MAA110 - Álgebra Linear

Pedro Schneider

1° Semestre de 2025 - 3° Ciclo

Sumário

1 Cronograma e Notas **2**
1.1 Critério de Aproveitamento 2

2 Sistemas Lineares **2**
2.1 Introdução 2
2.1.1 O que é um sistema linear? 2
2.1.2 Como resolver um sistema linear? 2
2.2 Resolução do sistema linear utilizando a regra de Cramer 3
2.3 Resolução do sistema linear utilizando escalonamento 3

3 Segmentos orientados e vetores **5**
3.1 Segmentos orientados 5
3.1.1 O que são vetores e segmentos orientados? 5
3.1.2 Notação 6
3.1.3 Operações com vetores 6

1 Cronograma e Notas

1.1 Critério de Aproveitamento

A média final MF é calculada pela fórmula:

$$\boldsymbol{MF} = 0.3 \times \frac{(\boldsymbol{AT1} + \boldsymbol{AT2})}{2} + 0.7 \times \boldsymbol{PF}$$

AT1, AT2 e AT3 - Atividades Avaliativas (avaliação continuada) com as datas pré-estabelecidas no cronograma.
OBS.: SERÃO REALIZADAS TRÊS ATIVIDADES, PORÉM SÓ SERÃO UTILIZADAS AS DUAS MAIORES NOTAS (A MENOR DELAS SERÁ DESCARTADA).

PF - Prova final contemplando todo conteúdo do semestre.
A nota da avaliação PF poderá ser substituída pela nota da avaliação PS, caso o aluno não alcance média final maior ou igual a 5,0.

2 Sistemas Lineares

2.1 Introdução

2.1.1 O que é um sistema linear?

É um conjunto de equações lineares, ou seja, um conjunto de equações do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$.

Existem três tipos de sistemas lineares:

1. **Sistema Possível e Determinado (SPD)**: quando o sistema possui uma única solução.

2. **Sistema Possível e Indeterminado (SPI)**: quando o sistema possui infinitas soluções.

3. **Sistema Impossível (SI)**: quando o sistema não possui solução.

2.1.2 Como resolver um sistema linear?

Existem diversos métodos para resolver sistemas lineares, como por exemplo:

1. **Método de Substituição**: consiste em isolar uma variável em uma equação e substituir nas demais.

2. **Método de Igualdade**: consiste em igualar duas equações e resolver o sistema resultante.

3. **Método de Adição**: consiste em somar ou subtrair duas equações para eliminar uma variável.

4. **Método de Matriz Inversa**: consiste em utilizar a matriz inversa para encontrar a solução do sistema.

Além desses métodos, é possível matrizes para resolver sistemas lineares utilizando, por exemplo, a **Regra de Cramer** ou **escalonamento** (ou *Método de Gauss*).

2.2 Resolução do sistema linear utilizando a regra de Cramer

Para resolver o sistema linear utilizando a regra de Cramer, siga os seguintes passos:

1. Escreva o sistema linear na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcule o determinante da matriz dos coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Calcule o determinante da matriz obtida substituindo a coluna dos coeficientes de x pela coluna dos termos independentes:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Calcule o determinante da matriz obtida substituindo a coluna dos coeficientes de y pela coluna dos termos independentes:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5. Calcule o determinante da matriz obtida substituindo a coluna dos coeficientes de z pela coluna dos termos independentes:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

6. Calcule as soluções do sistema utilizando as fórmulas de Cramer:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Nese caso, a solução será:

$$x = 1, \quad y = 3, \quad z = 2$$

2.3 Resolução do sistema linear utilizando escalonamento

Para resolver o sistema linear utilizando escalonamento, siga os seguintes passos:

1. Escreva o sistema linear na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Realize as operações elementares nas linhas da matriz aumentada até obter uma matriz triangular superior.

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right.$$

a. Diminuir a segunda linha pela primeira e a terceira linha por 2 vezes a segunda.

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \ \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow 2\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & -3 & -\ 9 \end{array}$$

b. Dividir a segunda linha pela sua metade negativa.

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & -3 & -\ 9 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow -\frac{\mathrm{L}_2}{2} \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \end{array}$$

c. Somar a terceira linha com a segunda.

