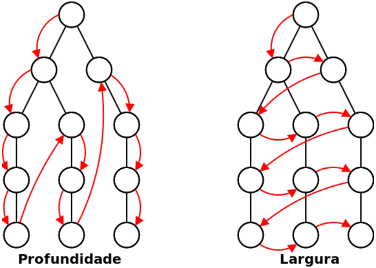
Pesquisa em Grafos

Pedro Ribeiro

DCC/FCUP

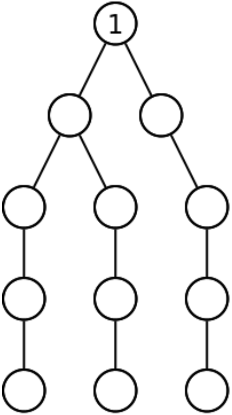
2021/2022



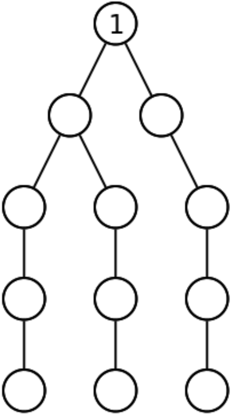
Pesquisa em Grafos

- Uma das tarefas mais importantes é saber **percorrer** um grafo, ou seja **passar por todos os nós** usando para isso as **ligações entre eles**
- Chama-se a isto fazer uma **pesquisa** no grafo
- Existem dois tipos básicos de pesquisa que variam na **ordem em que percorrem os nós**:
  - **Pesquisa em Profundidade** (*Depth-First Search - DFS*)
    Pesquisar todo o grafo ligado a um nó adjacente antes de entrar no nó adjacente seguinte
  - **Pesquisa em Largura** (*Breadth-First Search - BFS*)
    Pesquisar os nós por ordem crescente da sua distância em termos de número de arestas para lá chegar

Pesquisa em Grafos

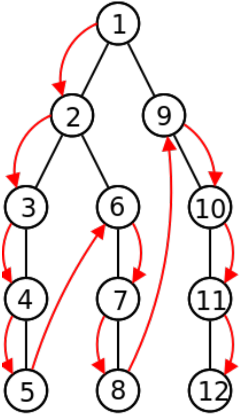


Pesquisa em Profundidade

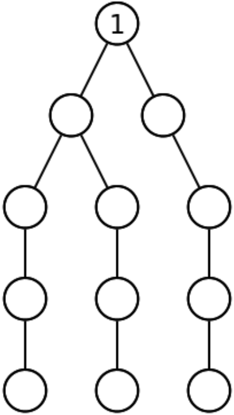


Pesquisa em Largura

Pesquisa em Grafos

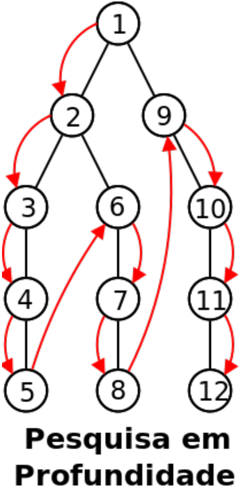


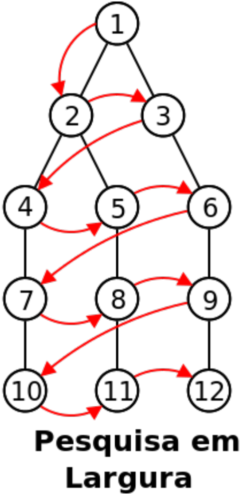
Pesquisa em Profundidade



Pesquisa em Largura

Pesquisa em Grafos





Pesquisa em Grafos

- Na sua essência, DFS e BFS fazem o "mesmo":
  percorrer todos os nós
- Quando usar um ou outro depende do problema e da **ordem em que nos interessa percorrer os nós**
- Vamos ver como **implementar** ambos e dar exemplos de várias aplicações

Pesquisa em Profundidade

O "esqueleto" de uma pesquisa em profundidade:

DFS (versão recursiva)

dfs(nó v):
  marcar v como visitado
  Para todos os nós w adjacentes a v **fazer**
    Se w ainda não foi visitado **então**
      dfs(w)

Complexidade:

- Temporal:
  - Lista de Adjacências: $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
  - Matriz de Adjacências: $\mathcal{O}(|V|^2)$
- Espacial: $\mathcal{O}(|V|)$

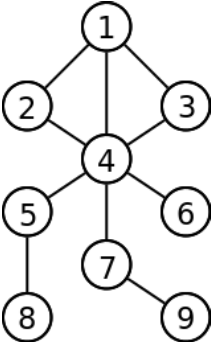
Pesquisa em Profundidade

Vamos ver mesmo um programa exemplo a ser feito:
(programa feito na aula, terão código equivalente no próximo guião)

Imagine que um grafo (não dirigido) é dado como:

