1) Calcule o cosseno do ângulo formado pelos vetores $\vec{u} = (4, -1, -3)$ e $\vec{v} = (0, 2, -1)$.

Respostas: $\frac{\sqrt{130}}{130}$.

• Solução: $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$, sendo θ o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

• $\vec{u} \cdot \vec{v} = (4 \cdot 0) + (-1) \cdot (2) + (-3) \cdot (-1) = 0 - 2 + 3 = 1$

• $|\vec{u}| = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26}$

• $|\vec{v}| = \sqrt{0+4+1} = \sqrt{5}$

Logo: $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{130}} \cdot \dfrac{\sqrt{130}}{\sqrt{130}}$

$\therefore \boxed{\cos\theta = \dfrac{\sqrt{130}}{130}}$

---

2) Sabendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 2$ e que o ângulo formado entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{3}$, calcular o cosseno do ângulo θ entre os vetores $(\vec{u} + \vec{v})$ e $(\vec{u} - \vec{v})$.

Resposta: $\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{133}}$

Solução: Para $|\vec{u}| = 3 \Rightarrow \vec{u} = \sqrt{9}$ e para $|\vec{v}| = 2 \Rightarrow \vec{v} = \sqrt{4}$. Se θ é o ângulo formado entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e vale $\frac{\pi}{3}$, isto indica que o ângulo entre $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$ é positivo e localiza-se no 1º quadrante. Assim:

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{(\vec{u}+v) \cdot (\vec{u}-\vec{v})}{|\vec{u}+v| \cdot |\vec{u}-\vec{v}|} = \dfrac{(\sqrt{9}+\sqrt{4}) \cdot (\sqrt{9}-\sqrt{4})}{\underbrace{\sqrt{9+4+6} \cdot \sqrt{9+4-6}}_{(*)}} = \dfrac{5}{\sqrt{133}}$

Obs: LEMBRAR QUE:

$(*)\ |\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|+|\vec{v}|-2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\frac{\pi}{3})}$ e $|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{|\vec{u}|+|\vec{v}|+2|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\frac{\pi}{3})}$

3) Dados os vetores $\vec{u} = (1, -2, 0)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 1)$, calcule o cosseno do ângulo θ entre os vetores $(2\vec{u} + 3\vec{v})$ e $(3\vec{u} - 2\vec{v})$.

Resposta: $\cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Solução: Tomemos $\vec{w_1} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$ e $\vec{w_2} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$ logo temos que:

$\vec{w_1} = 2(1,-2,0) + 3(-1,0,1) \rightarrow \boxed{\vec{w_1} = (-1,-4,3)}$ e $\vec{w_2} = 3(1,-2,0) - 2(-1,0,1) \rightarrow \boxed{\vec{w_2} = (5,-6,-2)}$

Assim: $\cos\theta = \dfrac{\vec{w_1} \cdot \vec{w_2}}{|\vec{w_1}| \cdot |\vec{w_2}|} = \dfrac{[(-1)\cdot(5) + (-4)\cdot(-6) + (3)\cdot(-2)]}{\sqrt{1+16+9} \cdot \sqrt{25+36+4}} = \dfrac{-5+24-6}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{65}} = \dfrac{13}{\sqrt{2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 5}} = \dfrac{\cancel{13}}{\cancel{13}\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

---

4) Dados os vetores $\vec{u} = (3, 0, -2)$, $\vec{v} = (-1, 2, 3)$ e $\vec{w} = (1, -1, 1)$, determine o vetor $\vec{r}$, sabendo que $\vec{r} \cdot \vec{u} = 3$; $\vec{r} \cdot \vec{v} = 2$ e $\vec{r} \cdot \vec{w} = 1$.

Resposta: $\vec{r} = \left(\frac{23}{17}, \frac{15}{17}, \frac{9}{17}\right)$

Solução: Temos que: $\begin{cases} \vec{r} \cdot \vec{u} = 3 \\ \vec{r} \cdot \vec{v} = 2 \\ \vec{r} \cdot \vec{w} = 1 \end{cases}$ Tomemos $\vec{r} = (x, y, z)$ e escrevemos $\begin{cases} (x,y,z)\cdot(3,0,-2) = 3 \\ (x,y,z)\cdot(-1,2,3) = 2 \\ (x,y,z)\cdot(1,-1,1) = 1 \end{cases}$

$\sim \begin{cases} 3x - 2z = 3 \\ -x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + 2y + 3z = 2 \\ 3x - 2z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y + 4z = 3 \\ 3y - 5z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y + 4z = 3 \\ -17z = -9 \end{cases} \rightarrow \boxed{z = \frac{9}{17}}$ e $y = 3 - 4\left(\frac{9}{17}\right) \rightarrow \boxed{y = \frac{15}{17}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{15}{17} - \frac{9}{17} + \frac{17}{17} \therefore \boxed{x = \frac{23}{17}}$

RESPOSTA: $\vec{r} = \left(\frac{23}{17}, \frac{15}{17}, \frac{9}{17}\right)$

5) Dados os vetores $\vec{u} = (3,1,-3)$, $\vec{v} = (5,1,-1)$ e $\vec{w} = (0,5,4)$, determine o vetor $\vec{r}$, sabendo que $\vec{r}\cdot\vec{u} = 1$; $\vec{r}\cdot\vec{v} = 5$ e $\vec{r}\cdot\vec{w} = 9$.

