

**Unicamp - Universidade Estadual de Campinas**

**FEEC - Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação**



**EE400 - Métodos da engenharia elétrica - Turma A**

**Projeto D**

- **Pedro Romero Santos - 288643**
- **Pedro Rafael Moreira Ataide Amorim - 278519**
- **José Pedro Iglesias Garcia - 278472**

Link do código no Github:

<https://github.com/PedroRomeroSantos/EE400-Projeto-D-Grupo-P.git>

## Parametrização das órbitas

Vamos usar um conjunto de dados conhecidos como elementos orbitais de Kepler. Esses elementos são parâmetros fundamentais utilizados para descrever com precisão a trajetória dos satélites ao redor da Terra.

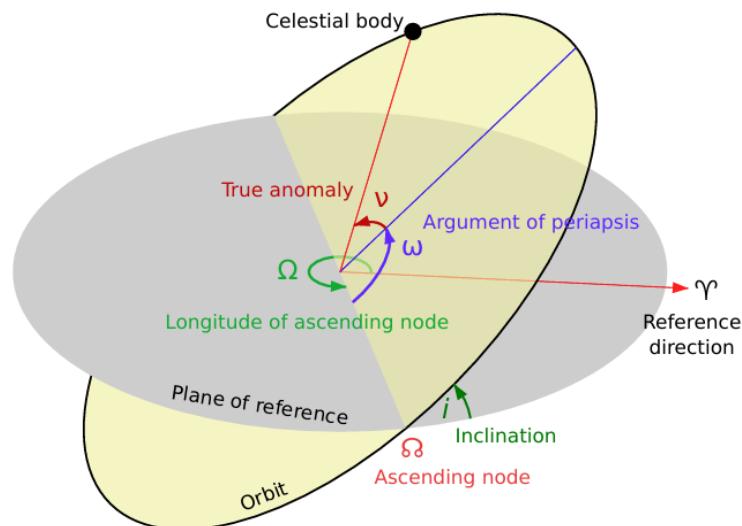


Figura 2: Elementos orbitais de Kepler

Parâmetro	Descrição
$e$	Excentricidade da órbita, varia entre 0 e 1
$a$	Semieixo maior, metade da distância entre apogeu e perigee
$\omega$	Argumento do perigee, define a orientação da elipse no plano orbital
$i$	Inclinação, ângulo entre o plano equatorial da terra e o plano orbital
$\Omega$	Longitude do nó ascendente, ângulo entre uma direção de referência e o nó ascendente
$\Delta t$	Tempo desde o perigee, tempo decorrido desde que o satélite passou pelo perigee
$\mu$	Parâmetro de gravitação da terra, sendo G a constante universal da gravitação e M a massa da terra

**a) Parametrização da forma no plano orbital:** Vamos descrever a elipse no sistema de coordenadas perifocal. Nesse sistema, a elipse está contida no plano, com a origem localizada no foco mais próximo ao perigeu, e o eixo x orientado na direção do perigeu e o eixo y com ângulo  $\nu = 90^\circ$

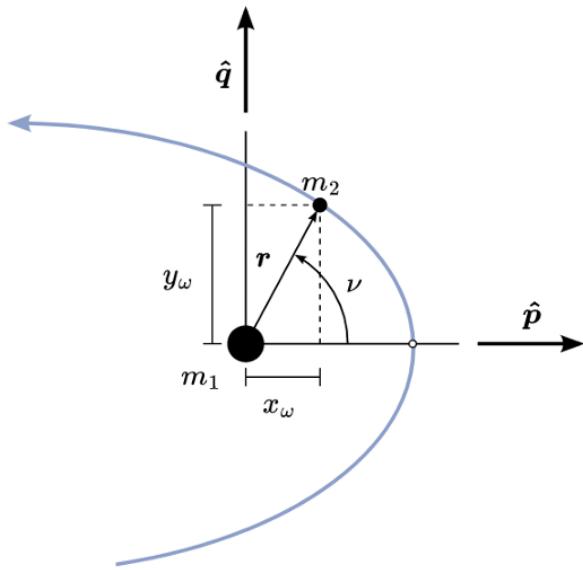


Figura 3: Sistema de coordenadas perifocal

Vamos descrever parametrização cartesiana em termos de  $r(t)$ , distância entre o satélite e o centro da terra, e o ângulo  $v(t)$ , chamado de anomalia verdadeira.