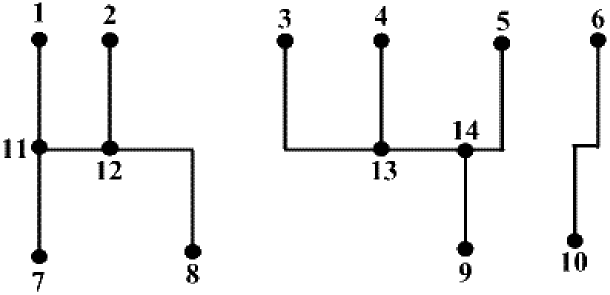
num_nos
num_arestas
$origem_1$ fim_1
$origem_2$ fim_2
...
$origem_{|E|}$ $fim_{|E|}$

```
9
10
1 2
1 3
1 4
2 4
3 4
4 5
4 6
4 7
5 8
7 9
```



Componentes Conexos

- Descobrir o número de **componentes conexos** de um grafo G
- Exemplo: o grafo seguinte tem **3 componentes conexos**: $\{1,2,7,8,11,12\}$, $\{3,4,5,9,13,14\}$ e $\{6, 10\}$



Componentes Conexos

O "esqueleto" de um programa para resolver:

Descobrir componentes conexos

contador $\leftarrow$ 0
marcar todos os nós como **não visitados**
Para todos os nós v do grafo **fazer**
  Se v ainda não foi visitado **então**
    contador $\leftarrow$ contador + 1
    dfs(v)
escrever(*contador*)

Complexidade temporal:

- Lista de Adjacências: $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
- Matriz de Adjacências: $\mathcal{O}(|V|^2)$

Grafos Implícitos

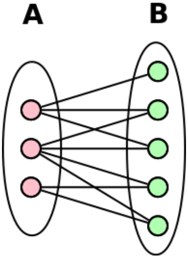
- Nem sempre é necessário guardar explicitamente o grafo.
- Exemplo: descobrir o número de "blobs" (manchas conexas) numa matriz. Duas células são adjacentes se estiverem ligadas vertical ou horizontalmente.

```
#.##..##                           1.22..33
#.....##                           1.....33
...##...     -->  4 blobs  -->     ...44...
...##...                           ...44...
```

- Para resolver basta fazer um $dfs(x, y)$ para visitar a posição (x, y) e onde os adjacentes são $(x+1, y), (x-1, y), (x, y+1)$ e $(x, y-1)$
- Chamar um DFS para ir "colorindo" as componentes conexas é conhecido como fazer um **Flood Fill**.

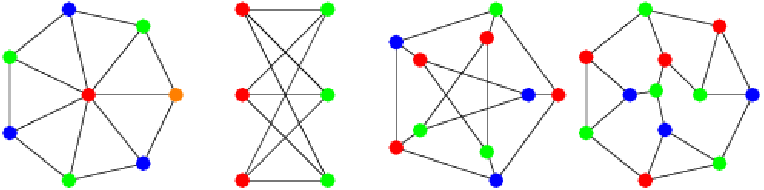
Grafos Bipartidos

- Um **grafo bipartido** é um grafo onde é possível dividir os nós em dois grupos A e B tal que cada aresta liga um nó de A a um nó de B:
  - Não podem existir arestas de A para A
  - Não podem existir arestas de B para B



- Muitos grafos reais são deste tipo. Alguns exemplos:
  - Produtos e Compradores
  - Filmes e Atores
  - Livros e Autores
  - ...

- O problema de **graph coloring** implica descobrir uma alocação de cores aos nós de um grafo tal que nunca aconteça que dois nós vizinhos tenham a mesma cor



- Dado um grafo qual o menor número de cores que precisamos? (o *chromatic number* de um grafo)
  - Para um grafo geral este problema é muito complicado e não existem soluções polinomiais.
    (este é um dos 21 problemas NP-completos originais)

- Saber se um grafo é bipartido é um caso particular de coloração
- Grafo bipartido $\leftrightarrow$ **é possível colorir com duas cores?**
- Podemos adaptar um *dfs* para resolver:

Algoritmo para testar se um grafo é bipartido

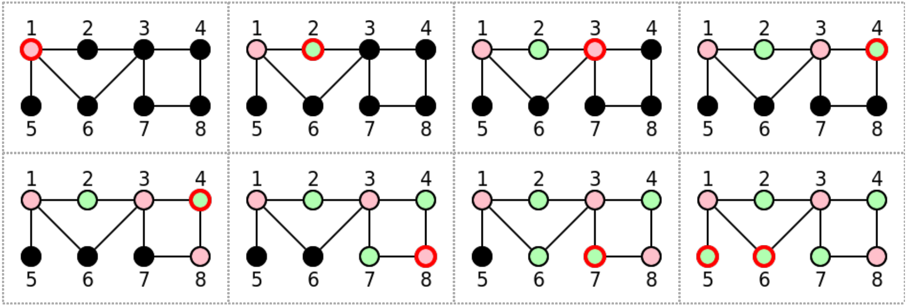
Fazer um dfs a partir de um nó u e colorir esse nó com uma cor
Para cada nó w vizinho de u:

- Se w não foi visitado, fazer dfs(w) e pintar w com cor diferente de v
- Se w já foi visitado, verificar se cor é diferente
  - Se cor for igual, grafo não é bipartido!

