Sistemas Lineares

1. Sistema Linear

Um conjunto de $m(m \geq 1)$ equações lineares a n incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ formam o que denominamos **sistema linear.**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Se o conjunto ordenado de números $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ satisfizer todas as equações do sistema, será denominado solução do sistema linear.

2. Classificação

Os sistemas lineares são classificados quanto ao número de soluções, da seguinte forma:

$$\text{SISTEMA LINEAR} \begin{cases} \begin{matrix} \text{POSSÍVEL OU COMPATÍVEL} \\ \text{(quando admite solução)} \end{matrix} \begin{cases} \begin{matrix} \text{DETERMINADO} \\ \text{(admite uma única solução)} \\ \text{INDETERMINADO} \\ \text{(admite infinitas soluções)} \end{matrix} \end{cases} \\ \\ \begin{matrix} \text{IMPOSSÍVEL OU INCOMPATÍVEL} \\ \text{(quando não admite solução)} \end{matrix} \end{cases}$$

3. Sistemas lineares equivalentes

Dois sistemas de equações lineares, S_1 e S_2, são ditos equivalentes se e somente se admitirem a mesma solução, isto é, toda solução de S_1 é solução de S_2 e vice-versa.

4. Expressão matricial de um sistema linear

Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Podemos associar ao sistema linear dado as seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

5. Regra de Cramer

Seja o sistema linear de n equações a n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Este sistema será **possível** e **determinado** se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas for diferente de zero, isto é:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Neste caso, o sistema S tem uma única solução dada por:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

Em que:
$D_1, D_2, \dots, D_n$ são os determinantes que se obtém da matriz dos coeficientes das incógnitas, substituindo-se a coluna dos coeficientes da incógnita procurada pelos termos independentes $b_1, b_2, \dots, b_n$.

6. Discussão de um sistema linear de n equações a n incógnitas

Discutir um sistema significa verificar se o sistema é **possível**, **impossível** ou **indeterminado**.
Utilizando a regra de Cramer, temos:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

Possível e Determinado (admite uma única solução) $\Rightarrow D \neq 0$

Possível e Indeterminado (admite infinitas soluções) $\Rightarrow D = 0$ e $D_1 = D_2 = \cdots = D_n = 0$

Impossível (não admite solução) $\Rightarrow D = 0$ e pelo menos um D_i diferente de zero ($i \epsilon \{1,2,\dots,n\}$)

7. Discussão de um sistema de equações lineares homogêneo

Um sistema de equações é dito homogêneo quando os **termos independentes** são todos **nulos**.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Todo sistema linear homogêneo é sempre possível, pois admite a solução $0,0,\ldots,0)$, chamada solução trivial. As soluções não triviais são chamadas **soluções próprias**.

Portanto, para a discussão de um sistema linear homogêneo, é suficiente o estudo do determinante dos coeficientes das incógnitas:

Determinado $\Rightarrow D \neq 0$
Indeterminado $\Rightarrow D = 0$

8. Sistema escalonado

Denomina-se sistema escalonado o sistema que tem uma **matriz completa** da forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Observe que os coeficientes a_{ij}, com $i > j$, são **nulos**.

9. Resolução de sistemas lineares (método do escalonamento)

Para determinar o conjunto verdade de um sistema de equações lineares, podemos utilizar as seguintes transformações elementares:

- trocar de posição duas equações quaisquer do sistema.
- multiplicar ou dividir uma equação do sistema por um número diferente de 0
- efetuar uma combinação linear entre as equações para obter outra equivalente.

Com a matriz completa, podemos escalonar um sistema linear por meio das transformações elementares.

(IFPE) Com a proximidade do final do ano, uma papelaria quis antecipar as promoções de material didático para o ano letivo de 2012. Foram colocados em promoção caneta, caderno e lápis. As três ofertas eram:

1ª) 5 canetas, 4 cadernos e 10 lápis por R$ 62,00;

2ª) 3 canetas, 5 cadernos e 3 lápis por R$ 66,00;

3ª) 2 canetas, 3 cadernos e 7 lápis por R$ 44,00.

Para comparar os preços unitários dessa papelaria com outras do comércio, o Sr. Ricardo calculou os preços de uma caneta, um caderno e um lápis. A soma desses preços é x → preço da caneta

y → preço do caderno

z → preço do lápis

$$\begin{cases} 5x + 4y + 10z = 62 \\ 3x + 5y + 3z = 66 \\ 2x + 3y + 7z = 44 \end{cases}$$

Agora, utilizando a regra de Cramer, calcularemos D, D_x, D_y e D_z. Montando os determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 10 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} \quad D_x = \begin{vmatrix} 62 & 4 & 10 \\ 66 & 5 & 3 \\ 44 & 3 & 7 \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} 5 & 62 & 10 \\ 3 & 66 & 3 \\ 2 & 44 & 7 \end{vmatrix} \quad D_z = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 62 \\ 3 & 5 & 66 \\ 2 & 3 & 44 \end{vmatrix}$$

$$D = 5 \cdot 5 \cdot 7 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 10 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 10 - 3 \cdot 3 \cdot 5 - 7 \cdot 3 \cdot 4 = 60$$

$$D_x = 62 \cdot 5 \cdot 7 + 4 \cdot 3 \cdot 44 + 10 \cdot 66 \cdot 3 - 44 \cdot 5 \cdot 10 - 3 \cdot 3 \cdot 62 - 7 \cdot 66 \cdot 4 = 72$$

$$D_y = 5 \cdot 66 \cdot 7 + 62 \cdot 3 \cdot 2 + 10 \cdot 3 \cdot 44 - 2 \cdot 66 \cdot 10 - 44 \cdot 3 \cdot 5 - 7 \cdot 3 \cdot 62 = 720$$

$$D_z = 5 \cdot 5 \cdot 44 + 4 \cdot 66 \cdot 2 + 62 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 62 - 3 \cdot 66 \cdot 5 - 44 \cdot 3 \cdot 4 = 48$$

Dessa forma, obtém-se:

$x = D_x : D = 72 : 60 = 1{,}20$

$y = D_y : D = 720 : 60 = 12{,}00$

$z = D_z : D = 48 : 60 = 0{,}80$

Portando, a soma do preço P de uma caneta mais um caderno mais um lápis é igual a:

$$P = 1{,}20 + 12{,}00 + 0{,}80 = 14{,}00$$

https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-sistemas-lineares.htm