- $x = x(r, v) = r(t) \times \cos(v(t))$
- $y = y(r, v) = r(t) \times \sin(v(t))$

Baseando-se na elipse circunscrita a uma circunferência de raio igual ao semi-eixo maior, com o ângulo central  $E$  (anomalia excêntrica), é conveniente utilizar parametrizações em termos de  $E$ ,  $a$  e  $e$ .

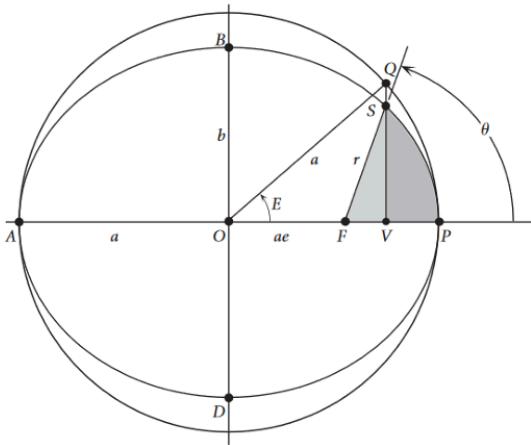


Figura 4: Elipse circunscreta e anomalia excêntrica

$$i) e = \frac{c}{a}$$

ii)  $r(t) = \frac{c}{1+e \cos(\nu(t))}$ , onde  $c$  é o segmento de reta  $\overline{VS}$  (semi latus rectum) e  $\nu(t)$  é o ângulo associado à anomalia verdadeira

iii) Do triângulo  $\Delta FVS$ , e da origem em  $F$  temos:  $r(\nu(t)) \times \cos(\nu(t)) = \overline{FV}$ , logo  $r(\nu(t)) \times \cos(\nu(t)) = x(\nu(t))$

de ii) e i):

$$r(t)[1 + e \cos(t)] = c \Rightarrow r(t) + e \cdot (r(t) \cdot \cos(t)) = c = r(t) + ex(t) = c$$

$$\Rightarrow r(\nu(t)) = c - e \times x(\nu(t))$$

- $r(\nu(t)) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , usando a expressão de  $r(t)$  obtida na equação acima, temos:

$$\frac{(x + \frac{ce}{1-e^2})^2}{(\frac{c}{1-e^2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{c}{1-e^2})^2} = 1$$

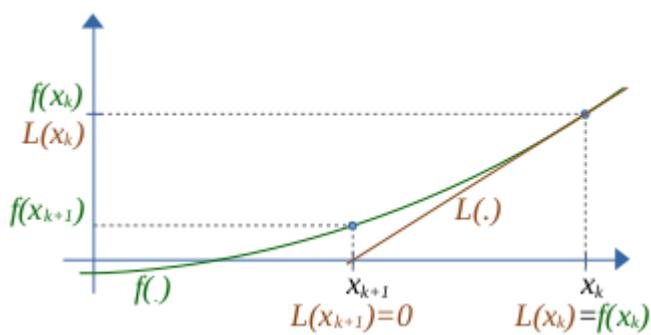
da equação da elipse, substituímos:

$$\Rightarrow \frac{(x+d)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ com } a = \frac{c}{1-e^2}, b = \frac{c}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ e } d = \frac{c \times e}{1-e^2}$$