Resposta: $\vec{r} = (1,1,1)$

solução: Vamos tomar $\vec{r} = (x,y,z)$ e escrevemos: $\begin{cases} \vec{r}\cdot\vec{u} = 1 \\ \vec{r}\cdot\vec{v} = 5 \\ \vec{r}\cdot\vec{w} = 9 \end{cases}$. Assim propomos:

$$\begin{cases} (x,y,z)\cdot(3,1,-3) = 1 \\ (x,y,z)\cdot(5,1,-1) = 5 \\ (x,y,z)\cdot(0,5,4) = 9 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} 3x + y - 3z = 1 \\ 5x + y - z = 5 \\ 5y + 4z = 9 \end{cases} \sim \begin{cases} y + 3x - 3z = 1 \\ y + 5x - z = 5 \\ 5y + 0x + 4z = 9 \end{cases} \sim \begin{cases} y + 3x - 3z = 1 \\ +2x + 2z = 4 \\ -15x + 19z = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} y + 3x - 3z = 1 \\ x + z = 2 \\ -15x + 19z = 4 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} y + 3x - 3z = 1 \\ x + z = 2 \\ 34z = 34 \rightarrow z = 1 \end{cases}$$

; $x + 1 = 2 \rightarrow \boxed{x = 1}$ e $y + 3 - 3 = 1 \therefore \boxed{y = 1}$

R: $\vec{r} = (1,1,1)$

6) Dados os vetores $\vec{u} = (1,0,-2)$ e $\vec{v} = (2,1,1)$, determine o vetor $\vec{w}$ unitário que seja ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Resposta: $\vec{w} = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\right)$

Solução: Temos $\vec{w} = (a,b,c)$ logo $|\vec{w}| = \sqrt{1} \Rightarrow a^2+b^2+c^2 = 1$.

sendo $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ propomos: $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ \vec{w}\cdot\vec{u}=0 \\ \vec{w}\cdot\vec{v}=0 \end{cases}$ teremos que:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ a-2c=0 \\ 2a+b+c=0 \end{cases} \sim \begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ a-2c=0 \rightarrow a=2c \ (i) \\ b+5c=0 \rightarrow b=-5c \ (ii) \end{cases}$$

substituindo (i) e (ii) na equação $a^2+b^2+c^2=1 \rightarrow (2c)^2+(-5c)^2+c^2=1 \rightarrow$

$4c^2+25c^2+c^2=1 \rightarrow 30c^2=1 \rightarrow c = \pm\sqrt{\frac{1}{30}}$ ou $c = \pm\frac{1}{\sqrt{30}}$ voltando em

(i) e (ii) obtemos: $a = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{30}}\right)$ e $b = \pm\left(-\frac{5}{\sqrt{30}}\right)$

Logo temos que: $\vec{w} = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\right)$

7) Determine um vetor ortogonal aos vetores $\vec{u} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, que tenha módulo 2 e abscissa negativa.

Resposta: $\vec{x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(-1,1,1)$

Solução: Seja $\vec{x} = (-a, b, c)$ o vetor ortogonal aos vetores $\vec{u} = (0, 2, -2)$ e $\vec{v} = (2, 1, 1)$ e $|\vec{x}| = 2$.

Temos que:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 \\ \vec{x} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 4 \\ 2b - 2c = 0 \\ -2a + b + c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 4 \\ b - c = 0 \\ -2a + b + c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 4 \\ b - c = 0 \\ -2a + 2b = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 4 \\ b - c = 0 \rightarrow c = b \quad (i) \\ -a + b = 0 \rightarrow a = b \quad (ii) \end{cases}$$

, substituindo em $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ temos:

$$b^2 + b^2 + b^2 = 4 \rightarrow 3b^2 = 4 \rightarrow b = \sqrt{\frac{4}{3}} \rightarrow \boxed{b = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}}$$ logo: $\boxed{a = -\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ * e

$$\boxed{c = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

*note que pede-se que a abscisa seja negativa, logo: $\vec{x} = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ou

$$\vec{x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(-1, 1, 1)$$