Derivação Implícita

Até o momento estudamos funções da forma *explícita* $y = f(x)$. Mas, frequentemente ocorrem equações como, por exemplo,

$x^2 + y^2 = 1$ $\qquad$ $xy = 1$

$x^2 + xy^2 - y^3 = 10$ $\qquad$ $x \cos y + y \operatorname{sen} x = 1$

Tais equações não fornecem y explicitamente como função de x. Mesmo assim, cada uma das equações fornece um ou mais valores para y quando substituimos x por algum número de um conjunto conveniente. Escolhendo um dentre esses valores, obtemos y como função de x. Dizemos que a equação determina y como uma ou mais *funções implícitas* de x.

Nos exemplos $x^2 + y^2 = 1$ e $xy = 1$ as equações podem ser resolvidas de modo a fornecer y explicitamente como função de x, o que não ocorre nos outros dois exemplos.

Vamos olhar um pouco mais de perto a equação $x \cos y + y \operatorname{sen} x = 1$: marcamos num plano cartesiano os pares (x, y) que satisfazem à equação, obtendo, deste modo, o *lugar geométrico* da equação. A figura abaixo mostra uma parte do lugar geométrico dessa equação:

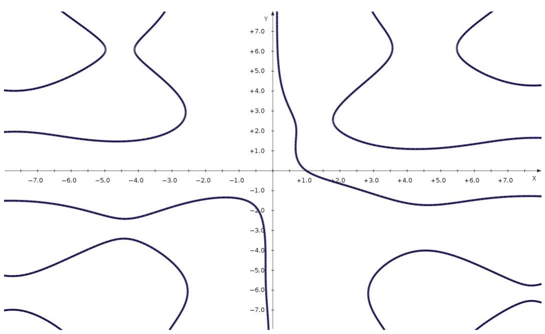

Figura 1. O lugar geométrico da equação $x \cos y + y \operatorname{sen} x = 1$

É fácil ver que tal figura não é o gráfico de nenhuma função $y = f(x)$. Mas existem “pedaços” das linhas que compõem o lugar geométrico da equação que são gráficos de funções da forma $y = f(x)$. Na figura abaixo estão destacados alguns desses tais “pedaços”.

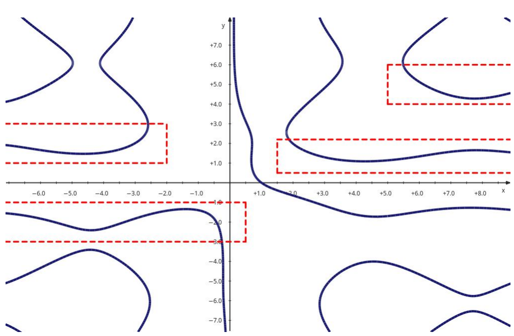

Figura 2. Um trecho do lugar geométrico que é gráfico de função $y = f(x)$.

Mesmo não sendo possível obter y explicitamente, podemos obter a derivada $\frac{dy}{dx}$ a partir da equação original envolvendo x e y. Tal técnica é chamada de *derivação ou diferenciação implícita*. Consideramos y como uma função desconhecida de x, e derivamos os dois lados da equação em relação à variável x.

Para facilitar a compreensão dos exemplos abaixo, reescrevemos a tabela de derivadas com a regra da cadeia. Aqui y é função de x e a derivada é em relação a x:

$(y^n)' = ny^{n-1}y'$	$(e^y)' = e^y y'$
$(a^y)' = (a^y \ln a)y'$	$(\ln y)' = \dfrac{1}{y}y'$
$(\log_a y)' = \dfrac{1}{y \ln a}y'$	$(\operatorname{sen} y)' = (\cos y)y'$
$(\cos y)' = -(\operatorname{sen} y)y'$	$(\operatorname{tg} y)' = (\sec^2 y)y'$
$(\operatorname{cotg} y)' = -(\operatorname{cosec}^2 y)y'$	$(\sec y)' = (\sec y \operatorname{tg} y)y'$
$(\operatorname{cosec} y)' = -(\operatorname{cosec} y \operatorname{cotg} y)y'$	$(\operatorname{arcsen} y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}y'$
$(\arccos y)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}y'$	$(\operatorname{arctg} y)' = \dfrac{1}{1+y^2}y'$
$(\operatorname{arccotg} y)' = -\dfrac{1}{1+y^2}y'$	

• Obs. Escrevemos, por exemplo, $(\operatorname{sen} y)' = (\cos y)y'$ no lugar de $(\operatorname{sen} y)' = \cos y\, y'$ para maior clareza.