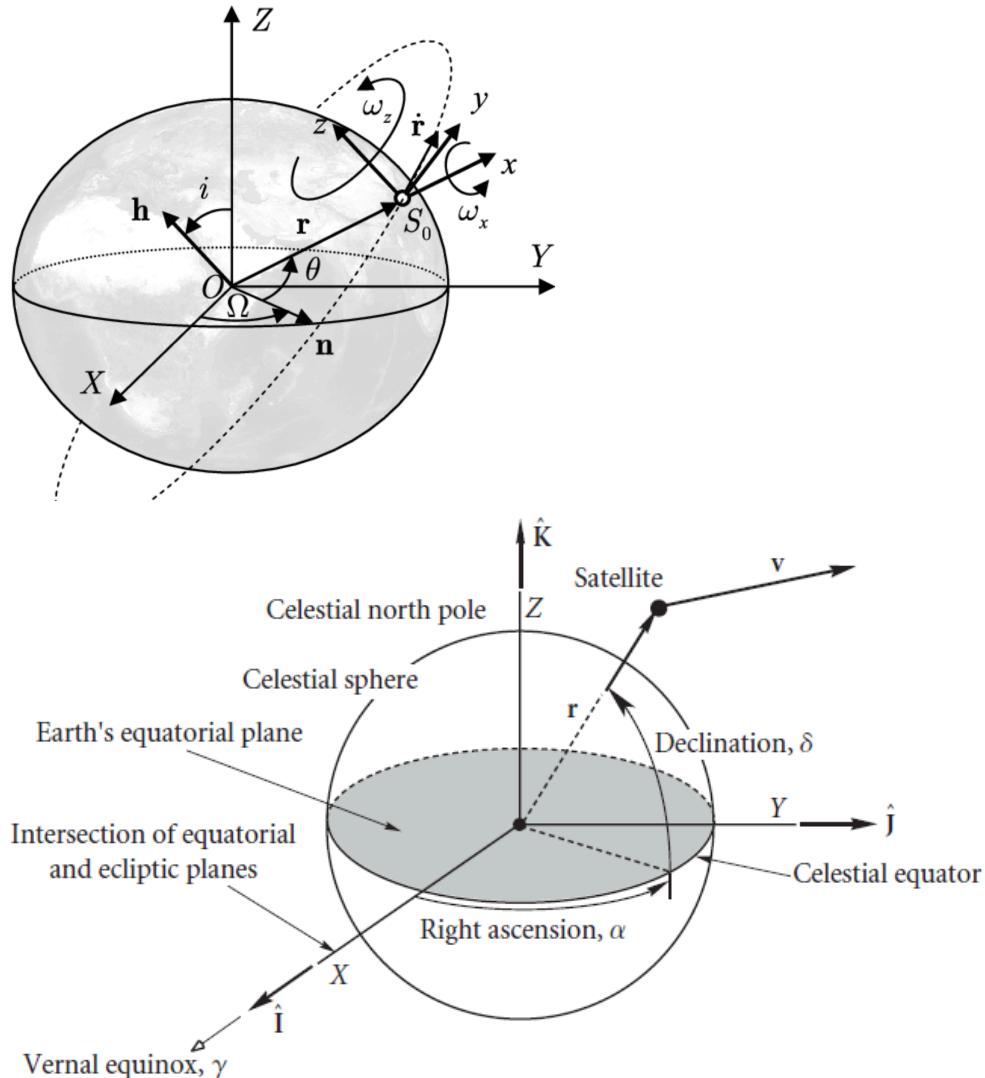
Para a circunferência, temos  $x_c$  e  $y_c$  que precisam ser ajustados para elipse de forma que o  $x_c$  precisa ser deslocado  $d = a \times e$  e o  $y_c$  precisa ser comprimido  $(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$ .

- $x_c = a \times \cos(E) \Rightarrow a \times \cos(E) + a \times e \Rightarrow a \times \cos(E) + d$
- $y_c = a \times \sin(E) \Rightarrow a \times \sin(E) \times (1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$

**b) Parametrização do tempo:** Para incluir a dependência temporal no problema, partiremos da equação de Kepler,  $E(t) - e \cdot \sin E(t) = M(t)$ . Porém ela é uma equação transcendente e não pode ser representada como uma fração de polinômios, o que significa que não existe uma fórmula geral para resolvê-la e por isso vamos resolver por métodos numéricos. Para esse caso, utilizaremos a aproximação linear de Newton-Raphson (imagem abaixo). Nele, parte-se de uma aproximação inicial para a raiz da equação e então calcula-se a derivada da função no ponto correspondente. A cada iteração, o constrói-se uma reta tangente à curva da função nesse ponto. A interseção dessa reta tangente com o eixo x fornece uma nova aproximação para a raiz. Esse processo é repetido até que a solução se aproxime o suficiente do valor real da raiz, de acordo com uma margem de erro escolhida. Vamos usar a biblioteca SciPy em Python, que tem esse método como disponível.



