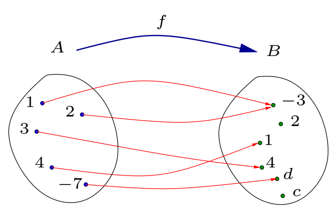
Funções - generalidades

Domínio, contradomínio e imagem

Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma função de A em B é uma regra que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$. Se f é o nome da função, então escreve-se $y = f(x)$ para indicar o elemento y de B associado ao elemento $x \in A$. Dizemos que y é a imagem de x por f

- A notações $f{:}A \to B$ e $A \xrightarrow{f} B$ indicam uma função, de A em B, chamada f.
- O conjunto A é chamado de *domínio* de f e indicado por $\mathrm{Dom}(f)$ ou por $\mathrm{D}(f)$.
- O conjunto B é chamado de *contra-domínio* de f.
- A *imagem* de f, denotada por $\mathrm{Im}(f)$, por $f[A]$, ou por $f(A)$, é o seguinte subconjunto do contra-domínio: $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \,|\, x \in A\} = \{y \in b \,|\, y = f(x) \text{ para algum } x \in A\}$.
- Duas funções f e g são *iguais* se, e somente se, possuírem o mesmo domínio, o mesmo contra-dominio e $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$.
- Se $y \in B$, então $f^{-1}(y) = \{x \in A \,|\, f(x) = y\}$ é a *pré-imagem* de y por f.
- A notação $x \overset{f}{\mapsto} y$ indica que y é o elemento de B associado a $x \in A$ por f, isto é, y é a imgem de x por f. Se não houver perigo de confusão a indicação da função pode ser omitida e podemos escrever simplesmente $x \mapsto y$.
- Dada a função $f{:}A \to B$, a *restrição* de f a um subconjunto C de A é denotada por $f|_C$ (ou por $f{\restriction}_C$) é a função que tem como domínio o conjunto C, como contra-domínio o conjunto B e $f|_C(x) = f(x)$, para todo $x \in C$.

Exemplo 1. Seja f a função dada pela figura abaixo.



Neste caso $\mathrm{Dom}(f) = A = \{-7, 1, 2, 3, 4\}$, contra–dominio de f é o conjunto $B = \{-3, 1, 2, 4, c, d\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \{-3, 1, 4, d\}$. Note que:

- $B \neq \mathrm{Im}(f)$
- $-3 \in B$ é a imagem dos pontos 1 e 2 de A, isto é $f(1) = f(2) = -3$ $1 \in B$ é a imagem do ponto $4 \in A$, isto é $f(4) = 1$ $4 \in B$ é

  a imagem do ponto $3 \in A$, isto é $f(3) = 4$ $d \in B$ é a imagem

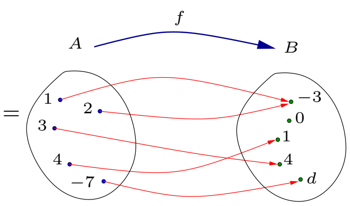
  do ponto $-7 \in A$, isto é $f(-7) = d$
- Os elementos 2 e c de B não são imagens de nenhum ponto de A.
- $f^{-1}(-3) = \{1, 2\}$, $f^{-1}(1) = \{4\}$, $f^{-1}(2) = \emptyset$, $f^{-1}(4) = \{3\}$, $f^{-1}(c) = \emptyset$, $f^{-1}(d) = \{-7\}$.

Uma função também pode ser especificada via uma tabela. Para a função desse exemplo teríamos:

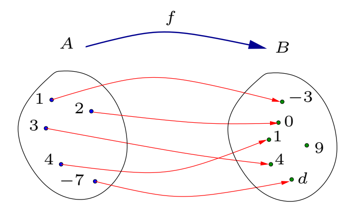
x	$f(x)$
-7	d
1	-3
2	-3
3	4
4	1

Note que para especificar a função, cada elemento $x \in \mathrm{Dom}(f)$ deve fazer parte da tabela.

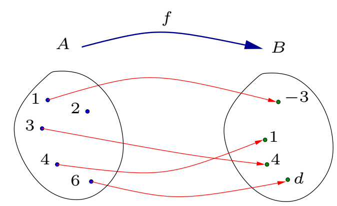
Exemplo 2. Determinar, justificando, se f é função em cada item abaixo. Em cada caso afirmativo determine: o domínio, o contradomínio e imagem.