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}$$

3. Reescreva o sistema e encontre as variáveis.
Nesse caso, a solução será:

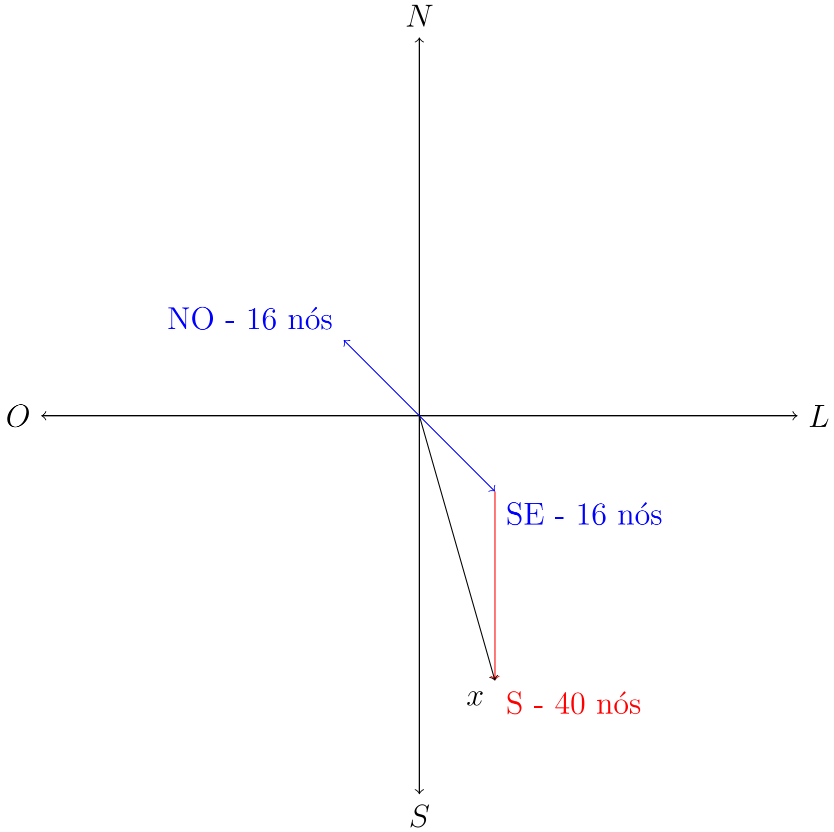
$$x = 1, \quad y = 3, \quad z = 2$$

3 Segmentos orientados e vetores

3.1 Segmentos orientados

3.1.1 O que são vetores e segmentos orientados?

Um segmento orientado é um segmento de reta que possui um sentido, ou seja, uma direção. Ele é representado por uma reta que possui um ponto de origem e um ponto de destino. Considere o segmento orientado AB, onde A é o ponto de origem e B é o ponto de destino. Podemos representar esse segmento como $\overrightarrow{AB}$.
"Você é o capitão de um barco e quer viajar para o sul a 40 nós. Se a corrente marítma está se movendo para nordeste a 16 nós, em que direção e magnitude você opera o motor?"



;

São características de um segmento orientado:

1. **Módulo** (*Tamanho*): é a medida do segmento, ou seja, a distância entre os pontos A e B.

2. **Direção**: é a orientação do segmento, ou seja, o ângulo formado entre o segmento e o eixo x.

3. **Sentido**: é a direção do segmento, ou seja, a orientação do segmento.

Vetores são segmentos orientados que possuem as mesmas características, ou seja, módulo, direção e sentido.

Em outras palavras, vetores são o **conjunto de segmentos equipolentes**.

3.1.2 Notação

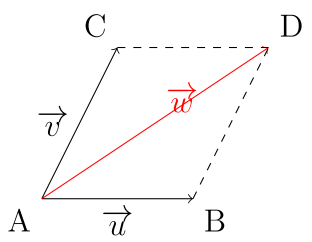
Os vetores são representados por letras minúsculas em negrito, como **v**, e são indicados por uma seta sobre a letra, como $\vec{v}$.