**c) Parametrização Espacial:** Para descrever a órbita plana no espaço tridimensional, vamos escrever as coordenadas do sistema perifocal no sistema ECI (Earth-Centered Inertial), no qual tem a terra como origem do seu sistema de eixos.



É necessário rotacionar os eixos até que coincidam com o esperado na seguinte ordem:

1. Rotacionar em torno  $z_\omega$ , até que o eixo  $x_\omega$  esteja alinhado com o nó ascendente.
2. Rotacionar em torno do novo  $x'_\omega$ , até que o plano orbital e equatorial estejam alinhados.
3. Rotacionar em torno de  $z'$ , para alinhar o nó ascendente com a direção de referência.

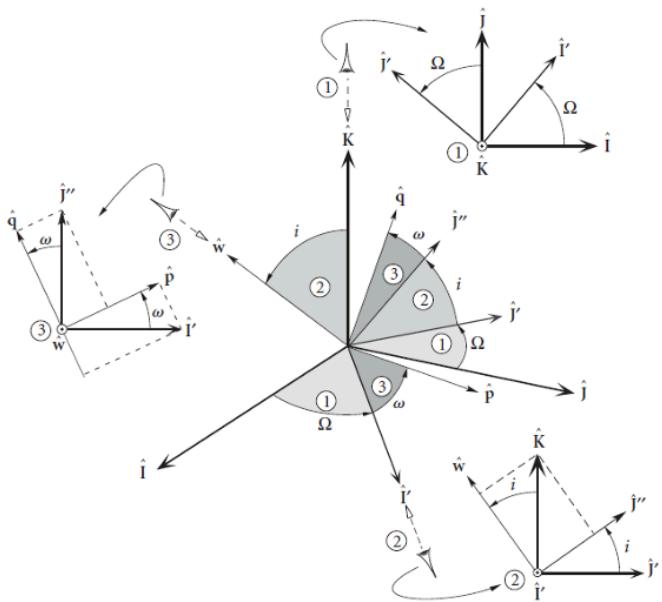


Figura 5: Rotações para alinhar os ângulos

- Matriz de rotação em x:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

- Matriz de rotação em z:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observando os parâmetros de Kepler no item a), orientação, ordem de rotação e as imagens acima, temos:

Parâmetros de Kepler	Orientações e ordem
----------------------	---------------------

$\Omega$	Rotacionar em torno de $z_\omega$ , até que o eixo $x_\omega$ esteja alinhado com o nó ascendente
$i$	Rotacionar em torno do novo $x'_\omega$ , até que o plano orbital e equatorial estejam alinhados
$\omega$	Rotacionar em torno de $z'$ , para alinhar o nó ascendente com a direção de referência

## Trilateração e gradiente descendente

Com base em um conjunto de medidas de distância em relação a vários transmissores, um receptor pode determinar sua posição ao resolver um problema geométrico de intersecção de círculos (ou esferas). Para resolver precisamos de 4 itens:

1. A Posição de cada um dos satélites (não é mais um problema graças a parte de parametrização das órbitas)
2. As distâncias relativas para cada um dos satélites
3. Equacionar cada uma das leituras
4. Resolver o sistema de equações resultante

**a) As distâncias relativas para cada um dos satélites:** A diferença entre o tempo de recebimento de um sinal, Time of arrival (TOA), e o tempo de emissão Time of transmission (TOT) faz com que seja possível determinar o Time of flight (TOF). Como a velocidade da luz é conhecida, podemos usá-la para mensurar essas diferenças de tempo de um sinal.

### b) Sistema de equações:

- $TOF = TOA - TOT$
- $c = \frac{\rho_i}{TOF}$ , com  $c$  sendo a velocidade da luz e  $\rho_i$  a distância do drone até o satélite  $i$ .

$$\bullet \Rightarrow \rho_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$$

É possível observar que a relação entre as variáveis acima não é linear, então vamos precisar usar algum método iterativo para encontrar a solução desse sistema.

