



Pedro Augusto      Ulisses Andrade      Lucas Andrade

Katia Volte Para Mim! Cantarei Boate Azul Para Você (>o<)

## Contents

<b>1</b>	<b>Utils</b>	<b>2</b>			
1.1	Files . . . . .	2			
1.2	Limites . . . . .	2			
1.3	Makefile . . . . .	2			
1.4	Template Cpp . . . . .	2			
1.5	Template Python . . . . .	3			
<b>2</b>	<b>Informações</b>	<b>4</b>			
2.1	Bitmask . . . . .	4			
2.2	Priority Queue . . . . .	4			
2.3	Set . . . . .	4			
2.4	Sort . . . . .	5			
2.5	String . . . . .	5			
2.6	Vector . . . . .	5			
<b>3</b>	<b>.vscode</b>	<b>6</b>			
<b>4</b>	<b>Combinatoria</b>	<b>6</b>			
4.1	@ Factorial . . . . .	6			
4.2	@ Tabela . . . . .	6			
4.3	Arranjo Com Repeticao . . . . .	6			
4.4	Arranjo Simples . . . . .	6			
4.5	Catalan . . . . .	6			
4.6	Combinacao Com Repeticao . . . . .	6			
4.7	Combinacao Simples . . . . .	7			
			4.8	Permutacao Circular . . . . .	7
			4.9	Permutacao Com Repeticao . . . . .	7
			4.10	Permutacao Simples . . . . .	7
		<b>5</b>	<b>DP</b>		<b>7</b>
		5.1	Dp . . . . .		7
		5.2	Mochila . . . . .		8
		<b>6</b>	<b>Estruturas</b>		<b>8</b>
		6.1	Bittree . . . . .		8
		6.2	Fenwick Tree . . . . .		8
		6.3	Seg Tree . . . . .		10
		6.4	Segmen Tree . . . . .		10
		6.5	Sparse Table Disjunta . . . . .		11
		6.6	Union Find . . . . .		11
		<b>7</b>	<b>Geometria</b>		<b>12</b>
		7.1	Circulo . . . . .		12
		7.2	Graham Scan(Elastico) . . . . .		12
		7.3	Leis . . . . .		13
		7.4	Linha . . . . .		13
		7.5	Maior Poligono Convexo . . . . .		13
		7.6	Ponto . . . . .		15
		7.7	Triangulos . . . . .		15
		7.8	Vetor . . . . .		16

<b>8 Grafos</b>	<b>17</b>	<b>10.9 Fatorial Grande</b>	<b>30</b>
8.1 Bfs - Matriz	17	10.10Mmc Mdc - Euclides Extendido	30
8.2 Bfs - Por Niveis	17	10.11Mmc Mdc - Mdc	30
8.3 Bfs - String	17	10.12Mmc Mdc - Mdc Multiplo	30
8.4 Bfs - Tradicional	18	10.13Mmc Mdc - Mmc	30
8.5 Dfs	18	10.14Mmc Mdc - Mmc Multiplo	30
8.6 Articulation	19	10.15Modulo - @Info	31
8.7 Bipartido	19	10.16Modulo - Divisao E Potencia Mod M	31
8.8 Caminho Minimo - @Tabela	20	10.17N Fibonacci	31
8.9 Caminho Minimo - Bellman Ford	20	10.18Numeros Grandes	31
8.10 Caminho Minimo - Checar I J (In)Diretamente Conectados	20	10.19Primos - Divisores De N - Listar	32
8.11 Caminho Minimo - Diametro Do Grafo	20	10.20Primos - Divisores De N - Somar	32
8.12 Caminho Minimo - Dijkstra	21	10.21Primos - Fatores Primos - Contar Diferentes	32
8.13 Caminho Minimo - Floyd Warshall	21	10.22Primos - Fatores Primos - Listar	32
8.14 Caminho Minimo - Minimax	22	10.23Primos - Fatores Primos - Somar	32
8.15 Cycle Check	22	10.24Primos - Is Prime	33
8.16 Encontrar Ciclo	23	10.25Primos - Lowest Prime Factor	33
8.17 Euler Tree	23	10.26Primos - Miller Rabin	33
8.18 Kosaraju	23	10.27Primos - Numero Fatores Primos De N	33
8.19 Kruskal	24	10.28Primos - Primo Grande	33
8.20 Labirinto	25	10.29Primos - Primos Relativos De N	33
8.21 Pontos Articulacao	25	10.30Primos - Sieve	33
8.22 Successor Graph	26	10.31Primos - Sieve Linear	34
8.23 Topological Kahn	26	10.32Tabela Verdade	34
<b>9 Grafos Especiais</b>	<b>26</b>	<b>11 Matriz</b>	<b>34</b>
9.1 Arvore - @Info	26	11.1 Fibonacci Matricial	34
9.2 Bipartido - @Info	27	11.2 Maior Retangulo Binario Em Matriz	35
9.3 Dag - @Info	27	11.3 Max 2D Range Sum	36
9.4 Dag - Sslp	27	11.4 Potencia Matriz	36
9.5 Dag - Sssp	27	<b>12 Strings</b>	<b>37</b>
9.6 Dag - Fishmonger	28	12.1 Calculadora Posfixo	37
9.7 Dag - Numero De Caminhos 2 Vertices	28	12.2 Chaves Colchetes Parenteses	37
9.8 Eulerian - @Info	28	12.3 Infixo Para Posfixo	37
9.9 Eulerian - Euler Path	28	12.4 Lexicograficamente Minima	37
<b>10 Matematica</b>	<b>29</b>	12.5 Lower Upper	38
10.1 Casas	29	12.6 Numeros E Char	38
10.2 Ciclo Em Funcao	29	12.7 Ocorrencias	38
10.3 Contar Quanti Solucoes Eq 2 Variaveis	29	12.8 Palindromo	38
10.4 Conversao De Bases	29	12.9 Permutacao	38
10.5 Decimal Para Fracao	29	12.10Remove Acento	38
10.6 Dois Primos Somam Num	29	12.11Split Cria	39
10.7 Factorial	30		
10.8 Fast Exponentiation	30		

<b>13</b>	<b>Vector</b>	<b>39</b>
13.1	Contar Subarrays Somam K . . . . .	39
13.2	Elemento Mais Frequente . . . . .	39
13.3	K Maior Elemento . . . . .	39
13.4	Maior Retangulo Em Histograma . . . . .	40
13.5	Maior Sequencia Subsequente . . . . .	40
13.6	Maior Subsequencia Comum . . . . .	40
13.7	Maior Subsequência Crescente . . . . .	41
13.8	Maior Triangulo Em Histograma . . . . .	41
13.9	Remove Repetitive . . . . .	41
13.10	Soma Maxima Sequencial . . . . .	41
13.11	Subset Sum . . . . .	42
13.12	Troco . . . . .	42
<b>14</b>	<b>Outros</b>	<b>42</b>
14.1	Dp . . . . .	42
14.2	Binario . . . . .	43
14.3	Binary Search . . . . .	43
14.4	Fibonacci . . . . .	43
14.5	Horario . . . . .	43
14.6	Intervalos . . . . .	43

# 1 Utils

## 1.1 Files

```
1 #!/bin/bash
2
3 for c in {a..f}; do
4     cp temp.cpp "$c.cpp"
5     echo "$c" > "$c.txt"
6     if [ "$c" = "$letter" ]; then
7         break
8     fi
9 done
```

## 1.2 Limites

```
1 // LIMITES DE REPRESENTACAO DE DADOS
```

tipo	bits	minimo .. maximo	precisao decim.
char	8	0 .. 127	2
signed char	8	-128 .. 127	2
unsigned char	8	0 .. 255	2
short	16	-32.768 .. 32.767	4
unsigned short	16	0 .. 65.535	4
int	32	-2 x 10 <sup>9</sup> .. 2 x 10 <sup>9</sup>	9
unsigned int	32	0 .. 4 x 10 <sup>9</sup>	9
int64_t	64	-9 x 10 <sup>18</sup> .. 9 x 10 <sup>18</sup>	18
uint64_t	64	0 .. 18 x 10 <sup>18</sup>	19
float	32	1.2 x 10 <sup>-38</sup> .. 3.4 x 10 <sup>38</sup>	6-9
double	64	2.2 x 10 <sup>-308</sup> .. 1.8 x 10 <sup>308</sup>	15-17
long double	80	3.4 x 10 <sup>-4932</sup> .. 1.1 x 10 <sup>4932</sup>	18-19
BigInt/Dec(java)	1 x 10 <sup>-2147483648</sup>	.. 1 x 10 <sup>2147483647</sup>	0

```
19 // LIMITES DE MEMORIA
```

```
21 1MB = 1,048,576 bool
22 1MB = 524,288 char
23 1MB = 262,144 int32_t
24 1MB = 131,072 int64_t
25 1MB = 65,536 float
26 1MB = 32,768 double
27 1MB = 16,384 long double
28 1MB = 16,384 BigInteger / BigDecimal
```

```
30 // ESTOURAR TEMPO
```

input size	complexidade para 1 s
[10,11]	0(n!), 0(n <sup>6</sup> )
[17,19]	0(2 <sup>n</sup> * n <sup>2</sup> )
[18, 22]	0(2 <sup>n</sup> * n)
[24,26]	0(2 <sup>n</sup> )
... 100	0(n <sup>4</sup> )
... 450	0(n <sup>3</sup> )
... 1500	0(n <sup>2.5</sup> )

```
41 ... 2500      | 0(n^2 * log n)
42 ... 10^4      | 0(n^2)
43 ... 2*10^5    | 0(n^1.5)
44 ... 4.5*10^6  | 0(n log n)
45 ... 10^7      | 0(n log log n)
46 ... 10^8      | 0(n), 0(log n), 0(1)
47
48
49 // FATORIAL
50
51 12! = 479.001.600 [limite do (u)int]
52 20! = 2.432.902.008.176.640.000 [limite do (u)int64_t]
```

## 1.3 Makefile

```
1 CXX = g++
2 CXXFLAGS = -fsanitize=address,undefined -fno-omit-frame-pointer -g -Wall
               -Wshadow -std=c++17 -Wno-unused-result -Wno-sign-compare -Wno-char-
               subscripts #-fuse-ld=gold
3
4 q:
5     cp temp.cpp $(f).cpp
6     touch $(f).txt
7     code $(f).txt
8     code $(f).cpp
9     clear
10 compile:
11     g++ -g $(f).cpp $(CXXFLAGS) -o $(f)
12 exe:
13     ./$(f) < $(f).txt
14
15 runc: compile
16 runci: compile exe
17
18 clearexe:
19     find . -maxdepth 1 -type f -executable -exec rm {} +
20 cleartxt:
21     find . -type f -name "*.txt" -exec rm -f {} \;
22 clear: clearexe cleartxt
23 clear
```

## 1.4 Template Cpp

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3
4 #define _ std::ios::sync_with_stdio(false); cin.tie(NULL); cout.tie(NULL);
5 #define all(a) a.begin(), a.end()
6 #define int long long int
7 #define double long double
8 #define vi vector<int>
9 #define pii pair<int,int>
10 #define endl "\n"
11 #define print_v(a) for(auto x : a) cout<<x<<" ";cout<<endl
12 #define print_vp(a) for(auto x : a) cout<<x.first<<" "<<x.second<< endl
13 #define f(i,s,e) for(int i=s;i<e;i++)
```

```

14 #define rf(i,e,s)    for(int i=e-1;i>=s;i--)
15 #define CEIL(a, b)   ((a) + (b - 1))/b
16 #define TRUNC(x, n)  floor(x * pow(10, n))/pow(10, n)
17 #define ROUND(x, n)  round(x * pow(10, n))/pow(10, n)
18 #define dbg(x) cout << #x << " = " << x << " ";
19 #define dbg1(x) cout << #x << " = " << x << endl;
20
21 const int INF = 1e9;    // 2^31-1
22 const int LLINF = 4e18; // 2^63-1
23 const double EPS = 1e-9;
24 const int MAX = 1e6+10; // 10^6 + 10
25
26 void solve() {
27
28 }
29
30 int32_t main() { _
31
32
33     clock_t z = clock();
34     int t = 1; // cin >> t;
35     while (t--) {
36         solve();
37     }
38     cerr << fixed << "Run Time : " << ((double)(clock() - z) /
39     CLOCKS_PER_SEC) << endl;
40     return 0;
41 }

```

## 1.5 Template Python

```

1 import sys
2 import math
3 import bisect
4 from sys import stdin, stdout
5 from math import gcd, floor, sqrt, log
6 from collections import defaultdict as dd
7 from bisect import bisect_left as bl, bisect_right as br
8
9 sys.setrecursionlimit(100000000)
10
11 inp    =lambda: int(input())
12 strng  =lambda: input().strip()
13 jn     =lambda x,l: x.join(map(str,l))
14 strl   =lambda: list(input().strip())
15 mul    =lambda: map(int, input().strip().split())
16 mulf   =lambda: map(float, input().strip().split())
17 seq    =lambda: list(map(int, input().strip().split()))
18
19 ceil    =lambda x: int(x) if(x==int(x)) else int(x)+1
20 ceildiv=lambda x,d: x//d if(x%d==0) else x//d+1
21
22 flush  =lambda: stdout.flush()
23 stdstr =lambda: stdin.readline()
24 stdint =lambda: int(stdin.readline())
25 stdpr  =lambda x: stdout.write(str(x))
26

```

```

27 mod=1000000007
28
29 #main code
30
31 a = None
32 b = None
33 lista = None
34
35 def ident(*args):
36     if len(args) == 1:
37         return args[0]
38     return args
39
40
41 def parsin(*, l=1, vpl=1, s=" "):
42     if l == 1:
43         if vpl == 1: return ident(input())
44         else: return list(map(ident, input().split(s)))
45     else:
46         if vpl == 1: return [ident(input()) for _ in range(l)]
47         else: return [list(map(ident, input().split(s))) for _ in range(l)]
48
49
50 def solve():
51     pass
52
53 # if __name__ == '__main__':
54 def main():
55     st = clk()
56
57     escolha = "in"
58     #escolha = "num"
59
60     match escolha:
61         case "in":
62             # ãl infinitas linhas agrupadas de 2 em 2
63             # pra infinitos valores em 1 linha pode armazenar em uma lista
64             while True:
65                 global a, b
66                 try: a, b = input().split()
67                 except (EOFError): break #permite ler todas as linhas
68             dentro do .txt
69             except (ValueError): pass # consegue ler éat linhas em
70             branco
71             else:
72                 a, b = int(a), int(b)
73                 solve()
74
75         case "num":
76             global lista
77             # int l; cin >> l; while(l--){for(i=0; i<vpl; i++)}
78             # retorna listas com inputs de cada linha
79             # leia l linhas com vpl valores em cada uma delas
80             # caseo seja mais de uma linha, retorna lista com listas
81             de inputs
82             lista = parsin(l=2, vpl=5)

```

```

80         solve()
81
82     sys.stderr.write(f"Run Time : {(clk() - st):.6f} seconds\n")
83
84 main()

```

## 2 Informações

### 2.1 Bitmask

```

1  int n = 11, ans = 0, k = 3;
2
3  // Operacoes com bits
4  ans = n & k; // AND bit a bit
5  ans = n | k; // OR bit a bit
6  ans = n ^ k; // XOR bit a bit
7  ans = ~n;    // NOT bit a bit
8
9  // Operacoes com 2^k em O(1)
10 ans = n << k; // ans = n * 2^k
11 ans = n >> k; // ans = n / 2^k
12
13 int j;
14
15 // Ativa j-esimo bit (0-based)
16 ans |= (1<<j);
17
18 // Desativa j-esimo bit (0-based)
19 ans &= (1<<j);
20
21 // Inverte j-esimo bit (0-based)
22 ans ^= (1<<j);
23
24 // verificar se j-esimo bit esta ativo (0-based)
25 ans = n & (1<<j);
26
27 // Pegar valor do bit menos significativo | Retorna o maior divisor
28 ans = n & -n;
29
30 // Ligar todos os n bits
31 ans = (1<<n) - 1;
32
33 // Contar quantos 1's tem no binario de n
34 ans = __builtin_popcount(n);
35
36 // Contar quantos 0's tem no final do binario de n
37 ans = __builtin_ctz(n);

```

### 2.2 Priority Queue

```

1 // HEAP CRESCENTE {5,4,3,2,1}
2 priority_queue<int> pq; // max heap
3     // maior elemento:
4     pq.top();
5

```

```

6 // HEAP DECRESCENTE {1,2,3,4,5}
7 priority_queue<int, vector<int>, greater<int>> pq; // min heap
8     // menor elemento:
9     pq.top();
10
11 // REMOVER ELEMENTO
12 // Complexidade: O(n)
13 // Retorno: true se existe, false se não existe
14 pq.remove(x);
15
16 // INSERIR ELEMENTO
17 // Complexidade: O(log(n))
18 pq.push(x);
19
20 // REMOVER TOP
21 // Complexidade: O(log(n))
22 pq.pop();
23
24 // TAMANHO
25 // Complexidade: O(1)
26 pq.size();
27
28 // VAZIO
29 // Complexidade: O(1)
30 pq.empty();
31
32 // LIMPAR
33 // Complexidade: O(n)
34 pq.clear();
35
36 // ITERAR
37 // Complexidade: O(n)
38 for (auto x : pq) {}
39
40 // çãOrdemao por çãfuno customizada passada por parametro ao criar a pq
41 // Complexidade: O(n log(n))
42 auto cmp = [](int a, int b) { return a > b; };
43 priority_queue<int, vector<int>, decltype(cmp)> pq(cmp);

```

### 2.3 Set

```

1 set<int> st;
2
3 // Complexidade: O(log(n))
4 st.insert(x);
5 st.erase(x);
6 st.find(x);
7 st.erase(st.find(x));
8
9
10 // Complexidade: O(1)
11 st.size();
12 st.empty();
13
14 // Complexidade: O(n)
15 st.clear();
16 for (auto x : st) {}

```

17						
18		priority_queue		set		
19						
20	op	call	compl	call	compl	melhor
21						
22	insert	push	log(n)	insert	log(n)	pq
23	erase_menor	pop	log(n)	erase	log(n)	pq
24	get_menor	top	1	begin	1	set
25	get_maior	-	-	rbegin	1	set
26	erase_number	remove	n	erase	log(n)	set
27	find_number	-	-	find	log(n)	set
28	find_>=	-	-	lower	log(n)	set
29	find_<=	-	-	upper	log(n)	set
30	iterate	for	n	for	n	set
31						

## 2.4 Sort

```

1 vector<int> v;
2 // Sort Crescente:
3 sort(v.begin(), v.end());
4 sort(all(v));
5
6 // Sort Decrescente:
7 sort(v.rbegin(), v.rend());
8 sort(all(v), greater<int>());
9
10 // Sort por uma função:
11 auto cmp = [](int a, int b) { return a > b; }; // { 2, 3, 1 } -> { 3,
2, 1 }
12 auto cmp = [](int a, int b) { return a < b; }; // { 2, 3, 1 } -> { 1,
2, 3 }
13 sort(v.begin(), v.end(), cmp);
14 sort(all(v), cmp);
15
16 // Sort por uma função (comparação de pares):
17 auto cmp = [](pair<int, int> a, pair<int, int> b) { return a.second >
b.second; };
18
19 // Sort parcial:
20 partial_sort(v.begin(), v.begin() + n, v.end()); // sorta com n menos
elementos
21 partial_sort(v.rbegin(), v.rbegin() + n, s.rend()) // sorta com n
maiores elementos
22
23 // SORT VS SET
24 * para um input com elementos distintos, sort é mais rápido que set

```

## 2.5 String

