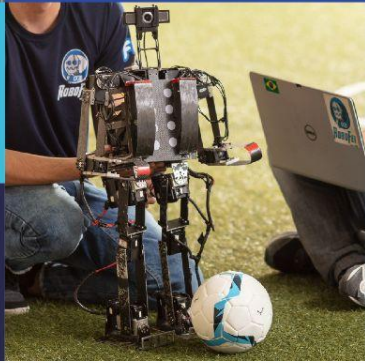




CCP010

Digital Experience



Expressões Booleanas

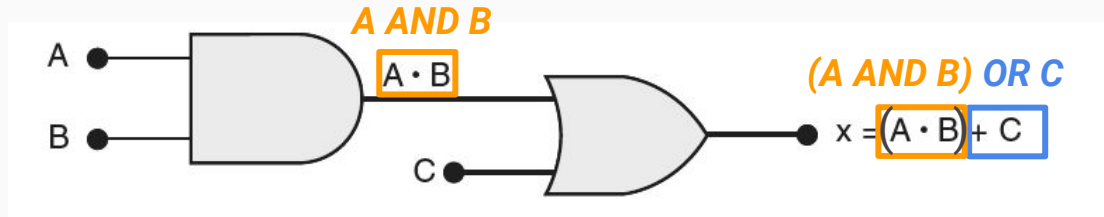
- **Expressões booleanas** são fundamentais em sistemas digitais, pois *são usadas para descrever como circuitos lógicos manipulam sinais digitais*
 - Lembrando que um circuito digital é composto de portas lógicas (**AND**, **OR**, **NOT**, etc.)
 - As expressões booleanas descrevem o funcionamento das portas lógicas e do circuito completo
 - Todas entradas e saídas continuam sendo binárias (**0** ou **1**)

Expressões Booleanas

- Qualquer circuito lógico pode ser descrito usando-se combinações das três operações booleanas básicas, porque as portas **OR**, **AND** e **NOT** são os blocos fundamentais dos sistemas digitais
- Em cada porta pode-se determinar a expressão lógica da saída:
 - Porta **AND**: $x = A \cdot B$ (saída x dadas as entradas A e B)
 - Porta **OR**: $x = A + B$ (saída x dadas as entradas A e B)
 - Porta **NOT (INVERSORA)**: $x = \overline{A}$ (saída x dada a entrada A)

Expressões Booleanas

- Usando a **expressão booleana** de cada porta, pode-se determinar a expressão lógica da saída:



$$x = (A \cdot B) + C$$

Expressões Booleanas

- Os parênteses nem sempre são necessários, pois existe **precedência** de operações nas expressões booleanas:
 - Exemplo:
 - O operador **AND** tem precedência sobre o operador **OR**
 - Logo, **AND** deve ser avaliado primeiro

$$(A \cdot B) + C = A \cdot B + C$$

Expressões Booleanas

- Ordem de precedência:

primeiro

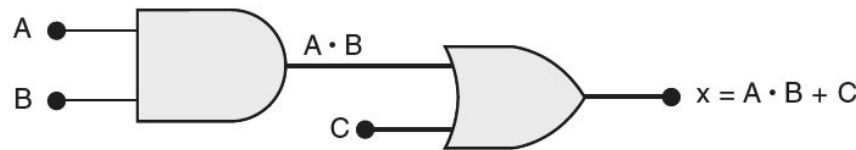


último

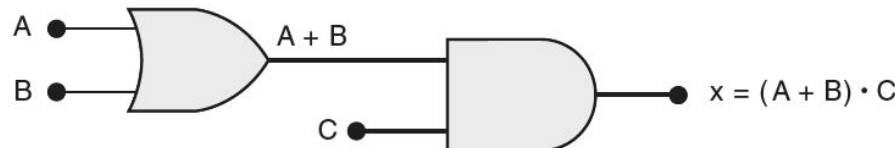
Parênteses	()
NOT	—
AND	. ou *
OR	+

Expressões Booleanas

- Usando a **expressão booleana** de cada porta, pode-se determinar a expressão lógica da saída:



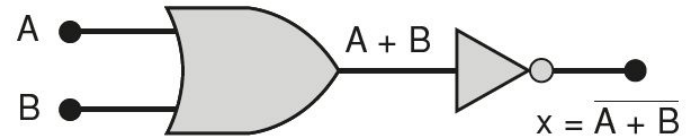
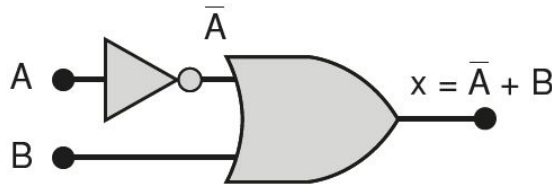
Aqui os parênteses não são necessários, pois a operação $A \cdot B$ acontece antes (e AND tem precedência sobre OR)



Aqui os parênteses são necessários, pois a operação $A + B$ acontece antes (e OR não tem precedência sobre AND)

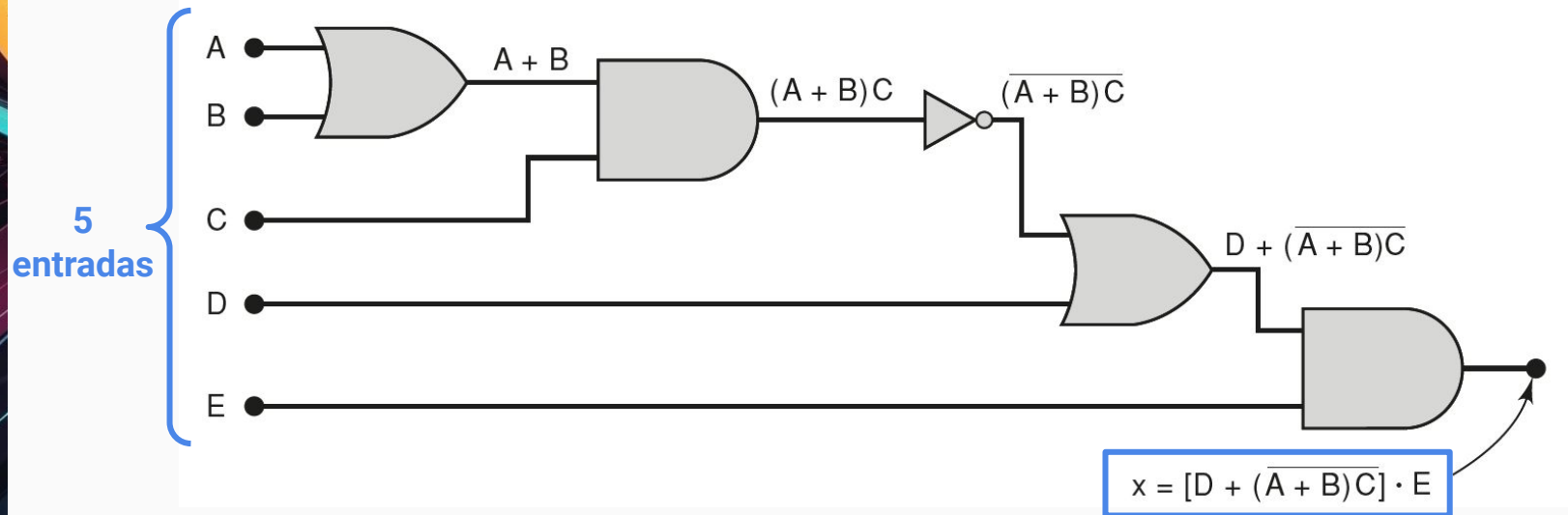
Expressões Booleanas

- Sempre que um **INVERSOR** (**NOT**) estiver presente em um circuito lógico, a expressão para a saída do INVERSOR será igual à expressão de entrada com uma **barra sobre ela**



Expressões Booleanas

- Outro exemplo da obtenção da expressão booleana a partir do circuito:



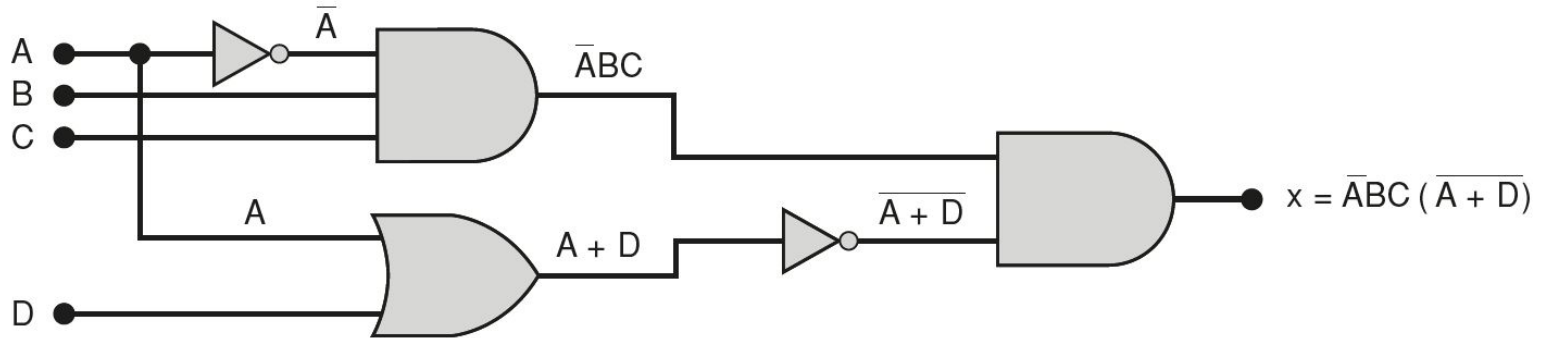
Expressões Booleanas

Avaliando as Saídas

- Com a expressão booleana da saída **x** de um circuito, pode-se obter o nível lógico esperado para qualquer conjunto de níveis lógicos de entrada
- O valor de **x** pode ser encontrado com a substituição dos valores das variáveis na expressão e realizando a operação indicada

Expressões Booleanas

- Por exemplo, suponha que desejemos saber o nível lógico da saída x para o circuito abaixo para o caso em que $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$ e $D = 1$



Expressões Booleanas

- Por exemplo, suponha que desejemos saber o nível lógico da saída x para o circuito abaixo para o caso em que $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$ e $D = 1$

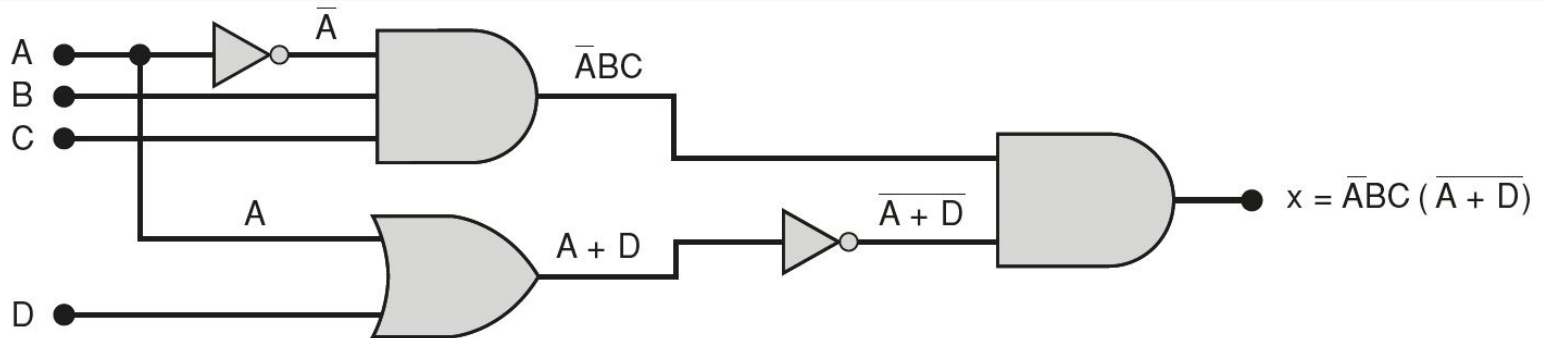
$$\begin{aligned}x &= \overline{A}BC(\overline{A + D}) \\&= \overline{0} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (\overline{0 + 1}) \\&= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (\overline{0 + 1}) \\&= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (\overline{1}) \\&= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 \\&= 0\end{aligned}$$

Expressões Booleanas

- Em geral, as regras a seguir têm de ser obedecidas quando avaliamos uma expressão booleana:
 1. Primeiro, realize as inversões de termos simples; ou seja, $\overline{0} = 1$ ou $\overline{1} = 0$
 2. Em seguida, realize as operações dentro de parênteses
 3. Realize as operações *AND* antes das operações *OR*, a menos que os parênteses indiquem o contrário
 4. Se uma expressão tiver uma barra sobre, realize a operação indicada pela expressão e, em seguida, inverta o resultado