Exemplo 1. Se y é função implícita dada pela equação $x^2 + y^2 = 1$, obter a derivada $y' = \frac{dy}{dx}$

Vamos derivar os dois lados da equação em relação à variável x. Para tanto aplicamos as regras de derivação e, onde necessário, a regra da cadeia.
Temos:

$$\begin{aligned} (x^2)' + (y^2)' &= 1' \\ 2x + 2yy' &= 0 \\ 2yy' &= -2x \\ y' &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

• Note que a derivada y' depende tanto de x quanto de y.

Exemplo 2. Determine a equação da reta tangente à curva $x^2 + y^2 = 1$ no ponto $P = (1/2, -\sqrt{3}/2)$

Do exemplo anterior sabemos que $y' = -\dfrac{x}{y}$.

Logo $m_t = y'\big|_P = -\dfrac{1/2}{-\sqrt{3}/2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Assim, a equação da reta tangente no ponto P dado é

$$y + \sqrt{3}/2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1/2)$$

Isto é,

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

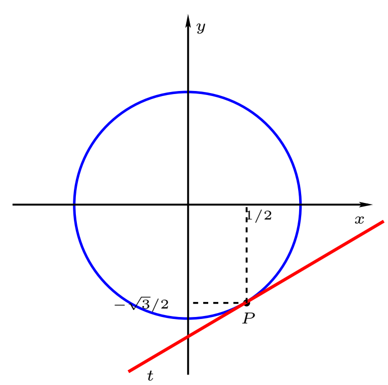

Figura 3. Reta tangente à curva $x^2 + y^2 = 1$ em $P = (1/2, -\sqrt{3}/2)$

Exemplo 3. Sendo $y = f(x)$ dada implicitamente pela equação $xe^y + y^2 = 1$, obter a equação da reta tangente à curva no ponto $P = (0, -1)$.

Derivando os dois lados da equação em relação a x e lembrando que a derivando (e^y) em relação a x obtemos $(e^y)' = e^y y'$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\left(xe^y + y^2\right)' =& 1' \\
x'e^y + x(e^y)' + (y^2)' =& 0 \\
e^y + xy'e^y + 2yy' =& 0 \\
(xe^y + 2y) =& -e^y \\
y' =& -\frac{e^y}{xe^y + 2y}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$m_t = y'(P) = y'(0, -1) = -\frac{e^{-1}}{0e^{-1} + 2(-1)} = -\frac{e^{-1}}{-2} = \frac{1}{2e}$$

e equação da reta tangenta à curva por $P = (0, -1)$ é:

$$y - (-1) = \frac{1}{2e}(x - 0), \text{ isto é, } y = \frac{1}{2e}x - 1$$

Exemplo 4. Supondo y função implícita de x dada pela equação $x + xy - x^2y^3 = 0$, obter a derivada $y' = \frac{dy}{dx}$.

Derivando ambos os lados em relação à variável x obtemos:

$$\begin{aligned}
x + xy - x^2y^3 &= 0 \\
x' + x'y + xy' - \left[(x^2)'y^3 + x^2(y^3)'\right] &= 0' \\
1 + y + xy' - 2xy^3 - 3x^2y^2y' &= 0 \\
xy' - 3x^2y^2y' &= 2xy^3 - y - 1 \\
(x - 3x^2y^2)y' &= 2xy^3 - y - 1 \\
y' &= \frac{2xy^3 - y - 1}{x - 3x^2y^2}
\end{aligned}$$

Exemplo 5. Determinar a equação da reta tangente à curva $(x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2y^3 = 0$ no ponto $P = (1, 1)$, sendo y função implícita de x.

Derivando ambos os lados da equação em relação a x temos:

$$\begin{aligned}
\left[(x^2 + y^2 - 1)^3\right]' - (x^2y^3)' &= 0' \\
3(x^2 + y^2 - 1)^2(x^2 + y^2 - 1)' - \left[(x^2)'y^3 + x^2(y^3)'\right] &= 0 \\
3(x^2 + y^2 - 1)^2(2x + 2yy') - 2xy^3 - 3x^2y^2y' &= 0 \\
6x(x^2 + y^2 - 1)^2 + 6y(x^2 + y^2 - 1)^2y' - 2xy^3 - 3x^2y^2y' &= 0 \\
\left[6y(x^2 + y^2 - 1)^2 - 3x^2y^2\right] y' &= 2xy^3 - 6x(x^2 + y^2 - 1)^2 \\
y' &= \frac{2xy^3 - 6x(x^2 + y^2 - 1)^2}{6y(x^2 + y^2 - 1)^2 - 3x^2y^2}
\end{aligned}$$

Portanto $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy^3 - 6x(x^2 + y^2 - 1)^2}{6y(x^2 + y^2 - 1)^2 - 3x^2y^2}$

Assim, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_P = -\dfrac{4}{3}$ e a equação da reta tangente à curva nesse ponto é

$y - 1 = -\dfrac{4}{3}(x - 1)$, isto é, $y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{7}{3}$

A figura abaixo mostra o lugar geométrico da equação $(x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2y^3 = 0$ e a reta tangente em $P = (1, 1)$.

