Forma Indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$

Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, então dizemos que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

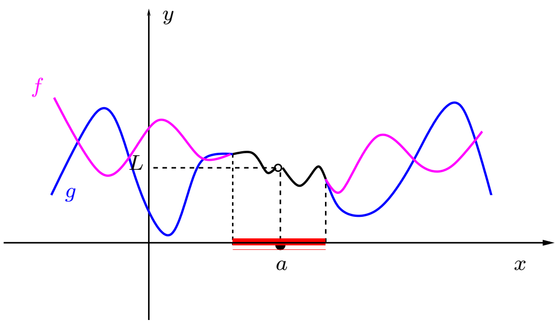
é uma forma indeterminada do tipo 0/0.

• O fato de $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$, não significa que não existe tal limite: nos diz apenas que não podemos calculá–lo diretamente aplicando a álgebra dos limites.

A idéia aqui é substituir $\frac{f(x)}{g(x)}$ por outra expressão que tenha *os mesmos valores* em algum intervalo aberto em torno do ponto a (sem considerar o ponto a) e cujo limite seja possível calcular.

Sejam I um intervalo aberto e $a \in I$. Se f e g são funções tais que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I - \{a\}$. então

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} g(x) = L$$



As funções f e g da figura acima coincidem no intervalo aberto I que contém o ponto a, exceto no próprio ponto a. Logo, as duas funções têm o mesmo limite L, quando $x \to a$.

Exemplo 1.

- $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4$
- $\lim_{x\to 1} \frac{3x^3-7x^2+4x}{x^2-x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{(3x^2-4x)(x-1)}{x(x-1)}$ $= \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-4x}{x} = -1$

(Caso1) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$, com $f(x)$ e $g(x)$ funções polinomiais (com $g(x)$ não identicamente nula)

$f(a) = 0$ e $g(a) = 0 \Rightarrow a$ é raiz de f e de g.

Assim $f(x)$ e $g(x)$ são divisíveis por $x-a$, isto é, existem polinômios $q_1(x)$ e $q_2(x)$ tais que

$$f(x) = q_1(x)(x-a) \quad \text{e} \quad g(x) = q_2(x)(x-a)$$

Portanto

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{q_1(x)(x-a)}{q_2(x)(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{q_1(x)}{q_2(x)}$$

desde que este último limite exista.

• Para dividir $f(x)$ e $g(x)$ por $x-a$ usamos a *divisão longa* ou o *dispositivo prático de Briot-Ruffini.*

Exemplo 2.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+4x^2+x-6}{x^2+x-2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Como 1 é raiz do numerador e do denominador, segue que x^3+4x^2+x-6 e x^2+x-2 são divisíveis por $x-1$.

- Vamos dividir x^3+4x^2+x-6 por $x-1$, via dispositivo prático de Briot-Ruffini:

1	1	4	1	-6
	1	5	6	0

O quociente da divisão de x^3+4x^2+x-6 por $x-1$ é x^2+5x+6 e o resto é 0. Assim, $x^3+4x^2+x-6 = (x-1)(x^2+5x+6)$

- Vamos dividir x^2+x-2 por $x-1$, via dispositivo prático de Briot-Ruffini:

1	1	1	-2
	1	2	0

O quociente da divisão de x^2+x-2 por $x-1$ é $x+2$ e o resto é 0. Assim, $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$

Assim:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+4x^2+x-6}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+5x+6)}{(x-1)(x+2)}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+5x+6}{x+2} = \frac{12}{3} = 4$$

Exemplo 3.

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Como -2 é raiz dos dois polinômios, podemos divídí–los por $(x+2)$. Temos:

- Vamos dividir x^3+3x^2-4 por $x+2$, via dispositivo prático de Briot-Ruffini:

-2	1	3	0	-4
	1	1	-2	0

O quociente da divisão de x^3+3x^2-4 por $x+2$ é x^2+x-2 e o resto é 0. Assim, $x^3+3x^2-4 = (x+2)(x^2+x-2)$

- Vamos dividir x^3+5x^2+8x+4 por $x+2$, via dispositivo prático de Briot-Ruffini:

-2	1	5	8	4
	1	3	2	0

O quociente da divisão de x^3+5x^2+8x+4 por $x+2$ é x^2+3x+2 e o resto é 0. Assim, $x^3+5x^2+3x+2 = (x+2)(x^2+3x+2)$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2+x-2)}{(x+2)(x^2+3x+2)} =$$
$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Novamente: -2 é raiz de x^2+x-2 e de x^2+3x+2. Vamos divídí–los por $x+2$:

- Vamos dividir $x^2 + x - 2$ por $x + 2$, via dispositivo prático de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} -2 & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

O quociente da divisão de $x^2 + x - 2$ por $x + 2$ é $x - 1$ e o resto é 0. Assim, $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$

- Vamos dividir $x^2 + 3x + 2$ por $x + 2$, via dispositivo prático de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} -2 & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

O quociente da divisão de $x^2 + 3x - 2$ por $x + 2$ é $x + 1$ e o resto é 0. Assim, $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to -2} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

Concluimos que $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = 3$

Exemplo 4.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 2^4}{x - 2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Dividindo $x^4 - 2^4$ por $x - 2$, via Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{r|ccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2^4 \\ \hline & 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 0 \end{array}$$

Logo, $x^4 - 2^4 = (x - 2)(x^3 + 2x^2 + 2^2x + 2^3)$ e

Portanto,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 2^4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^3 + 2x^2 + 2^2x + 2^3)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 2} (x^3 + 2x^2 + 2^2x + 2^3)$$

$$= 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 = 4 \cdot 2^3$$

Exemplo 5. Vamos generalizar o exemplo acima:

$\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \left(\frac{0}{0}\right)$, com n inteiro positivo e $a \in \mathbb{R}$.

Dividindo $x^n - a^n$ por $x - a$ via Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{r|cccccccc} a & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a^n & (\leftarrow x^n - a^n) \\ \hline & 1 & a & a^2 & a^3 & \cdots & a^{n-1} & 0 & \end{array}$$

Assim,

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

Portanto,

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})}{x - a}$$

$$= \lim_{x\to a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

$$= a^{n-1} + aa^{n-2} + \cdots + a^{n-2}a + a^{n-1}$$

$$= \underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1} + a^{n-1}}_{n \text{ parcelas}} = na^{n-1}$$

Exemplo 6. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \left(\frac{1}{x-5} - \frac{7}{x^2 - 3x - 10}\right) = \left(\frac{1}{0} - \frac{7}{0}\right)$

Note que 5 é raiz dos dois denominadores e, portanto, podemos dividí-los por $x - 5$. É claro que não precisamos fazer nada com o denominador da fração da esquerda. Dividindo $x^2 - 3x - 10$ por $x - 5$ obtemos: $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$. Verifique!

Portanto,

$$\lim_{x\to 5} \left(\frac{1}{x-5} - \frac{7}{x^2 - 3x - 10}\right) = \lim_{x\to 5} \left(\frac{1}{x-5} - \frac{7}{(x-5)(x+2)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{x + 2 - 7}{(x-5)(x+2)} = \lim_{x\to 5} \frac{x - 5}{(x-5)(x+2)} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{7}$$

Exemplo 7.

Determine L para que a função f dada abaixo seja contínua em $x = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}, & \text{se } x \neq 3 \\ L, & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

f é contínua em $x = 3$ se, e somente se, $\displaystyle\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = L$

Portanto

$$L = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{x - 3} = \lim_{x\to 3} (x + 1) = 4$$

(Caso 2) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$, com $f(x)$ e $g(x)$ funções envolvendo raízes.

No caso de raiz quadrada, multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado da expressão que apresenta a raiz quadrada e cujo limite é zero.

- O *conjugado* de $(x - a)$ é $(x + a)$ e vice–versa.
- $(x - a)(x + a) = x^2 - a^2$.

Exemplos:

- $(x - 4)(x + 4) = x^2 - 16$
- $(3 + \sqrt{x})(3 - \sqrt{x}) = 9 - (\sqrt{x})^2 = 9 - x$
- $(\sqrt{x} + \sqrt{5})(\sqrt{x} - \sqrt{5}) = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{5})^2 = x - 5$
- $(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3) = x - 9$

Exemplo 8.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Multiplicando numerador e denominador pelo *conjugado* da expressão $\sqrt{x}-1$, temos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x})^2-(1)^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{1+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$$

Exemplo 9.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Multiplicando numerador e denominador pelo *conjugado* de $\sqrt{x+1}-2$, temos:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1})^2-(2)^2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+2)=\sqrt{4}+2=4$$

Exemplo 10.