Expressões Booleanas

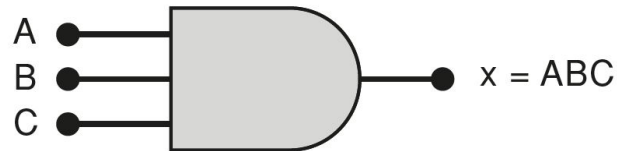
- **Exercício:** obter o nível lógico da saída x para o circuito abaixo para o caso em que $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$ e $D = 1$



Expressões Booleanas

Circuitos Obtidos de Expressões

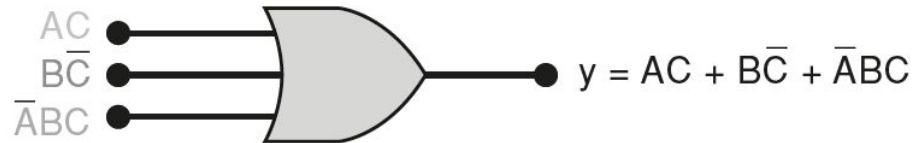
- Quando a operação de um circuito é definida por uma expressão booleana, podemos desenhar o diagrama do circuito lógico diretamente a partir da expressão
- Por exemplo, dada a expressão $x = A \cdot B \cdot C$, sabemos imediatamente que se faz necessária de uma porta **AND** de **3 entradas**



Expressões Booleanas

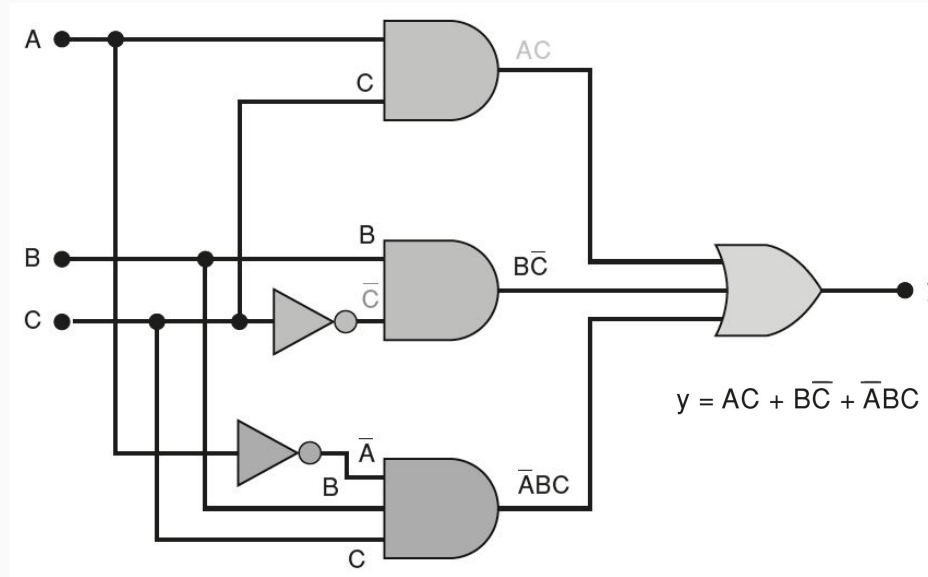
Exemplo: Construir um circuito cuja saída seja $y = AC + B\bar{C} + \bar{A}BC$

- Essa expressão booleana contém 3 entradas (A , B , C) e 3 termos (AC , BC , $\bar{A}\bar{B}C$), sobre os quais é aplicada a operação **OR**
- Essa expressão nos diz que é necessária uma porta **OR** de três entradas iguais a AC , $B\bar{C}$ e $\bar{A}BC$



Expressões Booleanas

- Cada entrada da porta **OR** tem um termo que é um produto lógico **AND**
- Assim, portas **AND**, com as entradas apropriadas, podem ser usadas para gerar os termos
- O uso de portas **NOT** produz os termos \bar{A} e \bar{C}



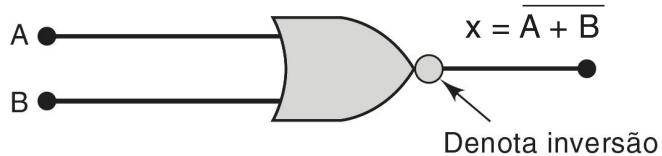
Expressões Booleanas

- **Exercício:** desenhe o diagrama do circuito que implemente a expressão $x = (A + B) \cdot (\overline{B} + C)$