```

1 // INICIALIZAR
2 string s; // string vazia
3 string s(n, c); // n cópias de c
4 string s(s); // cópia de s
5 string s(s, i, n); // cópia de s[i..i+n-1]
6

```

```

7 // SUBSTRING
8 // Complexidade: O(n)
9 s.substr(i, n); // substring de s[i..i+n-1]
10 s.substr(i, j - i + 1); // substring de s[i..j]
11
12 // TAMANHO
13 // Complexidade: O(1)
14 s.size(); // tamanho da string
15 s.empty(); // true se vazia, false se não vazia
16
17 // MODIFICAR
18 // Complexidade: O(n)
19 s.push_back(c); // adiciona c no final
20 s.pop_back(); // remove o último
21 s += t; // concatena t no final
22 s.insert(i, t); // insere t a partir da posição i
23 s.erase(i, n); // remove n caracteres a partir da posição i
24 s.replace(i, n, t); // substitui n caracteres a partir da posição i por t
25 s.swap(t); // troca o conteúdo com t
26
27 // COMPARAR
28 // Complexidade: O(n)
29 s == t; // igualdade
30 s != t; // diferença
31 s < t; // menor que
32 s > t; // maior que
33 s <= t; // menor ou igual
34 s >= t; // maior ou igual
35
36 // BUSCA
37 // Complexidade: O(n)
38 s.find(t); // posição da primeira ocorrência de t, ou string::npos se não
existe
39 s.rfind(t); // posição da última ocorrência de t, ou string::npos se não
existe
40 s.find_first_of(t); // posição da primeira ocorrência de um caractere de t
, ou string::npos se não existe
41 s.find_last_of(t); // posição da última ocorrência de um caractere de t,
ou string::npos se não existe
42 s.find_first_not_of(t); // posição do primeiro caractere que não está em t
, ou string::npos se não existe
43 s.find_last_not_of(t); // posição do último caractere que não está em t, ou
string::npos se não existe
44
45 // SUBSTITUIR
46 // Complexidade: O(n)
47 s.replace(i, n, t); // substitui n caracteres a partir da posição i por t
48 s.replace(s.begin() + i, s.begin() + i + n, t.begin(), t.end()); //
substitui n caracteres a partir da posição i por t
49 s.replace(s.begin() + i, s.begin() + i + n, t); // substitui n caracteres
a partir da posição i por t
50 s.replace(s.begin() + i, s.begin() + i + n, n, c); // substitui n
caracteres a partir da posição i por n cópias de c

```

## 2.6 Vector

```

1 // INICIALIZAR

```

```

2 vector<int> v (n); // n ócpias de 0
3 vector<int> v (n, v); // n ócpias de v
4
5 // PUSH_BACK
6 // Complexidade: O(1) amortizado (O(n) se realocar)
7 v.push_back(x);
8
9 // REMOVER
10 // Complexidade: O(n)
11 v.erase(v.begin() + i);
12
13 // INSERIR
14 // Complexidade: O(n)
15 v.insert(v.begin() + i, x);
16
17 // ORDENAR
18 // Complexidade: O(n log(n))
19 sort(v.begin(), v.end());
20 sort(all(v));
21
22 // BUSCA BINARIA
23 // Complexidade: O(log(n))
24 // Retorno: true se existe, false se ão existe
25 binary_search(v.begin(), v.end(), x);
26
27 // FIND
28 // Complexidade: O(n)
29 // Retorno: iterador para o elemento, v.end() se ão existe
30 find(v.begin(), v.end(), x);
31
32 // CONTAR
33 // Complexidade: O(n)
34 // Retorno: úmnero de êocorrncias
35 count(v.begin(), v.end(), x);

```

## 3 .vscode

## 4 Combinatoria

### 4.1 @ Factorial

```

1 // Calcula o fatorial de um úmnero n
2 // Complexidade: O(n)
3
4 int factdp[20];
5
6 int fact(int n) {
7     if (n < 2) return 1;
8     if (factdp[n] != 0) return factdp[n];
9     return factdp[n] = n * fact(n - 1);
10 }

```

### 4.2 @ Tabela

```

1 // Sequencia de p elementos de um total de n
2
3 ORDEM \ REPETIC | COM | SEM
4 -----+-----+-----
5 IMPORTA | ARRANJO COM REPETICAO | ARRANJO SIMPLES
6 NAO | COMBINACAO COM REPETICAO | COMBINACAO SIMPLES

```

### 4.3 Arranjo Com Repeticao

```

1 int arranjoComRepeticao(int p, int n) {
2     return pow(n, p);
3 }

```

### 4.4 Arranjo Simples

```

1 int arranjoSimples(int p, int n) {
2     return fact(n) / fact(n - p);
3 }

```

### 4.5 Catalan

```

1 const int MAX_N = 100010;
2 const int p = 1e9+7; // p is a prime > MAX_N
3
4
5 int mod(int a, int m) {
6     return ((a%m) + m) % m;
7 }
8
9 int inv(int a) {
10     return modPow(a, p-2, p);
11 }
12
13 int modPow(int b, int p, int m) {
14     if (p == 0) return 1;
15     int ans = modPow(b, p/2, m);
16     ans = mod(ans*ans, m);
17     if (p&1) ans = mod(ans*b, m);
18     return ans;
19 }
20
21 int Cat[MAX_N];
22
23 void solve() {
24     Cat[0] = 1;
25     for (int n = 0; n < MAX_N-1; ++n) // O(MAX_N * log p)
26         Cat[n+1] = ((4*n+2)%p * Cat[n]%p * inv(n+2)) % p;
27     cout << Cat[100000] << "\n"; // the answer is
28     945729344
29 }

```

### 4.6 Combinacao Com Repeticao

```

1 int combinacaoComRepeticao(int p, int n) {
2     return fact(n + p - 1) / (fact(p) * fact(n - 1));
3 }

```



## 4.7 Combinacao Simples

```
1 const int MAX_N = 100010;
2 const int p = 1e9+7; // p is a prime > MAX_N
3
4 int mod(int a, int m) {
5     return ((a%m) + m) % m;
6 }
7
8 int modPow(int b, int p, int m) {
9     if (p == 0) return 1;
10    int ans = modPow(b, p/2, m);
11    ans = mod(ans*ans, m);
12    if (p&1) ans = mod(ans*b, m);
13    return ans;
14 }
15
16 int inv(int a) {
17     return modPow(a, p-2, p);
18 }
19
20 int fact[MAX_N];
21
22 int comb(int n, int k) {
23     // O(log p)
24     if (n < k) return 0;
25     // clearly
26     return (((fact[n] * inv(fact[k])) % p) * inv(fact[n-k])) % p;
27 }
28
29 void solve() {
30     fact[0] = 1;
31     for (int i = 1; i < MAX_N; ++i)
32         fact[i] = (fact[i-1]*i) % p;
33     cout << C(100000, 50000) << "\n";
34 }
```

## 4.8 Permutacao Circular

```
1 // Permutacao objetos em posicao simetrica em um circulo
2
3 int permutacaoCircular(int n) {
4     return fact(n - 1);
5 }
```

## 4.9 Permutacao Com Repeticao

```
1 // Trocar elementos de lugar quando ha termos repetidos (ANAGRAMA)
2 int permutacaoComRepeticao(string s) {
3     int n = s.size();
4     int ans = fact(n);
5     map<char, int> freq;
6     for (char c : s) {
7         freq[c]++;
8     }
9     for (auto [c, f] : freq) {
```

```
10         ans /= fact(f);
11     }
12     return ans;
13 }
```

## 4.10 Permutacao Simples

```
1 // Agrupamentos distintos entre si pela ordem (FILA)
2 // Diferenca do arranjo: usa todos os elementos para o calculo
3 // SEM repeticao
4
5 int permutacaoSimples(int n) {
6     return fact(n);
7 }
```

## 5 DP

### 5.1 Dp

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3
4 const int MAX_gm = 30; // up to 20 garments at most and 20 models/garment
5 const int MAX_M = 210; // maximum budget is 200
6
7 int M, C, price[MAX_gm][MAX_gm]; // price[g (<= 20)][k (<= 20)]
8 int memo[MAX_gm][MAX_M]; // TOP-DOWN: dp table [g (< 20)][money
9                             (<= 200)]
10
11 int dp(int g, int money) {
12     if (money < 0) return -1e9;
13     if (g == C) return M - money;
14     if (memo[g][money] != -1)
15         return memo[g][money]; // avaliar linha g com dinheiro money (cada
16                                 caso pensavel)
17     int ans = -1;
18     for (int k = 1; k <= price[g][0]; ++k)
19         ans = max(ans, dp(g + 1, money - price[g][k]));
20     return memo[g][money] = ans;
21 }
22
23 int main() {
24     int TC;
25     scanf("%d", &TC);
26     while (TC--)
27     {
28         scanf("%d %d", &M, &C);
29         for (int g = 0; g < C; ++g)
30         {
31             scanf("%d", &price[g][0]); // store k in price[g][0]
32             for (int k = 1; k <= price[g][0]; ++k)
33                 scanf("%d", &price[g][k]);
34         }
35         memset(memo, -1, sizeof memo); // TOP-DOWN: init memo
```

```

35     if (dp(0, M) < 0)
36         printf("no solution\n"); // start the top-down DP
37     else
38         printf("%d\n", dp(0, M));
39 }
40 return 0;
41 }

```

## 5.2 Mochila

```

1 // Description: Problema da mochila 0-1: retorna o valor maximo que pode
  ser carregado
2 // Complexidade: O(n*capacidade)
3
4 const int MAX_QNT_OBJETOS = 60; // 50 + 10
5 const int MAX_PESO_OBJETO = 1010; // 1000 + 10
6
7 int n, memo[MAX_QNT_OBJETOS][MAX_PESO_OBJETO];
8 vi valor, peso;
9
10 int mochila(int id, int remW) {
11     if ((id == n) || (remW == 0)) return 0;
12     int &ans = memo[id][remW];
13     if (ans != -1) return ans;
14     if (peso[id] > remW) return ans = mochila(id+1, remW);
15     return ans = max(mochila(id+1, remW), valor[id]+mochila(id+1, remW-
peso[id]));
16 }
17
18 void solve() {
19
20     memset(memo, -1, sizeof memo);
21
22     int capacidadeMochila; cin >> capacidadeMochila;
23
24     f(i,0,capacidadeMochila) { memo[0][i] = 0; } // testar com e sem essa
linha
25
26     cin >> n;
27
28     valor.assign(n, 0);
29     peso.assign(n, 0);
30
31     f(i,0,n) {
32         cin >> peso[i] >> valor[i];
33     }
34
35     cout << mochila(0, capacidadeMochila) << endl;
36
37 }

```

## 6 Estruturas

### 6.1 Bittree

```

1 /*      n --> No. of elements present in input array.
2      BITree[0..n] --> Array that represents Binary Indexed Tree.
3      arr[0..n-1] --> Input array for which prefix sum is evaluated. */
4
5 // Returns sum of arr[0..index]. This function assumes
6 // that the array is preprocessed and partial sums of
7 // array elements are stored in BITree[].
8 int getSum(vector<int>& BITree, int index) {
9     int sum = 0;
10    index = index + 1;
11    while (index>0) {
12        sum += BITree[index];
13        index -= index & (-index);
14    }
15    return sum;
16 }
17
18 void updateBIT(vector<int>& BITree, int n, int index, int val) {
19     index = index + 1;
20
21     while (index <= n) {
22         BITree[index] += val;
23         index += index & (-index);
24     }
25 }
26
27 vector<int> constructBITree(vector<int>& arr, int n) {
28     vector<int> BITree(n+1, 0);
29
30     for (int i=0; i<n; i++)
31         updateBIT(BITree, n, i, arr[i]);
32
33     return BITree;
34 }
35
36 void solve() {
37     vector<int> freq = {2, 1, 1, 3, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};
38     int n = freq.size();
39     vector<int> BITree = constructBITree(freq, n);
40     cout << "Sum of elements in arr[0..5] is" << getSum(BITree, 5);
41     // Let use test the update operation
42     freq[3] += 6;
43     updateBIT(BITree, n, 3, 6); //Update BIT for above change in arr[]
44
45     cout << "\nSum of elements in arr[0..5] after update is "
46         << getSum(BITree, 5);
47 }

```

### 6.2 Fenwick Tree

```

1 #define LSONe(S) ((S) & -(S)) // the key operation
2
3 class FenwickTree { // index 0 is not used
4     private:
5         vi ft;
6
7         void build(const vi &f) {

```

```

8         int m = (int)f.size() - 1; // note f[0] is always 0
9         ft.assign(m + 1, 0);
10        for (int i = 1; i <= m; ++i) {
11            ft[i] += f[i];
12            if (i + LSOne(i) <= m)
13                ft[i + LSOne(i)] += ft[i];
14        }
15    }
16
17 public:
18     // empty FT
19     FenwickTree(int m) { ft.assign(m + 1, 0); }
20
21     // FT based on f
22     FenwickTree(const vi &f) { build(f); }
23
24     // FT based on s, and m = max(s)
25     FenwickTree(int m, const vi &s) {
26         vi f(m + 1, 0);
27         for (int i = 0; i < (int)s.size(); ++i)
28             ++f[s[i]];
29         build(f);
30     }
31
32     // RSQ(1, j)
33     int rsq(int j) {
34         int sum = 0;
35         for (; j; j -= LSOne(j))
36             sum += ft[j];
37         return sum;
38     }
39
40     // RSQ(i, j)
41     int rsq(int i, int j) { return rsq(j) - rsq(i - 1); }
42
43     // v[i] += v
44     void update(int i, int v) {
45         for (; i < (int)ft.size(); i += LSOne(i))
46             ft[i] += v;
47     }
48
49     // n-th element >= k
50     int select(int k) {
51         int p = 1;
52         while (p * 2 < (int)ft.size())
53             p *= 2;
54         int i = 0;
55         while (p) {
56             if (k > ft[i + p]) {
57                 k -= ft[i + p];
58                 i += p;
59             }
60             p /= 2;
61         }
62         return i + 1;
63     }
64 };

```

```

65
66 // Range Update Point Query
67 class RUPQ {
68 private:
69     FenwickTree ft;
70 public:
71
72     // empty FT
73     RUPQ(int m) : ft(FenwickTree(m)) {}
74
75     // v[ui,...,uj] += v
76     void range_update(int ui, int uj, int v) {
77         ft.update(ui, v);
78         ft.update(uj + 1, -v);
79     }
80
81     // rsq(i) = v[1] + v[2] + ... + v[i]
82     int point_query(int i) { return ft.rsq(i); }
83 };
84
85 // Range Update Range Query
86 class RURQ {
87 private:
88     RUPQ rupq;
89     FenwickTree purq;
90 public:
91     // empty structures
92     RURQ(int m) : rupq(RUPQ(m)), purq(FenwickTree(m)) {}
93
94     // v[ui,...,uj] += v
95     void range_update(int ui, int uj, int v) {
96         rupq.range_update(ui, uj, v);
97         purq.update(ui, v * (ui - 1));
98         purq.update(uj + 1, -v * uj);
99     }
100
101     // rsq(j) = v[1]*j - (v[1] + ... + v[j])
102     int rsq(int j) {
103         return rupq.point_query(j) * j -
104             purq.rsq(j);
105     }
106
107     // rsq(i, j) = rsq(j) - rsq(i - 1)
108     int rsq(int i, int j) { return rsq(j) - rsq(i - 1); }
109 };
110
111 int32_t main() {
112
113     vi f = {0, 0, 1, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 0}; // index 0 is always 0
114     FenwickTree ft(f);
115     printf("%lli\n", ft.rsq(1, 6)); // 7 => ft[6]+ft[4] = 5+2 = 7
116     printf("%lld\n", ft.select(7)); // index 6, rsq(1, 6) == 7, which
117                                     // is >= 7
118     ft.update(5, 1); // update demo
119     printf("%lli\n", ft.rsq(1, 10)); // now 12
120     printf("====\n");
121     RUPQ rupq(10);

```

```

121 RURQ rurq(10);
122 rupq.range_update(2, 9, 7); // indices in [2, 3, ..., 9] updated by +7
123 rurq.range_update(2, 9, 7); // same as rupq above
124 rupq.range_update(6, 7, 3); // indices 6&7 are further updated by +3
    (10)
125 rurq.range_update(6, 7, 3); // same as rupq above
126 // idx = 0 (unused) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10
127 // val = -         | 0 | 7 | 7 | 7 | 7 | 10 | 10 | 7 | 7 | 0
128 for (int i = 1; i <= 10; i++)
129     printf("%lld -> %lli\n", i, rupq.point_query(i));
130 printf("RSQ(1, 10) = %lli\n", rurq.rsq(1, 10)); // 62
131 printf("RSQ(6, 7) = %lli\n", rurq.rsq(6, 7));    // 20
132 return 0;
133 }

```

## 6.3 Seg Tree

```

1 // Query: soma do range [a, b]
2 // Update: soma x em cada elemento do range [a, b]
3 //
4 // Complexidades:
5 // build - O(n)
6 // query - O(log(n))
7 // update - O(log(n))
8 namespace SegTree {
9
10     int seg[4*MAX];
11     int n, *v;
12
13     int op(int a, int b) { return a + b; }
14
15     int build(int p=1, int l=0, int r=n-1) {
16         if (l == r) return seg[p] = v[l];
17         int m = (l+r)/2;
18         return seg[p] = op(build(2*p, l, m), build(2*p+1, m+1, r));
19     }
20
21     void build(int n2, int* v2) {
22         n = n2, v = v2;
23         build();
24     }
25
26     int query(int a, int b, int p=1, int l=0, int r=n-1) {
27         if (a <= l and r <= b) return seg[p];
28         if (b < l or r < a) return 0;
29         int m = (l+r)/2;
30         return op(query(a, b, 2*p, l, m), query(a, b, 2*p+1, m+1, r));
31     }
32
33     int update(int a, int b, int x, int p=1, int l=0, int r=n-1) {
34         if (a <= l and r <= b) return seg[p];
35         if (b < l or r < a) return seg[p];
36         int m = (l+r)/2;
37         return seg[p] = op(update(a, b, x, 2*p, l, m), update(a, b, x, 2*p
51 +1, m+1, r));
38     }
39 };

```

## 6.4 Segmen Tree

```

1 // Segment Tree with Lazy Propagation
2 // Update Range: O(log(n))
3 // Query Range: O(log(n))
4 // Memory: O(n)
5 // Build: O(n)
6
7 typedef vector<int> vi;
8
9 class SegmentTree {
10     private:
11         int n;
12         vi A, st, lazy;
13         int defaultVar; // min: INT_MIN | max: INT_MIN | sum: 0 | multiply
14         : 1
15
16         int l(int p) { return p<<1; }
17         int r(int p) { return (p<<1)+1; }
18
19         int conquer(int a, int b) {
20             if(a == defaultVar) return b;
21             if(b == defaultVar) return a;
22             return min(a, b);
23         }
24
25         void build(int p, int L, int R) {
26             if (L == R) st[p] = A[L];
27             else {
28                 int m = (L+R)/2;
29                 build(l(p), L, m);
30                 build(r(p), m+1, R);
31                 st[p] = conquer(st[l(p)], st[r(p)]);
32             }
33         }
34
35         void propagate(int p, int L, int R) {
36             if (lazy[p] != defaultVar) {
37                 st[p] = lazy[p];
38                 if (L != R) lazy[l(p)] = lazy[r(p)] = lazy[p];
39                 else A[L] = lazy[p];
40                 lazy[p] = defaultVar;
41             }
42         }
43
44         int query(int p, int L, int R, int i, int j) {
45             propagate(p, L, R);
46             if (i > j) return defaultVar;
47             if ((L >= i) && (R <= j)) return st[p];
48             int m = (L+R)/2;
49             return conquer(query(l(p), L, m, i, min(m, j)),
50                             query(r(p), m+1, R, max(i, m+1), j));
51         }
52
53         void update(int p, int L, int R, int i, int j, int val) {
54             propagate(p, L, R);
55             if (i > j) return;

