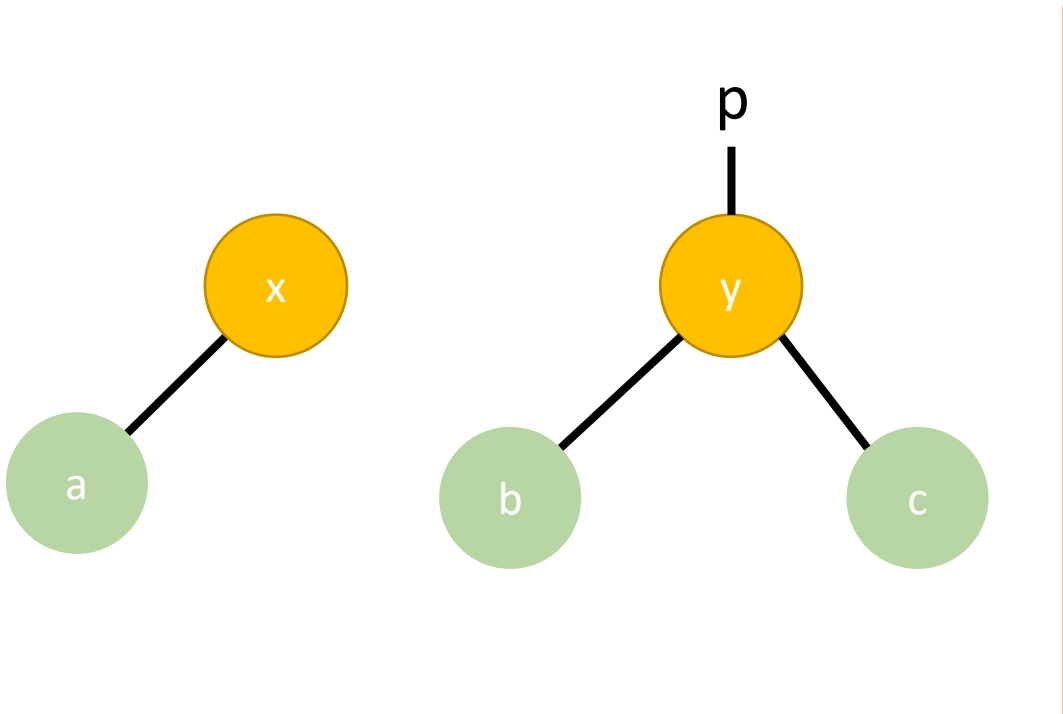
Rotação para a Direita

- Se x tem uma subárvore à direita, faça y pai da subárvore à direita de x .



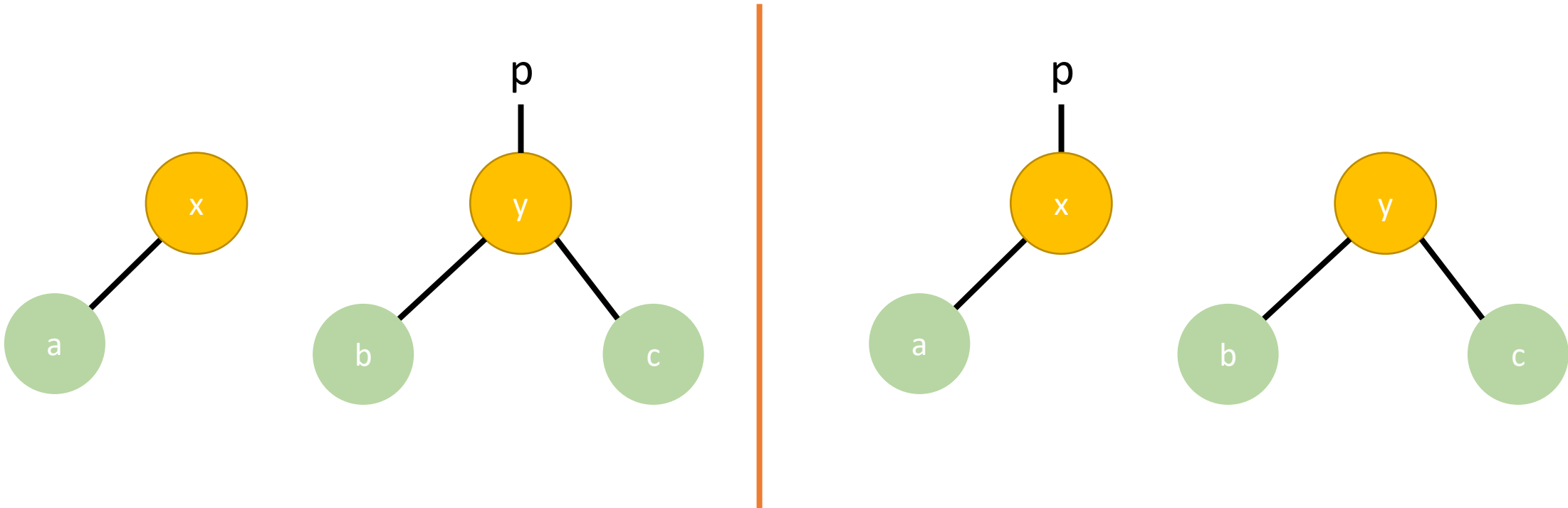
Rotação para a Direita

- Se y é a raiz, então, faça x a raiz da árvore.
- Senão, se y é filho à esquerda de p , faça x o filho à esquerda de p .
- Senão, faça x o filho à direita de p .