Grafos Bipartidos

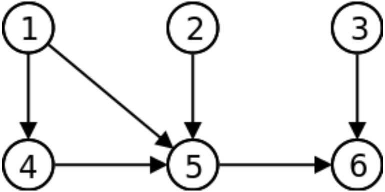
Exemplo de funcionamento do algoritmo com DFS

- Nó preto: não visitado
- Nó vermelho: grupo A
- Nó verde: grupo B



Ordenação Topológica

- Dado um grafo dirigido e acíclico G, descobrir uma ordenação dos nós, tal que nessa ordem u vem antes de v se e só se não existe uma aresta (v, u)
- Exemplo: Para o grafo de baixo, uma possível ordenação topológica seria: $1, 2, 3, 4, 5, 6$ (ou $1, 4, 2, 5, 3, 6$ - existem ainda outras ordenações topológicas possíveis)



Um exemplo clássico de aplicação é decidir por qual ordem executar tarefas que têm precedências.

Ordenação Topológica

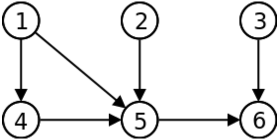
- Como resolver este problema com DFS? Qual a relação da ordem em que um DFS visita os nós com uma ordenação topológica?

Ordenação Topológica - $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ (lista) ou $\mathcal{O}(|V|^2)$ (matriz)

ordem $\leftarrow$ lista vazia
marcar todos os nós como **não visitados**
Para todos os nós v do grafo **fazer**
   Se v ainda não foi visitado **então**
      dfs(v)
escrever(*ordem*)

dfs(nó v):
   marcar v como visitado
   Para todos os nós w adjacentes a v **fazer**
      Se w ainda não foi visitado **então**
         dfs(w)
   adicionar v ao início da lista *ordem*

Ordenação Topológica



Exemplo de execução:

- $ordem = \emptyset$

- entra dfs(1) | $ordem = \emptyset$
- entra dfs(4) | $ordem = \emptyset$
- entra dfs(5) | $ordem = \emptyset$
- entra dfs(6) | $ordem = \emptyset$
- sai dfs(6) | $ordem = 6$
- sai dfs(5) | $ordem = 5, 6$
- sai dfs(4) | $ordem = 4, 5, 6$
- sai dfs(1) | $ordem = 1, 4, 5, 6$
- entra dfs(2) | $ordem = 1, 4, 5, 6$
- sai dfs(2) | $ordem = 2, 1, 4, 5, 6$
- entra dfs(3) | $ordem = 2, 1, 4, 5, 6$
- sai dfs(3) | $ordem = 3, 2, 1, 4, 5, 6$

- $ordem = 3, 2, 1, 4, 5, 6$

Ordenação Topológica

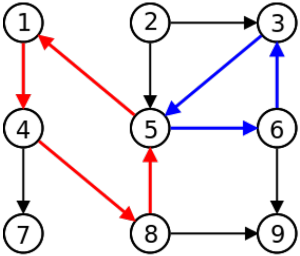
- A complexidade é $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ (com lista de adjacências) porque só passamos uma vez por cada nó e por cada aresta.
- Se implementarem (de forma "naive") a lista com arrays, a **operação "inserir no início"** pode custar $\mathcal{O}(|V|)$, fazendo com que o algoritmo passe a demorar $\mathcal{O}(|V|^2)$
- Uma alternativa para usar arrays é **adicionar ao final** (em $\mathcal{O}(1)$) e depois basta imprimir a **ordem inversa** da calculada!

- Um algoritmo sem DFS seria, de forma **greedy**, procurar um nó com grau de entrada igual a zero, adicioná-lo à ordem e depois retirar as suas arestas, repetindo depois o mesmo algoritmo para selecionar o próximo nó.
  - Uma implementação "naive" deste algoritmo demoraria $\mathcal{O}(|V|^2)$ ($|V|$ vezes procurar um mínimo entre todos os nós ainda não adicionados)

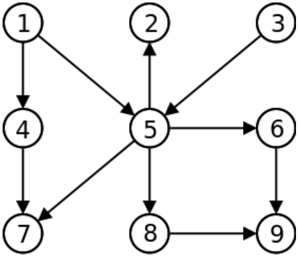
Deteção de Ciclos

- Descobrir se grafo (dirigido) G é **acíclico** (não contém ciclos)

- Exemplo: o grafo da esquerda contém um ciclo, o grafo da direita não



Grafo com Ciclos



Grafo acíclico

Deteção de Ciclos

Vamos usar 3 "cores:

- **Branco** - Nó não visitado
- **Cinzento** - Nó a ser visitado (ainda estamos a explorar descendentes)
- **Preto** - Nó já visitado (já visitamos todos os descendentes)

