Trigonometria no triângulo retângulo

Seja ΔABC um triângulo retângulo e seja θ um ângulo interno deste triângulo diferente de $90°$.

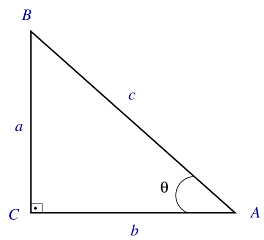


Figura 1. Trigonometria no triângulo retângulo

(**Tigonometria no triângulo retângulo**) Definimos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} = \frac{b}{a} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}} = \frac{c}{a} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

(**Teorema de Pitágoras**)

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Isto é, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Decorre do teorema de Pitágoras a seguinte relação fundamental:

(**Relação trigonométrica fundamental)**

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

De fato:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Medida de ângulos em radianos

Por definição, a medida de um ângulo θ em radianos é o quociente entre o comprimento do arco $\widehat{AB}$, determinado pelo ângulo θ, e o tamanho do raio, isto é, $\theta = \dfrac{\widehat{AB}}{R}$.

• A medida de um ângulo em radianos é admensional; é apenas um número real. Mas é usual usar *rad* para indicar que se trata de radianos. Assim, $\theta = 15$ é o mesmo que $\theta = 15\,\text{rad}$

• Como o comprimento da circunferência de raio R é $2\pi R$ e o ângulo de $180°$ determina um arco cujo comprimento é metade do comprimento da circunferênica, isto é, πR, vemos que a medida, em radianos, do ângulo de $180°$ é $\pi\,\text{rad}$.

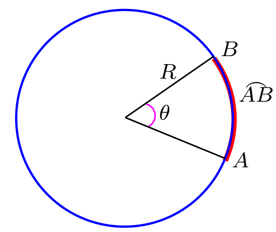


Figura 2. Medida de ângulo em radianos

• A transformação da medida de um ângulo em graus para radianos ou vice–versa segue uma regra de três direta, lembrando que $180° = \pi\,\text{rad}$.

• Se $\theta = 1$, então o arco $\widehat{AB}$, determinado por θ, é igual ao raio R da circunferência. Portanto, o ângulo de 1 *rad* é o ângulo de determina na circunferência um arco cujo comprimento é igual ao comprimento do raio.

$$\theta = 1 \Rightarrow 1 = \frac{\widehat{AB}}{R} \Rightarrow \widehat{AB} = R$$

• Se $R = 1$, então o comprimento do arco $arcoAB$, determinado pelo ângulo θ, é igual à medida do ângulo θ em radianos.

$$R = 1 \Rightarrow \theta = \widehat{AB}$$

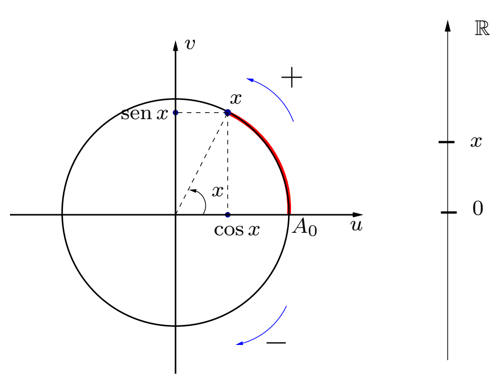
• Podemos ter $\theta > 2\pi$, e portanto, o arco correspondente pode "dar uma ou mais voltas" na circunferência.

O Ciclo trigonométrico

Considere num plano cartesiano uma circunferência de raio 1. Seja A_0 o ponto $(1, 0)$, que será chamado de *origem dos ângulos*.

Dado um número real positivo x considere o arco, marcado no sentido anti–horário, de início em A_0 e de tamanho x. O ponto final deste arco será denotado também por x.

Portanto associamos ao número real x um ponto $x = (u, v)$ no ciclo trigonométrico. A coordenada u é chamada de *cosseno* de x e a coordenada v é chamada de *seno* de x e escrevemos $u = \cos x$, $v = \operatorname{sen} x$. Se x é número real negativo, procedemos de modo análogo, marcando o arco correspondente no sentido horário.



• A equação da circunferência acima é $u^2 + v^2 = 1$. Portanto, para o ponto $x = (u, v)$ no ciclo trigométrico vale $u^2 + v^2 = 1$, isto é, $\boxed{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}}$.

Funções trigonométricas

Ficam definidas, assim, as funções seno e cosseno:

(seno) $\operatorname{sen}: \mathbb{R} \to [-1,1], \quad x \mapsto \operatorname{sen} x;$

(cosseno) $\cos: \mathbb{R} \to [-1,1], \quad x \mapsto \cos x$

• Uma propriedade importante das funções seno e cosseno é o fato de que são *periódicas* de período 2π, isto é,

$\boxed{\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \cos(x+2\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}}$.