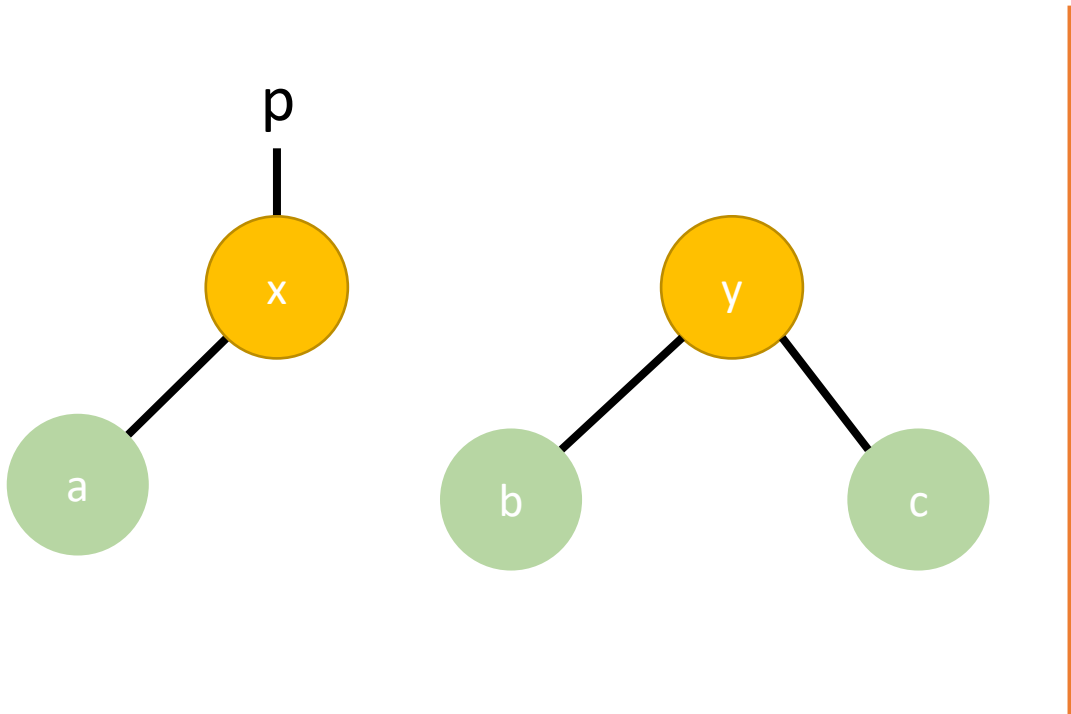
Rotação para a Direita

- Se y é a raiz, então, faça x a raiz da árvore.
- Senão, se y é filho à esquerda de p , faça x o filho à esquerda de p .
- Senão, faça x o filho à direita de p .



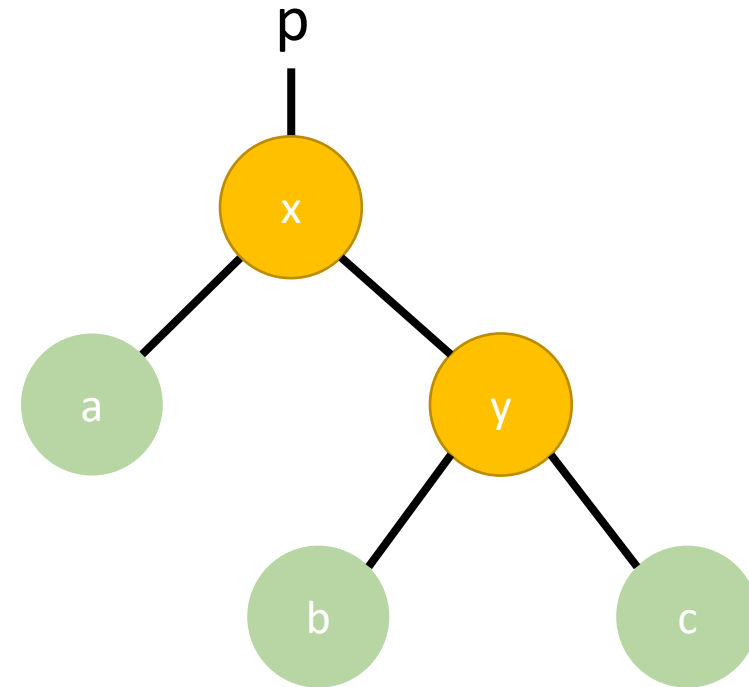
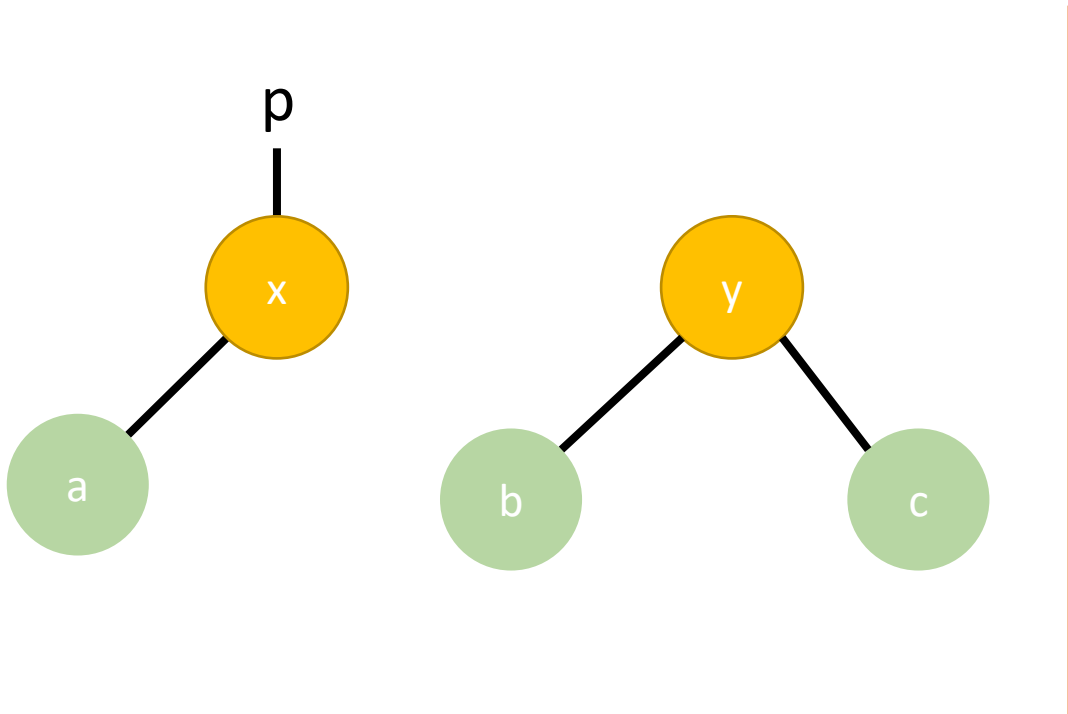
Rotação para a Direita

- Faça de **y** a subárvore à direita de **x**.