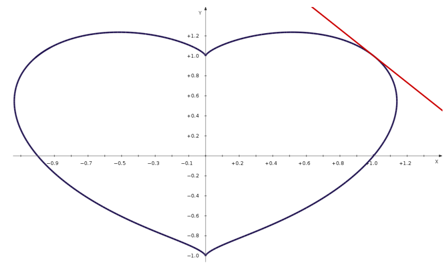

Figura 4. Uma curva coração

Exemplo 6. Sendo y função de x dada pela equação $\ln y + \dfrac{x}{y} = 1$ determine $y' = \dfrac{dy}{dx}$ e a equação da reta tagente à curva em $P = (0, e)$.

Derivando ambos os lados da equação em relação à variavel x temos:

$$\begin{aligned}
(\ln y)' + \left(\frac{x}{y}\right)' =& 1' \\
\frac{1}{y}y' + \frac{x'y - xy'}{y^2} =& 0 \\
\frac{y'}{y} + \frac{y - xy'}{y^2} =& 0 \\
\frac{yy' + y - xy'}{y^2} =& 0 \\
yy' + y - xy' =& 0 \\
yy' - xy' =& -y \\
(y - x)y' =& -y \\
y' =& \frac{-y}{y - x} \\
y' =& \frac{y}{x - y}
\end{aligned}$$

Assim, $m_t = y'(P) = \dfrac{e}{0 - e} = -\dfrac{e}{e} = -1$ e a equação da reta tangente em $P = (0, e)$ é

$$y - e = -1(x - 0), \text{ isto é, } y = -x + e$$

Exercícios de revisão

1 Em cada equação abaixo y é dada implicitamente como função de x. Determine a derivada $y' = \dfrac{dy}{dx}$ e a equação da reta tangente à curva no ponto P indicado:

(a) $x^2 + xy - y^2 = 1, \ \ P = (2,3).$

(b) $x^2 + y^2 = 25, \ \ P = (3,-4)$

(c) $x^2y^2 = 9, \ \ P = (-1,3)$

(d) $\dfrac{x-y}{x-2y} = 2, \ \ P = (3,1)$

(e) $(y-x)^2 = 2x+4, \ \ P = (6,2)$

(f) $x^3y - xy^2 + 2xy + 2 = 0, \ \ P = (-1,2)$

2 Determine $y' = \dfrac{dy}{dx}$, em cada caso abaixo:

(a) $y \ln x + x \ln y - 2e = 0$

(b) $y^2 e^{xy} + x^3(1-y) + 1 = 0$

(c) $\ln y = xy$

(d) $xy = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$

(e) $e^{\frac{x}{y}} - y = 0$

Respostas

1 (a) $y' = \dfrac{2x+y}{2y-x}, \qquad t: \ 7x - 4y - 2 = 0$

(b) $y' = -\dfrac{x}{y}, \qquad t: 3x - 4y - 25 = 0$

(c) $y' = -\dfrac{y}{x}, \qquad t: 3x - y + 6 = 0$

(d) $y' = \dfrac{2y + xy - x + x^2}{x}, \qquad t: \ 11x - 3y - 30 = 0$

(e) $y' = \dfrac{1+y-x}{y-x}, \qquad t: \ 3x - 4y - 10 = 0$

(f) $y' = \dfrac{y(y-3x^2-2)}{x(x^2-2y+2)}, \qquad t: \ -6x - y - 4 = 0$

2 (a) $y' = \dfrac{-y(y + x\ln y)}{x(x + y \ln x)}$

(b) $y' = -\dfrac{y^3e^{xy} + 3x^2(1-y)}{2ye^{xy} + xy^2e^{xy} - x^3}$

(c) $y' = \dfrac{y}{1 - x + x^2 + y^2}$

(d) $y' = \dfrac{y(1-x^2-y^2)}{x(1+x^2+y^2)}$

(e) $y' = \dfrac{y}{x+y}$