A regra da cadeia

A regra da cadeia é a derivada da função composta.

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$$

desde que f e g sejam funções deriváveis.

- Fazendo $u = g(x)$, então $f(g(x))$ é o mesmo qe $f(u)$ e a regra da cadeia pode ser reescrita como

$$[f(g(x))]' = f'(u)u'$$

- A regra da cadeia na notação de Leibniz:

Seja $y = f(g(x))$ e faça $u = g(x)$. Então:

- $u' = \dfrac{du}{dx}$
- $y = f(g(x)) = f(u) \Rightarrow \dfrac{dy}{du} = \dfrac{df}{du} = f'(u) = f'(g(x))$

Assim,

$$\frac{dy}{dx} = [f(g(x)]' = f'(g(x))g'(x) = f'(u)u' = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

(**Regra da cadeia na notação de Leibniz**)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

- Composição de três ou mais funções:

Seja $y = f(g(h(x)))$. Pela regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx} = [f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x)))[g(h(x))]'$$

Novamente, pela regra da cadeia:

$$[g(h(x))]' = g'(h(x))h'(x)$$

Assim,

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x) \quad (*)$$

Sejam $u = h(x)$ e $z = g(h(x)) = z(u)$ Então $y = f(z)$ e:

- $\dfrac{du}{dx} = h'(x)$
- $\dfrac{dz}{du} = g'(u) = g'(h(x))$
- $\dfrac{dy}{dz} = f'(z) = f'(g(h(x)))$

Então (*) acima pode ser reescrita como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{du}\frac{du}{dx}$$

Generalizando para a composição de qualquer número de funções:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dz}\frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{da} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{du}\frac{du}{dz}\frac{dz}{db}\frac{db}{da}$$

etc.

Tabela de derivadas

Na tabela abaixo a função $u = u(x)$ é uma função derivável.

(1) $k' = 0$ (k constante)	
(2) $(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$
(3) $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$	$(a^u)' = (a^u \ln a)\, u'$, $(e^u)' = e^u u'$
(4) $\log_a' x = \dfrac{1}{x \ln a}$, $\ln' x = \dfrac{1}{x}$	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a u'}$, $(\ln u)' = \dfrac{1}{u}u'$
(5) $\operatorname{sen}' x = \cos x$	$(\operatorname{sen} u)' = (\cos u)u'$
(6) $\cos' x = -\operatorname{sen} x$	$(\cos u)' = (-\operatorname{sen} u)u'$
(7) $\operatorname{tg}' x = \sec^2 x$	$(\operatorname{tg} u)' = (\sec^2 u)u'$
(8) $\operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cosec}^2 x$	$(\operatorname{cotg} u)' = (\operatorname{cosec}^2 u)u'$
(9) $\sec' x = \sec x \operatorname{tg} x$	$(\sec u)' = (\sec u \operatorname{tg} u)u'$
(10) $\operatorname{cosec}' x = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$	$(\operatorname{cosec} u)' = (-\operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u)u'$
(11) $\operatorname{arcsen}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{arcsen} u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
(12) $\operatorname{arccos}' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{arcsen} u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
(13) $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2}u'$
(14) $\operatorname{arccotg}' x = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arccotg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}u'$

Nos exemplos abaixo mostramos como foram obtidas as fórmulas com regra da cadeia na tabela acima e aplicamos a exemplos concretos. Novamente, $u = u(x)$ é função derivável.

Exemplo 1. $y = u^n$, com n inteiro positivo. Então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = u^{n-1}\frac{du}{dx} \quad \text{ou } y' = nu^{n-1}u'$$

Como exemplo, seja $y = (\underbrace{3x^5 - x + 2}_{u})^{12}$. Então,

$$y' = 12(3x^5 - x + 2)^{11}\underbrace{(3x^5 - x + 2)'}_{15x^4 - 1}$$

Portanto

$$y' = 12(15x^4 - 1)(3x^5 - x + 2)^{11}$$

Exemplo 2. $y = \sqrt{u}$. Então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx}$$

ou

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u', \text{ o que é o mesmo que } \quad y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Como exemplo, seja $y = \underbrace{\sqrt{x^2 + 6x - 1}}_{u}$. Então,

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+6x-1}} \overbrace{(x^2+6x-1)'}^{2x+6} = \frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x-1}}$$

$$= \frac{2(x+3)}{2\sqrt{x^2+6x-1}} = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x-1}}$$

Exemplo 3. $y = a^u$. Então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx} \quad \text{ou} \quad y' = a^u \ln a \cdot u'$$