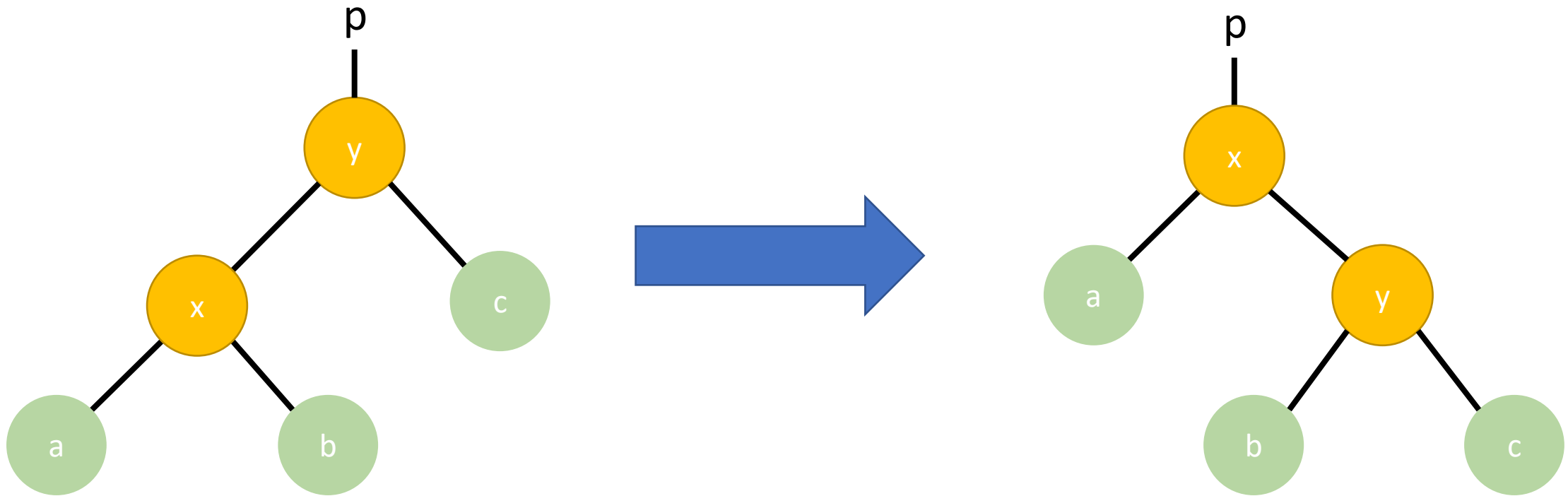


Rotação para a Direita

- Faça de **y** a subárvore à direita de **x**.

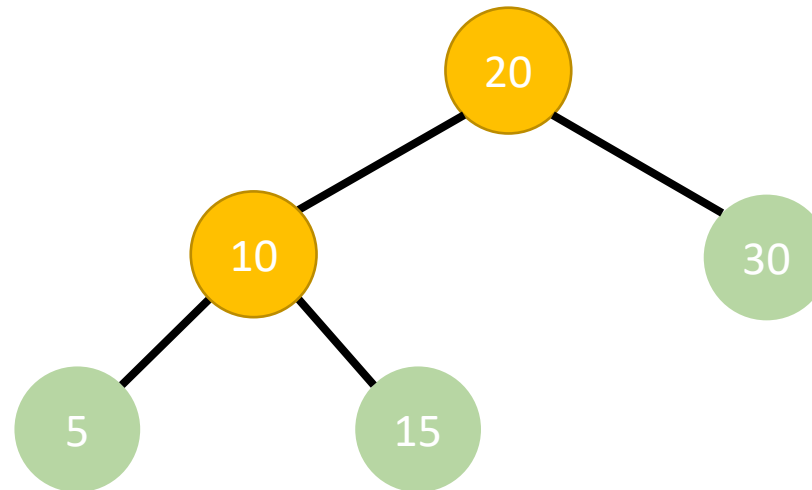


Rotação para a Direita



Exercícios

- Faça a rotação para a direita dos nós **10** e **20** da árvore abaixo.



Rotação Esquerda-Direita

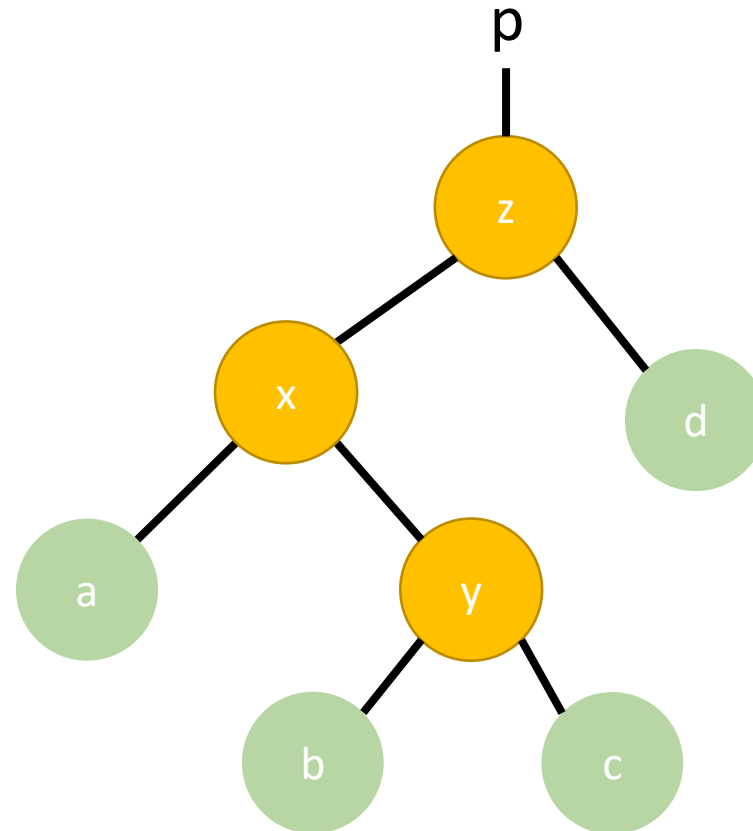
- Os nós são deslocados para a esquerda e depois para a direita.

Rotação Esquerda-Direita

- Os nós são deslocados para a esquerda e depois para a direita.

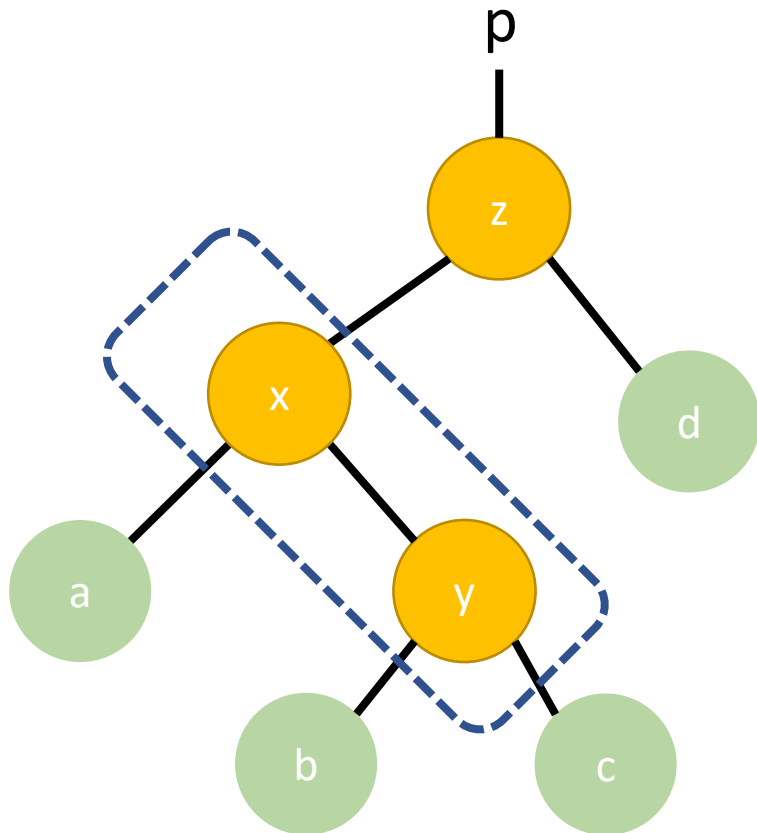
Rotação Esquerda-Direita

- Os nós são deslocados para a esquerda e depois para a direita.