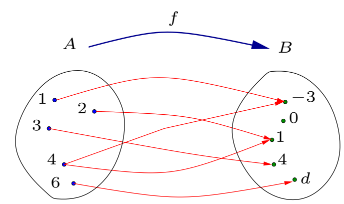
(i)



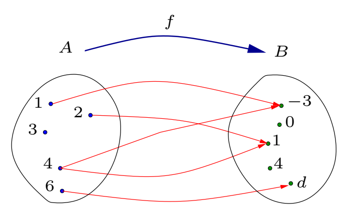
(ii)



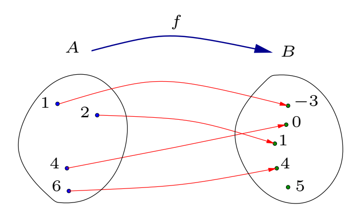
(iii)



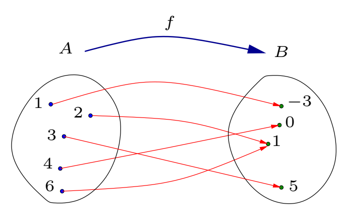
(iv)



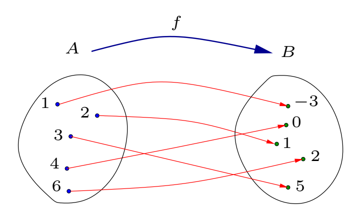
(v)



(vi)



(vii)



$(viii)$

- Não são funções: (iii), (iv) e (v).

  (iii): $2 \in A$, mas 2 não está associado a nenhum elemento de B;

  (iv): o elemeto $4 \in A$ está associado a dois elementos (-3 e 1) em B;

  (v): o elemento $3 \in A$ não está associado a nenhum elemento de B. Também é justificativa para não ser função de A em B: o elemneto $4 \in A$ está associado a dois elementos (-2 e 1) em B.

- Para os outros ítens: o domínio é o respectivo conjunto A e o contra-domínio é o respetivo conjunto B. Imagens:

$(i) : \mathrm{Im}(f) = \{-3, 1, 4, d\}$

$(ii) : \mathrm{Im}(f) = \{-3, 0, 1, 4, d\}$

$(vi) : \mathrm{Im}(f) = \{-3, 0, 1, 4\}$

$(vii) : \mathrm{Im}(f) = \{-3, 0, 1, 5\} = B$

$(viii) : \mathrm{Im}(f) = \{-3, 0, 1, 2, 5\} = B$

Especificar uma função por uma tabela ou usando "balões" só é possível para domínios finitos e com poucos elementos. Pra domínios infinitos ou finitos com muitos elementos, a forma mais usual é através de uma "fórmula".

Exemplo 3.

$$f{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^2$$

Temos: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, o contra-dominio de f é $\mathbb{R}$ e, como veremos, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

Exemplo 4.

$$f{:}\mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = -2x + 1$$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{N}$, contra-dominio de f é $\mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(f) = \{1, -1, -3, -5, \dots\}$, isto é, o conjunto de todos os ímpares menores ou iguais a 1.

Exemplo 5. Seja $f{:}\mathbb{R} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Temos: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, o contra-domínio de f é $\mathbb{N}$ e $\mathrm{Im}(f) = \{-1, 0, 1\}$

Exemplo 6. Seja $g{:}\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Temos: $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{Z}$, o contra-domínio de g é $\mathbb{N}$ e $\mathrm{Im}(g) = \{-1, 0, 1\}$

Note que $f \neq g$, pois $\mathrm{Dom}(f) \neq \mathrm{Dom}(g)$. Já que os codomínios de f e g são iguais e $g(x) = f(x)$, para todo $x \in \mathrm{Dom}(g) \subset \mathrm{Dom}(f)$, então $g = f|_{\mathbb{Z}}$, isto é, g é a restrição de f ao conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$.