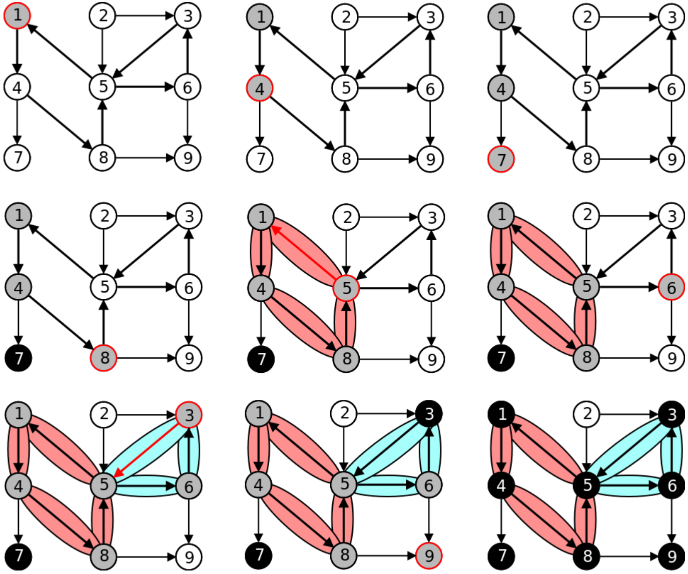
Deteção de Ciclos - $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ (lista) ou $\mathcal{O}(|V|^2)$ (matriz)

cor[$v \in V$] $\leftarrow$ branco
Para todos os nós v do grafo **fazer**
  Se $cor[v]$ = branco **então**
    dfs(v)

dfs(nó v):
  cor[v] $\leftarrow$ cinzento
  Para todos os nós w adjacentes a v **fazer**
    Se cor[w] = cinzento **então**
      escrever("Ciclo encontrado!")
    Senão se cor[w] = branco **então**
      dfs(w)
  cor[v] $\leftarrow$ preto

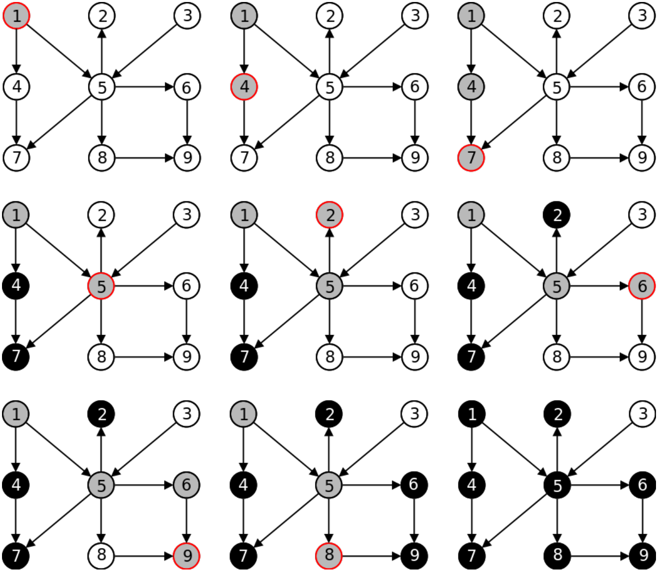
Deteção de Ciclos

Exemplo de Execução (começando no nó 1) - Grafo com 2 ciclos

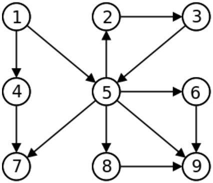


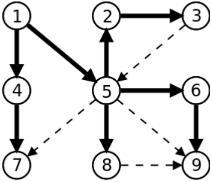
Deteção de Ciclos

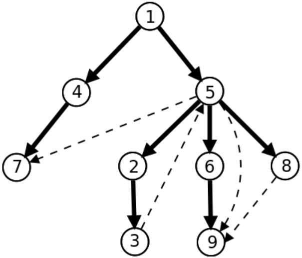
Exemplo de Execução (começando no nó 1) - Grafo acíclico



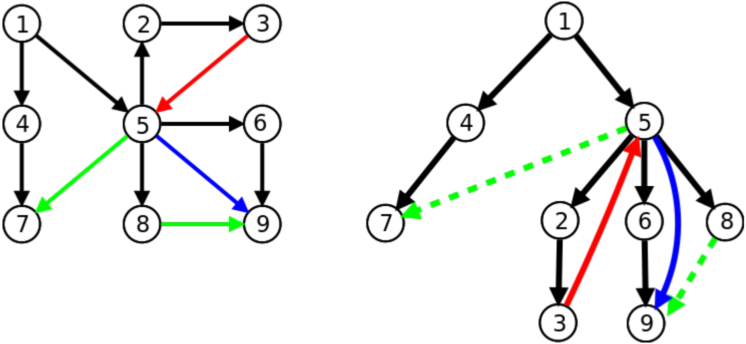
- Uma pesquisa em profundidade cria implicitamente uma **árvore de pesquisa**, que corresponde às arestas que levaram à exploração de nós







- Uma visita por DFS classifica as arestas em 4 categorias
  - **Tree Edges** - Arestas da árvore de DFS
  - **Back Edges** - Aresta de um nó para um antecessor na árvore
  - **Forward Edges** - Arestas de um nó para um seu sucessor na árvore
  - **Cross Edges** - Todas as outras (de um ramo para outro ramo)



- Um exemplo de aplicação: descobrir ciclos é descobrir... **Back Edges**!
- Perceber os tipos de arestas ajuda a resolver problemas!
- Nota: um grafo não dirigido apenas tem **Tree Edges** e **Back Edges**.

