MAG120 - Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Pedro Schneider

2° Semestre de 2024

Sumário

1 Cronograma e Notas **2**
1.1 Critério de Aproveitamento . . . 2
1.2 Cronograma . . . 2

2 Semana 1 - Matrizes **4**
2.1 Fundamentos e tipos . . . 4
2.1.1 O que são matrizes? . . . 4
2.1.2 Como indicar matrizes? . . . 4
2.1.3 Matriz Quadrada . . . 4
2.1.4 Matriz Retangular . . . 4
2.1.5 Matriz Nula . . . 4
2.1.6 Matriz Identidade . . . 5
2.1.7 Matriz Diagonal . . . 5
2.1.8 Matriz Transposta . . . 5
2.1.9 Matriz Simétricas . . . 5
2.1.10 Matriz Antissimétricas . . . 5
2.1.11 Matriz Inversa . . . 6
2.2 Operações com matrizes . . . 6
2.2.1 Adição . . . 6
2.2.2 Multiplicação por um número real . . . 6
2.2.3 Multiplicação entre duas raízes . . . 7
2.2.4 Operações com matriz transposta . . . 7
2.2.5 Operações com matriz inversa . . . 7

1 Cronograma e Notas

1.1 Critério de Aproveitamento

A média final MF é calculada pela fórmula:

$$\boldsymbol{MF} = 0.3 \times \frac{(\boldsymbol{AT1} + \boldsymbol{AT2})}{2} + 0.7 \times \boldsymbol{PF}$$

AT1, AT2 e AT3 - Atividades Avaliativas (avaliação continuada) com as datas pré-estabelecidas no cronograma.
OBS.: SERÃO REALIZADAS TRÊS ATIVIDADES, PORÉM SÓ SERÃO UTILIZADAS AS DUAS MAIORES NOTAS (A MENOR DELAS SERÁ DESCARTADA).

PF - Prova final contemplando todo conteúdo do semestre.
A nota da avaliação PF poderá ser substituída pela nota da avaliação PS, caso o aluno não alcance média final maior ou igual a 5,0.

1.2 Cronograma

Tabela 1: Cronograma semestral

Semanas	**Datas**	**Conteúdo**
Sem. 1	08/08 a 10/08	MATRIZES. OPERAÇÕES. MATRIZ TRANSPOSTA E MATRIZ INVERSA. FÓRMULA DE BINET
Sem. 2	12/08 a 16/08	SISTEMAS LINEARES
Sem. 3	19/08 a 24/08	SISTEMAS LINEARES
Sem. 4	26/08 a 31/08 **ATP 1**	SEGMENTOS ORIENTADOS. EQUIPOLÊNCIA VETORES. OPERAÇÕES COM VETORES.
Sem. 5	02/09 a 07/09 ***Feriado 07/09***	DEPENDÊNCIA LINEAR E BASES. COORDENADAS DE UM VETOR
Sem. 6	09/09 a 14/09	MUDANÇA DE BASE. EQUAÇÕES DE MUDANÇA
Sem. 7	16/09 a 21/09	PRODUTOS ESCALAR
Sem. 8	23/09 a 28/09	PRODUTOS ESCALAR (continuação). VETOR PROJEÇÃO ORTOGONAL e COSSENOS DIRETORES
Sem. 9	30/09 a 04/10 **ATP 2**	PRODUTO VETORIAL E APLICAÇÕES.
Sem. 10	07/10 a 12/10 ***Feriado 12/10***	PRODUTO MISTO.
Sem. 11	14/10 a 19/10	SISTEMAS DE COORDENADAS. EQUAÇÕES DA RETA. Posições relativas entre duas retas.
Sem. 12	21/10 a 26/10 *22 e 23 - INOVAÇÃO*	EQUAÇÕES DO PLANO. VETOR NORMAL A UM PLANO.
Sem. 13	28/10 a 02/11 ***Feriado 02/11***	EQUAÇÕES DO PLANO. VETOR NORMAL A UM PLANO.
Sem. 14	04/11 a 09/11 **ATP 3**	POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS E PLANOS.
Sem. 15	11/11 a 16/11	PROBLEMAS CLÁSSICOS DE GEOMETRIA ESPACIAL.
Sem. 16	18/11 a 20/11	DISTÂNCIAS.
Sem. 17-19	**21/11 a 30/11** **02/12 a 07/12** **09/12 a 14/12** **20/12**	**PERÍODO PROVAS FINAIS** **REVISÃO DE PROVAS** **PERÍODO PROVAS SUBSTITUTIVAS**

2 Semana 1 - Matrizes

2.1 Fundamentos e tipos

2.1.1 O que são matrizes?

É uma tabela contendo $M \times N$ elementos, com $M, N \in \mathbb{N}$, dispostos em linhas e colunas. Ex.:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 0 \\ \sqrt{7} & 1/3 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Como indicar matrizes?