De modo mais geral: se k é um número inteiro, então

$$\operatorname{sen}(x+2k\pi) = \operatorname{sen} x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \cos(x+2k\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Assim, para construir os gráficos de seno e cosseno, bastar conhecer seus valores num intervalo de comprimento 2π. A tabela abaixo apresenta alguns valores de seno e cosseno para alguns ângulos notáveis.

x	$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
0	1	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/2$	0	1
π	-1	0
$3\pi/2$	0	-1
2π	1	0

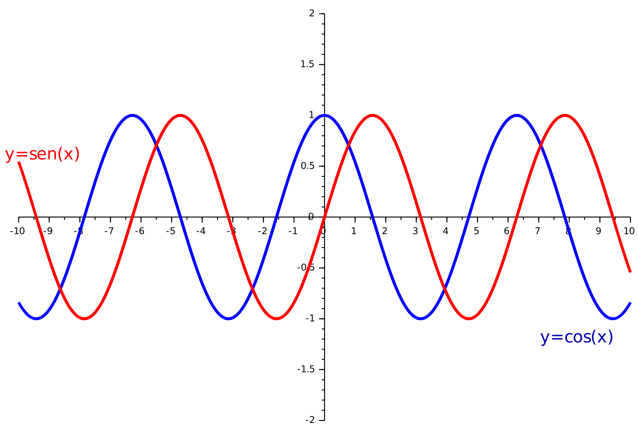


Figura 3. Os gráficos de seno(vermelho) e cosseno

A partir das funções seno e cosseno, podemos definir outras funções trigonométricas:

- tangente: $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
- cotangente: $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$
- secante: $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
- cossecante: $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

• Também são usadas as notações tan, cot, sec e csc, para indicar a tangente, cotangente, secante e cossecante, respectivamente.

• O domínio da função tangente é $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}$. Portanto o domínio da tangente não é todo $\mathbb{R}$. Valem observações análogas para as outras funções: cotangente, secante e cossecante.

• As funções tangente e cotangene tem peródo π, enquanto as funções secante e cossecante são periódicas de período 2π. Isto é, $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$ e $\operatorname{cotg}(x+\pi) = \operatorname{cotg} x$; $\sec(x+2\pi) = \sec x$ e $\operatorname{cosec}(x+2\pi) = \operatorname{cosec} x$, para todo x no domínio da respectiva função.

Algumas identidades trigonométricas

(1) $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$, onde $\operatorname{tg} x$ e $\sec x$ existirem

(3) $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$, onde $\operatorname{cotg} x$ e $\operatorname{cosec} x$ existirem

(4) $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \operatorname{sen} y \cos x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Caso particular: $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

(5) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Caso particular: $\cos(2x) = cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

(6) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{x-y}{2}\right) \cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$

(7) $\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

Exemplo 1. Sendo x um arco do segundo quadrante com $\operatorname{sen} x = 4/7$, determine; $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\operatorname{sen} 2x$, $\cos 2x$ e o quadrante do ângulo $2x$.

Solução:

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x + \left(\frac{4}{7}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{16}{49} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{33}{49}$$

Portanto $\cos x = \pm\sqrt{\dfrac{33}{49}} = \pm\dfrac{\sqrt{33}}{7}$. Como x é um arco do terceiro quadrante, temos $\cos x = -\dfrac{\sqrt{33}}{7}$

Assim,

- $\operatorname{tg} x = \dfrac{4/7}{-\sqrt{33}/7} = -\dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{7}{\sqrt{33}} = -\dfrac{4}{\sqrt{33}}$, ou, $\operatorname{tg} x = -\dfrac{4\sqrt{33}}{33}$
- $\operatorname{cotg} x = \dfrac{-\sqrt{33}/7}{4/7} = -\dfrac{\sqrt{33}}{7} \cdot \dfrac{7}{4} = -\dfrac{\sqrt{33}}{4}$
- $\sec x = \dfrac{1}{-\sqrt{33}/7} = -\dfrac{7}{\sqrt{33}}$
- $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{4/7} = \dfrac{7}{4}$
- $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2 \cdot \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{-\sqrt{33}}{7} = -\dfrac{8\sqrt{33}}{49}$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{33}{49} - \dfrac{16}{49} = \dfrac{17}{49}$
- $\cos 2x > 0$ e $\operatorname{sen} 2x < 0 \Rightarrow x \in$ quarto quadrante

Exemplo 2. Mostre que:

(a) $\cos(-x) = \cos x$ (b) $\operatorname{sen}(x + \pi/2) = \cos x$

Solução:

(a) $\cos(-x) = \cos(0 - x) = \cos 0 \cos x + \operatorname{sen} 0 \operatorname{sen} x$
$= 1 \cdot \cos x - 0 \cdot \operatorname{sen} x = \cos x$

(b) $\operatorname{sen}(x + \pi/2) = \operatorname{sen} x \cos \pi/2 + (\operatorname{sen} \pi/2) \cos x$
$= (\operatorname{sen} x) \cdot 0 + 1 \cdot \cos x = \cos x$

Exemplo 3. Mostre que:

(a) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$

(b) $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

Solução:

(a) $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2} \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$

(b) Sabemos que:

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \quad \text{(I)}$$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x \quad \text{(II)}$$

Somando as equações (I) e (II) temos: $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$.