```

```

55     if ((L >= i) && (R <= j)) {
56         lazy[p] = val;
57         propagate(p, L, R);
58     }
59     else {
60         int m = (L+R)/2;
61         update(l(p), L, m, i, min(m, j), val);
62         update(r(p), m+1, R, max(i, m+1), j, val);
63         int lsubtree = (lazy[l(p)] != defaultVar) ? lazy[l(p)] :
64         st[l(p)];
65         int rsubtree = (lazy[r(p)] != defaultVar) ? lazy[r(p)] :
66         st[r(p)];
67         st[p] = conquer(lsubtree, rsubtree);
68     }
69 }
70 public:
71     SegmentTree(int sz, int defaultVal) : n(sz), A(n), st(4*n), lazy
72     (4*n, defaultVal), defaultVar(defaultVal) {}
73
74     // vetor referencia, valor default (min: INT_MIN | max: INT_MIN |
75     sum: 0 | multiply: 1)
76     SegmentTree(const vi &initialA, int defaultVal) : SegmentTree((int)
77     initialA.size(), defaultVal) {
78         A = initialA;
79         build(1, 0, n-1);
80     }
81
82     // A[i..j] = val | 0 <= i <= j < n | O(log(n))
83     void update(int i, int j, int val) { update(1, 0, n-1, i, j, val); }
84
85     // max(A[i..j]) | 0 <= i <= j < n | O(log(n))
86     int query(int i, int j) { return query(1, 0, n-1, i, j); }
87 };
88
89 void solve() {
90     vi A = {18, 17, 13, 19, 15, 11, 20, 99}; // make n a power of 2
91     int defaultVar = INT_MIN; // default value for max query
92     SegmentTree st(A, defaultVar);
93     int i = 1, j = 3;
94     int ans = st.query(i, j);
95     int newVal = 77;
96     st.update(i, j, newVal);
97     ans = st.query(i, j);
98 }

```

## 6.5 Sparse Table Disjunta

```

1 // Sparse Table Disjunta
2 //
3 // Resolve qualquer operacao associativa
4 // MAX2 = log(MAX)
5 //
6 // Complexidades:
7 // build - O(n log(n))
8 // query - O(1)

```

```

9
10 namespace SparseTable {
11     int m[MAX2][2*MAX], n, v[2*MAX];
12     int op(int a, int b) { return min(a, b); }
13     void build(int n2, int* v2) {
14         n = n2;
15         for (int i = 0; i < n; i++) v[i] = v2[i];
16         while (n&(n-1)) n++;
17         for (int j = 0; (1<<j) < n; j++) {
18             int len = 1<<j;
19             for (int c = len; c < n; c += 2*len) {
20                 m[j][c] = v[c], m[j][c-1] = v[c-1];
21                 for (int i = c+1; i < c+len; i++) m[j][i] = op(m[j][i-1],
22                 v[i]);
23                 for (int i = c-2; i >= c-len; i--) m[j][i] = op(v[i], m[j
24                 ][i+1]);
25             }
26         }
27     }
28     int query(int l, int r) {
29         if (l == r) return v[l];
30         int j = __builtin_clz(1) - __builtin_clz(l^r);
31         return op(m[j][l], m[j][r]);
32     }
33 }

```

## 6.6 Union Find

```

1 // Description: Union-Find (Disjoint Set Union)
2
3 typedef vector<int> vi;
4
5 struct UnionFind {
6     vi p, rank, setSize;
7     int numSets;
8     UnionFind(int N) {
9         p.assign(N, 0);
10        for (int i = 0; i < N; ++i)
11            p[i] = i;
12        rank.assign(N, 0);
13        setSize.assign(N, 1);
14        numSets = N;
15    }
16
17    // Retorna o numero de sets disjuntos (separados)
18    int numDisjointSets() { return numSets; }
19    // Retorna o tamanho do set que contem o elemento i
20    int sizeOfSet(int i) { return setSize[find(i)]; }
21
22    int find(int i) { return (p[i] == i) ? i : (p[i] = find(p[i])); }
23    bool same(int i, int j) { return find(i) == find(j); }
24    void uni(int i, int j) {
25        if (same(i, j))
26            return;
27        int x = find(i), y = find(j);
28        if (rank[x] > rank[y])
29            swap(x, y);

```

```

30     p[x] = y;
31     if (rank[x] == rank[y])
32         ++rank[y];
33     setSize[y] += setSize[x];
34     --numSets;
35 }
36 };
37
38 void solve() {
39     int n; cin >> n;
40     UnionFind UF(n);
41     UF.uni(0, 1);
42 }

```

## 7 Geometria

### 7.1 Circulo

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 #include "ponto.cpp"
3 using namespace std;
4
5 // Retorna se o ponto p esta dentro, fora ou na circunferencia de centro c
   e raio r
6 int insideCircle(const point_i &p, const point_i &c, int r) {
7     int dx = p.x-c.x, dy = p.y-c.y;
8     int Euc = dx*dx + dy*dy, rSq = r*r; // all integer
9     return Euc < rSq ? 1 : (Euc == rSq ? 0 : -1); // in/border/out
10 }
11
12 // Determina o centro e raio de um circulo que passa por 3 pontos
13 bool circle2PtsRad(point p1, point p2, double r, point &c) {
14     double d2 = (p1.x-p2.x) * (p1.x-p2.x) +
15             (p1.y-p2.y) * (p1.y-p2.y);
16     double det = r*r / d2 - 0.25;
17     if (det < 0.0) return false;
18     double h = sqrt(det);
19     c.x = (p1.x+p2.x) * 0.5 + (p1.y-p2.y) * h;
20     c.y = (p1.y+p2.y) * 0.5 + (p2.x-p1.x) * h;
21     return true;
22 }

```

### 7.2 Graham Scan(Elastico)

```

1 // çãFunco para calcular o produto vetorial de dois vetores
2 int cross_product(const pair<int, int>& o, const pair<int, int>& a, const
   pair<int, int>& b) {
3     return (a.first - o.first) * (b.second - o.second) - (a.second - o.
   second) * (b.first - o.first);
4 }
5
6 // çãFunco para encontrar o ponto mais baixo (esquerda mais baixo)
7 pair<int, int> find_lowest_point(const vector<pair<int, int>>& points) {
8     pair<int, int> lowest = points[0];
9     for (const auto& point : points) {

```

```

10         if (point.second < lowest.second || (point.second == lowest.second
   && point.first < lowest.first)) {
11             lowest = point;
12         }
13     }
14     return lowest;
15 }
16
17 // çãFunco para ordenar pontos por ângulo polar em çãrelao ao ponto mais
   baixo
18 bool compare(const pair<int, int>& a, const pair<int, int>& b, const pair<
   int, int>& lowest_point) {
19     int cross = cross_product(lowest_point, a, b);
20     if (cross != 0) {
21         return cross > 0;
22     }
23     return (a.first != b.first) ? (a.first < b.first) : (a.second < b.
   second);
24 }
25
26 // çãFunco para encontrar o óenvoltrio convexo usando o algoritmo de
   Varredura de Graham
27 vector<pair<int, int>> convex_hull(vector<pair<int, int>>& points) {
28     vector<pair<int, int>> convex_polygon;
29
30     if (points.size() < 3) return convex_polygon;
31
32     pair<int, int> lowest_point = find_lowest_point(points);
33     sort(points.begin(), points.end(), [&lowest_point](const pair<int, int>
   &a, const pair<int, int>& b) {
34         return compare(a, b, lowest_point);
35     });
36
37     convex_polygon.push_back(points[0]);
38     convex_polygon.push_back(points[1]);
39
40     for (int i = 2; i < points.size(); ++i) {
41         while (convex_polygon.size() >= 2 && cross_product(convex_polygon[
   convex_polygon.size() - 2], convex_polygon.back(), points[i]) <= 0) {
42             convex_polygon.pop_back();
43         }
44         convex_polygon.push_back(points[i]);
45     }
46
47     return convex_polygon;
48 }
49
50 void solve() {
51     int n, turma = 0;
52
53
54     vector<pair<int, int>> points(n);
55     for (int i = 0; i < n; ++i) {
56         cin >> points[i].first >> points[i].second; // x y
57     }
58
59     vector<pair<int, int>> convex_polygon = convex_hull(points);

```

```

60     int num_vertices = convex_polygon.size();
61
62     cout << num_vertices << endl; // qnt de vertices , se quiser os
    pontos so usar o vi convex_polygon
63
64     cout << endl;
65 }

```

## 7.3 Leis

```

1 // Lei dos Cossenos: a^2 = b^2 + c^2 - 2bc*cos(A)
2 // Lei dos Senos: a/sen(A) = b/sen(B) = c/sen(C) = 2R
3 // Pitagoras: a^2 = b^2 + c^2

```

## 7.4 Linha

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 #include "ponto.cpp"
3 using namespace std;
4
5 // const int EPS = 1e-9;
6
7 struct line { double a, b, c; }; // ax + by + c = 0
8
9 // Gera a equacao da reta que passa por 2 pontos
10 void pointsToLine(point p1, point p2, line &l) {
11     if (fabs(p1.x-p2.x) < EPS)
12         l = {1.0, 0.0, -p1.x};
13     else {
14         double a = -(double)(p1.y-p2.y) / (p1.x-p2.x);
15         l = {a, 1.0, -(double)(a*p1.x) - p1.y};
16     }
17 }
18
19 // Gera a equacao da reta que passa por um ponto e tem inclinacao m
20 void pointSlopeToLine(point p, double m, line &l) { // m < Inf
21     l = {m, 1.0, -((m * p.x) + p.y)};
22 }
23
24 // Checa se 2 retas sao paralelas
25 bool areParallel(line l1, line l2) {
26     return (fabs(l1.a-l2.a) < EPS) and (fabs(l1.b-l2.b) < EPS);
27 }
28
29 // Checa se 2 retas sao iguais
30 bool areSame(line l1, line l2) {
31     return areParallel(l1, l2) and (fabs(l1.c-l2.c) < EPS);
32 }
33
34 // Retorna se 2 retas se intersectam e o ponto de interseccao (referencia)
35 bool areIntersect(line l1, line l2, point &p) {
36     if (areParallel(l1, l2)) return false;
37
38     p.x = (l2.b*l1.c - l1.b*l2.c) / (l2.a*l1.b - l1.a*l2.b);
39     if (fabs(l1.b) > EPS) p.y = -(l1.a*p.x + l1.c);
40     else
        p.y = -(l2.a*p.x + l2.c);

```

```

41     return true;
42 }

```

## 7.5 Maior Poligono Convexo

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3
4 const double EPS = 1e-9;
5
6 double DEG_to_RAD(double d) { return d*M_PI / 180.0; }
7
8 double RAD_to_DEG(double r) { return r*180.0 / M_PI; }
9
10 struct point {
11     double x, y;
12     point() { x = y = 0.0; }
13     point(double _x, double _y) : x(_x), y(_y) {}
14     bool operator == (point other) const {
15         return (fabs(x-other.x) < EPS && (fabs(y-other.y) < EPS));
16     }
17
18     bool operator <(const point &p) const {
19         return x < p.x || (abs(x-p.x) < EPS && y < p.y);
20     }
21 };
22
23 struct vec {
24     double x, y;
25     vec(double _x, double _y) : x(_x), y(_y) {}
26 };
27
28 vec toVec(point a, point b) { return vec(b.x-a.x, b.y-a.y); }
29
30 double dist(point p1, point p2) { return hypot(p1.x-p2.x, p1.y-p2.y); }
31
32 // returns the perimeter of polygon P, which is the sum of Euclidian
    distances of consecutive line segments (polygon edges)
33 double perimeter(const vector<point> &P) {
34     double ans = 0.0;
35     for (int i = 0; i < (int)P.size()-1; ++i)
36         ans += dist(P[i], P[i+1]);
37     return ans;
38 }
39
40 // returns the area of polygon P
41 double area(const vector<point> &P) {
42     double ans = 0.0;
43     for (int i = 0; i < (int)P.size()-1; ++i)
44         ans += (P[i].x*P[i+1].y - P[i+1].x*P[i].y);
45     return fabs(ans)/2.0;
46 }
47
48 double dot(vec a, vec b) { return (a.x*b.x + a.y*b.y); }
49 double norm_sq(vec v) { return v.x*v.x + v.y*v.y; }
50
51 // returns angle aob in rad

```

```

52 double angle(point a, point o, point b) {
53     vec oa = toVec(o, a), ob = toVec(o, b);
54     return acos(dot(oa, ob) / sqrt(norm_sq(oa) * norm_sq(ob)));
55 }
56
57 double cross(vec a, vec b) { return a.x*b.y - a.y*b.x; }
58
59 // returns the area of polygon P, which is half the cross products of
    vectors defined by edge endpoints
60 double area_alternative(const vector<point> &P) {
61     double ans = 0.0; point O(0.0, 0.0);
62     for (int i = 0; i < (int)P.size()-1; ++i)
63         ans += cross(toVec(O, P[i]), toVec(O, P[i+1]));
64     return fabs(ans)/2.0;
65 }
66
67 // note: to accept collinear points, we have to change the '> 0'
68 // returns true if point r is on the left side of line pq
69 bool ccw(point p, point q, point r) { return cross(toVec(p, q), toVec(p, r
    )) > 0; }
70
71 // returns true if point r is on the same line as the line pq
72 bool collinear(point p, point q, point r) { return fabs(cross(toVec(p, q),
    toVec(p, r))) < EPS; }
73
74 // returns true if we always make the same turn
75 // while examining all the edges of the polygon one by one
76 bool isConvex(const vector<point> &P) {
77     int n = (int)P.size();
78     // a point/sz=2 or a line/sz=3 is not convex
79     if (n <= 3) return false;
80     bool firstTurn = ccw(P[0], P[1], P[2]); // remember one result,
81     for (int i = 1; i < n-1; ++i) // compare with the others
82         if (ccw(P[i], P[i+1], P[(i+2) == n ? 1 : i+2]) != firstTurn)
83             return false; // different -> concave
84     return true; // otherwise -> convex
85 }
86
87 // returns 1/0/-1 if point p is inside/on (vertex/edge)/outside of
88 // either convex/concave polygon P
89 int insidePolygon(point pt, const vector<point> &P) {
90     int n = (int)P.size();
91     if (n <= 3) return -1; // avoid point or line
92     bool on_polygon = false;
93     for (int i = 0; i < n-1; ++i) // on vertex/edge?
94         if (fabs(dist(P[i], pt) + dist(pt, P[i+1]) - dist(P[i], P[i+1])) < EPS
95             )
96             on_polygon = true;
97     if (on_polygon) return 0; // pt is on polygon
98     double sum = 0.0; // first = last point
99     for (int i = 0; i < n-1; ++i) {
100         if (ccw(pt, P[i], P[i+1])) // left turn/ccw
101             sum += angle(P[i], pt, P[i+1]);
102         else // right turn/cw
103             sum -= angle(P[i], pt, P[i+1]);
104     }
105     return fabs(sum) > M_PI ? 1 : -1; // 360d->in, 0d->out
106 }
107
108 // compute the intersection point between line segment p-q and line A-B
109 point lineIntersectSeg(point p, point q, point A, point B) {
110     double a = B.y-A.y, b = A.x-B.x, c = B.x*A.y - A.x*B.y;
111     double u = fabs(a*p.x + b*p.y + c);
112     double v = fabs(a*q.x + b*q.y + c);
113     return point((p.x*v + q.x*u) / (u+v), (p.y*v + q.y*u) / (u+v));
114 }
115
116 // cuts polygon Q along the line formed by point A->point B (order matters
    )
117 // (note: the last point must be the same as the first point)
118 vector<point> cutPolygon(point A, point B, const vector<point> &Q) {
119     vector<point> P;
120     for (int i = 0; i < (int)Q.size(); ++i) {
121         double left1 = cross(toVec(A, B), toVec(A, Q[i])), left2 = 0;
122         if (i != (int)Q.size()-1) left2 = cross(toVec(A, B), toVec(A, Q[i+1]))
123         ;
124         if (left1 > -EPS) P.push_back(Q[i]); // Q[i] is on the left
125         if (left1*left2 < -EPS) // crosses line AB
126             P.push_back(lineIntersectSeg(Q[i], Q[i+1], A, B));
127     }
128     if (!P.empty() && !(P.back() == P.front()))
129         P.push_back(P.front()); // wrap around
130     return P;
131 }
132
133 vector<point> CH_Graham(vector<point> &Pts) { // overall O(n log n)
134     vector<point> P(Pts); // copy all points
135     int n = (int)P.size();
136     if (n <= 3) { // point/line/triangle
137         if (!(P[0] == P[n-1])) P.push_back(P[0]); // corner case
138         return P; // the CH is P itself
139     }
140     // first, find P0 = point with lowest Y and if tie: rightmost X
141     int P0 = min_element(P.begin(), P.end())-P.begin();
142     swap(P[0], P[P0]); // swap P[P0] with P[0]
143
144     // second, sort points by angle around P0, O(n log n) for this sort
145     sort(++P.begin(), P.end(), [&](point a, point b) {
146         return ccw(P[0], a, b); // use P[0] as the pivot
147     });
148
149     // third, the ccw tests, although complex, it is just O(n)
150     vector<point> S({P[n-1], P[0], P[1]}); // initial S
151     int i = 2; // then, we check the
152     rest
153     while (i < n) { // n > 3, O(n)
154         int j = (int)S.size()-1;
155         if (ccw(S[j-1], S[j], P[i])) // CCW turn
156             S.push_back(P[i++]); // accept this point
157         else // CW turn
158             S.pop_back(); // pop until a CCW turn
159     }
160     return S; // return the result

```