Expressões Booleanas

- **Exercício:** determine a expressão booleana para uma porta **NOR** de três entradas (**A**, **B**, **C**) seguida de uma porta **NOT**

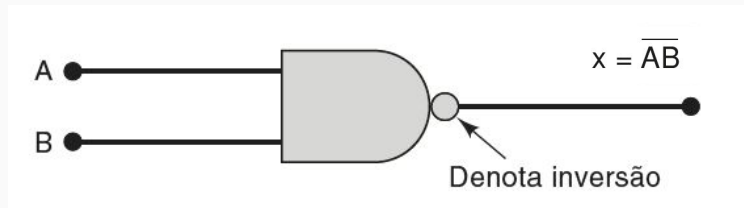
Relembrando - porta **NOR**:



Expressões Booleanas

- **Exercício:** desenhe o circuito lógico que tem como expressão:
 - $x = \overline{AB \cdot (\overline{C + D})}$
- **Exercício:** implemente o mesmo circuito representado pela expressão booleana anterior usando apenas portas **NOR** e **NAND**

Relembrando - porta **NAND**:



Expressões Booleanas

Tabelas-Verdade Obtidas de Expressões

- Para extrair a **Tabela-Verdade** de uma expressão, realiza-se o seguinte procedimento:
 1. Cria-se o quadro com todas as possibilidades de valores para as entradas
 2. Criam-se colunas para os vários membros da expressão
 3. Preenche-se as colunas com os resultados parciais de cada membro
 4. Cria-se uma coluna para o resultado final
 5. Preenche-se a coluna com o resultado final

Expressões Booleanas

- **Exemplo:** obtenha a Tabela-Verdade dada a expressão:
 - $x = \bar{A}.B + B.C$

Expressões Booleanas

- **Exemplo:** obtenha a Tabela-verdade dada a expressão:

- $x = \bar{A}.B + B.C$

1.

A	B	C
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Expressões Booleanas

- **Exemplo:** obtenha a Tabela-verdade dada a expressão:

- $x = \bar{A}.B + B.C$

2.

A	B	C	\bar{A}	$\bar{A}B$	BC
0	0	0	1		
0	0	1	1		
0	1	0	1		
0	1	1	1		
1	0	0	0		
1	0	1	0		
1	1	0	0		
1	1	1	0		

Expressões Booleanas

- **Exemplo:** obtenha a Tabela-verdade dada a expressão:

- $x = \bar{A}.B + B.C$

3.

A	B	C	\bar{A}	$\bar{A}B$	BC
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1

Expressões Booleanas

- **Exemplo:** obtenha a Tabela-verdade dada a expressão:

- $x = \bar{A}.B + B.C$

4.

A	B	C	\bar{A}	$\bar{A}B$	BC	x
0	0	0	1	0	0	
0	0	1	1	0	0	
0	1	0	1	1	0	
0	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	0	
1	0	1	0	0	0	
1	1	0	0	0	0	
1	1	1	0	0	1	

Expressões Booleanas

- **Exemplo:** obtenha a Tabela-verdade dada a expressão:

- $x = \bar{A}.B + B.C$

5.

A	B	C	\bar{A}	$\bar{A}B$	BC	x
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1

Expressões Booleanas

- **Exercício:** obtenha a Tabela-Verdade a partir da expressão:
 - $x = A\bar{B}C + A\bar{D} + \bar{A}BD$

Expressões Booleanas

Expressões Obtidas de Tabelas-Verdade

- É possível também extrair a expressão booleana a partir da **Tabela-Verdade**
- Para isso, realiza-se o seguinte procedimento:
 1. Identifica-se as saídas iguais a 1
 2. Nessas linhas, obtêm-se expressões *AND* considerando as entradas:
 - a. Normal se entrada igual a 1
 - b. Com barra (negação) se a entrada é igual a 0
 3. Aplica-se operador *OR* em todas as expressões

Expressões Booleanas

Expressões Obtidas de Tabelas-Verdade

- Exemplo:

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

→ $\bar{A} \cdot \bar{B}$

→ $\bar{A} \cdot B$

→ $A \cdot B$

$$S = \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B + A \cdot B$$

Expressões Booleanas

Expressões Obtidas de Tabelas-Verdade

- Exemplo:

A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

→ $\bar{A}.\bar{B}.\bar{C}$

→ $\bar{A}.B.\bar{C}$

→ $A.B.\bar{C}$

→ $A.B.C$

$$S = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.\bar{C} + A.B.\bar{C} + A.B.C$$