Em particular: $(e^u)' = e^u u'$

Como exemplos sejam $f(x) = 3^{\overbrace{x^2+\operatorname{sen} x}^{u}}$ e $g(x) = e^{\overbrace{2x^3-x+1}^{u}}$. Então:

$$f'(x) = 3^{x^2+\operatorname{sen} x} \ln 3 \underbrace{(x^2+\operatorname{sen} x)'}_{2x+\cos x} = \ln 3(2x+\cos x)3^{x^2+\operatorname{sen} x}$$

$$g'(x) = e^{2x^3-x+1} \underbrace{(2x^3-x+1)'}_{6x-1} = (6x-1)e^{2x^3-x+1}$$

Exemplo 4. $y = \log_a u$. Então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u \ln a}\frac{du}{dx}$$

ou

$$y' = \frac{1}{u\ln a}u', \quad \text{o que é o mesmo que} \quad y' = \frac{u'}{u\ln a}$$

Em particular: $(\ln u)' = \dfrac{1}{u}u'$, que é o mesmo que $y' = \dfrac{u'}{u}$

Como exemplo, sejam $f(x) = \log_3(\overbrace{5x}^{u})$ e $g(x) = \ln(\overbrace{\cos x}^{u})$. Então

$$f'(x) = \frac{1}{5x\ln 3}\overbrace{(5x)'}^{5} = \frac{5}{5x\ln 3} = \frac{1}{x\ln 3}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\cos x}\underbrace{\cos' x}_{-\operatorname{sen} x} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$$

Exemplo 5. $y = \operatorname{sen} u$. Então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

ou

$$y' = (\cos u)u', \quad \text{o que é o mesmo que} \quad y' = u'\cos u$$

Como exemplo, seja $y = \operatorname{sen}(\underbrace{x^2+x}_{u})$. Então

$$y' = \big(\operatorname{sen}(x^2+x)\big) = \cos(x^2+x)\underbrace{(x^2+x)'}_{2x+1}$$

$$= (2x+1)\cos(x^2+x)$$

De modo análogo mostra-se que:

- $y = \cos u \Rightarrow y' = (-\operatorname{sen} u)u'$, isto é, $y' = -u' \operatorname{sen} u$
- $y = \operatorname{tg} u \Rightarrow y' = (\sec^2 u)u'$, isto é, $y' = u' \sec^2 u$
- $y = \operatorname{cotg} u \Rightarrow y' = (-\operatorname{cosec}^2 u)u'$, isto é, $y' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$
- $y = \sec u \Rightarrow y' = (\sec u \operatorname{tg} u)u'$, isto é, $y' = u' \sec u \operatorname{tg} u$
- $y = \operatorname{cosec} u \Rightarrow y' = (-\operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u)u'$, isto é, $y' = -u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$

Alguns exemplos:

$$\big(\cos(\underbrace{\sqrt{x}}_{u})\big)' = -\operatorname{sen}(\sqrt{x})\overbrace{(\sqrt{x})'}^{1/2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen}(\sqrt{x})$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

$$\big(\operatorname{tg}(\underbrace{3x}_{u})\big)' = \sec^2(3x)\overbrace{(3x)'}^{3} = 3\sec^2(3x)$$

$$\big(\operatorname{cotg}(\underbrace{x^2+2}_{u})\big)' = -\operatorname{cosec}^2(x^2+2)\overbrace{(x^2)'}^{2x} = -2\operatorname{cosec}^2(2x)$$

$$\big(\sec(\underbrace{7x-2}_{u})\big)' = \sec(7x-2)\operatorname{tg}(7x-2)\overbrace{(7x-2)'}^{7}$$

$$= 7\sec(7x-2)\operatorname{tg}(7x-2)$$

$$\big(\operatorname{cosec}(\underbrace{\ln x}_{u})\big)' = -\operatorname{cosec}(\ln x)\operatorname{cotg}(\ln x)\overbrace{(\ln x)'}^{1/x}$$

$$= \frac{1}{x}\sec(7x-2)\operatorname{tg}(7x-2)$$

Exemplo 6. $y = \operatorname{arcsen} u$. Então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

ou

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u', \quad \text{o que é o mesmo que} \quad y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

De modo análogo mostra-se que:

- $y = \arccos u \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$, isto é, $y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $y = \operatorname{arctg} u \Rightarrow y' = \frac{1}{1+u^2}u'$, isto é, $y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
- $y = \operatorname{arccotg} u \Rightarrow y' = -\frac{1}{1+u^2}u'$, isto é, $y' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

Alguns exemplos:

$$(\operatorname{arcsen}(\overbrace{3x}^{u}))' = \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\overbrace{(3x)'}^{3} = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

$$\left(\operatorname{arctg}\big(\overbrace{\tfrac{x}{3}}^{u}\big)\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\overbrace{\left(\frac{x}{3}\right)'}^{1/3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{9+x^2}{9}} = \frac{1}{3}\frac{9}{9+x^2} = \frac{3}{9+x^2}$$

$$(\operatorname{arccotg}(\overbrace{\operatorname{tg} x}^{u}))' = -\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\overbrace{\operatorname{tg}' x}^{\sec^2 x} = -\frac{\sec^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = -\frac{\sec^2 x}{\sec^2 x} = -1$$

Exemplo 7. Já observamos que $(x^n)' = nx^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{R}$. Agora, com o auxílio da regra da cadeia, vamos mostrar que, de fato, a fórmula é verdadeira para todo $n \in \mathbb{R}$.