```

159 }
160
161 vector<point> CH_Andrew(vector<point> &Pts) { // overall O(n log n)
162     int n = Pts.size(), k = 0;
163     vector<point> H(2*n);
164     sort(Pts.begin(), Pts.end());
165     for (int i = 0; i < n; ++i) { // build lower hull
166         while ((k >= 2) && !ccw(H[k-2], H[k-1], Pts[i])) --k;
167         H[k++] = Pts[i];
168     }
169     for (int i = n-2, t = k+1; i >= 0; --i) { // build upper hull
170         while ((k >= t) && !ccw(H[k-2], H[k-1], Pts[i])) --k;
171         H[k++] = Pts[i];
172     }
173     H.resize(k);
174     return H;
175 }
176
177 int main() {
178     // 6(+1) points, entered in counter clockwise order, 0-based indexing
179     vector<point> P;
180     P.emplace_back(1, 1); // P0
181     P.emplace_back(3, 3); // P1
182     P.emplace_back(9, 1); // P2
183     P.emplace_back(12, 4); // P3
184     P.emplace_back(9, 7); // P4
185     P.emplace_back(1, 7); // P5
186     P.push_back(P[0]); // loop back, P6 = P0
187
188     printf("Perimeter = %.2lf\n", perimeter(P)); // 31.64
189     printf("Area = %.2lf\n", area(P)); // 49.00
190     printf("Area = %.2lf\n", area_alternative(P)); // also 49.00
191     printf("Is convex = %d\n", isConvex(P)); // 0 (false)
192
193     point p_out(3, 2); // outside this (concave) polygon
194     printf("P_out is inside = %d\n", insidePolygon(p_out, P)); // -1
195     printf("P1 is inside = %d\n", insidePolygon(P[1], P)); // 0
196     point p_on(5, 7); // on this (concave) polygon
197     printf("P_on is inside = %d\n", insidePolygon(p_on, P)); // 0
198     point p_in(3, 4); // inside this (concave) polygon
199     printf("P_in is inside = %d\n", insidePolygon(p_in, P)); // 1
200
201     P = cutPolygon(P[2], P[4], P);
202     printf("Perimeter = %.2lf\n", perimeter(P)); // smaller now, 29.15
203     printf("Area = %.2lf\n", area(P)); // 40.00
204
205     P = CH_Graham(P); // now this is a
206     rectangle
207     printf("Perimeter = %.2lf\n", perimeter(P)); // precisely 28.00
208     printf("Area = %.2lf\n", area(P)); // precisely 48.00
209     printf("Is convex = %d\n", isConvex(P)); // true
210     printf("P_out is inside = %d\n", insidePolygon(p_out, P)); // 1
211     printf("P_in is inside = %d\n", insidePolygon(p_in, P)); // 1
212
213     return 0;
214 }

```

## 7.6 Ponto

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3 const int EPS = 1e-9;
4 // Ponto 2D
5 struct point_i {
6     int x, y;
7     point_i() { x = y = 0; }
8     point_i(int _x, int _y) : x(_x), y(_y) {}
9 };
10
11 // Ponto 2D com precisao
12 struct point {
13     double x, y;
14     point() { x = y = 0.0; }
15     point(double _x, double _y) : x(_x), y(_y) {}
16
17     bool operator < (point other) const {
18         if (fabs(x-other.x) > EPS)
19             return x < other.x;
20         return y < other.y;
21     }
22
23     bool operator == (const point &other) const {
24         return (fabs(x-other.x) < EPS) and (fabs(y-other.y) < EPS);
25     }
26 };
27
28 // Distancia entre 2 pontos
29 double dist(const point &p1, const point &p2) {
30     return hypot(p1.x-p2.x, p1.y-p2.y);
31 }
32
33 double DEG_to_RAD(double d) { return d*M_PI / 180.0; }
34 double RAD_to_DEG(double r) { return r*180.0 / M_PI; }
35
36 // Rotaciona o ponto p em theta graus em sentido anti-horario em relacao a
37 // origem (0, 0)
38 point rotate(const point &p, double theta) {
39     double rad = DEG_to_RAD(theta);
40     return point(p.x*cos(rad) - p.y*sin(rad),
41                 p.x*sin(rad) + p.y*cos(rad));
42 }

```

## 7.7 Triangulos

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 #include "vetor.cpp"
3 #include "linha.cpp"
4
5 using namespace std;
6
7 // Condicao Existencia
8 bool existeTriangulo(double a, double b, double c) {
9     return (a+b > c) && (a+c > b) && (b+c > a);

```

```

10 }
11
12 // Area de um triangulo de lados a, b e c
13 int area(int a, int b, int c) {
14     if (!existeTriangulo(a, b, c)) return 0;
15     double s = (a+b+c)/2.0;
16     return sqrt(s*(s-a)*(s-b)*(s-c));
17 }
18
19 double perimeter(double ab, double bc, double ca) {
20     return ab + bc + ca;
21 }
22
23 double perimeter(point a, point b, point c) {
24     return dist(a, b) + dist(b, c) + dist(c, a);
25 }
26
27 // ===== CIRCULO INSCRITO =====
28
29 // Retorna raio de um circulo inscrito em um triangulo de lados a, b e c
30 double rInCircle(double ab, double bc, double ca) {
31     return area(ab, bc, ca) / (0.5 * perimeter(ab, bc, ca));
32 }
33
34 double rInCircle(point a, point b, point c) {
35     return rInCircle(dist(a, b), dist(b, c), dist(c, a));
36 }
37
38 // Calcula o centro e o raio do circulo inscrito em um triangulo dados
39 // seus pontos
40 bool inCircle(point p1, point p2, point p3, point &ctr, double &r) {
41     r = rInCircle(p1, p2, p3);
42     if (fabs(r) < EPS) return false;
43     line l1, l2;
44     double ratio = dist(p1, p2) / dist(p1, p3);
45     point p = translate(p2, scale(toVec(p2, p3), ratio / (1+ratio)));
46     pointsToLine(p1, p, l1);
47     ratio = dist(p2, p1) / dist(p2, p3);
48     p = translate(p1, scale(toVec(p1, p3), ratio / (1+ratio)));
49     pointsToLine(p2, p, l2);
50     areIntersect(l1, l2, ctr);
51     return true;
52 }
53
54 // ===== CIRCULO CIRCUNSCRITO =====
55
56 double rCircumCircle(double ab, double bc, double ca) {
57     return ab * bc * ca / (4.0 * area(ab, bc, ca));
58 }
59
60 double rCircumCircle(point a, point b, point c) {
61     return rCircumCircle(dist(a, b), dist(b, c), dist(c, a));
62 }

```

## 7.8 Vetor

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 #include "ponto.cpp"
3 using namespace std;

```

```

4
5 struct vec {
6     double x, y;
7     vec(double _x, double _y) : x(_x), y(_y) {}
8 };
9
10 double dot(vec a, vec b) { return (a.x*b.x + a.y*b.y); }
11 double norm_sq(vec v) { return v.x*v.x + v.y*v.y; }
12 double cross(vec a, vec b) { return a.x*b.y - a.y*b.x; }
13
14 // Converte 2 pontos em um vetor
15 vec toVec(const point &a, const point &b) {
16     return vec(b.x-a.x, b.y-a.y);
17 }
18
19 // Soma 2 vetores
20 vec scale(const vec &v, double s) {
21     return vec(v.x*s, v.y*s);
22 }
23
24 // Resultado do ponto p + vetor v
25 point translate(const point &p, const vec &v) {
26     return point(p.x+v.x, p.y+v.y);
27 }
28
29 // Angulo entre 2 vetores (produto escalar) em radianos
30 double angle(const point &a, const point &o, const point &b) {
31     vec oa = toVec(o, a), ob = toVec(o, b);
32     return acos(dot(oa, ob) / sqrt(norm_sq(oa) * norm_sq(ob)));
33 }
34
35 // Retorna se o ponto r esta a esquerda da linha pq (counter-clockwise)
36 bool ccw(point p, point q, point r) {
37     return cross(toVec(p, q), toVec(p, r)) > EPS;
38 }
39
40 // Retorna se sao colineares
41 bool collinear(point p, point q, point r) {
42     return fabs(cross(toVec(p, q), toVec(p, r))) < EPS;
43 }
44
45 // Distancia ponto-linha
46 double distToLine(point p, point a, point b, point &c) {
47     vec ap = toVec(a, p), ab = toVec(a, b);
48     double u = dot(ap, ab) / norm_sq(ab);
49     c = translate(a, scale(ab, u));
50     return dist(p, c);
51 }
52
53 // Distancia ponto p - segmento ab
54 double distToLineSegment(point p, point a, point b, point &c) {
55     vec ap = toVec(a, p), ab = toVec(a, b);
56     double u = dot(ap, ab) / norm_sq(ab);
57     if (u < 0.0) { // closer to a
58         c = point(a.x, a.y);
59         return dist(p, a); // dist p to a
60     }
61     if (u > 1.0) { // closer to b

```

```

61     c = point(b.x, b.y);
62     return dist(p, b); // dist p to b
63 }
64 return distToLine(p, a, b, c); // use distToLine
65 }

```

## 8 Grafos

### 8.1 Bfs - Matriz

```

1 // Description: BFS para uma matriz (n x m)
2 // Complexidade: O(n * m)
3
4 vector<vi> mat;
5 vector<vector<bool>> vis;
6 vector<pair<int,int>> mov = {{0, 1}, {0, -1}, {1, 0}, {-1, 0}};
7 int l, c;
8
9 bool valid(int x, int y) {
10     return (0 <= x and x < l and 0 <= y and y < c and !vis[x][y] /*and mat
11     [x][y]*/);
12 }
13
14 void bfs(int i, int j) {
15     queue<pair<int,int>> q; q.push({i, j});
16
17     while(!q.empty()) {
18
19         auto [u, v] = q.front(); q.pop();
20         vis[u][v] = true;
21
22         for(auto [x, y]: mov) {
23             if(valid(u+x, v+y)) {
24                 q.push({u+x, v+y});
25                 vis[u+x][v+y] = true;
26             }
27         }
28     }
29 }
30
31 void solve() {
32     cin >> l >> c;
33     mat.resize(l, vi(c));
34     vis.resize(l, vector<bool>(c, false));
35     /*preenche matriz*/
36     bfs(0,0);
37 }

```

### 8.2 Bfs - Por Niveis

```

1 // Description: Encontrar distancia entre S e outros pontos em que pontos
2 // EXTRA: BFS diferenciado para armazenar distancias sem VIS
3

```

```

4 int n;
5 vi dist;
6 vector<vi> niveisDoNode, itensDoNivel;
7
8 void bfs(int s) {
9
10     queue<pair<int, int>> q; q.push({s, 0});
11
12     while (!q.empty()) {
13         auto [v, dis] = q.front(); q.pop();
14
15         for(auto nivel : niveisDoNode[v]) {
16             for(auto u : itensDoNivel[nivel]) {
17                 if (dist[u] == 0) {
18                     q.push({u, dis+1});
19                     dist[u] = dis + 1;
20                 }
21             }
22         }
23     }
24 }
25
26 void solve() {
27
28     int n, ed; cin >> n >> ed;
29     dist.clear(), itensDoNivel.clear(), niveisDoNode.clear();
30     itensDoNivel.resize(n);
31
32     f(i,0,ed) {
33         int q; cin >> q;
34         while(q--) {
35             int v; cin >> v;
36             niveisDoNode[v].push_back(i);
37             itensDoNivel[i].push_back(v);
38         }
39     }
40
41     bfs(0);
42 }

```

### 8.3 Bfs - String

```

1 // Description: BFS para listas de adjacencia por nivel
2 // Complexidade: O(V + E)
3
4 int n;
5 unordered_map<string, int> dist;
6 unordered_map<string, vector<int>> niveisDoNode;
7 vector<vector<string>> itensDoNivel;
8
9 void bfs(string s) {
10
11     queue<pair<string, int>> q; q.push({s, 0});
12
13     while (!q.empty()) {
14         auto [v, dis] = q.front(); q.pop();
15

```

```

16     for(auto linha : niveisDoNode[v]) {
17         for(auto u : itensDoNivel[linha]) {
18             if (dist[u] == 0) {
19                 q.push({u, dis+1});
20                 dist[u] = dis + 1;
21             }
22         }
23     }
24 }
25 }
26
27 void solve() {
28
29     int n, ed; cin >> n >> ed;
30     dist.clear(), itensDoNivel.clear(), niveisDoNode.clear();
31     itensDoNivel.resize(n);
32
33     f(i,0,ed) {
34         int q; cin >> q;
35         while(q-->0) {
36             string str; cin >> str;
37             niveisDoNode[str].push_back(i);
38             itensDoNivel[i].push_back(str);
39         }
40     }
41
42     string src; cin >> src;
43     bfs(src);
44 }

```

## 8.4 Bfs - Tradicional

```

1 // BFS com informacoes adicionais sobre a distancia e o pai de cada
   vertice
2 // Complexidade: O(V + E), onde V eh o numero de vertices e E o numero de
   areqas
3
4 int n;
5 vector<bool> vis;
6 vector<int> d, p;
7 vector<vector<int>> adj;
8
9 void bfs(int s) {
10
11     queue<int> q; q.push(s);
12     vis[s] = true, d[s] = 0, p[s] = -1;
13
14     while (!q.empty()) {
15         int v = q.front(); q.pop();
16         vis[v] = true;
17
18         for (int u : adj[v]) {
19             if (!vis[u]) {
20                 vis[u] = true;
21                 q.push(u);
22                 // d[u] = d[v] + 1;
23                 // p[u] = v;

```

```

24     }
25 }
26
27 }
28
29 void solve() {
30     cin >> n;
31     adj.resize(n); d.resize(n, -1);
32     vis.resize(n); p.resize(n, -1);
33
34     for (int i = 0; i < n; i++) {
35         int u, v; cin >> u >> v;
36         adj[u].push_back(v);
37         adj[v].push_back(u);
38     }
39
40     bfs(0);
41 }
42
43 // OBS: Pode ser usado para encontrar o menor caminho entre dois vertices
   em um grafo sem pesos

```

## 8.5 Dfs

```

1 vector<int> adj[MAXN], parent;
2 int visited[MAXN];
3
4 // DFS com informacoes adicionais sobre o pai de cada vertice
5 // Complexidade: O(V + E), onde V eh o numero de vertices e E o numero de
   areqas
6 void dfs(int p) {
7     memset(visited, 0, sizeof visited);
8     stack<int> st;
9     st.push(p);
10
11     while (!st.empty()) {
12         int v = st.top(); st.pop();
13
14         if (visited[v]) continue;
15         visited[v] = true;
16
17         for (int u : adj[v]) {
18             if (!visited[u]) {
19                 parent[u] = v;
20                 st.push(u);
21             }
22         }
23     }
24 }
25
26 // DFS com informacoes adicionais sobre o pai de cada vertice
27 // Complexidade: O(V + E), onde V eh o numero de vertices e E o numero de
   areqas
28 void dfs(int v) {
29     visited[v] = true;
30     for (int u : adj[v]) {
31         if (!visited[u]) {

```

```

32     parent[u] = v;
33     dfs(u);
34 }
35 }
36 }
37
38 void solve() {
39     int n; cin >> n;
40     for (int i = 0; i < n; i++) {
41         int u, v; cin >> u >> v;
42         adj[u].push_back(v);
43         adj[v].push_back(u);
44     }
45     dfs(0);
46 }

```

## 8.6 Articulation

```

1 // Description: Encontra pontos de articulacao e pontes em um grafo nao
  direcionado
2 // Complexidade: O(V + E)
3
4 vector<vector<pii>> adj;
5 vi dfs_num, dfs_low, dfs_parent, articulation_vertex;
6 int dfsNumberCounter, dfsRoot, rootChildren;
7 vector<pii> bridgesAns;
8
9 void articulationPointAndBridgeUtil(int u) {
10
11     dfs_low[u] = dfs_num[u] = dfsNumberCounter++;
12     for (auto &[v, w] : adj[u]) {
13         if (dfs_num[v] == -1) {
14             dfs_parent[v] = u;
15             if (u == dfsRoot) ++rootChildren;
16
17             articulationPointAndBridgeUtil(v);
18
19             if (dfs_low[v] >= dfs_num[u])
20                 articulation_vertex[u] = 1;
21             if (dfs_low[v] > dfs_num[u])
22                 bridgesAns.push_back({u, v});
23             dfs_low[u] = min(dfs_low[u], dfs_low[v]);
24         }
25         else if (v != dfs_parent[u])
26             dfs_low[u] = min(dfs_low[u], dfs_num[v]);
27     }
28 }
29
30 void articulationPointAndBridge(int n) {
31     dfsNumberCounter = 0;
32     f(u,0,n) {
33         if (dfs_num[u] == -1) {
34             dfsRoot = u; rootChildren = 0;
35             articulationPointAndBridgeUtil(u);
36             articulation_vertex[dfsRoot] = (rootChildren > 1);
37         }
38     }

```

```

39 }
40
41 void solve() {
42
43     int n, ed; cin >> n >> ed;
44     adj.assign(n, vector<pii>());
45
46     f(i,0,ed) {
47         int u, v, w; cin >> u >> v >> w;
48         adj[u].emplace_back(v, w);
49     }
50
51     dfs_num.assign(n, -1); dfs_low.assign(n, 0);
52     dfs_parent.assign(n, -1); articulation_vertex.assign(n, 0);
53
54     articulationPointAndBridge(n);
55
56     // Vertices: articulation_vertex[u] == 1
57     // Bridges: bridgesAns
58 }

```

## 8.7 Bipartido

```

1 // Description: Determina se um grafo eh bipartido ou nao
2 // Complexidade: O(V+E)
3
4 vector<vi> AL;
5
6 bool bipartido(int n) {
7
8     int s = 0;
9     queue<int> q; q.push(s);
10
11     vi color(n, INF); color[s] = 0;
12     bool ans = true;
13     while (!q.empty() && ans) {
14         int u = q.front(); q.pop();
15
16         for (auto &v : AL[u]) {
17             if (color[v] == INF) {
18                 color[v] = 1 - color[u];
19                 q.push(v);
20             }
21             else if (color[v] == color[u]) {
22                 ans = false;
23                 break;
24             }
25         }
26     }
27
28     return ans;
29 }
30
31 void solve() {
32
33     int n, edg; cin >> n >> edg;
34     AL.resize(n, vi());

```

```

35 while(edg--) {
36     int a, b; cin >> a >> b;
37     AL[a].push_back(b);
38     AL[b].push_back(a);
39 }
40
41 cout << bipartido(n) << endl;
42 }

```

## 8.8 Caminho Minimo - @Tabela

1	Criterio	BFS (V + E)	Dijkstra (E*log V)	Bellman-Ford (V*E)	Floyd-Warshall (V^3)
2	-----+-----+-----+-----+-----				
3	Max Size	V + E <= 100M	V + E <= 1M	V * E <= 100M	V <= 450
4	Sem-Peso	CRIA no geral	Ok	Ruim	Ruim
5	Peso	WA no geral	Melhor	Ok	Ruim
6	Peso Neg	WA no geral	Modificado Ok	Ok	Ruim
7	Neg-Cic	Nao Detecta Detecta	Nao Detecta	Detecta	
8	Grafo Pequ	WA se peso Melhor	Overkill	Overkill	

## 8.9 Caminho Minimo - Bellman Ford

```

1 // Description: Encontra menor caminho em grafos com pesos negativos
2 /* Complexidade:
3     Conexo: O(VE)
4     Desconexo: O(EV^2)
5 */
6 // Classe: Single Source Shortest Path (SSSP)
7
8 vector<tuple<int,int,int>> edg; // edge: u, v, w
9 vi dist;
10
11 int bellman_ford(int n, int src) {
12     dist.assign(n+1, INT_MAX);
13
14     f(i,0,n+2) {
15         for(auto& [u, v, w] : edg) {
16             if(dist[u] != INT_MAX and dist[v] > w + dist[u])
17                 dist[v] = dist[u] + w;
18         }
19     }
20
21     // Possivel checar ciclos negativos (ciclo de peso total negativo)
22     for(auto& [u, v, w] : edg) {
23         if(dist[u] != INT_MAX and dist[v] > w + dist[u])
24             return 1;
25     }

```

```

26     return 0;
27 }
28
29 int main() {
30
31     int n, edges; cin >> n >> edges;
32     f(i,0,edges) {
33         int u, v, w; cin >> u >> v >> w;
34         edg.push_back({u, v, w});
35     }
36     bellman_ford(n, 1);
37 }
38

```

## 8.10 Caminho Minimo - Checar I J (In)Diretamente Conectados

```

1 // Description: Verifica se o vertice i esta diretamente conectado ao vertice j
2 // Complexity: O(n^3)
3
4 const int INF = 1e9;
5 const int MAX_V = 450;
6 int adj[MAX_V][MAX_V];
7
8 void transitive_closure(int n) {
9
10     for (int k = 0; k < n; ++k)
11         for (int i = 0; i < n; ++i)
12             for (int j = 0; j < n; ++j)
13                 adj[i][j] |= (adj[i][k] & adj[k][j]);
14 }
15
16 void solve() {
17
18     int n, ed; cin >> n >> ed;
19     f(u,0,n) {
20         f(v,0,n) {
21             adj[u][v] = INF;
22         }
23         adj[u][u] = 0;
24     }
25
26     f(i,0,ed) {
27         int u, v, w; cin >> u >> v >> w;
28         adj[u][v] = w;
29     }
30
31     transitive_closure(n);
32
33     int i = 0, j = 0; cin >> i >> j;
34     cout << (adj[i][j] == INF ? "Nao" : "Sim") << endl;
35 }