**c) Encontrando soluções:** Além do sistema não ser linear, as medidas apresentam erros, então precisamos de uma função que otimize esse problema. Vamos usar uma função  $J(\theta)$  de critério que depende de uma solução  $\theta$  e nosso problema consiste em encontrar o valor de  $\theta$  que minimiza essa função;

- $\theta = \operatorname{argmin} J(\theta)$

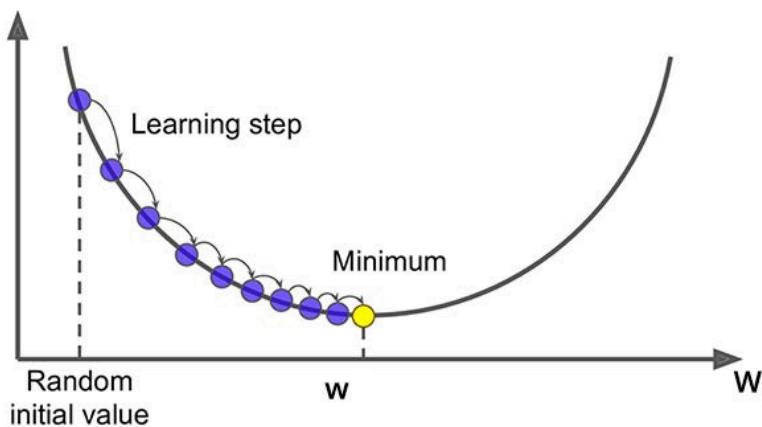
Um critério possível para nosso problema de localização do drone é uma função  $J(r)$  que depende de um "chute" inicial de posição  $r$  e avalia a diferença entre a medida e o valor calculado usando o chute inicial.

- $J(r) = \frac{1}{2} \times \sum_{i=1}^N (\|r_i - r\| - p_i)^2$ , com N sendo o conjunto de medidas

Precisamos avaliar quão preciso foi o "chute" observando a diferença  $(r_i - r)$ , que sendo pequena, será aproximadamente o módulo de  $p_i$ . Logo se  $J(r)$  estiver próximo de zero, os métodos de otimização serão aplicados no sistema para que ele converja para a posição real do drone.

**d) Gradiente Descendente:** O conceito de vetor gradiente de uma função multivariável indica a direção de máxima variação da função. Nesse sentido, o método de Gradiente Descendente (imagem abaixo) faz com que os parâmetros do modelo sejam ajustados iterativamente na direção oposta ao gradiente, buscando minimizar a função de custo e aproximar-se de um mínimo local. A dinâmica desse método atende exatamente ao problema que enfrentamos, pois o objetivo é minimizar o erro. Isso indica que o "chute" é uma  $J(r)$  solução da função , com seu gradiente apontando na direção que converge para o ponto  $J(r)$  desejado.

Cost



- $\nabla f = \left( \frac{\delta f}{\delta x}, \frac{\delta f}{\delta y}, \frac{\delta f}{\delta z} \right)$

- $\Rightarrow \nabla f \simeq 0$
- $\frac{\delta J(r)}{\delta x} = (1 - \frac{\rho}{\|r_i - r\|})(x - x_i)$
- $\frac{\delta J(r)}{\delta y} = (1 - \frac{\rho}{\|r_i - r\|})(y - y_i)$
- $\frac{\delta J(r)}{\delta z} = (1 - \frac{\rho}{\|r_i - r\|})(z - z_i)$
- $R = (1 - \frac{\rho}{\|r_i - r\|})$
- $\nabla J(r) = R(r_i - r)$
- $\Rightarrow r = r_i - l \times r \cdot \nabla J(r)$ , aplicação do método iterativo

Podemos implementar o método iterativo para que o valor se aproxime do ponto desejado. Envolve calcular , onde cada atualização dos parâmetros do gradiente é  $r = r_i - l \times r \cdot \nabla J(r)$  feita utilizando um novo valor de "chute" ao longo de N iterações.

## Referências

- [https://www.ime.usp.br/~leo/intr\\_prog/img\\_zero\\_funcoes/img\\_newton\\_raphson\\_3.png](https://www.ime.usp.br/~leo/intr_prog/img_zero_funcoes/img_newton_raphson_3.png)
- [Earth Centred Inertial Frame – ADCS For Beginners](#)
- [Earth Centered Inertial \(ECI\) and LVLH coordinates | Download Scientific Diagram](#)
- [A Beginners Guide to Gradient Descent Algorithm for Data Scientists!](#)