Exemplo 7. A sequência de Fibonacci

A famosa sequência de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., define uma função f com domínio nos inteiros positivos: $1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 2, 4 \mapsto 3, 5 \mapsto 5, 6 \mapsto 13, \dots$, isto é, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(4) = 3$, $f(5) = 5$, $f(6) = 8, \dots$

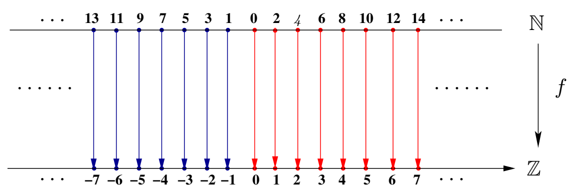
Cada termo da sequência de Fibonacci, a partir do terceiro, é a soma dos dois anteriores, isto é, f satisfaz a relação $f(n) = f(n-2) + f(n-1)$, se $n \geq 3$. Tal expressão (junto com $f(1) = f(2) = 1$) é a *definição recursiva* da sequência de Fibonacci.

Como curiosidade, qual é o 38º termo da sequência de Fibonacci? Como não temos uma fórmula não recursiva, precisamos calcular todos os termos da sequência até o termo desejado. Isso dá muito trabalho! Mas os computadores fazem esses cálculos de forma muito rápida. Abaixo está um programa na linguagem Python (que você já está aprendendo) para o cálculos dos números da sequência de Fibonacci.

```
n=int(input('Quantos termos? '))
a, b = 1, 1
k=1
while k <= n:
    print(a, end=' ')
    a, b = b, a+b
    k=k+1
```

Execute o programa acima e descubra qual é o 38º termo da sequência de Fibonacci.

Exemplo 8. Considere a função $f{:}\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada pela figura abaixo:



A função acima é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{se } x \text{ é par} \\[2ex] -\dfrac{x+1}{2} & \text{se } x \text{ é impar} \end{cases}$$

Note que f faz algo muito interessante: f associa a cada elemento de $\mathbb{N}$ um único elemento de $\mathbb{Z}$ e vice-versa: a função f "emparelha" $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$.

Pense um pouco sobre isto: é possível emparelhar $A = \{0, 1, 2\}$ com $B = \{a, b, c\}$? A resposta é sim, e um possível emparelhamento seria $0 \mapsto a$, $1 \mapsto b$ e $2 \mapsto c$. Há outras possibilidades, como por exemplo, $0 \mapsto b$, $1 \mapsto c$ e $2 \mapsto a$.

É possível fazer um emparelhamento entre de A e $C = \{a, b\}$? Ou entre A e $D = \{a, b, c, d\}$? Você certamente perceberá que não. Por quê? Você deve ter percebido que o problema está no fato de que, em cada caso, os conjuntos envolvidos possuem quantidades diferentes de elementos.

É possível perceber que dois conjuntos finitos podem ser emparelhados se, e somente se, têm o mesmo número de elementos.

Então, possuir o mesmo número de elementos é equivalente a conseguir um emparelhamento entre os conjuntos envolvidos, quando os conjuntos são finitos.

E para os conjuntos infnitos? Não seria razoável dizer que eles têm a mesma "quantidade" de elementos se for possível estabelecr um emparelhamento ebtre eles?

É exatamente deste modo que decidimos se dois conjuntos (finitos ou não) têm a mesma "quantidade" de elementos: se existir algum emparelhamente entre eles, então dizemos que têm a mesma "quantidade" de elementos. Caso contrário, isto é, se não for possível conseguir algum emparelhamento entre sos conjuntos, então terão "quantidades" diferentes de elementos.

Voltando à função f: a função faz um emparelhamento entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ é, então, natural dizer que ambos têm o mesmo número de elementos (é o mesmo infintio). O que pode soar um pouco estreanho no início, pois como sabemos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ propriamente.

Pode-se mostrar que é possível emparelhar $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$, e portanto é possível emparelhar $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ (se é possível emparelhar A com B e emparelhar B com C, então é possível emparelhar A com C) mas não é possível emparelhar $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.

Isso quer dizer que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ têm a mesma quantidade de elementos, mas $\mathbb{R}$ tem mais elementos que qualquer um deles ($\mathbb{R}$ não pode ter menos elementos que nenhum deles, pois todos eles estão contidos em $\mathbb{R}$).