```

## 8.11 Caminho Minimo - Diametro Do Grafo

```

1 // Description: Encontra o diametro de um grafo
2 // => maximum shortest path between any two vertices
3 // Complexidade:  $O(n^3)$ 
4
5 int adj[MAX_V][MAX_V];
6
7 int diameter(int n) {
8     int ans = 0;
9     f(u,0,n) {
10         f(v,0,n) {
11             if (adj[u][v] != INF) {
12                 ans = max(ans, adj[u][v]);
13             }
14         }
15     }
16     return ans;
17 }
18
19 void floyd_warshall(int n) {
20
21     for (int k = 0; k < n; ++k)
22     for (int u = 0; u < n; ++u)
23     for (int v = 0; v < n; ++v)
24         adj[u][v] = min(adj[u][v], adj[u][k]+adj[k][v]);
25 }
26
27 void solve() {
28
29     int n, ed; cin >> n >> ed;
30     f(u,0,n) {
31         f(v,0,n) {
32             adj[u][v] = INF;
33         }
34         adj[u][u] = 0;
35     }
36
37     f(i,0,ed) {
38         int u, v, w; cin >> u >> v >> w;
39         adj[u][v] = w;
40     }
41
42     floyd_warshall(n);
43     cout << diameter(n) << endl;
44 }

```

## 8.12 Caminho Minimo - Dijkstra

```

1 // Description: Algoritmo de Dijkstra para caminho imnimo em grafos.
2 // Complexity:  $O(E \log V)$ 
3 // Classe: Single Source Shortest Path (SSSP)
4
5 vi dist;
6 vector<vector<pii>> adj;
7
8 void dijkstra(int s) {
9
10     dist[s] = 0;

```

```

11
12     priority_queue<pii, vector<pii>, greater<pii>> pq; pq.push({0, s});
13
14     while (!pq.empty()) {
15         auto [d, u] = pq.top(); pq.pop();
16
17         if (d > dist[u]) continue;
18
19         for (auto &[v, w] : adj[u]) {
20             if (dist[u] + w >= dist[v]) continue;
21             dist[v] = dist[u]+w;
22             pq.push({dist[v], v});
23         }
24     }
25 }
26
27 void solve() {
28
29     int n, ed; cin >> n >> ed;
30     adj.assign(n, vector<pii>());
31     dist.assign(n, INF); // INF = 1e9
32
33     while (ed-->0) {
34         int u, v, w; cin >> u >> v >> w;
35         adj[u].emplace_back(v, w);
36     }
37
38     int s; cin >> s;
39     dijkstra(s);
40 }

```

## 8.13 Caminho Minimo - Floyd Warshall

```

1 // Description: Caminho minimo entre todos os pares de vertices em um
2 // grafo
3 // Complexity:  $O(n^3)$ 
4 // Classe: All Pairs Shortest Path (APSP)
5
6 const int INF = 1e9;
7 const int MAX_V = 450;
8 int adj[MAX_V][MAX_V];
9
10 void printAnswer(int n) {
11     for (int u = 0; u < n; ++u)
12     for (int v = 0; v < n; ++v)
13         cout << "APSP("<<u<<"; "<<v<<") = " << adj[u][v] << endl;
14 }
15
16 void prepareParent() {
17     f(i,0,n) {
18         f(j,0,n) {
19             p[i][j] = i;
20         }
21     }
22
23     for (int k = 0; k < n; ++k)
24     for (int i = 0; i < n; ++i)

```

```

24     for (int j = 0; j < n; ++j)
25         if (adj[i][k] + adj[k][j] < adj[i][j]) {
26             adj[i][j] = adj[i][k] + adj[k][j];
27             p[i][j] = p[k][j];
28         }
29 }
30
31 vi restorePath(int u, int v) {
32
33     if (adj[u][v] == INF) return {};
34     vi path;
35     for (; v != u; v = p[u][v]) {
36         if (v == -1) return {};
37         path.push_back(v);
38     }
39     path.push_back(u);
40     reverse(path.begin(), path.end());
41     return path;
42 }
43
44 void floyd_warshall(int n) {
45
46     for (int k = 0; k < n; ++k)
47         for (int u = 0; u < n; ++u)
48             for (int v = 0; v < n; ++v)
49                 adj[u][v] = min(adj[u][v], adj[u][k] + adj[k][v]);
50 }
51
52 void solve() {
53
54     int n, ed; cin >> n >> ed;
55     f(u, 0, n) {
56         f(v, 0, n) {
57             adj[u][v] = INF;
58         }
59         adj[u][u] = 0;
60     }
61
62     f(i, 0, ed) {
63         int u, v, w; cin >> u >> v >> w;
64         adj[u][v] = w;
65     }
66
67     floyd_warshall(n);
68
69     // prepareParent();
70     // vi path = restorePath(0, 3);
71 }

```

## 8.14 Caminho Mínimo - Minimax

```

1 // Description: MiniMax problem: encontrar o menor caminho mais longo
  entre todos os pares de vertices em um grafo
2 // Complexity:  $O(n^3)$ 
3
4 const int INF = 1e9;
5 const int MAX_V = 450;

```

```

6 int adj[MAX_V][MAX_V];
7
8 void miniMax(int n) {
9     for (int k = 0; k < V; ++k)
10         for (int i = 0; i < V; ++i) // reverse min and max
11             for (int j = 0; j < V; ++j) // for MaxiMin problem
12                 AM[i][j] = min(AM[i][j], max(AM[i][k], AM[k][j]));
13 }
14
15 void solve() {
16
17     int n, ed; cin >> n >> ed;
18     f(u, 0, n) {
19         f(v, 0, n) {
20             adj[u][v] = INF;
21         }
22         adj[u][u] = 0;
23     }
24
25     f(i, 0, ed) {
26         int u, v, w; cin >> u >> v >> w;
27         adj[u][v] = w;
28     }
29
30     transitive_closure(n);
31
32     int i = 0, j = 0; cin >> i >> j;
33     cout << (adj[i][j] == INF ? "Nao" : "Sim") << endl;
34 }

```

## 8.15 Cycle Check

```

1 // Description: Checa se um grafo direcionado possui ciclos e imprime os
  tipos de arestas.
2 // Complexidade:  $O(V + E)$ 
3
4 vector<vector<pii>> adj;
5 vi dfs_num, dfs_parent;
6
7 void cycleCheck(int u) {
8     dfs_num[u] = -2;
9     for (auto &[v, w] : adj[u]) {
10         if (dfs_num[v] == -1) {
11             dfs_parent[v] = u;
12             cycleCheck(v);
13         }
14         else if (dfs_num[v] == -2) {
15             if (v == dfs_parent[u])
16                 cout << " Bidirectional Edge (" << u << ", " << v << ") -( "
17                 << v << ", " << u << ") \n";
18             else
19                 cout << "Back Edge (" << u << ", " << v << ") (Cycle) \n";
20         }
21         else if (dfs_num[v] == -3)
22             cout << " Forward/Cross Edge (" << u << ", " << v << ") \n";
23     }
24     dfs_num[u] = -3;

```



```

24 }
25
26 void solve() {
27     int n, ed; cin >> n >> ed;
28     adj.assign(ed, vector<pii>());
29
30     for (int i = 0; i < ed; ++i) {
31         int u, v, w; cin >> u >> v >> w;
32         adj[u].emplace_back(v, w);
33     }
34
35     cout << "Graph Edges Property Check\n";
36     dfs_num.assign(ed, -1);
37     dfs_parent.assign(ed, -1);
38     for (int u = 0; u < n; ++u)
39         if (dfs_num[u] == -1)
40             cycleCheck(u);
41 }

```

## 8.16 Encontrar Ciclo

```

1 // Description: Encontrar ciclo em grafo nao direcionado
2 // Complexidade: O(n + m)
3
4 int n;
5 vector<vector<int>> adj;
6 vector<bool> vis;
7 vector<int> p;
8 int cycle_start, cycle_end;
9
10 bool dfs(int v, int par) {
11     vis[v] = true;
12     for (int u : adj[v]) {
13         if(u == par) continue;
14         if(vis[u]) {
15             cycle_end = v;
16             cycle_start = u;
17             return true;
18         }
19         p[u] = v;
20         if(dfs(u, p[u]))
21             return true;
22     }
23     return false;
24 }
25
26 vector<int> find_cycle() {
27     cycle_start = -1;
28
29     for (int v = 0; v < n; v++)
30         if (!vis[v] and dfs(v, p[v]))
31             break;
32
33     if (cycle_start == -1) return {};
34
35     vector<int> cycle;
36     cycle.push_back(cycle_start);

```

```

37     for (int v = cycle_end; v != cycle_start; v = p[v])
38         cycle.push_back(v);
39     cycle.push_back(cycle_start);
40     return cycle;
41 }
42
43 void solve() {
44     int edg; cin >> n >> edg;
45     adj.assign(n, vector<int>());
46     vis.assign(n, false), p.assign(n, -1);
47     while(edg--) {
48         int a, b; cin >> a >> b;
49         adj[a].push_back(b);
50         adj[b].push_back(a);
51     }
52     vector<int> ans = find_cycle();
53 }

```

## 8.17 Euler Tree

```

1 // Descricao: Encontra a euler tree de um grafo
2 // Complexidade: O(n)
3 vector<vector<int>> adj(MAX);
4 vector<int> vis(MAX, 0);
5 vector<int> euTree(MAX);
6
7 void eulerTree(int u, int &index) {
8     vis[u] = 1;
9     euTree[index++] = u;
10    for (auto it : adj[u]) {
11        if (!vis[it]) {
12            eulerTree(it, index);
13            euTree[index++] = u;
14        }
15    }
16 }
17
18 void solve() {
19
20     f(i,0,n-1) {
21         int a, b; cin >> a >> b;
22         adj[a].push_back(b);
23         adj[b].push_back(a);
24     }
25
26     int index = 0; eulerTree(1, index);
27 }

```

## 8.18 Kosaraju

```

1 // Description: Encontra o numero de componentes fortemente conexas em um
2 // grafo direcionado
3 // Complexidade: O(V + E)
4
5 int dfsNumberCounter, numSCC;
6 vector<vii> adj, adj_t;

```

```

6 vi dfs_num, dfs_low, S, visited;
7 stack<int> St;
8
9 void kosarajuUtil(int u, int pass) {
10     dfs_num[u] = 1;
11     vii &neighbor = (pass == 1) ? adj[u] : adj_t[u];
12     for (auto &[v, w] : neighbor)
13         if (dfs_num[v] == -1)
14             kosarajuUtil(v, pass);
15     S.push_back(u);
16 }
17
18 bool kosaraju(int n) {
19
20     S.clear();
21     dfs_num.assign(n, -1);
22
23     f(u, 0, n) {
24         if (dfs_num[u] == -1)
25             kosarajuUtil(u, 1);
26     }
27
28     int numSCC = 0;
29     dfs_num.assign(n, -1);
30     f(i, n-1, -1) {
31         if (dfs_num[S[i]] == -1)
32             numSCC++, kosarajuUtil(S[i], 2);
33     }
34
35     return numSCC == 1;
36 }
37
38 void solve() {
39
40     int n, ed; cin >> n >> ed;
41     adj.assign(n, vii());
42     adj_t.assign(n, vii());
43
44     while (ed--) {
45         int u, v, w; cin >> u >> v >> w;
46         AL[u].emplace_back(v, 1);
47         adj_t[v].emplace_back(u, 1);
48     }
49
50     // Printa se o grafo eh fortemente conexo
51     cout << kosaraju(n) << endl;
52
53     // Printa o numero de componentes fortemente conexas
54     cout << numSCC << endl;
55
56     // Printa os vertices de cada componente fortemente conexa
57     f(i, 0, n) {
58         if (dfs_num[i] == -1) cout << i << " : " << "Nao visitado" << endl;
59         else cout << i << " : " << dfs_num[i] << endl;
60     }
61 }

```

## 8.19 Kruskal

```

1 // DEscricao: Encontra a arvore geradora minima de um grafo
2 // Complexidade: O(E log V)
3
4 vector<int> id, sz;
5
6 int find(int a) { // O(a(N)) amortizado
7     return id[a] = (id[a] == a ? a : find(id[a]));
8 }
9
10 void uni(int a, int b) { // O(a(N)) amortizado
11     a = find(a), b = find(b);
12     if(a == b) return;
13
14     if(sz[a] > sz[b]) swap(a, b);
15     id[a] = b, sz[b] += sz[a];
16 }
17
18 pair<int, vector<tuple<int, int, int>>> kruskal(vector<tuple<int, int, int>
19 >>& edg) {
20
21     sort(edg.begin(), edg.end()); // Minimum Spanning Tree
22
23     int cost = 0;
24     vector<tuple<int, int, int>> mst; // opcional
25     for (auto [w, x, y] : edg) if (find(x) != find(y)) {
26         mst.emplace_back(w, x, y); // opcional
27         cost += w;
28         uni(x, y);
29     }
30     return {cost, mst};
31 }
32
33 void solve() {
34
35     int n, ed;
36
37     id.resize(n); iota(all(id), 0);
38     sz.resize(n, -1);
39     vector<tuple<int, int, int>> edg;
40
41     f(i, 0, ed) {
42         int a, b, w; cin >> a >> b >> w;
43         edg.push_back({w, a, b});
44     }
45
46     auto [cost, mst] = kruskal(edg);
47 }
48 // VARIANTES
49
50 // Maximum Spanning Tree: sort(edg.rbegin(), edg.rend());
51
52 /* 'Minimum' Spanning Subgraph:
53 - Algumas arestas ja foram adicionadas (maior prioridade - Questao das
54   rodovias)

```

```

54 - Arestas que nao foram adicionadas (menor prioridade - ferrovias)
55 -> kruskal(rodovias); kruskal(ferrovias);
56 */
57
58 /* Minimum Spanning Forest:
59 - Queremos uma floresta com k componentes
60 -> kruskal(edg); if(mst.sizer() == k) break;
61 */
62
63 /* MiniMax
64 - Encontrar menor caminho entre dous vertices com maior quantidade de
65 arestas
66 -> kruskal(edg); dijsktra(mst);
67 */
68
69 /* Second Best MST
70 - Encontrar a segunda melhor arvore geradora minima
71 -> kruskal(edg);
72 -> flag mst[i] = 1;
73 -> sort(cmp(edg.flag != -1)) => da prioridade para outras arestas
74 */

```

## 8.20 Labirinto

```

1 // Verifica se eh possivel sair de um labirinto
2 // Complexidade: O(4^(n*m))
3
4 vector<pair<int,int>> mov = {{1,0}, {0,1}, {-1,0}, {0,-1}};
5 vector<vector<int>> labirinto, sol;
6 vector<vector<bool>> visited;
7 int L, C;
8
9 bool valid(const int& x, const int& y) {
10     return x >= 0 and x < L and y >= 0 and y < C and labirinto[x][y] != 0
11     and !visited[x][y];
12 }
13
14 bool condicaoSaida(const int& x, const int& y) {
15     return labirinto[x][y] == 2;
16 }
17
18 bool search(const int& x, const int& y) {
19     if(!valid(x, y))
20         return false;
21
22     if(condicaoSaida(x,y)) {
23         sol[x][y] = 2;
24         return true;
25     }
26
27     sol[x][y] = 1;
28     visited[x][y] = true;
29
30     for(auto [dx, dy] : mov)
31         if(search(x+dx, y+dy))
32             return true;

```

```

33     sol[x][y] = 0;
34     return false;
35 }
36
37 int main() {
38
39     labirinto = {
40         {1, 0, 0, 0},
41         {1, 1, 0, 0},
42         {0, 1, 0, 0},
43         {1, 1, 1, 2}
44     };
45
46     L = labirinto.size(), C = labirinto[0].size();
47     sol.resize(L, vector<int>(C, 0));
48     visited.resize(L, vector<bool>(C, false));
49
50     cout << search(0, 0) << endl;
51 }

```

## 8.21 Pontos Articulacao

```

1 // Description: Encontra os pontos de articulo de um grafo ão
2 // Complexidade: O(V*(V+E))
3
4 int V;
5 vector<vi> adj;
6 vi ans;
7
8 void dfs(vector<bool>& vis, int i, int curr) {
9     vis[curr] = 1;
10    for (auto x : adj[curr]) {
11        if (x != i) {
12            if (!vis[x]) {
13                dfs(vis, i, x);
14            }
15        }
16    }
17 }
18
19 void AP() {
20
21     f(i,1,V+1) {
22         int components = 0;
23         vector<bool> vis(V + 1, 0);
24         f(j,1, V+1) {
25             if (j != i) {
26                 if (!vis[j]) {
27                     components++;
28                     dfs(vis, i, j);
29                 }
30             }
31         }
32         if (components > 1) {
33             ans.push_back(i);

```

```

34     }
35 }
36 }
37
38 void solve() {
39
40     V = n;
41     adj.clear(), ans.clear();
42     adj.resize(V+1);
43
44     while(edg--) {
45         int a, b; cin >> a >> b;
46         adj[a].push_back(b);
47         adj[b].push_back(a);
48     }
49
50     AP();
51
52     // Vertices articulacao: ans
53 }

```

## 8.22 Successor Graph

```

1 // Encontra sucessor de um vertice dentro de um grafo direcionado
2 // Pre calcular:  $O(n \log n)$ 
3 // Consulta:  $O(\log n)$ 
4
5 vector<vector<int>> adj;
6
7 int succ(int x, int u) {
8     if(k == 1) return adj[x][0];
9     return succ(succ(x, k/2), k/2);
10 }

```

## 8.23 Topological Kahn

```

1 // Description: Ordenamento topologico usando o algoritmo de Kahn.
2 // Complexidade:  $O(V+E)$ 
3 vector<vector<int>> adj;
4
5 vector<int> topologicalSort(int V) {
6
7     vector<int> indegree(V);
8     for (int i = 0; i < V; i++) {
9         for (auto it : adj[i]) {
10             indegree[it]++;
11         }
12     }
13
14     queue<int> q;
15     for (int i = 0; i < V; i++) {
16         if (indegree[i] == 0) {
17             q.push(i);
18         }
19     }
20     vector<int> result;

```

```

21     while (!q.empty()) {
22
23         int node = q.front(); q.pop();
24         result.push_back(node);
25
26         for (auto it : adj[node]) {
27             indegree[it]--;
28             if (indegree[it] == 0)
29                 q.push(it);
30         }
31     }
32
33     if (result.size() != V) {
34         cout << "Graph contains cycle!" << endl;
35         return {};
36     }
37
38     return result;
39 }
40
41 void solve() {
42
43     int n = 4; adj.resize(n);
44     vector<pair<int, int>> edges = { { 0, 1 }, { 1, 2 }, { 3, 1 }, { 3, 2 } };
45     for (auto& [a,b] : edges) {
46         adj[a].push_back(b);
47     }
48
49     vector<int> ans = topologicalSort(n);
50 }
51
52 int main() {
53     solve();
54 }

```

# 9 Grafos Especiais

## 9.1 Arvore - @Info

```

1 Arvore (NDAG):
2
3 * Definicao
4     - contém V vertices e V-1 arestas ( $E = V-1$ )
5     - todo algoritmo  $O(V+E)$  numa arvore eh  $O(V)$ 
6     - nao direcionado
7     - sem ciclo
8     - conexa
9     - um unico caminho para todo par de vertices
10
11 * Aplicacoes
12
13     -> TREE TRAVERSAL
14         pre-order(v):                in-order(v):                post-order(v):
15             visit(v)                  in-order(left(v))          post-order(
16             left(v))