Com letra latina maiúscula, $A = [a_{ij}]$, onde i indica a **linha** e j indica a **coluna** em que se encontra o elemento; sabendo que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

$$A = [a_{ij}] \quad \text{onde} \quad 1 \leq i \leq 2 \text{ e } 1 \leq j \leq 3 \ \rightarrow \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

2.1.3 Matriz Quadrada

Quando $m = n$, ou seja, número de linhas é igual ao número de colunas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.4 Matriz Retangular

Quando $m \neq n$, ou seja, número de linhas é diferente do número de colunas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ordem 3×2

2.1.5 Matriz Nula

Quando todos os elementos são nulos, ou seja, iguais a 0.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1.6 Matriz Identidade

Quando temos uma matriz quadrada onde os elementos da diagonal principal são unitários e os demais são nulos, ou seja, se $i = j \rightarrow a_{ij} = 1$ e se $i \neq j \rightarrow a_{ij} = 0$.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1.7 Matriz Diagonal

Quando temos uma matriz quadrada onde os elementos da diagonal principal são unitários e os demais são nulos, ou seja, se $i = j \rightarrow a_{ij} \neq 0$ e se $i \neq j \rightarrow a_{ij} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

2.1.8 Matriz Transposta

Dada a matriz $A = [a_{ij}]$; $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, a matriz transposta é indicada por A^T, e é a matriz tal que $B = [b_{ij}]$, onde $b_{ij} = a_{ij}$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

2.1.9 Matriz Simétricas

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$ para todos os elementos da matriz. Em outras palavras, é uma matriz quadrada tal que: $A = A^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} , A = A^T$$

2.1.10 Matriz Antissimétricas

Uma matriz quadrada tal que: $A = -A^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} , A = -A^T$$

2.1.11 Matriz Inversa

Se a matriz A é quadrada, quem é sua inversa?
É outra matriz quadrada, indicada por A^{-1}, que satisfaz a condição $A{\cdot}A^{-1} = A^{-1}{\cdot}A = I_n$, sendo I_n a matriz identidade de ordem n.

Ex.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, entao: A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 7 \end{pmatrix}, pois A^{-1}A = I_3$$

Toda matriz quadrada é invertível?
Não, a matriz só possui inversa se o seu determinante for não nulo ($det(A) \neq 0$).

2.2 Operações com matrizes

2.2.1 Adição

Dadas duas matrizes de mesma ordem: $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, a soma é a matriz: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.
Ex.:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriedades da adição de matrizes
$\forall A, B, C$, de mesma ordem, tem-se:

a) **Comutatividade**: $A + B = B + A$

b) **Associatividade**: $A + (B + C) = (A + B) + C$

c) **Existência do elemento neutro**: $A + 0 = A$

d) **Existência do elemento oposto**: $A + (-A) = 0$

2.2.2 Multiplicação por um número real

Dado um número real λ e uma matriz $A = [a_{ij}]$, de ordem $M \times N$:
$\lambda A = \lambda[a_{ij}] = \lambda a_{ij}$
Ex.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, 3A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 24 & 15 \end{pmatrix}$$

Propriedades da multiplicação de matrizes por um número real
$\forall A, B$, de mesma ordem, $\forall \lambda$, $\mu \in \Re$ tem-se:

a) $(\lambda A)\mu = (\lambda\mu)A$

b) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

c) $(\lambda\mu)A = \lambda A + \mu A$

d) **Existência do elemento neutro**: $1A = A$

2.2.3 Multiplicação entre duas raízes

Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{jk}]$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq p$, o produto de A por B é uma matriz $C = [c_{ik}]$, de ordem $N \times P$, onde $c_{ik} = \sum_1^n a_{ij}b_{jk}$. O produto entre duas matrizes só é possível se o número de **colunas** da matriz A for **igual** ao número de **linhas** da matriz B.
Ex.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$$

Propriedades da multiplicação entre matrizes

a) O produto AB e BA não é comutativo, dependendo da ordem das matrizes esse produto pode nem existir, e caso exista, a ordem da matriz produto poderá ser diferente.

Ex.: $A_{3\times2}B_{2\times1} = C_{3\times1}$ e $B_{2\times1}A_{3\times2} = \nexists$ **(Não é possível realizar essa operação)**

b) $(A + B) \cdot C = AC + BC$ é válida?
Sim, desde que existam esses produtos.

2.2.4 Operações com matriz transposta

Propriedades da matriz transposta

a) $(A + B)^T = A^T + B^T$

b) $(AB)^T = B^T A^T$

c) $(A^T)^T = A$

d) $(\lambda A)^T = \lambda A^T, \lambda \in \Re$

2.2.5 Operações com matriz inversa

Propriedades da matriz inversa

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

c) $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}, \lambda \in \Re$