O plano cartesiano

Num plano tomamos um ponto O e passamos por este ponto duas retas (*eixos coordenados*) e, com a escolha de uma unidade de medida, marcamos os números reais sobre as duas retas: o número zero fica associado ao ponto O nos dois eixos, com os números positivos à direita do ponto O no eixo horizonatal e acima do ponto O no eixo vertical. Veja figura abaixo. Fica assim construido um *plano cartesiano*. Se as retas são perpendiculares, então teremos um *plano cartesiano ortogonal*. Um dos eixos é chamado de eixo das *abscissas* (usualmente o eixo horizontal), e o outro de eixo das *ordenadas* (usualmente o eixo vertical). De modo genérico, o eixo das abscissas é também chamado de eixo x e o eixo das ordenadas de eixo y.

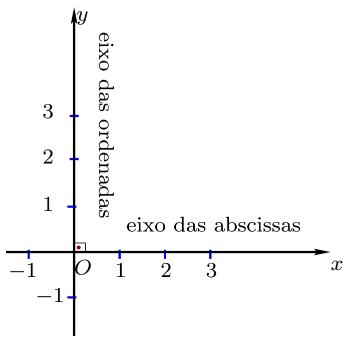


Figura 1. Plano cartesiano (ortogonal)

Cada ponto P do plano pode, então, ser identificado com um único par de números reais (a, b) que são chamados de *coordenadas* do ponto P: a é a *abscissa* de P e b é a *ordenada* de P.

- a abscissa de P é obtida *projetando* o ponto P no eixo das abscissas: é a intersecção com o eixo das abscissas da reta que passa por P e é paralela ao eixo das ordenadas;
- a ordenada de P é obtida *projetando* o ponto P no eixo das ordenadas: é a intersecção com o eixo das ordenadas da reta que passa por P e é paralela ao eixo das abscissas.

- A abscissa de um ponto P é denotada por x_P e a ordenada por y_P.

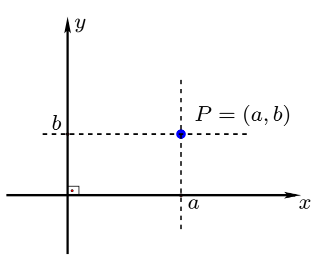


Figura 2. Ponto no plano acrtesiano e suas coordenadas

Note que o processo acima pode ser invertido: dado o número a sobre o eixo das abscissas e o número b sobre o eixo das ordenadas contruiremos um único ponto P de coordenadas (a, b).

Gráfico de função

Pense, por exemplo, em como você faz o gráfico de uma função do segundo grau: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Você *sabe* que o gráfico é uma parábola (côncava para cima ou para baixo, dependendo do sinal do coeficiente de x^2, isto é, do sinal de a), mas só isto não é suficiente: é necessário marcar alguns pontos no plano para poder traçar a parábola: para tanto precisamos *tabelar* a função para alguns valores de x.

Exemplo 9. Vamos tomar como exemplo a função $y = f(x) = x^2 - x - 2$. Seu gráfico é uma parábola côncava para cima ($a = 1$ é positivo) e a tabela abaixo fornece alguns pontos para o gráfico.

x	$y = f(x)$
-2	4
-1	0
0	-2
1	-2
2	0

Na primeira linha da tabela temos $x = -2$ e na coluna de $f(x)$ temos o valor 4. Como obtivemos o valor 4? Substituimos x por -2 na expressão de f, isto é, *calculamos* a função f em -2:

$$f(-2) = (-2)^2 - (-2) - 2 = 4 + 2 - 2 = 4$$

Os valores de x foram "chutados", mas os valores de $y = f(x)$ foram *calculados*. Assim, obtivemos os pontos $(-2, f(-2))$, depois o ponto $(-1, f(-1))$, e assim por diante.

$\boxed{\text{Cada ponto no gráfico da função } f \text{ é da forma } (valor,\ f(valor))}$

A figura abaixo apresenta o gráfico (parte dele) de f.