```

```

16     pre-order(left(v))      visit(v)      post-order(
right(v))
17     pre-order(right(v))    in-order(right(v))    visit(v)
18
19 -> Pontos de Articulacao / Pontes
20     - todo vertice eh ponto de articulacao
21
22 -> Single Source Shortest Path (SSSP)
23     -  $O(V)$  para achar o caminho minimo de um vertice para todos os
outros
24     - BFS ou DFS funcionam, mesmo com pesos
25
26 -> All Pairs Shortest Path (APSP)
27     -  $O(V^2)$  para achar o caminho minimo de todos para todos
28     -  $V * SSSP$ 
29
30 -> Diametro
31     - greatest 'shortest path length' between any pair of vertices
32     -  $2 * SSSP$ :
33         1. BFS/DFS de qualquer vertice
34         2. BFS/DFS do vertice mais distante => diametro = maior
distancia
35
36 -> Lowest Common Ancestor (LCA)
37     -  $O(V)$  para achar o LCA de 2 vertices
38     -  $O(V)$  para pre-processar

```

## 9.2 Bipartido - @Info

```

1 Grafo Bipartido
2
3 * Definicao
4     - vertices podem ser divididos em 2 conjuntos disjuntos
5     - todas as arestas conectam vertices de conjuntos diferentes
6     - nao ha arestas entre vertices do mesmo conjunto
7     - nao ha ciclos de tamanho impar
8     > EX: arvores sao bipartidas
9
10 * Aplicacoes

```

## 9.3 Dag - @Info

```

1 Grafo Direcionado Aciclico (DAG):
2 * Definicao
3     - tem direcao
4     - nao tem ciclos
5     - problemas com ele => usar DP (estados da DP = vertices DAG)
6     - so tem um topological sort
7 * Aplicacoes
8     - Single Source (Shortest / Longest) Path na DAG =>  $O(V + E)$ 
9     - Numero de caminhos entre 2 vertices =>  $O(V + E)$ 
10    - Numero de caminhos de um vertice para todos os outros =>  $O(V + E)$ 
11    - DP de 'minimizacao', 'maximizacao', 'contar algo' => menor | maior
    contar numero de caminhos na recursao de DP na DAG
12 * Exemplos
13     - mochila

```

```

14 - troco

```

## 9.4 Dag - Sslp

```

1 // Description: Finds SSLP (Single Source Longest Path) in a directed
    acyclic graph.
2 // Complexity:  $O(V + E)$ 
3 // OBS: Not tested
4 vector<vector<pair<int,int>>> adj;
5
6 vector<int> dagLongestPath(int s, int n) {
7
8     vector<int> topsort = topologicalSort();
9     vector<int> dist(n, INT_MIN);
10    dist[s] = 0;
11
12    for (int i = 0; i < n; i++) {
13        int nodeIndex = topsort[i];
14        if (dist[nodeIndex] != INT_MIN) {
15            auto adjacentEdges = adj[nodeIndex];
16            for (auto [u, w] : adjacentEdges) {
17                int newDist = dist[nodeIndex] + w;
18                if (dist[u] == INT_MIN) dist[u] = newDist;
19                else dist[u] = max(dist[u], newDist);
20            }
21        }
22    }
23
24    return dist;
25 }

```

## 9.5 Dag - Sssp

```

1 // Description: Encontra SSSP (Single Source Shortest Path) em um grafo
    iaclico direcionado.
2 // Complexity:  $O(V + E)$ 
3 // OBS: Nao testado
4 vector<vector<pair<int,int>>> adj;
5
6 vector<int> dagShortestPath(int s, int n) {
7
8     vector<int> topsort = topologicalSort();
9     vector<int> dist(n, INT_MAX);
10    dist[s] = 0;
11
12    for (int i = 0; i < n; i++) {
13        int nodeIndex = topsort[i];
14        if (dist[nodeIndex] != nodeIndex) {
15            auto adjacentEdges = adj[nodeIndex];
16            for (auto [u, w] : adjacentEdges) {
17                int newDist = dist[nodeIndex] + w;
18                if (dist[u] == INT_MAX) dist[u] = newDist;
19                else dist[u] = min(dist[u], newDist);
20            }
21        }
22    }

```

```

23     return dist;
24 }
25 }

```

## 9.6 Dag - Fishmonger

```

1 // Given the number of cities 3 <= n <= 50, available time 1 <= t <= 1000,
  and two n x n matrices (one gives travel times and another gives
  tolls between two cities), choose a route from the port city (vertex
  0) in such a way that the fishmonger has to pay as little tolls as
  possible to arrive at the market city (vertex n-1) within a certain
  time t
2
3 // Cada estado eh um vertice da DAG (node, tempoRestante)
4
5 pii dp(int cur, int t_left) {
6     if (t_left < 0) return {INF, INF};
7     if (cur == n-1) return {0, 0};
8     if (memo[cur][t_left] != {-1, -1}) return memo[cur][t_left];
9     pii ans = {INF, INF};
10    for (int X = 0; X < n; ++X)
11        if (cur != X) {
12            auto &[tollpaid, timeneeded] = dp(X, t_left-travelTime[cur][X]);
13            if (tollpaid+toll[cur][X] < ans.first) {
14                ans.first = tollpaid+toll[cur][X];
15                ans.second = timeneeded+travelTime[cur][X];
16            }
17        }
18    return memo[cur][t_left] = ans;
19 }

```

## 9.7 Dag - Numero De Caminhos 2 Vertices

```

1 // Description: Encontra o número de caminhos entre dois vértices em um
  grafo iaclico direcionado.
2 // Complexity: O(V + E)
3
4 const int MAXN = 1e5 + 5;
5
6 int dp[MAXN],
7 int mod = 1e9 + 7, n;
8 vector<vector<int>> adj;
9
10 int countPaths(int s, int d) {
11     if (s == d) return 1;
12     if (dp[s] != -1) return dp[s];
13
14     int c = 0;
15     for (int& neigh : adj[s]) {
16         int x = countPaths(neigh, d);
17         if (x != -1)
18             c = (c % mod + x % mod) % mod;
19     }
20     return (dp[s] = (c == 0) ? -1 : c);
21 }
22

```

```

23 int countPossiblePaths(int s, int d) {
24     memset(dp, -1, sizeof dp);
25     int c = countPaths(s, d);
26     if (c == -1) return 0;
27     return c;
28 }
29
30 void solve() {
31     int n, ed; cin >> n >> ed;
32     adj.resize(n);
33
34     for (int i = 0; i < ed; i++) {
35         int u, v; cin >> u >> v;
36         adj[u].push_back(v);
37     }
38
39     int src, end; cin >> src >> end; // 0-based
40     cout << countPossiblePaths(src, end) << endl;
41 }

```

## 9.8 Eulerian - @Info

```

1 Eulerian Graph:
2
3 * Eulerian Path (Eulerian Tour):
4     - caminho que atravessa grafo apenas 1 vez
5     - Grafo Nao direcionado: tem um se e somente se tiver 0 ou 2 vertices
      de grau impar
6     - Grafo Direcionado: tem um se e somente se
7         1. todos os vertices tiverem o mesmo numero de arestas entrando e
          saindo
8         2. eh 'conexo' (considerando arestas bidirecionadas)
9 * Definicao
10    - nao direcionado
11    - conexo
12    - grau de todos os vertices par

```

## 9.9 Eulerian - Euler Path

```

1 // Description: Encontra um caminho euleriano em um grafo direcionado
2 // Complexidade: O(E)
3 // OBS: testar com bidirecionado / encontrar versao que aceita
  bidirecionado
4
5 int N;
6 vector<vi> adj;
7 vi hierholzer(int s) {
8     vi ans, idx(N, 0), st;
9     st.push_back(s);
10    while (!st.empty()) {
11        int u = st.back();
12        if (idx[u] < (int)adj[u].size()) {
13            st.push_back(adj[u][idx[u]]);
14            ++idx[u];
15        }
16        else {

```

```

17         ans.push_back(u);
18         st.pop_back();
19     }
20 }
21 reverse(ans.begin(), ans.end());
22 return ans;
23 }

```

## 10 Matematica

### 10.1 Casas

```

1 // Description: Conta quantas casas decimais certo numero tem
2
3 int casas(double a) {
4     return (int)floor(1 + log10((double)a))
5 }

```

### 10.2 Ciclo Em Funcao

```

1 // Description: Encontra o tamanho do ciclo de uma çãfuno f(x) = (Z*x + I)
   % M a partir de um valor inicial L.
2 // Complexidade: O(lambda + mu) | lambda = tamanho do ciclo | mu = tamanho
   do prefixo antes do ciclo.
3 // Return: pair<int, int> = {mu, lambda} | mu = tamanho do prefixo antes
   do ciclo | lambda = tamanho do ciclo.
4 // Parameters: x0 = valor inicial para encontrar o ciclo.
5 int f(int x); // f(x) do problema
6
7 pii floydCycleFinding(int x0) {
8     int t = f(x0), h = f(f(x0));
9     while (t != h) { t = f(t); h = f(f(h)); }
10    int mu = 0; h = x0;
11    while (t != h) { t = f(t); h = f(h); ++mu; }
12    int lambda = 1; h = f(t);
13    while (t != h) { h = f(h); ++lambda; }
14    return {mu, lambda};
15 }

```

### 10.3 Contar Quanti Solucoes Eq 2 Variaveis

```

1 // Description: Dada uma equacao de 2 variaveis, calcula quantas
   combinacoes {x,y}
2 // inteiras que resolvem essa equacao
3 // Complexidade: O(sqrt(c))
4 // y = numerador / denominador
5 int numerador(int x) { return c - x; } // expressao do numerador
6 int denominador(int x) { return 2 * x + 1; } // expressao do denominador
7
8 int count2VariableIntegerEquationAnswers() {
9
10    unordered_set<pair<int,int>, PairHash> ans; int lim = sqrt(c);
11    for(int i=1; i<= lim; i++) {
12        if (numerador(i) % denominador(i) == 0) {
13            int x = i, y = numerador(i) / denominador(i);

```

```

14        if(!ans.count({x,y}) and !ans.count({y,x}))
15            ans.insert({x,y});
16    }
17 }
18
19 return ans.size();
20 }

```

### 10.4 Conversao De Bases

```

1 // Converter um decimal (10) para base n [2, 8, 10, 16]
2 // Complexidade: O(log n)
3 char charForDigit(int digit) {
4     if (digit > 9) return digit + 87;
5     return digit + 48;
6 }
7
8 string decimalToBase(int n, int base = 10) {
9     if (not n) return "0";
10    stringstream ss;
11    for (int i = n; i > 0; i /= base) {
12        ss << charForDigit(i % base);
13    }
14    string s = ss.str();
15    reverse(s.begin(), s.end());
16    return s;
17 }
18
19 // Converter um numero de base [2, 8, 10, 16] para decimal (10)
20 // Complexidade: O(n)
21 int intForDigit(char digit) {
22     int intDigit = digit - 48;
23     if (intDigit > 9) return digit - 87;
24     return intDigit;
25 }
26
27 int baseToDecimal(const string& n, int base = 10) {
28     int result = 0;
29     int basePow = 1;
30     for (auto it = n.rbegin(); it != n.rend(); ++it, basePow *= base)
31         result += intForDigit(*it) * basePow;
32     return result;
33 }

```

### 10.5 Decimal Para Fracao

```

1 // Converte um decimal para fracao irredutivel
2 // Complexidade: O(log n)
3 pair<int, int> toFraction(double n, unsigned p) {
4     const int tenP = pow(10, p);
5     const int t = (int) (n * tenP);
6     const int rMdc = mdc(t, tenP);
7     return {t / rMdc, tenP / rMdc};
8 }

```

### 10.6 Dois Primos Somam Num

```
1 // Description: Verifica se dois numeros primos somam um numero n.
2 // Complexity: O(sqrt(n))
3 bool twoNumsSumPrime(int n) {
4
5     if(n % 2 == 0) return true;
6     return isPrime(n-2);
7 }
```

10.7 Factorial

```
1 unordered_map<int, int> memo;
2
3 // Factorial
4 // Complexidade: O(n), onde n eh o numero a ser fatorado
5 int factorial(int n) {
6     if (n == 0 || n == 1) return 1;
7     if (memo.find(n) != memo.end()) return memo[n];
8     return memo[n] = n * factorial(n - 1);
9 }
```

10.8 Fast Exponentiation

```
1 const int mod = 1e9 + 7;
2
3 // Fast Exponentiation: retorna a^b % mod
4 // Quando usar: quando precisar calcular a^b % mod
5 int fexp(int a, int b)
6 {
7     int ans = 1;
8     while (b)
9     {
10         if (b & 1)
11             ans = ans * a % mod;
12         a = a * a % mod;
13         b >>= 1;
14     }
15     return ans;
16 }
```

10.9 Fatorial Grande

```
1 static BigInteger[] dp = new BigInteger[1000000];
2
3 public static BigInteger factorialDP(BigInteger n) {
4     dp[0] = BigInteger.ONE;
5     for (int i = 1; i <= n.intValue(); i++) {
6         dp[i] = dp[i - 1].multiply(BigInteger.valueOf(i));
7     }
8     return dp[n.intValue()];
9 }
```

10.10 Mmc Mdc - Euclides Extendido

```
1 // Description: Retorna mdc(a, b) e referencia inteiros x, y t.q ax + by = mdc(a, b).
```

```
2 // Complexidade: O(log(min(a, b)))
3
4 int extEuclid(int a, int b, int &x, int &y) {
5     int xx = y = 0;
6     int yy = x = 1;
7     while (b) {
8         int q = a/b;
9         tie(a, b) = tuple(b, a%b);
10        tie(x, xx) = tuple(xx, x-q*xx);
11        tie(y, yy) = tuple(yy, y-q*yy);
12    }
13    return a;
14 }
```

10.11 Mmc Mdc - Mdc

```
1 // Description: Calcula o mdc de dois numeros inteiros.
2 // Complexidade: O(logn) onde n eh o maior numero
3 int mdc(int a, int b) {
4     for (int r = a % b; r; a = b, b = r, r = a % b);
5     return b;
6 }
```

10.12 Mmc Mdc - Mdc Multiplo

```
1 // Description: Calcula o MDC de um vetor de inteiros.
2 // Complexidade: O(nlogn) onde n eh o tamanho do vetor
3 int mdc_many(vector<int> arr) {
4     int result = arr[0];
5
6     for (int& num : arr) {
7         result = mdc(num, result);
8
9         if(result == 1) return 1;
10    }
11    return result;
12 }
```

10.13 Mmc Mdc - Mmc

```
1 // Description: Calcula o mmc de dois números inteiros.
2 // Complexidade: O(logn) onde n eh o maior numero
3 int mmc(int a, int b) {
4     return a / mdc(a, b) * b;
5 }
```

10.14 Mmc Mdc - Mmc Multiplo

```
1 // Description: Calcula o mmc de um vetor de inteiros.
2 // Complexidade: O(nlogn) onde n eh o tamanho do vetor
3 int mmc_many(vector<int> arr)
4 {
5     int result = arr[0];
6
7     for (int &num : arr)
```



```

8         result = (num * result / mdc(num, result));
9         return result;
10    }

```

## 10.15 Modulo - @Info

```

1  SOMA
2  (a + b) % m = ((a % m) + (b % m)) % m
3
4  SUBTRAO
5  (a - b) % m = ((a % m) - (b % m) + m) % m
6
7  MULTIPLICAO
8  (a * b) % m = ((a % m) * (b % m)) % m
9
10 DIVISO
11 (a / b) % m      = (a * b^-1) % m
12 // se m eh primo = ((a % m) * (b^(m-2) % m)) % m.
13 // else          = (a * modInverse(b, m)) % m
14
15 POTENCIA
16 (a ^ b) % m = ((a % m) ^ b) % m = modPow(a, b, m)

```

## 10.16 Modulo - Divisao E Potencia Mod M

```

1 // Retorna a % m (garante que o resultado é positivo)
2 int mod(int a, int m) {
3     return ((a%m) + m) % m;
4 }
5
6 // Description: retorna b^(-1) mod m, ou -1 se ão existir.
7 // Complexidade: O(log(min(b, m)))
8 int modInverse(int b, int m) {
9     int x, y;
10    int d = extEuclid(b, m, x, y);
11    if (d != 1) return -1;
12    return mod(x, m);
13 }
14
15 // Description: retorna b^p mod m
16 // Complexidade: O(log(p))
17 int modPow(int b, int p, int m) {
18     if (p == 0) return 1;
19     int ans = modPow(b, p/2, m);
20     ans = mod(ans*ans, m);
21     if (p&1) ans = mod(ans*b, m);
22     return ans;
23 }

```

## 10.17 N Fibonacci

```

1 int dp[MAX];
2
3 int fibonacciDP(int n) {
4     if (n == 0) return 0;
5     if (n == 1) return 1;

```

```

6     if (dp[n] != -1) return dp[n];
7     return dp[n] = fibonacciDP(n-1) + fibonacciDP(n-2);
8 }
9
10 int nFibonacci(int minus, int times, int n) {
11     if (n == 0) return 0;
12     if (n == 1) return 1;
13     if (dp[n] != -1) return dp[n];
14     int aux = 0;
15     for(int i=0; i<times; i++) {
16         aux += nFibonacci(minus, times, n-minus);
17     }
18 }

```

## 10.18 Numeros Grandes

```

1 public static void BbigInteger() {
2
3     BigInteger a = BigInteger.valueOf(1000000000);
4     a = new BigInteger("1000000000");
5
6     // çõ0peraes com inteiros grandes
7     BigInteger arit = a.add(a);
8     arit = a.subtract(a);
9     arit = a.multiply(a);
10    arit = a.divide(a);
11    arit = a.mod(a);
12
13    // çãComparao
14    boolean bool = a.equals(a);
15    bool = a.compareTo(a) > 0;
16    bool = a.compareTo(a) < 0;
17    bool = a.compareTo(a) >= 0;
18    bool = a.compareTo(a) <= 0;
19
20    // ãConverso para string
21    String m = a.toString();
22
23    // ãConverso para inteiro
24    int _int = a.intValue();
25    long _long = a.longValue();
26    double _doub = a.doubleValue();
27
28    // @Potncia
29    BigInteger _pot = a.pow(10);
30    BigInteger _sqr = a.sqrt();
31
32 }
33
34 public static void BigDecimal() {
35
36     BigDecimal a = new BigDecimal("1000000000");
37     a = new BigDecimal("1000000000.000000000");
38     a = BigDecimal.valueOf(1000000000, 10);
39
40
41    // çõ0peraes com reais grandes

```

```

42     BigDecimal arit = a.add(a);
43         arit = a.subtract(a);
44         arit = a.multiply(a);
45         arit = a.divide(a);
46         arit = a.remainder(a);
47
48     // ãComparao
49     boolean bool = a.equals(a);
50         bool = a.compareTo(a) > 0;
51         bool = a.compareTo(a) < 0;
52         bool = a.compareTo(a) >= 0;
53         bool = a.compareTo(a) <= 0;
54
55     // ãConverso para string
56     String m = a.toString();
57
58     // ãConverso para inteiro
59     int _int = a.intValue();
60     long _long = a.longValue();
61     double _doub = a.doubleValue();
62
63     // Potncia
64     BigDecimal _pot = a.pow(10);
65 }

```

## 10.19 Primos - Divisores De N - Listar

```

1 // Description: Retorna o numero de divisores de N
2 // Complexidade: O(log(N))
3 // Exemplo: numDiv(60) = 12 {1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60}
4 int numDiv(int N) {
5     int ans = 1;
6     for (int i = 0; i < p.size() and p[i]*p[i] <= N; ++i) {
7         int power = 0;
8         while (N%p[i] == 0) { N /= p[i]; ++power; }
9         ans *= power+1;
10    }
11    return (N != 1) ? 2*ans : ans;
12 }