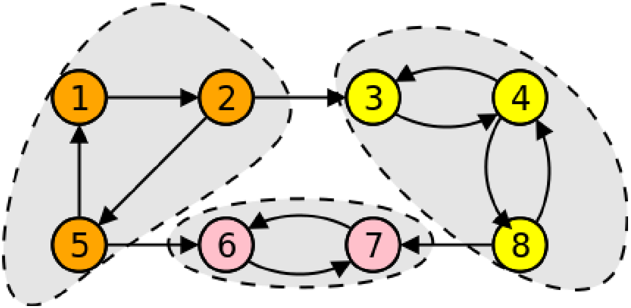
Componentes Fortemente Conexos

Uma aplicação mais elaborada de DFS

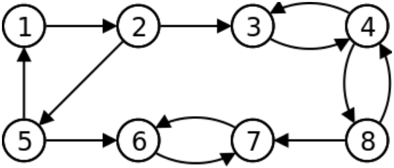
- Decompor um grafo nos seus **componentes fortemente conexos**

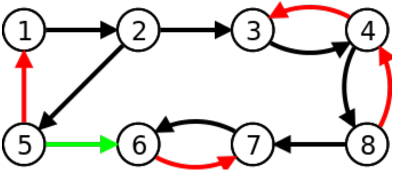
Um **componente fortemente conexo** (CFC) é um subgrafo maximal onde existe um caminho (dirigido) entre quaisquer pares de nós do grafo.

Um exemplo de um grafo e os seus três CFCs:

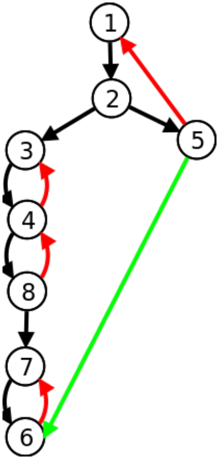


- Como calcular os componentes fortemente conexos?
- Vamos tentar usar as nossas noções de arestas para nos ajudar:





- Vamos olhar bem para a árvore gerada:

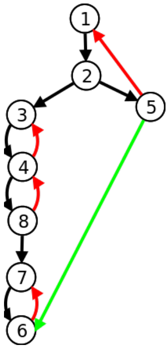


- Qual é o menor antecessor de um nó que é atingível por ele?
  - 1: é o próprio 1
  - 2: é o 1
  - 5: é o 1

  - 3: é o próprio 3
  - 4: é o 3
  - 8: é o 3

  - 7: é o próprio 7
  - 6: é o 7
- *Et voilà!* Aqui estão os nossos CFCs!

- Vamos acrescentar mais 2 propriedades aos nós numa visita dfs:
  - **num(i)**: ordem em que i é visitado
  - **low(i)**: menor $num(i)$ atingível pela subárvore que começa em i. É o mínimo entre:
    - $num(i)$
    - menor $num(v)$ entre todos os back edges (i, v)
    - menor $low(v)$ entre todos os tree edges (i, v)



i	$num(i)$	$low(i)$
1	1	1
2	2	1
3	3	3
4	4	3
5	8	1
6	7	6
7	6	6
8	5	4

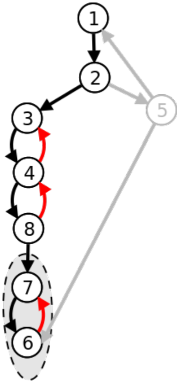
Ideia do **Algoritmo de Tarjan** para descobrir CFCs:

- Fazer um **DFS** e em cada nó *i*:
  - Ir colocando os nós numa **pilha S**
  - Calcular e guardar os valores de $\mathbf{num}(\mathbf{i})$ e $\mathbf{low}(\mathbf{i})$.
  - Se à saida da visita a *i* tivermos um $\mathbf{num}(\mathbf{i}) = \mathbf{low}(\mathbf{i})$, então *i* é a "raíz" de um CFC. Nesse caso retirar tudo o que está na pilha até *i* e reportar esses elementos como um CFC!

Componentes Fortemente Conexos

Uma aplicação mais elaborada de DFS

Exemplo de execução: no momento em que saimos de $dfs(7)$, descobrimos que $num(7) = low(7)$ (7 é a "raíz" de um componente fortemente conexo)

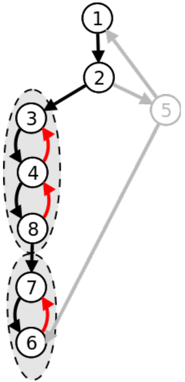


Estado da pilha **S**:

6
7
8
4
3
2
1

Retiramos tudo da pilha até ao **7**, e fazemos output do CFC: {`6, 7`}

Exemplo de execução: no momento em que saimos de *dfs*(3), descobrimos que *num*(3) = *low*(3) (3 é a "raíz" de um componente fortemente conexo)

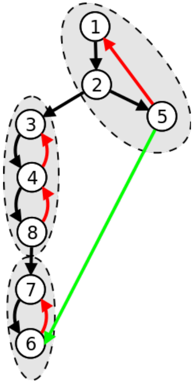


Estado da pilha **S**:

8
4
3
2
1

Retiramos tudo da pilha até ao **3**, e fazemos output do CFC: {8, 4, 3}

Exemplo de execução: no momento em que saimos de *dfs*(1), descobrimos que *num*(1) = *low*(1) (1 é a "raíz" de um componente fortemente conexo)



Estado da pilha **S**:

5
2
1

Retiramos tudo da pilha até ao **3**, e fazemos output do CFC: {`5, 2, 1`}

Componentes Fortemente Conexos

Algoritmo de Tarjan para CFCs

index $\leftarrow 0$; $S \leftarrow \emptyset$
Para todos os nós v do grafo **fazer**
  Se $num[v]$ ainda não está definido **então**
    dfs_cfc(v)

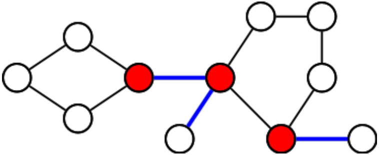
dfs_cfc(nó v):
  $num[v] \leftarrow low[v] \leftarrow index$; $index \leftarrow index + 1$; S.push(v)
  /* Percorrer arestas de v */
  Para todos os nós w adjacentes a v **fazer**
    Se $num[w]$ ainda não está definido **então** /* Tree Edge */
      dfs_cfc(w) ; $low[v] \leftarrow min(low[v], low[w])$
    Senão se w está em S **então** /* Back Edge */
      $low[v] \leftarrow min(low[v], num[w])$
  /* Sabemos que estamos numa raíz de um SCC */
  Se $num[v] = low[v]$ **então**
    Começar novo CFC C
    Repetir
      $w \leftarrow$ S.pop() ; Adicionar w a C
    Até $w = v$
    Escrever C

Pontos de Articulação e Pontes

Um **ponto de articulação** é um **nó** cuja remoção aumenta o número de componentes conexos.

Uma **ponte** é uma **aresta** cuja remoção aumenta o número de componentes conexos.

Exemplo (a vermelho os pontos de articulação, a azul as pontes):



Um grafo sem pontos de articulação diz-se **biconexo**.

Pontos de Articulação

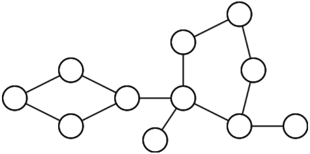
Uma aplicação mais elaborada de DFS

- Descobrir os **pontos de articulação** é um problema muito útil
  - Por exemplo, um grafo "robusto" a ataques não deve estar sujeito a ter pontos de articulação que se forem "atacados" o tornem disconexo.
- Como calcular? Um possível **algoritmo**:
  1. Fazer um DFS e contar número de componentes conexos
  2. Retirar do grafo original um nó e executar novo DFS, contando núm. de componentes conexos. Caso o número aumente, então o nó é um ponto de articulação.
  3. Repetir o passo 2 para todos os nós do grafo
- Qual seria a **complexidade** deste método? $\mathcal{O}(|V|(|V| + |E|))$, pois vamos ter de fazer V chamadas um DFS, e cada chamada demora $V + E$.
- **É possível fazer melhor... fazendo um único DFS**!

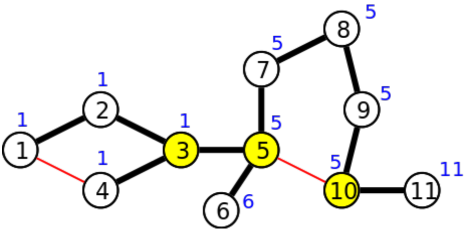
Uma ideia:

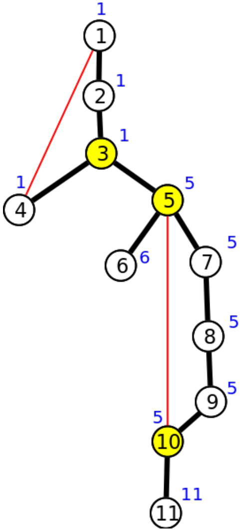
- Aplicar DFS no grafo e obter a **árvore de DFS**
- Se um **nó** v **tem um filho** w **que não tem nenhum caminho para um antecessor de** v**, então** v **é um ponto de articulação**! (pois retirá-lo desliga w do resto do grafo)
  - Isto corresponde a verificar que $low[w] \geq num[v]$
- A única excepção é a **raíz** da pesquisa. Se tiver mais que um filho... então é também ponto de articulação!

- Um grafo exemplo:



- *num*[*i*] - números dentro do nó
- *low*[*i*] - números a azul
- pontos de articulação: nós a amarelo





- 3 é ponto de articulação:
  $low[5] = 5 \geq num[3] = 3$
- 5 é ponto de articulação:
  $low[6] = 6 \geq num[5] = 5$
  ou
  $low[7] = 5 \geq num[5] = 5$
- 10 é ponto de articulação:
  $low[11] = 11 \geq num[10] = 10$
- 1 não é ponto de articulação:
  só tem um tree edge

Pontos de Articulação

Algoritmo muito parecido com CFCs, mas com DFS diferente:

Algoritmo para descobrir pontos de articulação

dfs_art(nó v):
  $num[v] \leftarrow low[v] \leftarrow index$; $index \leftarrow index + 1$; S.push(v)
  Para todos os nós w adjacentes a v **fazer**
    Se $num[w]$ ainda não está definido **então** /* Tree Edge */
      dfs_art(w) ; $low[v] \leftarrow min(low[v], low[w])$
      Se $low[w] \geq num[v]$ **então**
        escrever(v + "é um ponto de articulação")
    Senão se w está em S **então** /* Back Edge */
      $low[v] \leftarrow min(low[v], num[w])$
  S.pop()