Expressões Booleanas

- **Exercícios para entrega**

Exercício 01: obtenha a Tabela-Verdade a partir das expressões:

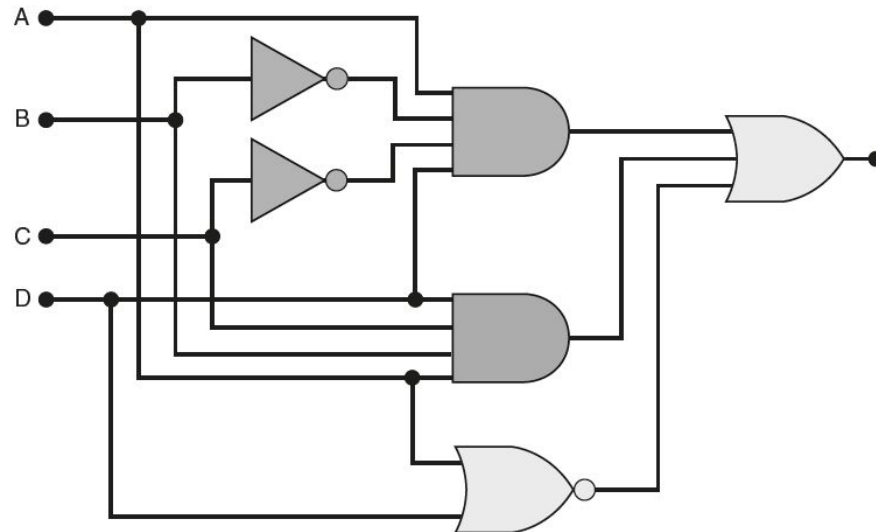
a) $S = \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + ABC + ABC\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$

b) $S = A\bar{B} + ACD + \bar{A}\bar{B}C$

Expressões Booleanas

- **Exercícios para entrega - Exercício 02:** determine a expressão do circuito lógico:

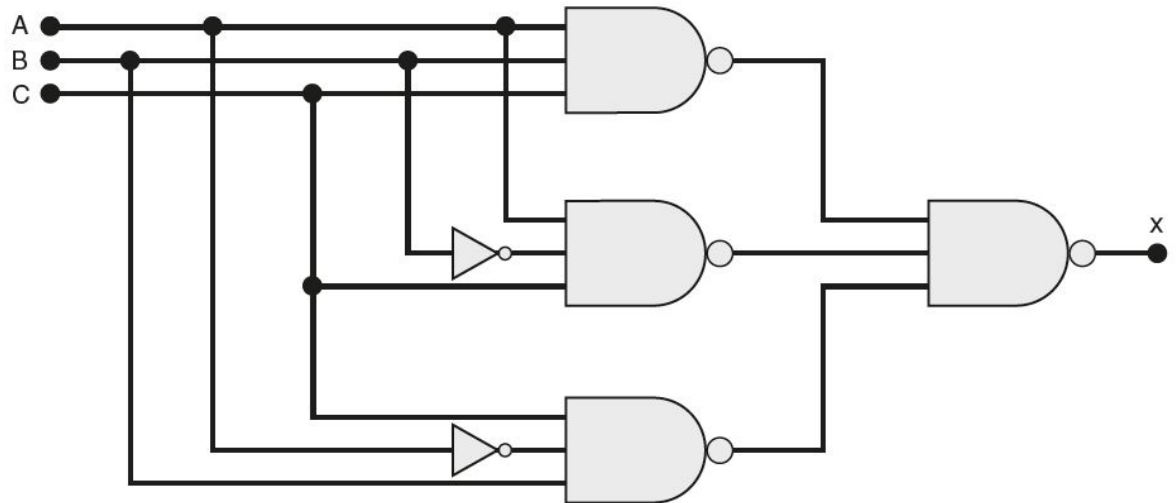
a)



Expressões Booleanas

- **Exercícios para entrega - Exercício 02:** determine a expressão do circuito lógico:

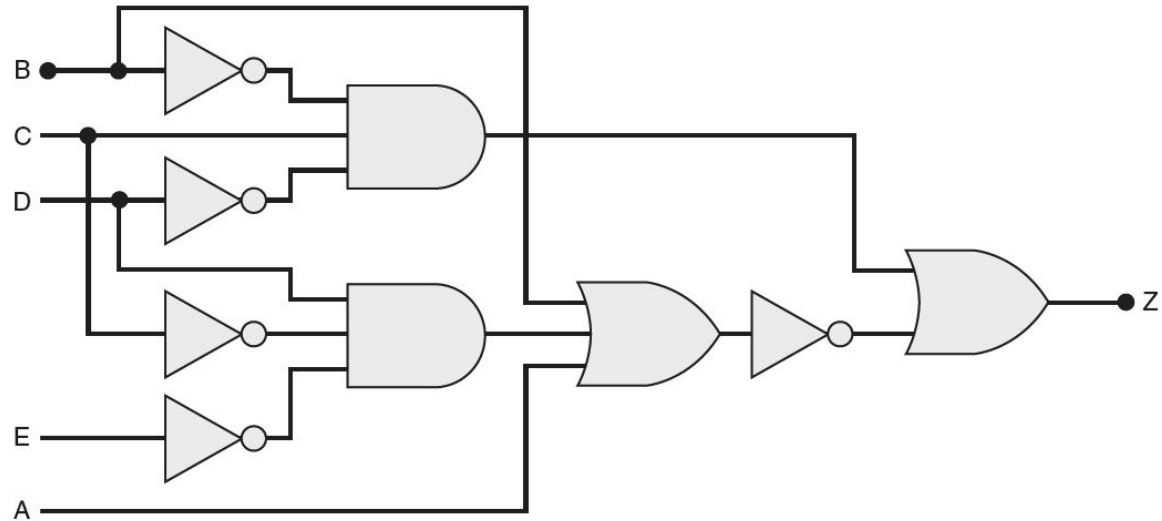
b)



Expressões Booleanas

- **Exercícios para entrega - Exercício 02:** determine a expressão do circuito lógico:

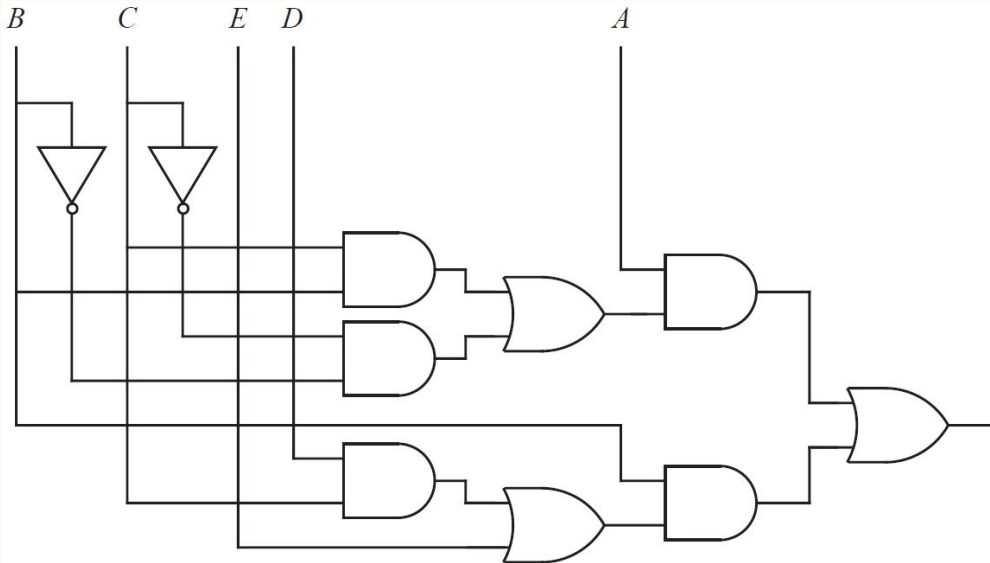
c)



Expressões Booleanas

- **Exercícios para entrega - Exercício 02:** determine a expressão do circuito lógico:

d)



Expressões Booleanas

- Exercícios para entrega

Exercício 03: desenhe o circuito lógico que tem como expressão:

a) $S = \overline{\overline{A}\overline{B}} + \overline{A\overline{C}}$

b) $S = \overline{A\overline{B}} + \overline{ACD} + \overline{A\overline{B}C}$

c) $S = \overline{(A+B)\overline{AC}} + \overline{\overline{\overline{B}+D}}$

d) $S = \overline{\overline{A}BC}(\overline{A+D})$

e) $S = (D + \overline{(A+B)C})E$