```

## 10.20 Primos - Divisores De N - Somar

```

1 // Description: Retorna a soma dos divisores de N
2 // Complexidade: O(log(N))
3 // Exemplo: sumDiv(60) = 168 : 1+2+3+4+5+6+10+12+15+20+30+60
4 int sumDiv(int N) {
5     int ans = 1;
6     for (int i = 0; i < p.size() and p[i]*p[i] <= N; ++i) {
7         int multiplier = p[i], total = 1;
8         while (N%p[i] == 0) {
9             N /= p[i];
10            total += multiplier;
11            multiplier *= p[i];
12        }
13        ans *= total;
14    }

```

```

15     if (N != 1) ans *= (N+1);
16     return ans;
17 }

```

## 10.21 Primos - Fatores Primos - Contar Diferentes

```

1 // Description: Retorna o numero de fatores primos diferentes de N
2 // Complexidade: O(sqrt(N))
3 // Exemplo: numDiffPF(60) = 3 {2, 3, 5}
4
5 int numDiffPF(int N) {
6     int ans = 0;
7     for (int i = 0; i < p.size() && p[i]*p[i] <= N; ++i) {
8         if (N%p[i] == 0) ++ans; // count this prime
9         factor
10            while (N%p[i] == 0) N /= p[i]; // only once
11    }
12    if (N != 1) ++ans;
13    return ans;

```

## 10.22 Primos - Fatores Primos - Listar

```

1 // Fatora um únmero em seus fatores primos
2 // Complexidade: O(sqrt(n))
3 // Ex: factorize(1200) = {2: 4, 3: 1, 5: 2}
4
5 map<int, int> factorize(int n) {
6     map<int, int> factorsOfN;
7     int lpf = 2;
8
9     while (n != 1) {
10        lpf = lowestPrimeFactor(n, lpf);
11        factorsOfN[lpf] = 1;
12        n /= lpf;
13        while (not (n % lpf)) {
14            factorsOfN[lpf]++;
15            n /= lpf;
16        }
17    }
18
19    return factorsOfN;
20 }

```

## 10.23 Primos - Fatores Primos - Somar

```

1 // Description: Retorna a soma dos fatores primos de N
2 // Complexidade: O(log(N))
3 // Exemplo: sumPF(60) = sumPF(2^2 * 3^1 * 5^1) = 2 + 2 + 3 + 5 = 12
4
5 int sumPF(int N) {
6     int ans = 0;
7     for (int i = 0; i < p.size() && p[i]*p[i] <= N; ++i)
8         while (N%p[i] == 0) { N /= p[i]; ans += p[i]; }
9     if (N != 1) ans += N;
10    return ans;
11 }

```

## 10.24 Primos - Is Prime

```
1 // Descricao: Funcao que verifica se um numero n eh primo.
2 // Complexidade: O(sqrt(n))
3 bool isPrime(int n) {
4     return n > 1 and lowestPrimeFactor(n) == n;
5 }
```

## 10.25 Primos - Lowest Prime Factor

```
1 // Description: Funcao auxiliar que retorna o menor fator primo de n.
2 // Complexidade: O(sqrt(n))
3
4 int lowestPrimeFactor(int n, int startPrime = 2) {
5     if (startPrime <= 3) {
6         if (not (n & 1)) return 2;
7         if (not (n % 3)) return 3;
8         startPrime = 5;
9     }
10
11     for (int i = startPrime; i * i <= n; i += (i + 1) % 6 ? 4 : 2)
12         if (not (n % i))
13             return i;
14     return n;
15 }
```

## 10.26 Primos - Miller Rabin

```
1 // Teste de primalidade de Miller-Rabin
2 // Complexidade: O(k*log^3(n)), onde k eh o numero de testes e n eh o
   numero a ser testado
3 // Descricao: Testa se um numero eh primo com uma probabilidade de erro de
   1/4^k
4
5 int mul(int a, int b, int m) {
6     int ret = a*b - int((long double)1/m*a*b+0.5)*m;
7     return ret < 0 ? ret+m : ret;
8 }
9
10 int pow(int x, int y, int m) {
11     if (!y) return 1;
12     int ans = pow(mul(x, x, m), y/2, m);
13     return y%2 ? mul(x, ans, m) : ans;
14 }
15
16 bool prime(int n) {
17     if (n < 2) return 0;
18     if (n <= 3) return 1;
19     if (n % 2 == 0) return 0;
20     int r = __builtin_ctzint(n - 1), d = n >> r;
21
22     // com esses primos, o teste funciona garantido para n <= 2^64
23     // funciona para n <= 3*10^24 com os primos ate 41
24     for (int a : {2, 325, 9375, 28178, 450775, 9780504, 795265022}) {
25         int x = pow(a, d, n);
26         if (x == 1 or x == n - 1 or a % n == 0) continue;
```

```
27
28         for (int j = 0; j < r - 1; j++) {
29             x = mul(x, x, n);
30             if (x == n - 1) break;
31         }
32         if (x != n - 1) return 0;
33     }
34     return 1;
35 }
```

## 10.27 Primos - Numero Fatores Primos De N

```
1 // Description: Retorna o numero de fatores primos de N
2 // Complexidade: O(log(N))
3
4 vi p; // vetor de primos p (sieve(10000000))
5
6 int numPF(int N) {
7     int ans = 0;
8     for (int i = 0; i < (int)p.size() && p[i]*p[i] <= N; ++i)
9         while (N%p[i] == 0) { N /= p[i]; ++ans; }
10    return ans + (N != 1);
11 }
```

## 10.28 Primos - Primo Grande

```
1 // Description: verificar se um numero > 9e18 eh primo
2 public static boolean isProbablePrime(BigInteger num, int certainty) {
3     return num.isProbablePrime(certainty);
4 }
```

## 10.29 Primos - Primos Relativos De N

```
1 // Description: Conta o numero de primos relativos de N
2 // Complexidade: O(log(N))
3 // Exemplo: countPrimosRelativos(60) = 16
   {1,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,49,53,59}
4 // Definicao: Dois numeros sao primos relativos se o mdc entre eles eh 1
5
6 int countPrimosRelativos(int N) {
7     int ans = N;
8     for (int i = 0; i < (int)p.size() && p[i]*p[i] <= N; ++i) {
9         if (N%p[i] == 0) ans -= ans/p[i];
10        while (N%p[i] == 0) N /= p[i];
11    }
12    if (N != 1) ans -= ans/N;
13    return ans;
14 }
```

## 10.30 Primos - Sieve

```
1 // Description: Gera todos os primos do intervalo [1,lim]
2 // Complexidade: O(n log log n)
3
4 int _sieve_size;
5 bitset<10000010> bs;
6 vi p;
```

```

7
8 void sieve(int lim) {
9     _sieve_size = lim+1;
10    bs.set();
11    bs[0] = bs[1] = 0;
12    f(i,2,_sieve_size) {
13        if (bs[i]) {
14            for (int j = i*i; j < _sieve_size; j += i) bs[j] = 0;
15            p.push_back(i);
16        }
17    }
18 }

```

## 10.31 Primos - Sieve Linear

```

1 // Sieve de Eratosthenes com linear sieve
2 // Encontra todos os números primos no intervalo [2, N]
3 // Complexidade: O(N)
4
5 vector<int> sieve(const int N) {
6
7     vector<int> lp(N + 1); // lp[i] = menor fator primo de i
8     vector<int> pr;
9
10    for (int i = 2; i <= N; ++i) {
11        if (lp[i] == 0) {
12            lp[i] = i;
13            pr.push_back(i);
14        }
15        for (int j = 0; i * pr[j] <= N; ++j) {
16            lp[i * pr[j]] = pr[j];
17            if (pr[j] == lp[i])
18                break;
19        }
20    }
21
22    return pr;
23 }

```

## 10.32 Tabela Verdade

```

1 // Gerar tabela verdade de uma expressão booleana
2 // Complexidade: O(2^n)
3
4 vector<vector<int>> tabelaVerdade;
5 int indexTabela = 0;
6
7 void backtracking(int posicao, vector<int>& conj_bool) {
8
9     if(posicao == conj_bool.size()) { // Se chegou ao fim da BST
10         for(size_t i=0; i<conj_bool.size(); i++) {
11             tabelaVerdade[indexTabela].push_back(conj_bool[i]);
12         }
13         indexTabela++;
14     } else {
15

```

```

16         conj_bool[posicao] = 1;
17         backtracking(posicao+1, conj_bool);
18         conj_bool[posicao] = 0;
19         backtracking(posicao+1, conj_bool);
20     }
21 }
22
23 int main() {
24
25     int n = 3;
26
27     vector<int> linhaBool (n, false);
28     tabelaVerdade.resize(pow(2,n));
29
30     backtracking(0,linhaBool);
31 }

```

## 11 Matriz

### 11.1 Fibonacci Matricial

```

1
2
3 #include <bits/stdc++.h>
4 using namespace std;
5
6 typedef long long ll;
7
8 ll MOD;
9
10 const int MAX_N = 2;
11
12 struct Matrix { ll mat[MAX_N][MAX_N]; };
13
14 ll mod(ll a, ll m) { return ((a%m)+m) % m; }
15
16 Matrix matMul(Matrix a, Matrix b) {
17     Matrix ans;
18     for (int i = 0; i < MAX_N; ++i)
19         for (int j = 0; j < MAX_N; ++j)
20             ans.mat[i][j] = 0;
21     for (int i = 0; i < MAX_N; ++i)
22         for (int k = 0; k < MAX_N; ++k) {
23             if (a.mat[i][k] == 0) continue;
24             for (int j = 0; j < MAX_N; ++j) {
25                 ans.mat[i][j] += mod(a.mat[i][k], MOD) * mod(b.mat[k][j], MOD);
26             }
27         }
28     return ans;
29 }
30
31 Matrix matPow(Matrix base, int p) {
32     Matrix ans;
33     for (int i = 0; i < MAX_N; ++i)

```

```

35     for (int j = 0; j < MAX_N; ++j)
36         ans.mat[i][j] = (i == j);
37 while (p) {
38     if (p&1)
39         ans = matMul(ans, base);
40     base = matMul(base, base);
41     p >>= 1;
42 }
43 return ans;
44 }
45
46 int main() {
47     int n, m;
48     while (scanf("%d %d", &n, &m) == 2) {
49         Matrix ans;
50         ans.mat[0][0] = 1; ans.mat[0][1] = 1;
51         ans.mat[1][0] = 1; ans.mat[1][1] = 0;
52         MOD = 1LL << m;
53         ans = matPow(ans, n);
54         printf("%lld\n", ans.mat[0][1]);
55     }
56     return 0;
57 }

```

## 11.2 Maior Retangulo Binario Em Matriz

```

1 // Description: Encontra o maior âretnngulo ábinrio em uma matriz.
2 // Time: O(n*m)
3 // Space: O(n*m)
4 tuple<int, int, int> maximalRectangle(vector<vector<int>>& mat) {
5     int r = mat.size();
6     if(r == 0) return {0, 0, 0};
7     int c = mat[0].size();
8
9     vector<vector<int>> dp(r+1, vector<int>(c));
10
11     int mx = 0;
12     int area = 0, height = 0, length = 0;
13     for(int i=1; i<r; ++i) {
14         int leftBound = -1;
15         stack<int> st;
16         vector<int> left(c);
17
18         for(int j=0; j<c; ++j) {
19             if(mat[i][j] == 1) {
20                 mat[i][j] = 1+mat[i-1][j];
21                 while(!st.empty() and mat[i][st.top()] >= mat[i][j])
22                     st.pop();
23
24                 int val = leftBound;
25                 if(!st.empty())
26                     val = max(val, st.top());
27
28                 left[j] = val;
29             } else {
30                 leftBound = j;
31                 left[j] = 0;

```

```

32     }
33     st.push(j);
34 }
35 while(!st.empty()) st.pop();
36
37 int rightBound = c;
38 for(int j=c-1; j>=0; j--) {
39     if(mat[i][j] != 0) {
40
41         while(!st.empty() and mat[i][st.top()] >= mat[i][j])
42             st.pop();
43
44         int val = rightBound;
45         if(!st.empty())
46             val = min(val, st.top());
47
48         dp[i][j] = (mat[i][j]) * (((val-1)-(left[j]+1)+1));
49         if (dp[i][j] > mx) {
50             mx = dp[i][j];
51             area = mx;
52             height = mat[i][j];
53             length = (val-1)-(left[j]+1)+1;
54         }
55         st.push(j);
56     } else {
57         dp[i][j] = 0;
58         rightBound = j;
59     }
60 }
61 }
62
63 return {area, height, length};
64 }
65
66 int r = mat.size();
67 if(r == 0) return make_tuple(0, 0, 0);
68 int c = mat[0].size();
69
70 vector<vector<int>> dp(r+1, vector<int>(c));
71
72 int mx = 0;
73 int area = 0, height = 0, length = 0;
74 for(int i=1; i<r; ++i) {
75     int leftBound = -1;
76     stack<int> st;
77     vector<int> left(c);
78
79     for(int j=0; j<c; ++j) {
80         if(mat[i][j] == 1) {
81             mat[i][j] = 1+mat[i-1][j];
82             while(!st.empty() and mat[i][st.top()] >= mat[i][j])
83                 st.pop();
84
85             int val = leftBound;
86             if(!st.empty())
87                 val = max(val, st.top());
88
89             left[j] = val;

```

```

89     } else {
90         leftBound = j;
91         left[j] = 0;
92     }
93     st.push(j);
94 }
95 while(!st.empty()) st.pop();
96
97 int rightBound = c;
98 for(int j=c-1; j>=0; j--) {
99     if(mat[i][j] != 0) {
100
101         while(!st.empty() and mat[i][st.top()] >= mat[i][j])
102             st.pop();
103
104         int val = rightBound;
105         if(!st.empty())
106             val = min(val, st.top());
107
108         dp[i][j] = (mat[i][j]+1) * (((val-1)-(left[j]+1)+1)+1);
109         if (dp[i][j] > mx) {
110             mx = dp[i][j];
111             area = mx;
112             height = mat[i][j];
113             length = (val-1)-(left[j]+1)+1;
114         }
115         st.push(j);
116     } else {
117         dp[i][j] = 0;
118         rightBound = j;
119     }
120 }
121
122 return make_tuple(area, height, length);
123 }
124 }

```

## 11.3 Max 2D Range Sum

```

1 // Maximum Sum
2 // O(n^3) 1D DP + greedy (Kadane's) solution, 0.000s in UVA
3
4 #include <bits/stdc++.h>
5 using namespace std;
6
7 #define f(i,s,e) for(int i=s;i<e;i++)
8 #define MAX_n 110
9
10 int A[MAX_n][MAX_n];
11
12 int maxMatrixSum(vector<vector<int>> mat) {
13
14     int n = mat.size();
15     int m = mat[0].size();
16
17     f(i,0,n) {
18         f(j,0,m) {

```

```

19             if (j > 0)
20                 mat[i][j] += mat[i][j - 1];
21         }
22     }
23
24     int maxSum = INT_MIN;
25     f(l,0,m) {
26         f(r,l,m) {
27             vector<int> sum(n, 0);
28             f(row,0,n) {
29                 sum[row] = mat[row][r] - (l > 0 ? mat[row][l - 1] : 0);
30             }
31             int maxSubRect = sum[0];
32             f(i,1,n) {
33                 if (sum[i - 1] > 0)
34                     sum[i] += sum[i - 1];
35                 maxSubRect = max(maxSubRect, sum[i]);
36             }
37             maxSum = max(maxSum, maxSubRect);
38         }
39     }
40
41     return maxSum;
42 }

```

## 11.4 Potencia Matriz

```

1 // Description: Calcula a potencia de uma matriz quadrada A elevada a um
2 //               expoente n
3
4 int MOD;
5 const int MAX_N = 2;
6
7 struct Matrix { int mat[MAX_N][MAX_N]; };
8
9 int mod(int a, int m) { return ((a%m)+m) % m; }
10
11 Matrix matMul(Matrix a, Matrix b) {
12     Matrix ans;
13     for (int i = 0; i < MAX_N; ++i)
14         for (int j = 0; j < MAX_N; ++j)
15             ans.mat[i][j] = 0;
16
17     for (int i = 0; i < MAX_N; ++i)
18         for (int k = 0; k < MAX_N; ++k) {
19             if (a.mat[i][k] == 0) continue;
20             for (int j = 0; j < MAX_N; ++j) {
21                 ans.mat[i][j] += mod(a.mat[i][k], MOD) * mod(b.mat[k][j],
22                                     MOD);
23             }
24         }
25     return ans;
26 }
27
28 Matrix matPow(Matrix base, int p) {
29     Matrix ans;

```

```

29     for (int i = 0; i < MAX_N; ++i)
30     for (int j = 0; j < MAX_N; ++j)
31         ans.mat[i][j] = (i == j);
32     while (p) {
33         if (p&1)
34             ans = matMul(ans, base);
35         base = matMul(base, base);
36         p >>= 1;
37     }
38     return ans;
39 }
40
41 void solve() {
42
43 }

```

## 12 Strings

### 12.1 Calculadora Posfixo

```

1 // Description: Calculadora de expressoes posfixas
2 // Complexidade: O(n)
3 int posfixo(string s) {
4     stack<int> st;
5     for (char c : s) {
6         if (isdigit(c)) {
7             st.push(c - '0');
8         } else {
9             int b = st.top(); st.pop();
10            int a = st.top(); st.pop();
11            if (c == '+') st.push(a + b);
12            if (c == '-') st.push(a - b);
13            if (c == '*') st.push(a * b);
14            if (c == '/') st.push(a / b);
15        }
16    }
17    return st.top();
18 }

```

### 12.2 Chaves Colchetes Parenteses

```

1 // Description: Verifica se s tem uma sequência valida de {}, [] e ()
2 // Complexidade: O(n)
3 bool brackets(string s) {
4     stack<char> st;
5
6     for (char c : s) {
7         if (c == '(' || c == '[' || c == '{') {
8             st.push(c);
9         } else {
10            if (st.empty()) return false;
11            if (c == ')' and st.top() != '(') return false;
12            if (c == ']' and st.top() != '[') return false;
13            if (c == '}' and st.top() != '{') return false;
14            st.pop();
15        }
16    }
17    return st.empty();
18 }

```

```

15     }
16 }
17
18 return st.empty();
19 }

```

### 12.3 Infixo Para Posfixo

```

1 // Description: Converte uma expressao matematica infixa para posfixa
2 // Complexidade: O(n)
3 string infixToPostfix(string s) {
4     stack<char> st;
5     string res;
6     for (char c : s) {
7         if (isdigit(c))
8             res += c;
9         else if (c == '(')
10            st.push(c);
11        else if (c == ')') {
12            while (st.top() != '(') {
13                res += st.top();
14                st.pop();
15            }
16            st.pop();
17        } else {
18            while (!st.empty() and st.top() != '(' and
19                (c == '+' or c == '-' or (st.top() == '*' or st.top()
20                == '/')) {
21                res += st.top();
22                st.pop();
23            }
24            st.push(c);
25        }
26        while (!st.empty()) {
27            res += st.top();
28            st.pop();
29        }
30        return res;
31 }

```

### 12.4 Lexicograficamente Minima

```

1 // Descricao: Retorna a menor rotacao lexicografica de uma string.
2 // Complexidade: O(n * log(n)) onde n eh o tamanho da string
3 string minLexRotation(string str) {
4     int n = str.length();
5
6     string arr[n], concat = str + str;
7
8     for (int i = 0; i < n; i++)
9         arr[i] = concat.substr(i, n);
10
11     sort(arr, arr+n);
12
13     return arr[0];
14 }