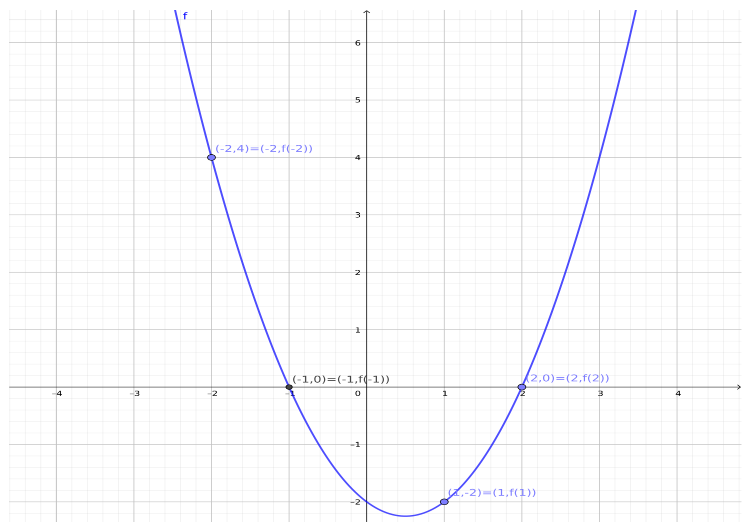


Figura 3. Grafico de $y = x^2 - x - 2$

(Gráfico de uma função) O gráfico da função $f{:}A \to B$ é o conjunto $G(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\}$.

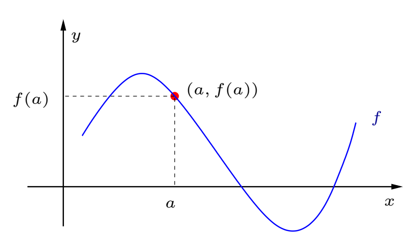


Figura 4. Gráfico de uma função

- Um ponto $P=(a,b)$ está no gráfico de f se, e somente, se $a \in \mathrm{Dom}(f)$ e $b = f(a)$.

- A projeção do pnto P no eixo x é a sua *abscissa*, neste caso a; e a projeção de P no eixo y é sua *ordenada*, neste caso b.

- A projeção de $P=(a,b)$ no eixo y é b, mas $b=f(a)$, isto é, b é a imagem de a por f. Como a imagem da função f ($\mathrm{Im}(f)$) é conjunto de todas as imagens dos pontos do domínio de f (todos os valores de f), vemos que a projeção do gráfico de f no eixo y é $\mathrm{Im}(f)$. É fácil ver que o domínio de f é a projeção do gráfico de f no eixo x.

Raízes e sinais de uma função

(Raiz ou zero de uma função) Dizemos que o número real α é uma *raiz* ou um *zero* da função f, se $f(\alpha)=0$. As raízes de f são os pontos de intersecção com o eixo x.

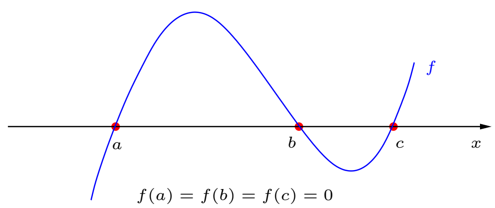


Figura 5. a, b e c são raízes ou zeros de f

(Sinais de uma função) Se $f(\alpha) > 0$, então dizemos que f tem sinal positivo em α e, se $f(\alpha) < 0$, então dizemos que f tem sinal negativo em α. Dizemos que f tem sinal positivo no intervalo I, se $f(\alpha)$ for positivo, para todo α em I. Dizemos que f tem sinal negativo no intervalo I, se $f(\alpha)$ for negativo, para todo α em I.

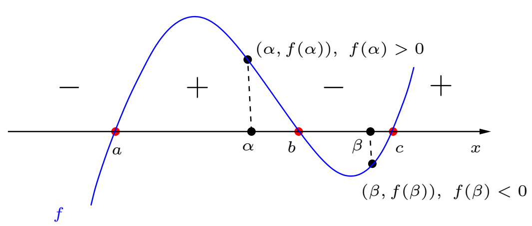


Figura 6. Sinais de uma função

Comportamento de uma função

(Crescimento e decrescimento de uma função) Dizemos que a função f é:

- *crescente* se, para todos a e b do domínio de f, $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$;

- *decrescente* se, para todos a e b do domínio de f, $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$;

- *crescente no intervalo* I, se, para todos a e b em I, $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$;

- *decrescente no intervalo* I, se, para todos a e b em I, $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.