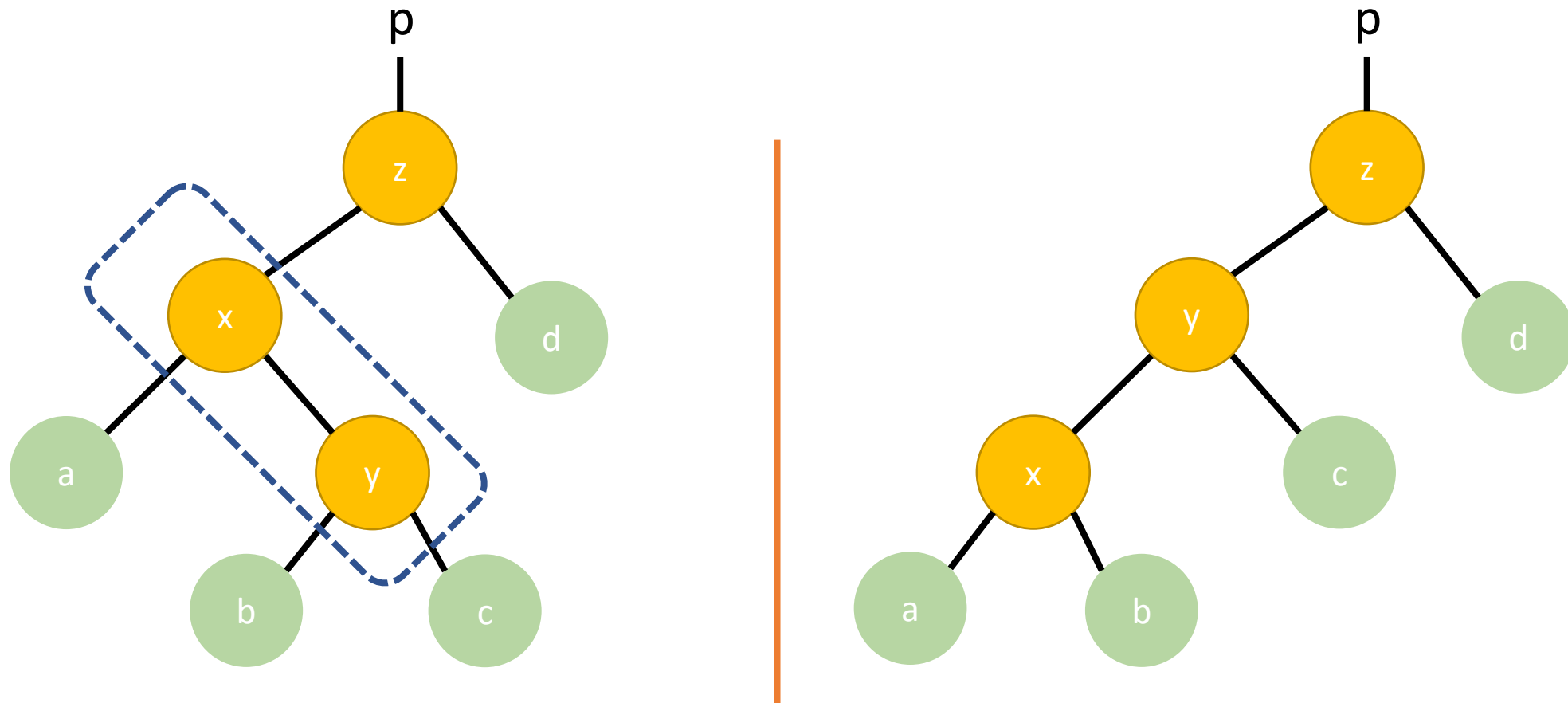
Rotação Esquerda-Direita

- Faça uma rotação à esquerda em **x** e **y**.



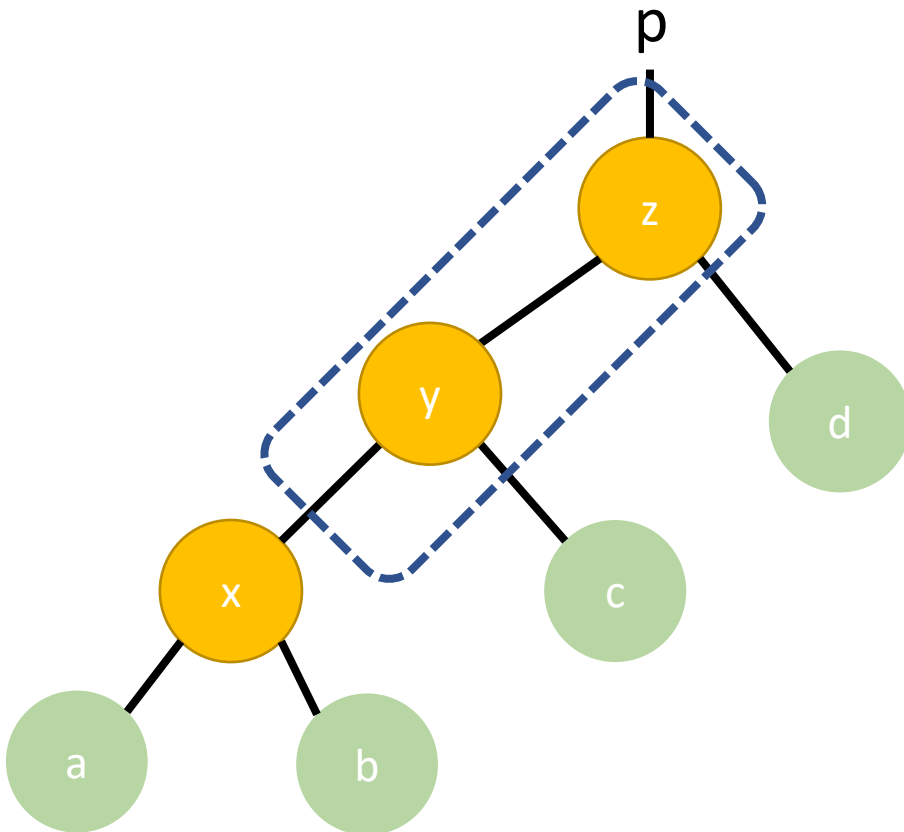
Rotação Esquerda-Direita

- Faça uma rotação à esquerda em **x** e **y**.