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2+x-2}-2}{x+3}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Multiplicando, numerador e denominador pelo conjugado do numerador obtemos:

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2+x-2}-2}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{(\sqrt{x^2+x-2}-2)(\sqrt{x^2+x-2}+2)}{(x+3)(\sqrt{x^2+x-2}+2)}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-2-4}{(x+3)(\sqrt{x^2+x-2}+2)}=\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{(x+3)(\sqrt{x^2+x-2}+2)}$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Como -3 é raiz de x^2+x-6, podemos dividí–lo por $x+3$:

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{(x+3)(\sqrt{x^2+x-2}+2)}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(\sqrt{x^2+x-2}+2)}$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+x-2}+2}=\frac{-5}{\sqrt{4}+2}=\frac{-5}{4}$$

Exemplo 11.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{3-\sqrt{x+6}}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Multiplicando, numerador e denominador por seus conjugados obtemos:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{3-\sqrt{x+6}}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)(3+\sqrt{x+6})}{(3-\sqrt{x+6})(3+\sqrt{x+6})(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+1-4)(3+\sqrt{x+6})}{(9-(x+6))(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(3+\sqrt{x+6})}{(-x+3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-(3+\sqrt{x+6})}{\sqrt{x+1}+2}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$$

Exemplo 12.

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}-x+2}{x^2-3x+10}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Temos

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}-x+2}{x^2-3x-10}=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}-(x-2)}{x^2-3x-10}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{2x-1}-(x-2))(\sqrt{2x-1}+x-2)}{(x^2-3x-10)(\sqrt{2x-1}+x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{2x-1-(x-2)^2}{(x^2-3x-10)(\sqrt{2x-1}+x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{2x-1-(x^2-4x+4)}{(x^2-3x-10)(\sqrt{2x-1}+x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-x^2+6x-5}{(x^2-3x-10)(\sqrt{2x-1}+x-2)}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Como 5 é raiz de $-x^2+6x-5$ e de $x^2-3x-10$, dividindo esses dois polinômios por $x-5$ temos:

$$\lim_{x\to 5}\frac{-x^2+6x-5}{(x^2-3x-10)(\sqrt{2x-1}+x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(-x+1)}{(x-5)(x+2)(\sqrt{2x-1}+x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-x+1}{(x+2)(\sqrt{2x-1}+x-2)}=\frac{-4}{7\cdot 6}=-\frac{2}{21}$$

Exemplo 13. Determine L para que a função f dada abaixo seja contínua em $x=1$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{x^2+2x+6}}{x-1}, & \text{se } x\neq 1\\[2ex] L, & \text{se } x=1\end{cases}$$

f é contínua em $x=1$ se esomente se, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=L$.

Assim,

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{3-\sqrt{x^2+2x+6}}{x-1} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(3-\sqrt{x^2+2x+6})(3+\sqrt{x^2+2x+6})}{(x-1)(3+\sqrt{x^2+2x+6})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{9-(x^2+2x+6)}{(x-1)(3+\sqrt{x^2+2x+6})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-x^2-2x+3}{(x-1)(3+\sqrt{x^2+2x+6})} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(-x-3)}{(x-1)(3+\sqrt{x^2+2x+6})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-x-3}{3+\sqrt{x^2+2x+6}} = \frac{-4}{3+\sqrt{9}} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Mudança de variável no limite

Vamos ilustrar a técnica com alguns exemplos:

Exemplo 14.

$$\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{4-\sqrt{x}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Aqui faremos uma *mudança de variável ou substituição*, já que não adianta multiplicarmos $\sqrt[4]{x}-2$ por $\sqrt[4]{x}+2$. Faremos a mudança de variável $t = \sqrt[4]{x}$ (ou $x = t^4$), e reescreveremos todo o limite usando a nova variável t. Temos:

$t = \sqrt[4]{x} \Rightarrow t^2 = (\sqrt[4]{x})^2 = (x^{1/4})^2 = x^{1/2} = \sqrt{x}$

$x \to 16 \Rightarrow t \to 2$ (pois $\lim\limits_{x\to 16} t = \lim\limits_{x\to 16} \sqrt[4]{x} = 2$).