```

## 12.5 Lower Upper

```
1 // Description: çãFunco que transforma uma string em lowercase.
2 // Complexidade: O(n) onde n é o tamanho da string.
3 string to_lower(string a) {
4     for (int i=0;i<(int)a.size();++i)
5         if (a[i]>='A' && a[i]<='Z')
6             a[i]+='a'-'A';
7     return a;
8 }
9
10 // para checar se é lowercase: islower(c);
11
12 // Description: çãFunco que transforma uma string em uppercase.
13 // Complexidade: O(n) onde n é o tamanho da string.
14 string to_upper(string a) {
15     for (int i=0;i<(int)a.size();++i)
16         if (a[i]>='a' && a[i]<='z')
17             a[i]-='a'-'A';
18     return a;
19 }
20
21 // para checar se e uppercase: isupper(c);
```

## 12.6 Numeros E Char

```
1 char num_to_char(int num) { // 0 -> '0'
2     return num + '0';
3 }
4
5 int char_to_num(char c) { // '0' -> 0
6     return c - '0';
7 }
8
9 char int_to_ascii(int num) { // 97 -> 'a'
10    return num;
11 }
12
13 int ascii_to_int(char c) { // 'a' -> 97
14    return c;
15 }
```

## 12.7 Ocorrencias

```
1 // Description: çãFunco que retorna um vetor com as çõposies de todas as
2 //   êocorrncias de uma substring em uma string.
3 // Complexidade: O(n * m) onde n é o tamanho da string e m é o tamanho da
4 //   substring.
5 vector<int> ocorrencias(string str,string sub){
6     vector<int> ret;
7     int index = str.find(sub);
8     while(index!=-1){
9         ret.push_back(index);
10        index = str.find(sub,index+1);
11    }
12 }
```

```
11     return ret;
12 }
```

## 12.8 Palindromo

```
1 // Descricao: Funcao que verifica se uma string eh um palindromo.
2 // Complexidade: O(n) onde n eh o tamanho da string.
3 bool isPalindrome(string str) {
4     for (int i = 0; i < str.length() / 2; i++) {
5         if (str[i] != str[str.length() - i - 1]) {
6             return false;
7         }
8     }
9     return true;
10 }
```

## 12.9 Permutacao

```
1 // Funcao para gerar todas as permutacoes de uma string
2 // Complexidade: O(n!)
3
4 void permute(string& s, int l, int r) {
5     if (l == r)
6         permutacoes.push_back(s);
7     else {
8         for (int i = l; i <= r; i++) {
9             swap(s[l], s[i]);
10            permute(s, l+1, r);
11            swap(s[l], s[i]);
12        }
13    }
14 }
15
16 int main() {
17
18     string str = "ABC";
19     int n = str.length();
20     permute(str, 0, n-1);
21 }
```

## 12.10 Remove Acento

```
1 // Descricao: Funcao que remove acentos de uma string.
2 // Complexidade: O(n * m) onde n eh o tamanho da string e m eh o tamanho
3 //   do alfabeto com acento.
4 string removeAcento(string str) {
5     string comAcento = "áéíóúâêôãäà";
6     string semAcento = "aeiouaeoaea";
7
8     for(int i = 0; i < str.size(); i++){
9         for(int j = 0; j < comAcento.size(); j++){
10            if(str[i] == comAcento[j]){
11                str[i] = semAcento[j];
12                break;
13            }
14        }
15    }
```



```

14     }
15 }
16
17     return str;
18 }

```

## 12.11 Split Cria

```

1 // Descricao: Funcao que divide uma string em um vetor de strings.
2 // Complexidade: O(n * m) onde n eh o tamanho da string e m eh o tamanho
   do delimitador.
3 vector<string> split(string s, string del = " ") {
4     vector<string> retorno;
5     int start, end = -1*del.size();
6     do {
7         start = end + del.size();
8         end = s.find(del, start);
9         retorno.push_back(s.substr(start, end - start));
10    } while (end != -1);
11    return retorno;
12 }

```

## 13 Vector

### 13.1 Contar Subarrays Somam K

```

1 // Descricao: Conta quantos subarrays de um vetor tem soma igual a k
2 // Complexidade: O(n)
3 int contarSomaSubarray(vector<int>& v, int k) {
4     unordered_map<int, int> prevSum; // map to store the previous sum
5
6     int ret = 0, currentSum = 0;
7
8     for(int& num : v) {
9         currentSum += num;
10
11         if (currentSum == k) ret++; /// Se a soma atual for igual a k,
           encontramos um subarray
12
13         if (prevSum.find(currentSum - k) != prevSum.end()) // se subarray
           com soma (currentSum - k) existir, sabe que [0:n] eh um subarray com
           soma k
14             ret += (prevSum[currentSum - k]);
15
16         prevSum[currentSum]++;
17     }
18
19     return ret;
20 }

```

### 13.2 Elemento Mais Frequente

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3

```

```

4 // Encontra o unico elemento mais frequente em um vetor
5 // Complexidade: O(n)
6 int maxFreq1(vector<int> v) {
7     int res = 0;
8     int count = 1;
9
10    for(int i = 1; i < v.size(); i++) {
11
12        if(v[i] == v[res])
13            count++;
14        else
15            count--;
16
17        if(count == 0) {
18            res = i;
19            count = 1;
20        }
21    }
22
23    return v[res];
24 }
25
26 // Encontra os elemento mais frequente em um vetor
27 // Complexidade: O(n)
28 vector<int> maxFreqn(vector<int> v)
29 {
30     unordered_map<int, int> hash;
31     for (int i = 0; i < v.size(); i++)
32         hash[v[i]]++;
33
34     int max_count = 0, res = -1;
35     for (auto i : hash) {
36         if (max_count < i.second) {
37             res = i.first;
38             max_count = i.second;
39         }
40     }
41
42     vector<int> ans;
43     for (auto i : hash) {
44         if (max_count == i.second) {
45             ans.push_back(i.first);
46         }
47     }
48
49     return ans;
50 }

```

### 13.3 K Maior Elemento

```

1 // Description: Encontra o k-ésimo maior elemento de um vetor
2 // Complexidade: O(n)
3
4 int Partition(vector<int>& A, int l, int r) {
5     int p = A[l];
6     int m = l;
7     for (int k = l+1; k <= r; ++k) {

```

```

8         if (A[k] < p) {
9             ++m;
10            swap(A[k], A[m]);
11        }
12    }
13    swap(A[l], A[m]);
14    return m;
15 }
16
17 int RandPartition(vector<int>& A, int l, int r) {
18     int p = l + rand() % (r-l+1);
19     swap(A[l], A[p]);
20     return Partition(A, l, r);
21 }
22
23 int QuickSelect(vector<int>& A, int l, int r, int k) {
24     if (l == r) return A[l];
25     int q = RandPartition(A, l, r);
26     if (q+1 == k)
27         return A[q];
28     else if (q+1 > k)
29         return QuickSelect(A, l, q-1, k);
30     else
31         return QuickSelect(A, q+1, r, k);
32 }
33
34 void solve() {
35     vector<int> A = { 2, 8, 7, 1, 5, 4, 6, 3 };
36     int k = 1;
37     cout << QuickSelect(A, 0, A.size()-1, k) << endl;
38 }

```

## 13.4 Maior Retangulo Em Histograma

```

1 // Calcula area do maior retangulo em um histograma
2 // Complexidade: O(n)
3 int maxHistogramRect(const vector<int>& hist) {
4     stack<int> s;
5     int n = hist.size();
6
7     int ans = 0, tp, area_with_top;
8
9     int i = 0;
10    while (i < n) {
11
12        if (s.empty() || hist[s.top()] <= hist[i])
13            s.push(i++);
14
15        else {
16            tp = s.top(); s.pop();
17
18            area_with_top = hist[tp] * (s.empty() ? i : i - s.top() - 1);
19
20            if (ans < area_with_top)
21                ans = area_with_top;
22        }
23    }

```

```

24
25    while (!s.empty()) {
26        tp = s.top(); s.pop();
27        area_with_top = hist[tp] * (s.empty() ? i : i - s.top() - 1);
28
29        if (ans < area_with_top)
30            ans = area_with_top;
31    }
32
33    return ans;
34 }
35
36 int main() {
37     vector<int> hist = { 6, 2, 5, 4, 5, 1, 6 };
38     cout << maxHistogramRect(hist) << endl;
39 }

```

## 13.5 Maior Sequencia Subsequente

```

1 // Maior sequencia subsequente
2 // {6, 2, 5, 1, 7, 4, 8, 3} => {2, 5, 7, 8}
3
4 int maiorCrescente(vector<int> v) {
5     vector<int> lenght(v.size());
6     for(int k=0; k<v.size(); k++) {
7         lenght[k] = ;
8         for(int i=0; i<k; i++) {
9             if(v[i] < v[k]) {
10                 lenght[i] = max(lenght[k], lenght[i]+1)
11             }
12         }
13     }
14     return lenght.back();
15 }

```

## 13.6 Maior Subsequencia Comum

```

1 int s1[MAXN], s2[MAXN], tab[MAXN][MAXN];
2
3 // Description: Retorna o tamanho da maior subsequencia comum entre s1 e s2
4 // Complexidade: O(n*m)
5 int lcs(int a, int b){
6
7     if(tab[a][b]>=0) return tab[a][b];
8     if(a==0 or b==0) return tab[a][b]=0;
9     if(s1[a]==s2[b]) return 1 + lcs(a-1, b-1);
10    return tab[a][b] = max(lcs(a-1, b), lcs(a, b-1));
11 }
12
13 void solve() {
14
15     s1 = {1, 3, 2, 5, 4, 2, 3, 4, 5};
16     s2 = {1, 2, 3, 4, 5};
17     int n = s1.size(), m = s2.size();
18     memset(tab, -1, sizeof(tab));

```

```

19     cout << lcs(n, m) << endl; // 5
20 }

```

## 13.7 Maior Subsequência Crescente

```

1 // Retorna o tamanho da maior subsequencia crescente de v
2 // Complexidade: O(n log(n))
3 int maiorSubCrescSize(vector<int> &v) {
4
5     vector<int> pilha;
6     for (int i = 0; i < v.size(); i++) {
7         auto it = lower_bound(pilha.begin(), pilha.end(), v[i]);
8         if (it == pilha.end())
9             pilha.push_back(v[i]);
10        else
11            *it = v[i];
12    }
13
14    return pilha.size();
15 }
16
17 // Retorna a maior subsequencia crescente de v
18 // Complexidade: O(n log(n))
19 vector<int> maiorSubCresc(vector<int> &v) {
20
21     vector<int> pilha, resp;
22     int pos[MAXN], pai[MAXN];
23     for (int i = 0; i < v.size(); i++) {
24         auto it = lower_bound(pilha.begin(), pilha.end(), v[i]);
25         int p = it - pilha.begin();
26         if (it == pilha.end())
27             pilha.push_back(v[i]);
28         else
29             *it = v[i];
30         pos[p] = i;
31         if (p == 0)
32             pai[i] = -1; // seu pai éser -1
33         else
34             pai[i] = pos[p - 1];
35     }
36
37     int p = pos[pilha.size() - 1];
38     while (p >= 0) {
39         resp.push_back(v[p]);
40         p = pai[p];
41     }
42     reverse(resp.begin(), resp.end());
43
44     return resp;
45 }
46
47 void solve() {
48     vector<int> v = {1, 3, 2, 5, 4, 2, 3, 4, 5};
49     cout << maiorSubCrescSize(v) << endl // 5
50     /*****
51     vector<int> ans = maiorSubCresc(v); // {1,2,3,4,5}
52 }

```

## 13.8 Maior Triangulo Em Histograma

```

1 // Calcula o maior triangulo em um histograma
2 // Complexidade: O(n)
3 int maiorTrianguloEmHistograma(const vector<int>& histograma) {
4
5     int n = histograma.size();
6     vector<int> esquerda(n), direita(n);
7
8     esquerda[0] = 1;
9     f(1,1,n) {
10         esquerda[i] = min(histograma[i], esquerda[i - 1] + 1);
11     }
12
13     direita[n - 1] = 1;
14     rf(i,n-1,0) {
15         direita[i] = min(histograma[i], direita[i + 1] + 1);
16     }
17
18     int ans = 0;
19     f(i,0,n) {
20         ans = max(ans, min(esquerda[i], direita[i]));
21     }
22
23     return ans;
24 }
25 }

```

## 13.9 Remove Repetitive

```

1 // Remove repetitive elements from a vector
2 // Complexity: O(n)
3 vector<int> removeRepetitive(const vector<int>& vec) {
4
5     unordered_set<int> s;
6     s.reserve(vec.size());
7
8     vector<int> ans;
9
10    for (int num : vec) {
11        if (s.insert(num).second)
12            v.push_back(num);
13    }
14
15    return ans;
16 }
17
18 void solve() {
19     vector<int> v = {1, 3, 2, 5, 4, 2, 3, 4, 5};
20     vector<int> ans = removeRepetitive(v); // {1, 3, 2, 5, 4}
21 }

```

## 13.10 Soma Maxima Sequencial

```

1 // Description: Soma maxima sequencial de um vetor
2 // Complexidade: O(n)
3 int max_sum(vector<int> s) {

```

```

4
5     int ans = 0, maior = 0;
6
7     for(int i = 0; i < s.size(); i++) {
8         maior = max(0, maior+s[i]);
9         ans = max(resp, maior);
10    }
11
12    return ans;
13 }
14
15 void solve() {
16     vector<int> v = {1, -3, 5, -1, 2, -1};
17     cout << max_sum(v) << endl; // 6 = {5, -1, 2}
18 }

```

## 13.11 Subset Sum

```

1 // Description: Verifica se algum subset dentro do array soma igual a sum
2 // Complexidade Temporal: O(sum * n)
3 // Complexidade Espacial: O(sum * n)
4
5 bool isSubsetSum(vi set, int n, int sum) {
6     bool subset[n + 1][sum + 1];
7
8     for (int i = 0; i <= n; i++)
9         subset[i][0] = true;
10
11    for (int i = 1; i <= sum; i++)
12        subset[0][i] = false;
13
14    for (int i = 1; i <= n; i++) {
15        for (int j = 1; j <= sum; j++) {
16            if (j < set[i - 1])
17                subset[i][j] = subset[i - 1][j];
18            if (j >= set[i - 1])
19                subset[i][j]
20                    = subset[i - 1][j]
21                      || subset[i - 1][j - set[i - 1]];
22        }
23    }
24
25    return subset[n][sum];
26 }

```

## 13.12 Troco

```

1 // Description: Retorna o menor únmero de moedas para formar um valor n
2 // Complexidade: O(n*m)
3 vector<int> troco(vector<int> coins, int n) {
4     int first[n];
5     value[0] = 0;
6     for(int x=1; x<=n; x++) {
7         value[x] = INF;
8         for(auto c : coins) {
9             if(x-c >= 0 and value[x-c] + 1 < value[x]) {

```

```

10             value[x] = value[x-c]+1;
11             first[x] = c;
12         }
13     }
14 }
15
16 vector<int> ans;
17 while(n>0) {
18     ans.push_back(first[n]);
19     n -= first[n];
20 }
21 return ans;
22 }
23
24 void solve() {
25     vector<int> coins = {1, 3, 4};
26     vector<int> ans = troco(coins, 6); // {3,3}
27 }

```

## 14 Outros

### 14.1 Dp

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3
4 const int MAX_gm = 30; // up to 20 garments at most and 20 models/garment
5 const int MAX_M = 210; // maximum budget is 200
6
7 int M, C, price[MAX_gm][MAX_gm]; // price[g (<= 20)][k (<= 20)]
8 int memo[MAX_gm][MAX_M]; // TOP-DOWN: dp table [g (< 20)][money
9                             (<= 200)]
10
11 int dp(int g, int money) {
12     if (money < 0) return -1e9;
13     if (g == C) return M - money;
14     if (memo[g][money] != -1)
15         return memo[g][money]; // avaliar linha g com dinheiro money (cada
16                                 caso pensavel)
17     int ans = -1;
18     for (int k = 1; k <= price[g][0]; ++k)
19         ans = max(ans, dp(g + 1, money - price[g][k]));
20     return memo[g][money] = ans;
21 }
22
23 int main() {
24     int TC;
25     scanf("%d", &TC);
26     while (TC--)
27     {
28         scanf("%d %d", &M, &C);
29         for (int g = 0; g < C; ++g)
30         {
31             scanf("%d", &price[g][0]); // store k in price[g][0]
32             for (int k = 1; k <= price[g][0]; ++k)

```

```

32         scanf("%d", &price[g][k]);
33     }
34     memset(memo, -1, sizeof memo); // TOP-DOWN: init memo
35     if (dp(0, M) < 0)
36         printf("no solution\n"); // start the top-down DP
37     else
38         printf("%d\n", dp(0, M));
39 }
40 return 0;
41 }

```

## 14.2 Binario

```

1 // Descricao: conversao de decimal para binario
2 // Complexidade: O(logn) onde n eh o numero decimal
3 string decimal_to_binary(int dec) {
4     string binary = "";
5     while (dec > 0) {
6         int bit = dec % 2;
7         binary = to_string(bit) + binary;
8         dec /= 2;
9     }
10    return binary;
11 }
12
13 // Descricao: conversao de binario para decimal
14 // Complexidade: O(logn) onde n eh o numero binario
15 int binary_to_decimal(string binary) {
16     int dec = 0;
17     int power = 0;
18     for (int i = binary.length() - 1; i >= 0; i--) {
19         int bit = binary[i] - '0';
20         dec += bit * pow(2, power);
21         power++;
22     }
23     return dec;
24 }

```

## 14.3 Binary Search

```

1 // Description: Implementao do algoritmo de busca binaria.
2 // Complexidade: O(logn) onde n eh o tamanho do vetor
3 int BinarySearch(<vector>int arr, int x){
4     int k = 0;
5     int n = arr.size();
6
7     for (int b = n/2; b >= 1; b /= 2) {
8         while (k+b < n && arr[k+b] <= x) k += b;
9     }
10    if (arr[k] == x) {
11        return k;
12    }
13 }

```

## 14.4 Fibonacci

```

1 vector<int> memo(MAX, -1);
2
3 // Descricao: Funcao que retorna o n-esimo termo da sequencia de Fibonacci
4 // utilizando programacao dinamica.
5 // Complexidade: O(n) onde n eh o termo desejado
6 int fibPD(int n) {
7     if (n <= 1) return n;
8     if (memo[n] != -1) return memo[n];
9     return memo[n] = fibPD(n - 1) + fibPD(n - 2);
10 }

```

## 14.5 Horario

```

1 // Descricao: Funcoes para converter entre horas e segundos.
2 // Complexidade: O(1)
3 int cts(int h, int m, int s) {
4     int total = (h * 3600) + (m * 60) + s;
5     return total;
6 }
7
8 tuple<int, int, int> cth(int total_seconds) {
9     int h = total_seconds / 3600;
10    int m = (total_seconds % 3600) / 60;
11    int s = total_seconds % 60;
12    return make_tuple(h, m, s);
13 }

```

## 14.6 Intervalos

```

1 // Conta quantos intervalos nao tem overlap ([a,b] e [b,c] nao geram)
2
3 bool cmp(const pair<int,int>& p1, const pair<int,int>& p2) {
4     if(p1.second != p2.second) return p1.second < p2.second;
5     return p1.first < p2.first;
6 }
7
8 int countNonOverlappingIntervals(vector<pair<int,int>> intervals) {
9     sort(all(intervals), cmp);
10    int firstTermino = intervals[0].second;
11    int ans = 1;
12    f(i,1,intervals.size()) {
13        if(intervals[i].first >= firstTermino) {
14            ans++;
15            firstTermino = intervals[i].second;
16        }
17    }
18
19    return ans;
20 }

```