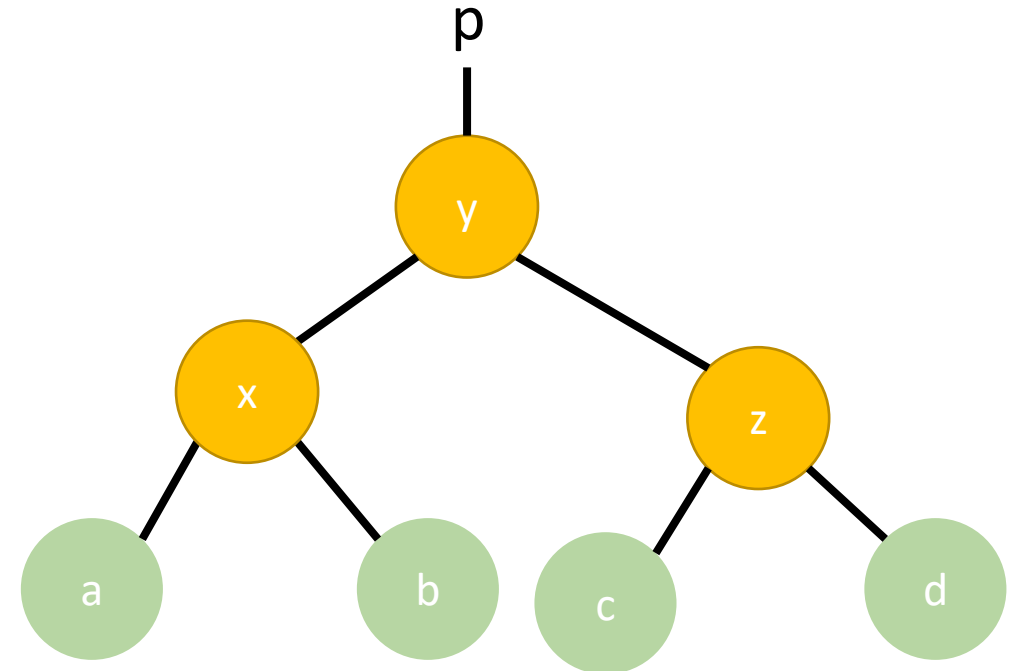
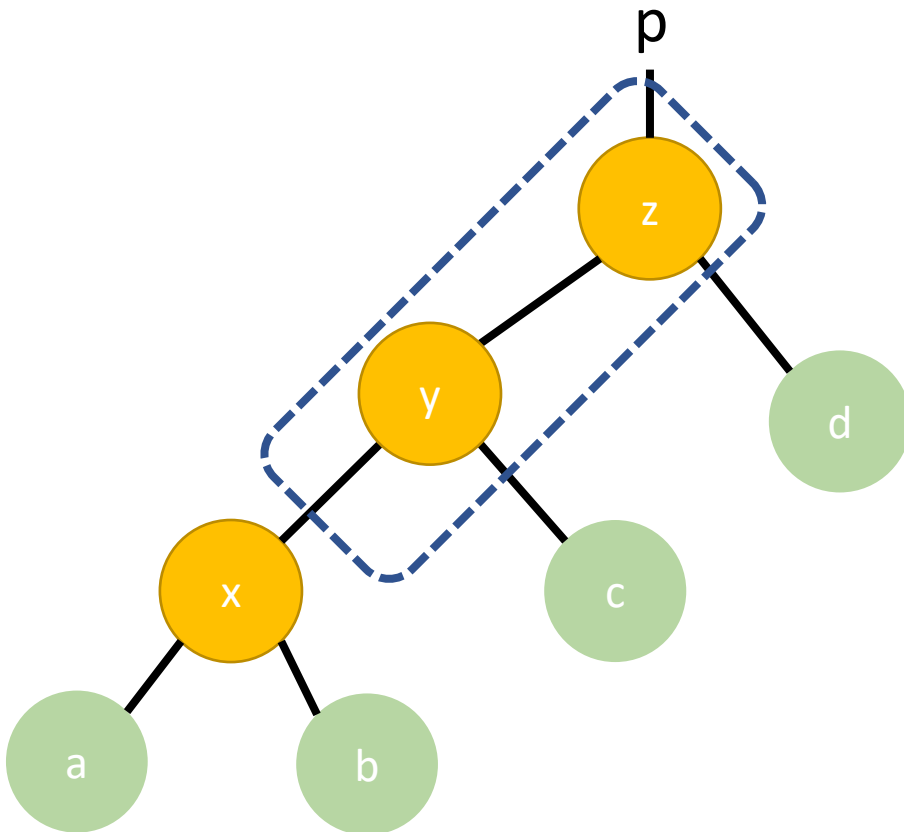
Rotação Esquerda-Direita

- Faça uma rotação à direita em **y** e **z**.

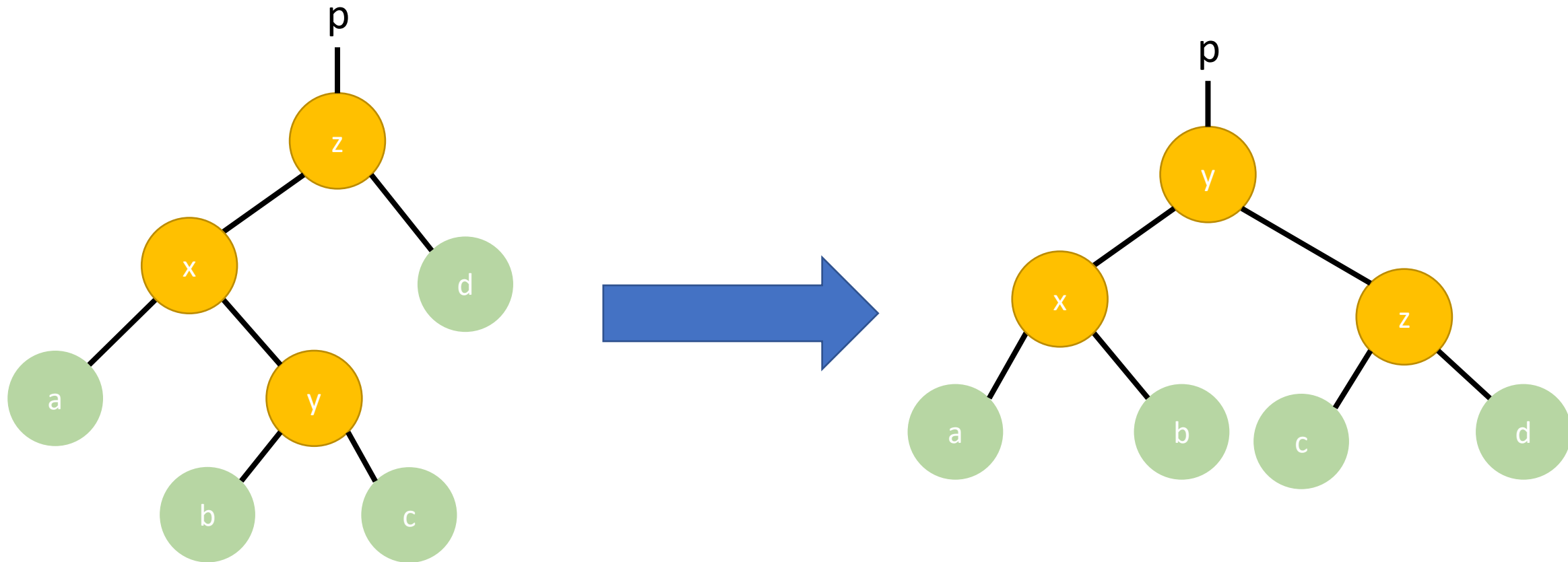


Rotação Esquerda-Direita

- Faça uma rotação à direita em **y** e **z**.