Não esquecer de considerar ainda o caso da raíz da árvore de DFS pode ter 2 filhos (e desse modo ser também ponto de articulação)

Em vez da stack, podiamos usar as cores (cinzento significa que está na stack)

Pesquisa em Largura

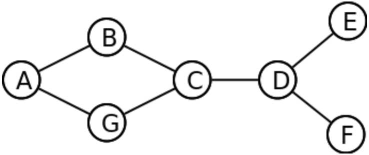
- Uma pesquisa em largura (BFS) é muito semelhante a uma DFS. Essencialmente, só muda a **ordem** em que se visita os nós!
- Em vez de usarmos recursividade (e a **pilha** de recursão), vamos manter explicitamente uma **fila** de nós não visitados (q)

Esqueleto da Pesquisa em Largura - $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

bfs(nó v):
   $q \leftarrow \emptyset$ /* Fila de nós não visitados */
   $q.enqueue(v)$
   marcar v como visitado
   Enquanto $q \neq \emptyset$ /* Enquanto existirem nós por processar */
      $u \leftarrow q.dequeue()$ /* Retirar primeiro elemento de q */
      Para todos os nós w adjacentes a u **fazer**
         Se w ainda não foi visitado **então** /* Novo nó! */
               $q.enqueue(w)$
               marcar w como visitado

Pesquisa em Largura

- Um exemplo:



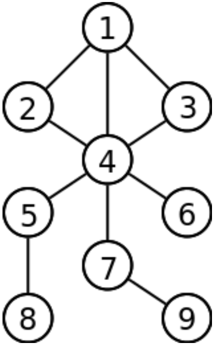
1. Inicialmente temos que $q = \{A\}$
2. Retiramos **A**, adicionamos vizinhos não visitados ($q = \{B, G\}$)
3. Retiramos **B**, adicionamos vizinhos não visitados ($q = \{G, C\}$)
4. Retiramos **G**, adicionamos vizinhos não visitados ($q = \{C\}$)
5. Retiramos **C**, adicionamos vizinhos não visitados ($q = \{D\}$)
6. Retiramos **D**, adicionamos vizinhos não visitados ($q = \{E, F\}$)
7. Retiramos **E**, adicionamos vizinhos não visitados ($q = \{F\}$)
8. Retiramos **F**, adicionamos vizinhos não visitados ($q = \{\}$)
9. q vazia, terminamos a pesquisa em largura

Pesquisa em Largura

Vamos ver uma implementação a ser feita:
(programa feito na aula, terão código equivalente no próximo guião)

Imagine que um grafo (não dirigido) é dado como:

	9
	10
num_nos	1 2
num_arestas	1 3
$origem_1$ fim_1	1 4
$origem_2$ fim_2	2 4
...	3 4
$origem_{\|E\|}$ $fim_{\|E\|}$	4 5
	4 6
	4 7
	5 8
	7 9



Pesquisa em Largura

Calculando distâncias

- Quase tudo o que pode ser feito com DFS também pode ser feito com BFS!
- Uma diferença importante é que na BFS visitamos os nós por **ordem crescente de distância** (em termos de número de arestas) ao nó inicial!
- Desse modo BFS pode ser usada para descobrir **distâncias mínimas** entre nós num **grafo não pesado** (com ou sem direção).
- Vamos ver o que realmente muda no código.

- A vermelho estão as linhas que é necessário acrescentar. Em *no.distancia* fica guardada a distância ao nó v.

Pesquisa em Largura - Distâncias

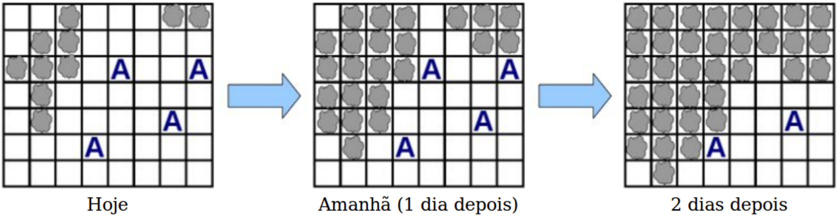
bfs(nó v):
    $q \leftarrow \emptyset$ /* Fila de nós não visitados */
    $q.enqueue(v)$
    $v.distancia \leftarrow 0$ /* distância de v a si próprio é zero */
    marcar v como visitado
    Enquanto $q \neq \emptyset$ /* Enquanto existirem nós por processar */
        $u \leftarrow q.dequeue()$ /* Retirar primeiro elemento de q */
        Para todos os nós w adjacentes a u **fazer**
            Se w ainda não foi visitado **então** /* Novo nó! */
                $q.enqueue(w)$
                marcar w como visitado
                $w.distancia \leftarrow u.distancia + 1$

- BFS pode ser aplicada em qualquer tipo de grafos
- Considere por exemplo que quer saber a **distância mínima** entre um ponto de **partida** (P) e um ponto de **chegada** (C) num labirinto 2D:

```
########                          ########
#P.....#                          #P12345#
####.###          --->            ####4###
#C.....#    BFS a partir de P     #876567#
########                          ########
```

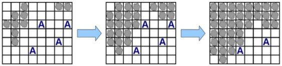
  - Um nó neste grafo é a posição (x, y)
  - Os nós adjacentes são $(x+1, y)$, $(x-1, y)$, $(x, y+1)$ e $(x, y-1)$
  - Todo o resto da BFS fica igual! (demora $\mathcal{O}(linhas \times colunas)$)
  - Para colocar na fila precisamos de saber representar uma par de coordenadas (ex: struct em C, pair ou class em C++, class em Java).