Assim:

$$\lim_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{4-\sqrt{x}} = \lim_{t\to 2} \frac{t-2}{4-t^2} = \lim_{t\to 2} \frac{t-2}{(2-t)(2+t)} = \lim_{t\to 2} \frac{-1}{t+2} = -\frac{1}{4}$$

Exemplo 15.

$$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Aqui a mudança de variável será $x = t^6$ (obs. 6 é o *mmc* entre 2 e 3). Temos:

$x = t^6 \Rightarrow \sqrt{x} = t^3$ e $\sqrt[3]{x} = t^2$. Além disso, $x \to 64 \Rightarrow t \to 2$.

Assim,

$$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \lim_{t\to 2} \frac{t^3-8}{t^2-4} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$t^2 = 4 = (t-2)(t+2)$ e $t^3-8 = (t-2)(t^2+2t+4)$ (faça a divisão usando, por exemplo, Briot-Ruffini).

Logo,

$$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \lim_{t\to 2} \frac{t^3-8}{t^2-4} = \lim_{t\to 2} \frac{(t-2)(t+2)}{(t-2)(t^2+2t+4)}$$

$$= \lim_{t\to 2} \frac{t+2}{t^2+2t+4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

(Caso 3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$, com $f(x)$ e $g(x)$ envolvendo funções trigonométricas.

Neste caso usamos o *limite fundamental trigonométrico ou 1º limite fundamental*:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

- Obs. Para a obtenção do primeiro limite fundamental veja o vídeo da aula do dia 10/10.

Exemplo 16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \quad (\alpha \neq 0)$

Vamos fazer a seguinte mudança de variável: $t = \alpha x$.

Temos: $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$ e $t = \alpha x \Rightarrow x = t/\alpha$

Assim:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t/\alpha} = \lim_{t\to 0} \operatorname{sen} t \cdot \frac{\alpha}{t} = \alpha \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = \alpha \cdot 1 = \alpha$$

O limite acima também será chamado de limite fundamental trigonométrico e o usaremos sempre que necessário.

Exemplo 17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{7x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \dfrac{1}{7} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{x} = \dfrac{5}{7}$

Exemplo 18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(5x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}} = \dfrac{3}{5}$

Exemplo 19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1 \cdot 1 = 1$$

Exemplo 20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Aqui multiplicaremos $1-\cos x$ por seu conjugado $1+\cos x$ obtendo $1-\cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{\operatorname{sen}^2 x}}{x(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)$$

$$= 1 \cdot \frac{0}{1+\cos 0} = 1 \cdot \frac{0}{2} = 0$$

Exemplo 21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{\cos x}-1} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{\cos x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{\cos x}+1)}{(\sqrt{\cos x}-1)(\sqrt{\cos x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{\cos x}+1)}{\cos x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{\cos x}+1)(\cos x+1)}{(\cos x-1)(\cos x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{\cos x}+1)(\cos x+1)}{\underbrace{\cos^2 x-1}_{-\operatorname{sen}^2 x}}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{x}{\operatorname{sen} x}\cdot(\sqrt{\cos x}+1)(\cos x+1)\right)$$

$$= -(1\cdot 1\cdot(\sqrt{\cos 0}+1)(\cos 0+1))$$

$$= -(\sqrt{1}+1)(1+1) = -4$$

- Obs. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$
- Obs. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}(\alpha x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x}} = \frac{1}{\alpha}$

Exemplo 22. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos(3x)}}{x\operatorname{sen}(7x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos(3x)}}{x\operatorname{sen}(7x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{\cos(3x)})(1+\sqrt{\cos(3x)})}{x\operatorname{sen}(7x)(1+\sqrt{\cos(3x)})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x\operatorname{sen}(7x)(1+\sqrt{\cos(3x)})} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(3x))(1+\cos(3x))}{x\operatorname{sen}(7x)(1+\sqrt{\cos(3x)})(1+\cos(3x))}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(3x)}{x\operatorname{sen}(7x)(1+\sqrt{\cos(3x)})(1+\cos(3x))}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(3x)}{x\operatorname{sen}(7x)(1+\sqrt{\cos(3x)})(1+\cos(3x))}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)\cdot\operatorname{sen}(3x)}{x\operatorname{sen}(7x)(1+\sqrt{\cos(3x)})(1+\cos(3x))}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(7x)}\cdot\frac{1}{(1+\sqrt{\cos(3x)})(1+\cos(3x))}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}\cdot\frac{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(7x)}{x}}\cdot\frac{1}{(1+\sqrt{\cos(3x)})(1+\cos(3x))}\right)$$

$$= 3\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{\underbrace{(1+\sqrt{\cos 0})}_{2}\underbrace{(1+\cos 0)}_{2}} = 3\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{4} = \frac{9}{28}$$

Exemplo 23. $\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi} = \left(\frac{0}{0}\right)$

Antes de poder usar o primeiro limite fundamental, teremos de fazer uma mudança de variável de tal modo que a nova variável tenda a 0 quando $x\to\pi$.