Rotação Esquerda-Direita

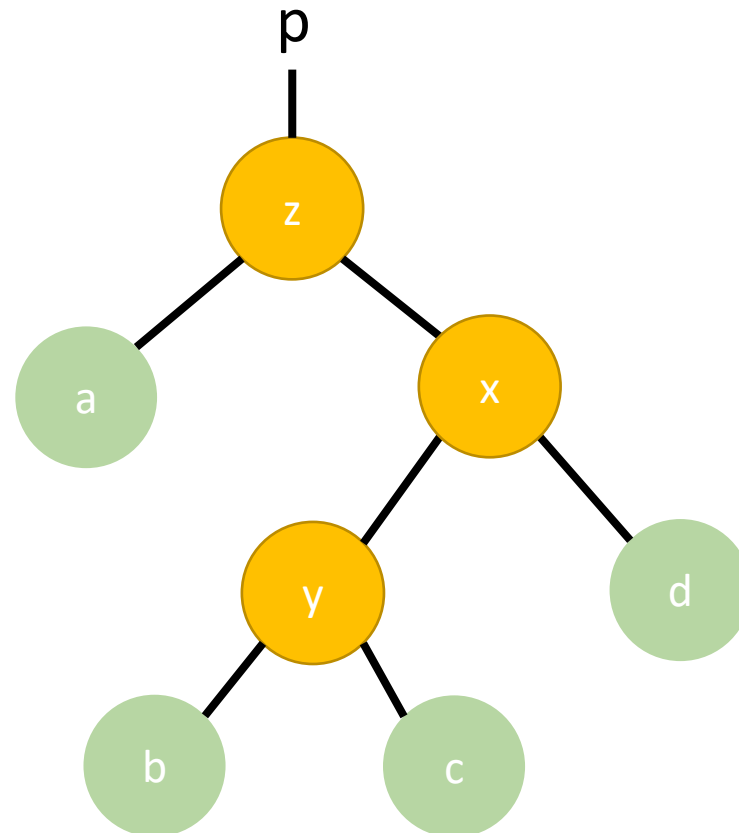


Rotação Direita-Esquerda

- Os nós são deslocados para a direita e depois para a esquerda.

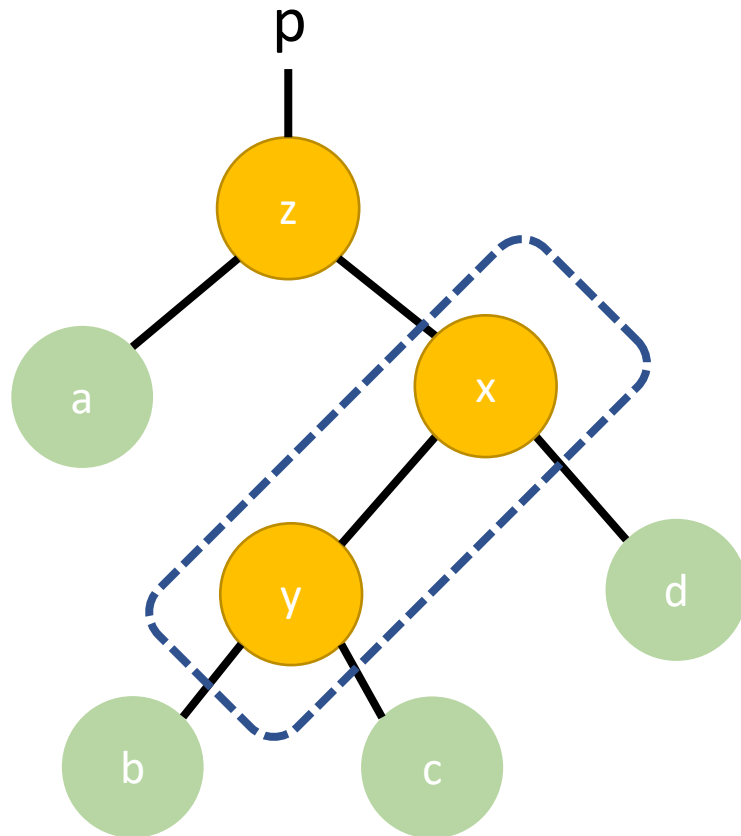
Rotação Direita-Esquerda

- Os nós são deslocados para a direita e depois para a esquerda.