Exemplo 10. A função f (definida em $\mathbb{R}$) dada pelo gráfico abaixo tem o seguinte comportamento:

- f é crescente em $]-\infty, a[\cup]b, c[$

- f é decrescente em $]a, b[\cup]c, +\infty[$

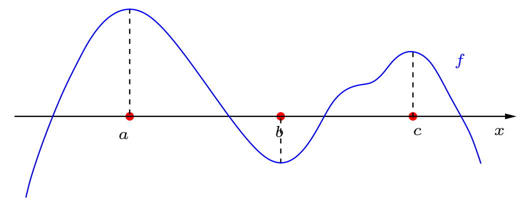


Figura 7. Crescimento/decrescimento de uma função

Obs. O crescimento/decrescimento de f pode ser indicado equematicamente da seguinte forma:

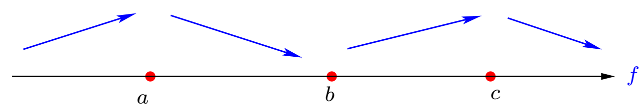


Figura 8. Representação do comportamento de uma função

(Máximos e mínimos de uma função) Seja $f\colon A \to \mathbb{R}$. Dizemos que:

- o ponto $a \in A$ é ponto de *máximo absoluto (ou máximo global)* de f se $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in A$. O valor de f num ponto de máximo absoluto é chamado de *valor máximo* de f e pode ser denotado por $\max f$;

- o ponto $a \in A$ é ponto de *mínimo absoluto (ou mínimo global)* de f se $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in A$. O valor de f num ponto de mínimo absoluto é chamado de *valor mínimo* de f e pode ser denotado por $\min f$;

- o ponto $a \in A$ é um ponto de *máximo local (ou máximo relativo)* de f se $f(a) \geq f(x)$ para valores de x nas "proximidades" de a;
- o ponto $a \in A$ é um ponto de *mínimo local (ou mínimo relativo)* de f se $f(a) \leq f(x)$ para valores de x nas "proximidades" de a.

Obs. Pontos de máximo/mínimo (local) de f são chamados de *pontos de extremo (local)* de f e os valores máximo/mínimo (locais) de f são chamados de *valores extremos (locais)* de f.

Exemplo 11. Considere novamente a função do exemplo acima.

- os pontos a e c são pontos de máximo local e f: $f(a) \geq f(x)$ para todo x no intervalo marcado em torno do ponto a. Vale o mesmo para o ponto c;

- o ponto b é um ponto de mínimo local de f: $f(c) \leq f(x)$ para todo x no intervalo marcado em torno do ponto a;

- o ponto a é ponto de máximo absoluto (ou global) de f, pois $f(a) \geq f(x)$ para todo x. O valor $f(a)$ é o máximo de f: $\max f = f(a)$;

- a função não tem pomto de mínimo absoluto (e portanto não tem valor mínimo), pois estamos supondo que o gráfico de f estende-se indefinidamente à esquerda de f e à direita de c e com os mesmos comportamentos.

Obs. Note que um ponto pode ser, ao mesmo tempo, ponto de máximo (mínimo) local e global.

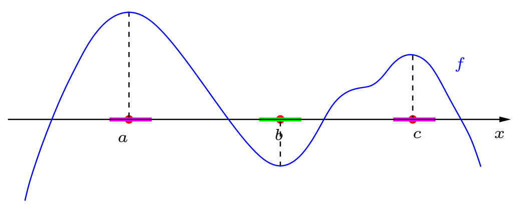


Figura 9. Máximos e mínimos de uma função

Condição para que uma figura no plano seja gráfico de função

Exemplo 12. A curva apresentada na figura abaixo representa o gráfico de alguma função $y = f(x)$?

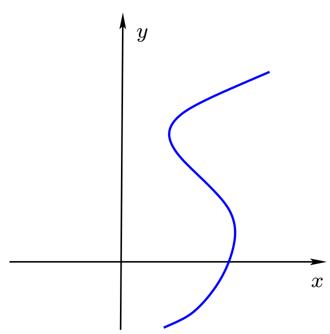


Figura 10. É gráfico de função $y = f(x)$?

A resposta é não. Observe quw para para o ponto a no eixo x (veja figura abaixo) correspondem 3 pontos distintos na curva: (a, b), (a, c) e (a, d). Se essa curva fosse gráfico de alguma função $y = f(x)$, então deveriamos ter $b = f(a)$, $c = f(a)$ e $d = f(a)$. Mas, b, c e d são distintos, o que contraria o fato de que cada ponto do domínio deve ter uma única imagem.