Considere $t = x-\pi$. Assim, $x\to\pi \Rightarrow t\to 0$ e $x = t+\pi$. Assim, o limite anterior se transforma em:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t+\pi)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t\cos\pi+\operatorname{sen}\pi\cos t}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t\cdot(-1)+0\cdot\cos t}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{-\operatorname{sen} t}{t} = -1$$

Exemplo 24. $\lim_{x\to\pi/6}\frac{2\cos x-\sqrt{3}}{6x-\pi} = \left(\frac{0}{0}\right)$

Aqui faremos a mudança de variável $t = x-\pi/6$. Então, $x = t+\pi/6$ e $x\to\frac{\pi}{6}\Rightarrow t\to 0$. Portanto,

$$\lim_{x\to\pi/6}\frac{2\cos x-\sqrt{3}}{6x-\pi} = \lim_{t\to 0}\frac{2\cos(t+\pi/6)-\sqrt{3}}{6(t+\pi/6)-\pi}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{2(\cos t\cos\pi/6-\operatorname{sen} t\operatorname{sen}\pi/6)-\sqrt{3}}{6t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{2(\cos t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\operatorname{sen} t\cdot\frac{1}{2})-\sqrt{3}}{6t}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}\cos t-\operatorname{sen} t-\sqrt{3}}{t}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}\cos t-\sqrt{3}-\operatorname{sen} t}{t}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt{3}\cos t-\sqrt{3}}{t}-\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt{3}(\cos t-1)}{t}-\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)$$

- $\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{-(1-\cos t)}{t} = 0$, pelo exemplo 39.
- $\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$

Portanto,

$$\lim_{x\to\pi/6}\frac{2\cos x-\sqrt{3}}{6x-\pi} = \frac{1}{6}\cdot\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sqrt{3}(\cos t-1)}{t}-\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)$$

$$= \frac{1}{6}(\sqrt{3}\cdot 0-1) = -\frac{1}{6}$$

Exemplo 25. $\lim_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{9\cos^2(2x)}}{x\operatorname{sen}(5x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$

Inicialmente eliminaremos a raiz quadrada multiplicando numerador e denominador pelo comjugado do numerador, e depois aplicaremos o primeiro limite fundamental:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{9\cos^2(2x)}}{x\,\mathrm{sen}(5x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(3-\sqrt{9\cos^2(2x)}\right)\left(3+\sqrt{9\cos^2(2x)}\right)}{x\,\mathrm{sen}(5x)\left(3+\sqrt{9\cos^2(2x)}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{9-9\cos^2(2x)}{x\,\mathrm{sen}(5x)\left(3+\sqrt{9\cos^2(2x)}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{9\overbrace{(1-\cos^2(2x))}^{\mathrm{sen}^2(2x)}}{x\,\mathrm{sen}(5x)\left(3+\sqrt{9\cos^2(2x)}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{9\,\mathrm{sen}^2(2x)}{x\,\mathrm{sen}(5x)\left(3+\sqrt{9\cos^2(2x)}\right)}$$

$$= 9\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen}(2x)}{x}\cdot\frac{\mathrm{sen}(2x)}{\mathrm{sen}(5x)}\cdot\frac{1}{\left(3+\sqrt{9\cos^2(2x)}\right)}\right)$$

$$= 9\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen}(2x)}{x}\cdot\frac{\frac{\mathrm{sen}(2x)}{x}}{\frac{\mathrm{sen}(5x)}{x}}\cdot\frac{1}{\left(3+\sqrt{9\cos^2(2x)}\right)}\right)$$

$$= 9\cdot 2\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3+\sqrt{9}} = 9\cdot 2\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{6}{5}$$