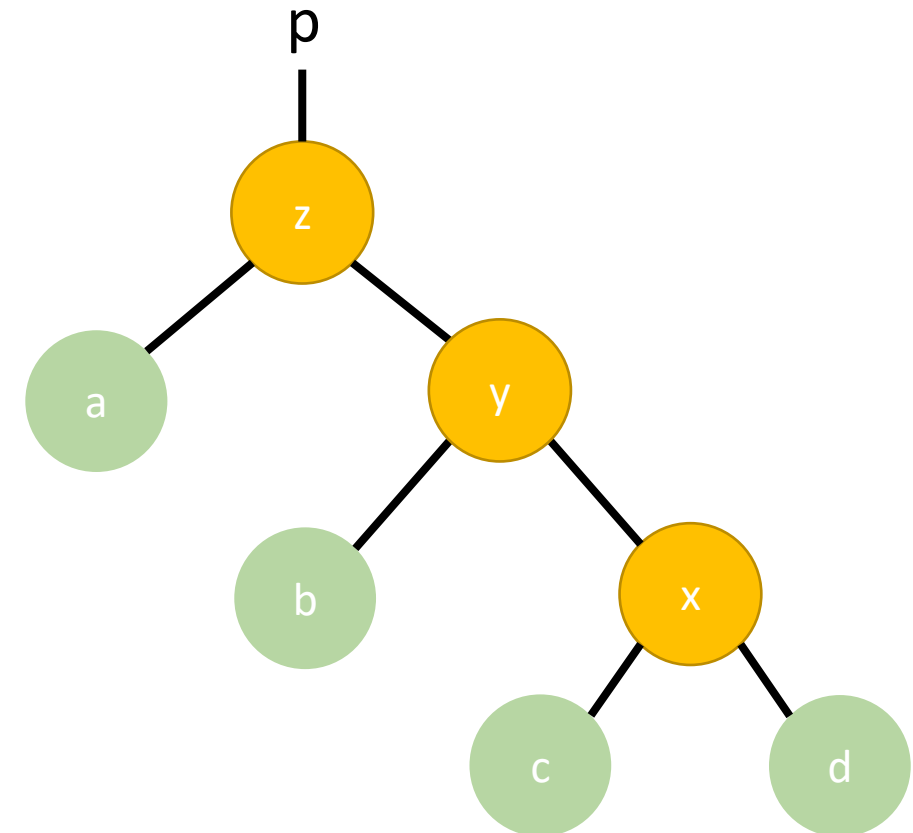
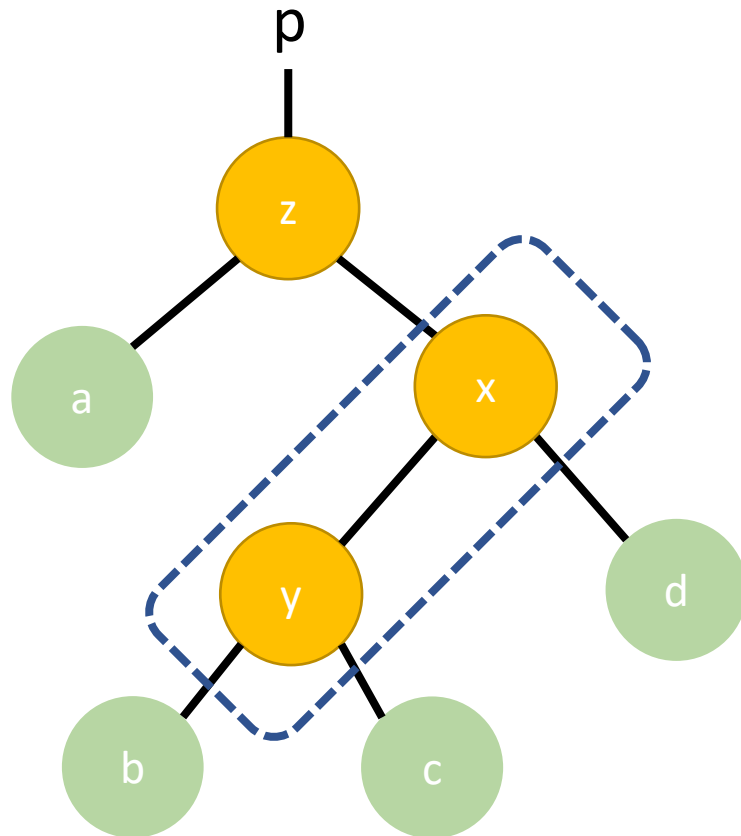
Rotação Direita-Esquerda

- Faça uma rotação à direita em **x** e **y**.



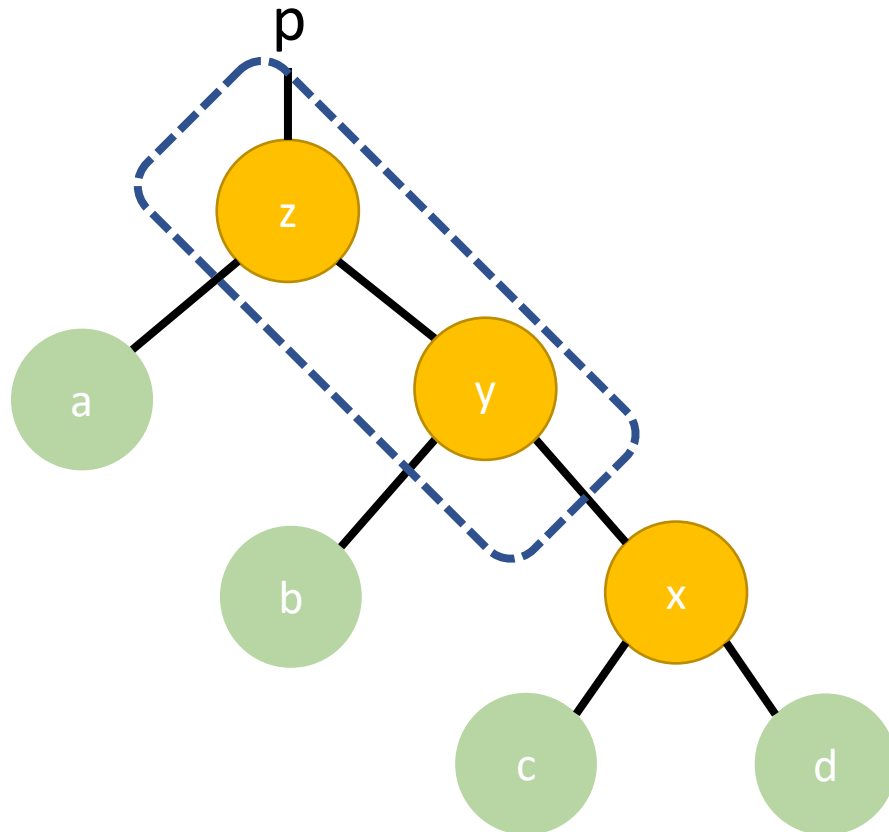
Rotação Direita-Esquerda

- Faça uma rotação à direita em **x** e **y**.