É fácil perceber ue uma curva no plano é gráfico de alguma função $y = f(x)$, se e somente se, toda reta vertical cortar a curva em, no máximo, um ponto.

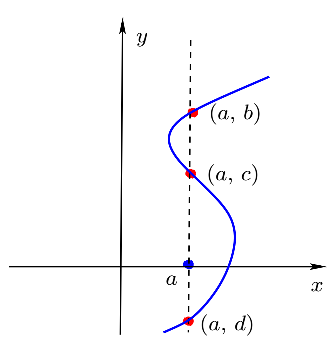


Figura 11. A linha não é gráfico de função $y = f(x)$

Será que a linha acima é gráfico de alguma função $x = g(y)$? A resposta é sim. Por quê? Cada linha *orizontal* corta a figura em no máximo um ponto. Portanto, a cada valor do domínio (algum subconjunto do eixo y,) corresponde apenas um valor no eixo x, que agora contém o contradomínio.

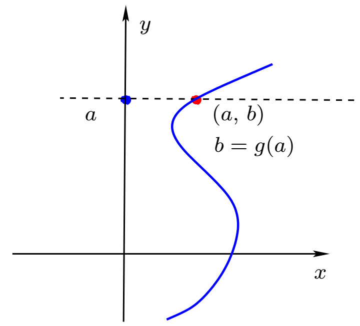


Figura 12. A linha é gráfico de função $x = g(y)$

Convenção sobre o domínio e contradomínio

Vamos tratar, no cálculo 1, principalmente de funções cujos domínio e contra-domínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$, sendo comum apresentar apenas a "regra" ou "fórmula", por exemplo, $f(x) = x^2 - 1$, $y = \frac{2}{x+3}$. Assim, convenciona-se tomar como domínio o conjunto de todos os $x \in \mathbb{R}$ para os quais a "regra" ou "fórmula" não apresenta restrições. Já para o contra-domínio, toma-se todo o $\mathbb{R}$.

Exemplo 13. Seja $y = f(x) = \sqrt{x-1}$. Temos:

$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 1\} = [1, +\infty[$. O contra–domínio de f é $\mathbb{R}$.

Exemplo 14. Seja $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$. Temos:

$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq \pm 1\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ e o contra–domínio é $\mathbb{R}$.

Exemplo 15. Determine o domínio de $f(x) = \sqrt{-2x+7}$.

Temos: $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -2x + 7 \geq 0\}$

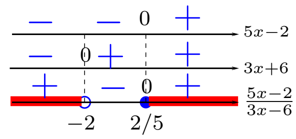
$-2x + 7 \geq 0 \iff -2x \geq -7 \iff 2x \leq 7 \iff x \leq 7/2$

Portanto $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 7/2\}$, isto é, $\mathrm{Dom}(f) =]-\infty, 7/2]$

Exemplo 16. Determiar o domínio de $f(x) = \sqrt{\dfrac{5x-2}{3x+6}}$

Temos: $\mathrm{Dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \dfrac{5x-2}{3x+6} \geq 0\right\}$.

Isto é, queremos os números reais x que façam a fração $\dfrac{5x-2}{3x+6}$ ser positiva ou nula. Como uma divisão é positiva apenas quando numerador e denominador têm sinais iguais, vamos estudar os sinais das duas expressões e compará-los. Farão parte do domínio de f apenas aqueles x reais que fazem numerador e denominador ter sinais iguais. Neste exemplo a divisão também pode valer zero, então aqueles x em que o numerador vale zero, mas o denominador não também farão parte do domínio da função.



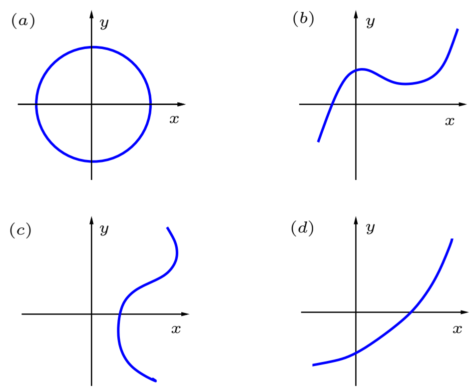
$\mathrm{Dom}(f) =]-\infty, -2[\cup [2/5, +\infty[$