Exemplo 26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5+11\cos^2 x}-4}{3x\,\mathrm{sen}\,x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Começaremos, novamente, multiplicando numerador e denominador pelo conjugado do numerador:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+11\cos^2 x}-4}{3x\,\mathrm{sen}\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{5+11\cos^2 x}-4\right)\left(\sqrt{5+11\cos^2 x}+4\right)}{3x\,\mathrm{sen}\,x\left(\sqrt{5+11\cos^2 x}+4\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{5+11\cos^2 x-16}{3x\,\mathrm{sen}\,x\left(\sqrt{5+11\cos^2 x}+4\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{11\cos^2 x-11}{3x\,\mathrm{sen}\,x\left(\sqrt{5+11\cos^2 x}+4\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{11(\cos^2 x-1)}{3x\,\mathrm{sen}\,x\left(\sqrt{5+11\cos^2 x}+4\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{11\overbrace{(\cos^2 x-1)}^{-\,\mathrm{sen}^2 x}}{3x\,\mathrm{sen}\,x\left(\sqrt{5+11\cos^2 x}+4\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-11\,\mathrm{sen}^2 x}{3x\,\mathrm{sen}\,x\left(\sqrt{5+11\cos^2 x}+4\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-11\,\mathrm{sen}\,x}{3x\left(\sqrt{5+11\cos^2 x}+4\right)}$$

$$= -\frac{11}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{5+11\cos^2 x}+4}\right)$$

$$= -\frac{11}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{16}+4} = -\frac{11}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{8} = -\frac{11}{24}$$

Exemplo 27. Determine L para que a função dada abaixo seja contínua no ponto $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5+4\cos^2 x}-3}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\[2ex] L, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Para f ser contínua em $x=0$ devemos ter $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Mas $f(0)=L$.

Assim,

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+4\cos^2 x}-3}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{5+4\cos^2 x}-3)(\sqrt{5+4\cos^2 x}+3)}{x^2(\sqrt{5+4\cos^2 x}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{5+4\cos^2 x-9}{x^2(\sqrt{5+4\cos^2 x}+3)} = \lim_{x\to 0}\frac{4\cos^2 x-4}{x^2(\sqrt{5+4\cos^2 x}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4\overbrace{(\cos^2 x-1)}^{-\,\mathrm{sen}^2 x}}{x^2(\sqrt{5+4\cos^2 x}+3)}$$

$$= -4\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\cdot\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}\cdot\frac{1}{(\sqrt{5+4\cos^2 x}+3)}\right)$$

$$= -4\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{9}+3} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Exercícios de revisão

1 Calcule os limites indicados abaixo:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-3x+2\right)$

(2) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1+\cos t}{t^2+t-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$)

(5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

(6) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

(7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$

(8) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(11) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

(12) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$

(13) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-5x-14}{x^3+x^2-2x}$

(14) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^3+1}-2x+1}{4-x^2}$

(15) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{9x^2+13}-5+x}{x^2+x-2}$

(16 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,7x}{\mathrm{sen}\,2x}$

(17 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{sen}\,5x}{\mathrm{sen}\,2x}$

(18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

(19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x}$

(20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+\cos^2 x}-2}{x^2}$

(21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{1+\mathrm{sen}^2 x}-\cos x}$

(22) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{3x-\pi}$

(23 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{9+7\cos^2(3x)}-4}{2x\,\mathrm{sen}(5x)}$

(24) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{2+7\cos^2(6x)}}{x\,\mathrm{sen}(4x)}$

2 Determinar o valor de L para que a função seja contínua no ponto a indicado:

(a) $a = 2, \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, & \text{se } x \neq 2 \\ L, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

(b) $a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3 + \cos^2 x} - 2}{x^2}, & \text{se } \ x \neq 0 \\ L, & \text{se } \ x = 0 \end{cases}$

(c) $a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{3x + 1} - 2}{x - 1}, & \text{se } x \neq 1 \\ L, & \text{se } x = 1 \end{cases}$

Respostas

1

(a) 0	(b) 2	(c) 2	(d) 1/2
(e) 5	(f) $1/2\sqrt{2}$	(g) $1/2\sqrt{x}$	(h) 12
(i) -3/2	(j) -1	(k) 1	(l) -1/3
(m) 3/2	(n) 3/2	(o) 0	(p) 11/21
(q) 7/2	(r) 5/2	(s) 0	(t) -1/4
(u) 1/2	(v) 0	(w) -63/160	(x) 3

2 (a) $L = -1$, (b) $L = -1/4$, (c) $L = 3/4$