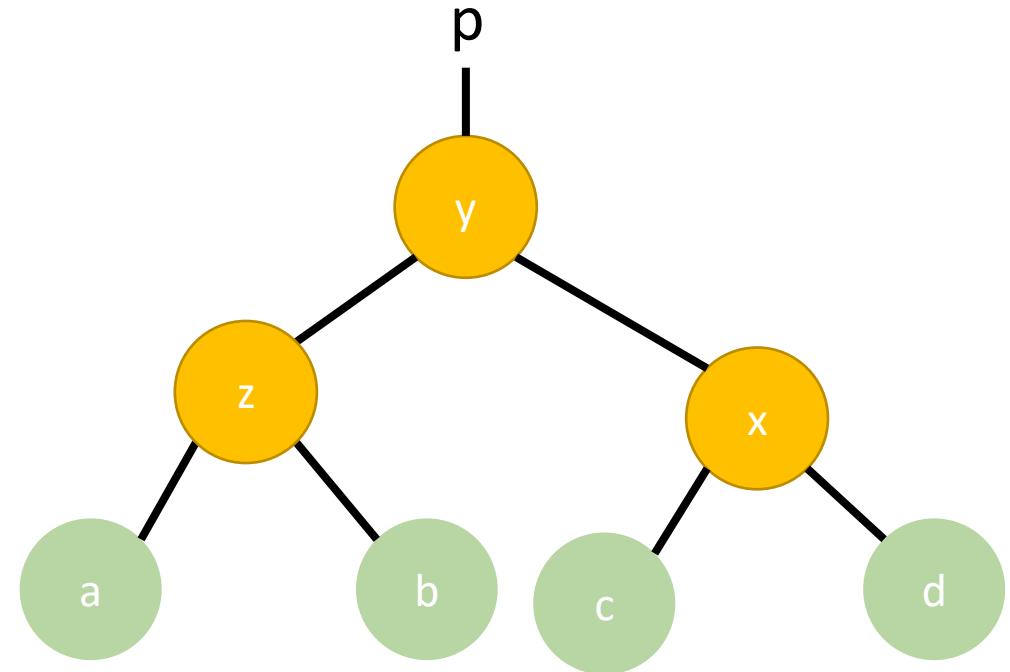
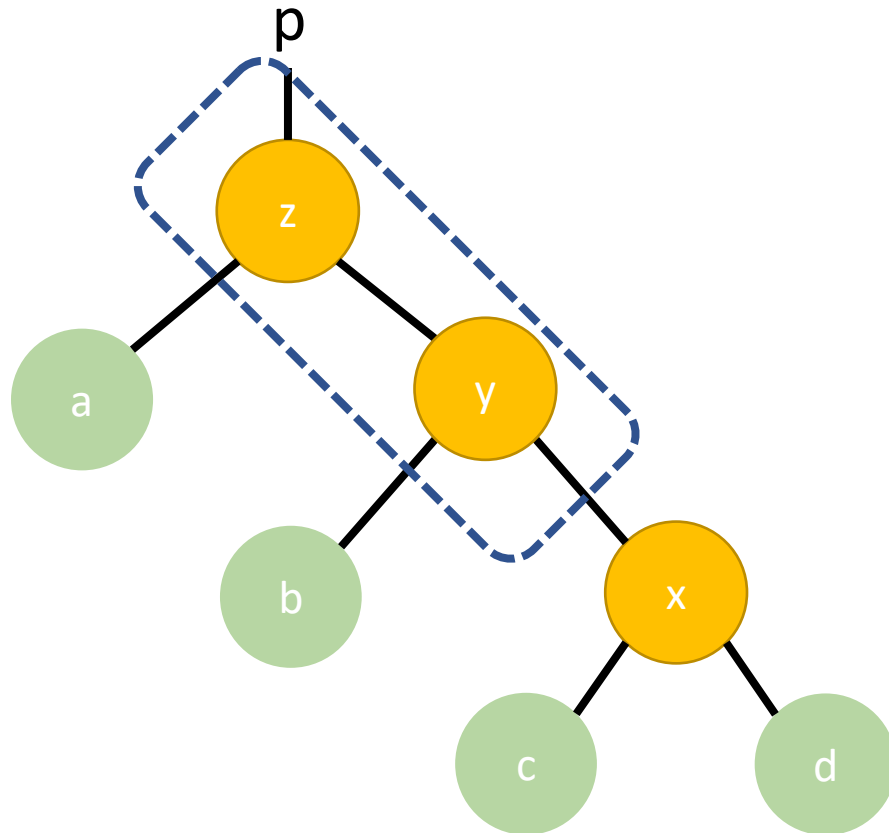
Rotação Direita-Esquerda

- Faça uma rotação à esquerda em **z** e **y**.

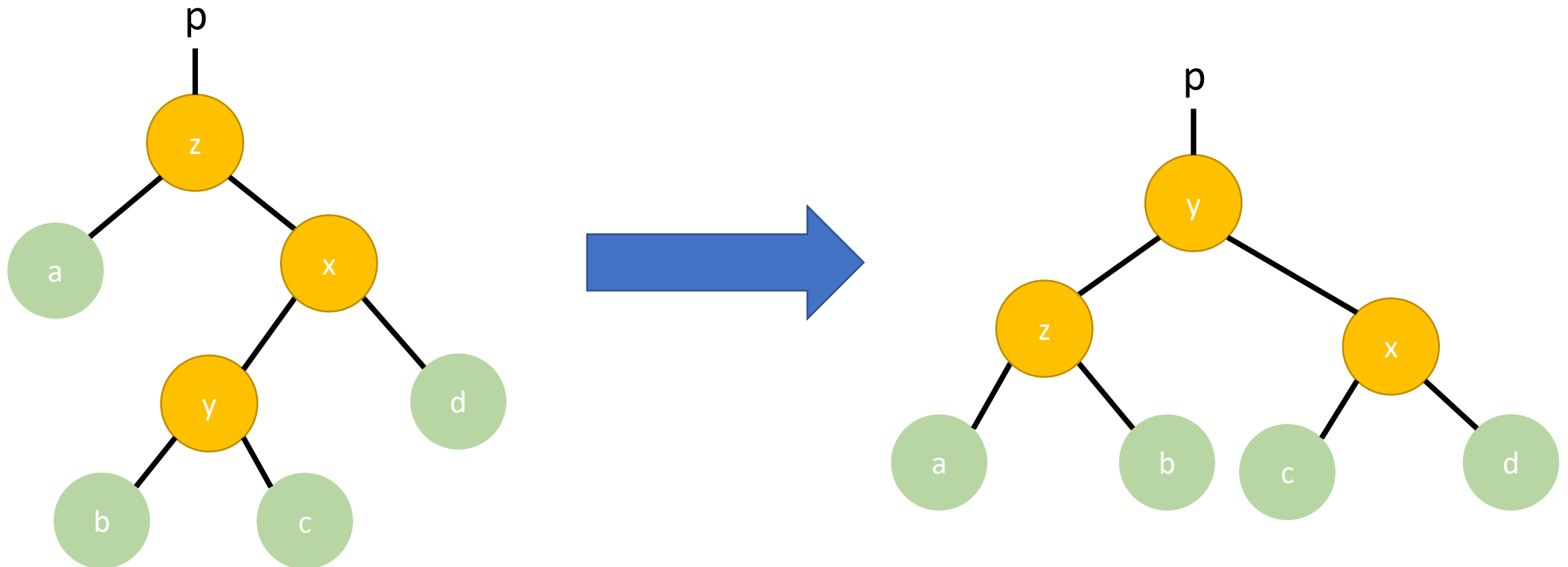


Rotação Direita-Esquerda

- Faça uma rotação à esquerda em **z** e **y**.



Rotação Direita-Esquerda



Árvore AVL

- Exemplo de estrutura:

```
typedef struct no No;  
  
struct no {  
    int chave;  
    int fb;  
    void *dado;  
    No *esq, *dir, * pai;  
};  
  
typedef struct avl {  
    No *raiz;  
    //É possível inserir outros dados.  
}AVL;
```

- Declaração da variável:
 - AVL arvore;

Árvores AVL

- Continuação...