FIGURA 13. Análise dos sinais de $\dfrac{5x-2}{3x+6}$ e determinação do domíno de f

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1 Complete a frase: "Uma função de A em B é uma regra que associa ______________________ de A ______________________ de B. "

2 Quais das figuras abaixo representam funções $y = f(x)$? Quais representam funções $x = f(y)$. Por quê?



3 Quais são os 20º e 35º termos da sequência de Fibonacci?

4 Dada a função $f(x) = x^2 - x + 3$ determine:

(a) $f(-2x)$ (b) $f(2 + x^2)$ (c) $f(x + hx)$

5 Calcule $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, com $h \neq 0$, nos seguintes casos:

(a) $f(x) = 2x + 1$ (c) $f(x) = x^2 + 3x - 5$

(b) $f(x) = x^2$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

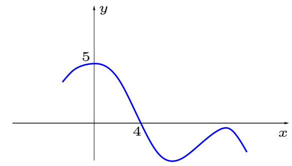
6 A altura h de uma árvore, em metros, em função da sua idade t, em anos, é estimada por $h(t) = 10 - \dfrac{100}{10+t}$.

(a) Qual é a altura da árvore aos 10 anos de idade? (b) Qual a altura máxima estimada para a árvore?

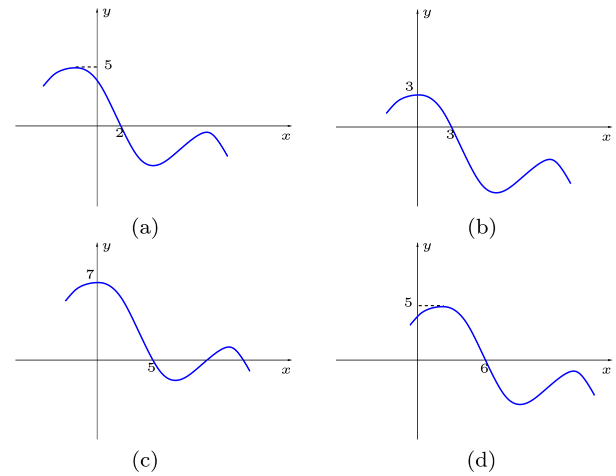
7 Uma região retangular com dimensões x e y e área de $3600m^2$ deve ser totalmente cercada com uma tela. Determine o comprimento da tela, C, como função apenas de x.

8 O volume de uma caixa fechada, em forma de um paralelepípedo de base quadrada é de $250m^3$. O custo de fabricação da tampa e da base é de R\$ 2,00 por m^2 e das laterais é de R\$ 1,00 por m^2. Escreva a expressão do custo, C, de fabricação da caixa em função do comprimento x da aresta da base.

9 A figura a seguir é o gráfico de uma determinada função f:



Indique qual gráfico abaixo representa a função: $f_1(x) = f(x) + 2$, $f_2(x) = f(x - 2)$, $f_3(x) = f(x + 2)$, $f_4(x) = f(x) - 2$



RESPOSTAS

1 *a cada elemento, um único elemento*

2 (a) não é gráfico de função $y = f(x)$ e nem gráfico de função $x = g(y)$; (b) é gráfico de função $y = f(x)$, mas não é gráfico de função $x = g(y)$; (c) é gráfico de funçao $x = g(y)$, mas não é gráfico de função $y = f(x)$; (d) é gráfico de funçao $y = f(x)$ e também de função $x = g(y)$

3 O 20º termo da sequência de Fibonacci é o número 676 e o 35º é o número 9227465.

4 (a) $f(-2x) = 4x^2 + 2x + 3$ (b) $f(2 + x^2) = 5 + 3x^2 + x^4$ (c) $f(x + h) = x^2 - x + 2xh + h^2 - h + 3$

5 (a) 2 (b) $2x + h$ (c) $2x + 3 + h$ (d) $\dfrac{-1}{x^2 + xh}$

6 (a) $5\,m$, (b) $10\,m$

7 $C(x) = 2x + \dfrac{7200}{x}$

8 $C(x) = 4x^2 + \dfrac{100}{x}$

9 (a) $f_3(x) = f(x+2)$, (b) $f_4(x) = f(x) - 2$, (c) $f_1(x) = f(x) + 2$, (d) $f_2(x) = f(x - 2)$