- Vamos ver um problema que saiu na qualificação das ONI'2010
- O problema foi inspirado na erupção do **vulcão Eyjafjallajökull**, cuja nuvem de cinzas causou imensos problemas no tráfego aéreo na europa.
- Imagine que a posição da **nuvem de cinzas** lhe é dada numa matriz e que em cada unidade de tempo a nuvem se expande uma quadrícula na horizontal e na vertical. Os `A`'s são aeroportos.

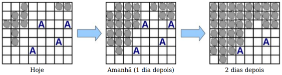


Pesquisa em Largura

Mais aplicações



- O problema pede:
  - Qual o **primeiro aeroporto** a ser coberto pelas cinzas
  - Quanto tempo até **todos** os aeroportos estarem cobertos pelas cinzas
- Seja $dist(A_i)$ a distância do aeroporto i até uma qualquer nuvem
- O problema pede a menor $dist(A_i)$ e a maior $dist(A_i)$!
- Uma maneira seria fazer uma BFS a partir de todos os aeroportos $\mathcal{O}(num\_aeroportos \times linhas \times colunas)$
- Outra maneira seria fazer uma BFS a partir de todos as cinzas $\mathcal{O}(num\_cinzas \times linhas \times colunas)$
- Como fazer melhor, e executar apenas uma BFS?



- Ideia: inicializar a lista da BFS com todas as cinzas!
- Tudo o resto fica igual.

```
...#...      ..1#1..     .21#12.     321#123     321#123
..##...      .1##1..     21##12.     21##123     21##123
.####..  ->  1####1.  -> 1####12  -> 1####12  -> 1####12
.......      11111..     111112.     1111123     1111123
##.....      ##1....     ##122..     ##1223.     ##12234
```

- As distâncias vão ser as que queremos.
- Cada célula só vai ser percorrida uma vez! $\mathcal{O}(linhas \times colunas)$

- Vamos a um último problema onde o grafo não existe "explicitamente" *[problema original das IOI'1996]*
- Considere o seguinte puzzle (uma espécie de cubo de Rubik "plano")
  - A posição inicial do puzzle é:

1	2	3	4
8	7	6	5

  - Em cada jogada pode fazer um de três movimentos:
    - **Movimento A**: trocar as fila superior com a inferior

8	7	6	5
1	2	3	4

    - **Movimento B**: shift do rectângulo para a direita

4	1	2	3
5	8	7	6

    - **Movimento C**: rotação (sentido do ponteiros do relógio) das 4 células do meio

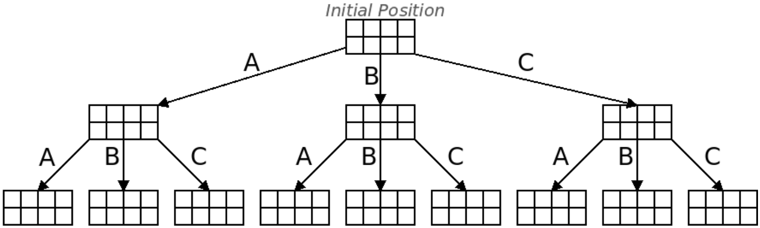
1	7	2	4
8	6	3	5

  - **Quantas jogadas** são precisas para chegar a uma dada posição?

Pesquisa em Largura

Mais aplicações

- Pode ser resolvido com... **pesquisa em largura**!
- O **nó inicial** é... a posição inicial.
- Os **nós adjacentes** são... as posições que se podem alcançar usando movimentos A, B ou C.



- Quando atingimos a posição desejada... sabemos necessariamente a distância mínima (nº jogadas) para lá chegar!
- O (mais) difícil é... saber como **representar e manipular os estados**! :)

Pesquisa em Grafos - Resumo Final

- Uma das tarefas mais importantes é saber **percorrer** um grafo, ou seja **passar por todos os nós** usando para isso as **ligações entre eles**
- Chama-se a isto fazer uma **pesquisa** no grafo
- Existem dois tipos básicos de pesquisa que variam na **ordem em que percorrem os nós**:
  - **Pesquisa em Profundidade** (*Depth-First Search - DFS*)
    Pesquisar todo o grafo ligado a um nó adjacente antes de entrar no nó adjacente seguinte
  - **Pesquisa em Largura** (*Breadth-First Search - BFS*)
    Pesquisar os nós por ordem crescente da sua distância em termos de número de arestas para lá chegar
- Além dos slides e das aulas, aqui ficam mais duas outras **visualizações** destes algoritmos:
  - VisuAlgo: Graph Traversal (DFS/BFS)
  - David Galles' visualizations: DFS e BFS