Portanto, $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

Triângulos quaisquer

Para um triângulo qualquer valem a lei dos cossenos e a lei dos senos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cos \hat{A} \quad \text{(Lei dos cossenos)}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \quad \text{(Lei do senos)}$$

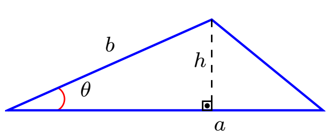
- Note que também são válidas: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$ e $c^2 = a^2 + b^2 = 2ab \cos \hat{C}$

Exemplo 4. Mostre que a área de um triângulo qualquer é dada por $\dfrac{1}{2} ab \operatorname{sen} \theta$, sendo θ o ângulo entre os lados a e b.

Solução:

área$(\Delta ABC) = \dfrac{a \cdot h}{2}$. Mas, $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{h}{b}$, veja figura abaixo. Logo, $h = b \operatorname{sen} \theta$.

Assim, área$(\Delta ABC) = \dfrac{ab \operatorname{sen} \theta}{2}$



Exemplo 5. Considee o triângulo ΔABC cujos lados têm as seguintes medidas: $a = 6\,cm$, $b = 4\,cm$ e $c = 3\,cm$. Determine: (a) $\cos \hat{B}$, (b) $\operatorname{sen} \hat{B}$ e (c) a área do triângulo.

Solução:

(a) Pela lei dos cossenos temos:

$$4^2 = 6^2 + 3^2 - 2(6)(3) \cos \hat{B} \Rightarrow -29 = -36 \cos \hat{B}$$

Portanto, $\cos \hat{B} = \dfrac{29}{36}$

(b) $\operatorname{sen}^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \hat{B} + \left(\dfrac{29}{36}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 \hat{B} = 1 - \dfrac{841}{1296}$

$\operatorname{sen}^2 \hat{B} = \dfrac{455}{1296} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{B} = \pm\sqrt{4551296} = \pm\dfrac{\sqrt{455}}{36}$

$0 \leq \hat{B} \leq \pi/2 \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{B} \geq 0$. Portanto, $\operatorname{sen} \hat{B} = \dfrac{\sqrt{455}}{36}$

(c) O âmgulo $\hat{B}$ é formado pelos lados $BA = c$ e $BC = a$. Assim,

área$(\Delta ABC) = \dfrac{ac \operatorname{sen} \hat{B}}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \dfrac{\sqrt{455}}{36} = \dfrac{\sqrt{455}}{4}\, cm^2$

Exercícios de revisão

1 Sendo x um arco do terceiro quadrante com $\operatorname{sen} x = -3/5$, determine; $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\operatorname{sen} 2x$, $\cos 2x$ e o quadrante do ângulo $2x$. Respostas: $-4/5$, $3/4$, $4/3$, $-5/4$, $24/25$, $7/25$. O ângulo $2x \in$ primeiro quadrante.

2 Considere o triângulo ABC cujos lados são dados por $a = 8\,cm$, $b = 6\,cm$ e $c = 4\,cm$. Determine:

(a) $\cos \hat{A}$ e $\operatorname{sen} \hat{A}$. Respostas: $\cos \hat{A} = 1/4$, $\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

(b) A área do triângulo ABC. Resposta: $3\sqrt{15}\, cm^2$

3 Mostre que:

(a) $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

(b) $\cos(x + \pi/2) = -\operatorname{sen} x$

(c) $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

(d) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

4 Complete a tabela abaixo:

x	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$0°$ (0)		
$30°$ $(\pi/6)$		
$45°$ $(\pi/4)$		
$60°$ $(\pi/3)$		
$90°$ $(\pi/2)$		
$120°$ $(2\pi/3)$		
$135°$ $(3\pi/4)$		
$150°$ $(5\pi/6)$		
$180°$ (π)		
$210°$ $(7\pi/6)$		
$225°$ $(5\pi/4)$		
$240°$ $(4\pi/3)$		
$270°$ $(3\pi/2)$		
$300°$ $(5\pi/6)$		
$315°$ $(7\pi/4)$		
$330°$ $(11\pi/6)$		
$360°$ (2π)		

5 Com a ajuda de um software gráfico esboce os gráficos da tangente, cotangente, secante e cossecante.