Centro Universitário da FEI

MATRIZES-1

RESUMO TEÓRICO E EXERCÍCIOS

Equipe de MAG110

Agosto - 2020

MATRIZES

O que é uma matriz?

É uma tabela contendo mxn elementos, com m,n $\in N$, dispostos em linhas e colunas.

Ex.: A= $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 0 \\ \sqrt{7} & 1/3 \end{pmatrix}$

Como se representa uma matriz?

Utilizando-se dos parênteses A=( ) ou colchetes A=[ ];

A= $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 0 \\ \sqrt{7} & 1/3 \end{pmatrix}$ ou A= $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 0 \\ \sqrt{7} & 1/3 \end{bmatrix}$

MATRIZES

Usualmente, como se indica uma Matriz?

Com letra latina maiúscula, A=$[a_{ij}]$, onde i=indica a linha e j=indica a coluna em que se encontra o elemento; sabendo que $1 \leq i \leq m \; e \; 1 \leq j \leq n$.

Ex.: A=$[a_{ij}]$; $1 \leq i \leq 2 \; e \; 1 \leq j \leq 3$ → A=$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$.

Matriz Quadrada

Quando m=n, ou seja, número de linhas é igual ao número de colunas

A=$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz Retangular

Quando m≠n, ou seja, número de linhas diferente do número de colunas.

A=$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, ordem 3x2

MATRIZES

Matriz Nula

Quando todos os elementos são nulos, ou seja, iguais a 0.

A=$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz Identidade

Quando temos uma matriz quadrada , onde os elementos da diagonal principal são unitários e os demais são nulos, se i=j → a_{ij} =1 e se i≠j → $a_{ij} = 0$.

I_3=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz Diagonal

Quando temos uma matriz quadrada, todos os elementos da diagonal principal não são nulos e os demais são nulos, se i=j → a_{ij}≠0 e se i≠j → $a_{ij} = 0$

D=$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

OPERAÇÕES COM MATRIZES

Adição

Dadas duas matrizes de mesma ordem: $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, 1≤i ≤m e 1≤j ≤n, a soma é a matriz: A+B=(a_{ij}+b_{ij}).

Ex.: $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 2 \end{bmatrix}$

Propriedades da Adição de Matrizes

$\forall\ A, B, C$, de mesma ordem, tem-se:

a) A+B=B+A (*comutativa*)
b) A+(B+C)=(A+B)+C (*associativa*)
c) A+0=A (*existência do elemento neutro*)
d) A+(-A)=0 (*existência do elemento oposto*)

OPERAÇÕES COM MATRIZES

Multiplicação de um Número real por uma Matriz

Dado um número real λ e uma matriz $A = \left[a_{ij}\right]$, de ordem mxn:

λ A = λ $\left[a_{ij}\right]$ = λ a_{ij}

Ex.: A= $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$, 3A=$\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 24 & 15 \end{bmatrix}$

Propriedades da Multiplicação de um Número Real por Matrizes

∀ $A, B,$ de mesma ordem, ∀ λ , μ ∈ℜ tem-se:

a) (λ A) μ =(λ μ)A
b) λ (A+B)= λ A+ λ B
c) (λ + μ)A= λA + μ A
d) 1A=A (elemento neutro)

OPERAÇÕES COM MATRIZES

Produto entre duas Matrizes

Dadas duas matrizes A=$[a_{ij}]$ e B=$[b_{jk}]$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq p$, o produto de A por B é uma matriz C=$[c_{ik}]$, de ordem nxp, onde $c_{ik} = \sum_1^n a_{ij}b_{jk}$.

O produto entre duas matrizes só é possível se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B.

Ex.: $A_{3x2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ e $B_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

AB=$C = \begin{bmatrix} 1*2+2*-1 & 1*5+2*3 & 1*4+2*1 \\ 0*2+3*-1 & 0*5+3*3 & 0*4+3*1 \\ 1*2+5*-1 & 1*5+5*3 & 1*4+5*1 \end{bmatrix}$=$\begin{bmatrix} 0 & 11 & 6 \\ -3 & 9 & 3 \\ -3 & 20 & 9 \end{bmatrix}$

Calcule BA:

BA=$\begin{bmatrix} 6 & 39 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$

OPERAÇÕES COM MATRIZES

Importante:

a) O produto AB e BA não é comutativo, dependendo da ordem das matrizes esse produto pode nem existir, e caso exista, a ordem da matriz produto poderá ser diferente.

Ex.: $A_{3x2}B_{2x1} = C_{3x1}$ e $B_{2x1}A_{3x2}$=∄ (não é possível realizar essa operação)

b) (A+B).C=AC+BC é válida?
Sim, desde que existam esses produtos.

MATRIZES TRANSPOSTAS

Matrizes Transpostas

Dada a matriz A=[a_{ij}]; $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, a matriz transposta é indicada por A^T, e é a matriz tal que B=[b_{ji}], onde b_{ji}=a_{ij}.

Ex.: $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ e $A^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

MATRIZES TRANSPOSTAS

Propriedades da Matriz Transposta

a) $(A+B)^T = A^T + B^T$
b) $(AB)^T = B^T A^T$
c) $(A^T)^T = A$
d) $(\lambda A)^T = \lambda A^T, \lambda \in \Re$

EXERCÍCIOS

Escrever a matriz $A = (a_{ij})$ nos seguintes casos:

1) A é do tipo 2x3 com a_{ij}=0 para i=j e a_{ij}=1 para i≠j;

2) A é do tipo 3x2 com a_{ij}=2 para i=j-1 e a_{ij}=0 para i≠j-1;

3) A é quadrada de ordem 3 com a_{ij}=2i+3j-1.

EXERCÍCIOS

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, Calcular:

a) A+B

b) A+B+C

c) X=C-A+B

EXERCÍCIOS

Dadas as matrizes do tipo 2x3, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, calcular:

a) 2A-3B+C

b) A matriz X, tal que X=3B+C

EXERCÍCIOS

Dadas as matrizes A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$,

calcular:

a) AB e BA

b) $2A-3B^T$

c) $(A+B^T)(A^T-B)$

a) Dadas as matrizes quadradas $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, calcular A^2 e B^3.

b) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, calcular $A^2 - 6A + 5I_2$.

Bibliografia:

1) Loreto, A. C. C.; Junior, A. P. L. VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA Teoria e Exercícios. 4° Ed. LCTE Editora. 2014. São Paulo.
2) Watanabe, R. G., Mello, D. A. VETORES E UMA INICIAÇÃO A GEOMETRIA ANALÍTICA. 2° Ed. LF Editorial. 2011. São Paulo.