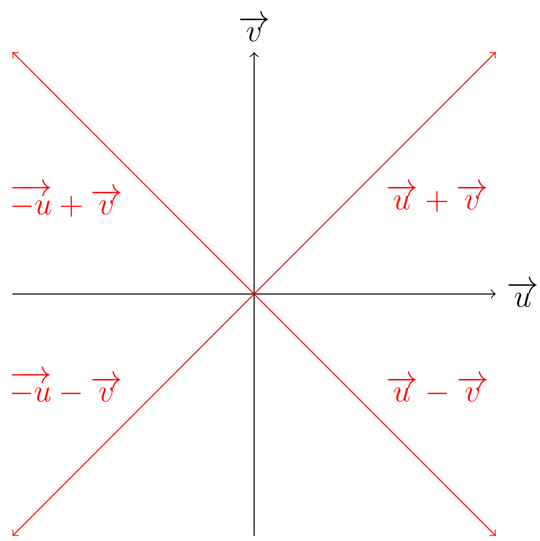
$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} \quad \text{ou na notação de Grassmann} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (B - A) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

3.1.3 Operações com vetores

1. **Soma de vetores**: a soma de vetores é realizada pela regra do paralelogramo, ou seja, a soma de dois vetores é um vetor que possui a mesma direção e sentido da diagonal do paralelogramo formado pelos vetores.
   Ex.: Dado dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$ pelos seus representantes, considere um ponto qualquer A e os pontos $B = A + \vec{u}$ e $C = A + \vec{v}$.

   Por definição, o vetor $\vec{w} = \overrightarrow{AD} = (D - A) \rightarrow \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$





2. **Subtração de vetores**: a subtração de vetores é realizada pela soma do vetor com o vetor oposto, ou seja, a subtração de dois vetores é a soma do vetor com o vetor oposto.

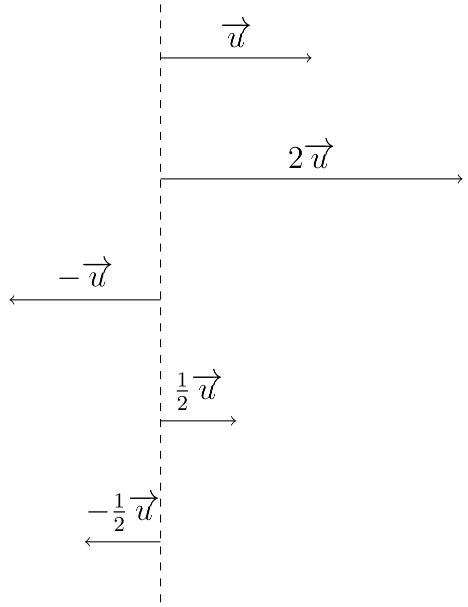
3. **Multiplicação de vetor por um escalar**: a multiplicação de um vetor por um escalar é realizada multiplicando cada componente do vetor pelo escalar.

   Dado $a \in \mathbb{R}$ e um vetor qualquer $\vec{v}$, define-se $a\vec{v}$:

   a) se $a = 0$ ou se $\vec{v} = \vec{0}$, então $a\vec{v} = \vec{0}$ (Vetor nulo).

   b) se $a \neq 0$ ou se $\vec{v} \neq \vec{0}$, então:
      Módulo: $|a\vec{v}| = |a||\vec{v}|$
      Direção: Mesma direção de $\vec{v}$ $(a\vec{v} // \vec{v})$
      Sentido: Se $a > 0$, mesmo sentido de $\vec{v}$;
      se $a < 0$, sentido oposto de $\vec{v}$.

Ex.:



4. **Multiplicação de vetor por outro vetor**: $\forall \overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são válidas as seguintes propriedades:

   a) $\alpha\beta\overrightarrow{v} = (\alpha\beta)\overrightarrow{v}$ **Associativa**

   b) $\alpha(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}$ **Distributiva à esquerda**

   c) $(\alpha + \beta)\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}$ **Distributiva à direita**

   d) $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ **Elemento neutro da operação**

   Versor de um vetor
   Mesma direção e mesmo sentido de $\overrightarrow{v}$ módulo unitário.

$$\hat{v} = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|} = \frac{1}{|\overrightarrow{v}|}\overrightarrow{v}$$