Vamos precisar também das seguintes propriedades:

- Como e^x e $\ln x$ são inversas uma da outra, então $e^{\ln a^b} = a^b$.
- $\ln a^b = b \ln a$.

Assim, $x^n = e^{\ln x^n} = e^{n \ln x}$ e portanto:

$$(x^n)' = \left(e^{n\ln x}\right)' \overset{\text{RC}}{=} e^{n\ln x}\overbrace{(n\ln x)'}^{n\frac{1}{x}} = \frac{n}{x}\cdot e^{\ln x^n}$$

$$= \frac{n}{x}\cdot x^n = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}$$

Como exemplo, vamos determinar a derivada de $y = \sqrt[3]{x^4+2x-3}$.

Temos: $y = \sqrt[3]{x^4+2x-3} = \left(x^4+2x-3\right)^{1/3}$ e, portanto,

$$y' = \frac{1}{3}(x^4+2x-3)^{1/3-1}\overbrace{(x^4+2x-3)'}^{4x^3+2}$$

$$= \frac{1}{3}(4x^3+2)(x^4+2x-3)^{-2/3}$$

Exemplo 8. Determine a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^2+3x-2}$ no ponto $P = (3, 4)$

Precisamos usar a regra da cadeia para calcular y'. Temos:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+3x-2}}(x^2+3x-2)' = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-2}}$$

Coeficiente angular da reta tangente é $m_t = f'(3) = \dfrac{9}{2\sqrt{16}} = \dfrac{9}{8}$

Equação da reta tangente pedida:

$$y - 4 = \frac{9}{8}(x-3), \quad \text{isto é} \quad y = \frac{9}{8}x + \frac{5}{8}$$

Exemplo 9. Obter a reta tangente ao gráfico de $y = xe^{2x+1} - 1$ no ponto $P = (-1/2, -1/2)$.

$$y' = x'e^{2x+1} + x\left(e^{2x+1}\right)' - 1' = e^{2x+1} + x\cdot 2\cdot e^{2x+1}$$

$$= (1+2x)e^{2x+1}$$

Coeficiente angular da reta tangente é $m_t = f'(-1/2) = 0$

Equação da reta tangente pedida:

$$y - (-1/2) = 0(x - (-1/2)), \quad \text{isto é} \quad y = -\frac{1}{2}$$

Exercícios de revisão

1 Derivar e simplificar ao máximo:

(1) $y = (x^2 - 3x + 8)^3$ (2) $y = (8x-7)^{-5}$

(3) $y = (x^3 - 4)^2$ (4) $f(x) = (1-6x)^{2/3}$

(5) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x-2}}$ (6) $h(t) = \sqrt[3]{8t^3+27}$

(7) $w = (1-x)\sqrt{2x-1}$ (8) $z = \left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^4$

(9) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{1-x}}$ (10) $h(x) = \dfrac{x}{(x^2-1)^4}$

(11) $g(t) = (2-3t^2)^3$ (12) $f(x) = \sqrt[3]{4-9x}$

(13) $y = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$ (14) $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(15) $g(x) = \operatorname{sen}(ax)$ (16) $y = 3\cos(2x)$

(17) $y = \sqrt{\cos(2t)}$ (18) $y = \operatorname{sen}(3x^2)$

(19) $y = \operatorname{tg}^4 x$ (20) $y = \dfrac{3}{10}\cos^{10} x$

(21) $f(x) = \dfrac{\cos(4x)}{1-\operatorname{sen}(4x)}$ (22) $g(t) = \operatorname{sen}\sqrt{t} + \sqrt{\operatorname{sen} t}$

(23) $y = \ln\left(\dfrac{\cos x + 1}{\cos x - 1}\right)$ (24) $y = 10^{nx}$

(25) $y = e^{x^2} + e^{-x}$ (26) $y = 2e^{-x} + 2e^{-3x}$

(27) $y = \ln(x - \sqrt{1+x^2})$ (28) $y = \dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$

(29) $h = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (30) $f(x) = \ln(ax+b)$

(31) $g(t) = \ln t^3$ (32) $w(t) = (\ln t)^3$

(33) $z(x) = x \ln x$ (34) $h(t) = \ln(\operatorname{sen}(at))$

(35) $y = \ln\sqrt{\cos(2x)}$ (36) $y = e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$

(37) $y = e^{-t}\cos(2t)$ (38) $y = \operatorname{arctg}(x^2)$

(39) $y = \operatorname{arctg}(ax^2)$ (40) $y = \operatorname{arcsen}(\dfrac{x}{2})$

(41) $y = \dfrac{1}{7}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{7} + \cos\dfrac{\pi}{25}$ (42) $y = \dfrac{-4}{(x-1)^2} - \dfrac{2}{x-1}$

(43) $y = \dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)$, com a constante, $a \neq 0$ (44) $y = e^{5x}\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{5}\right)$

2 Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x^2-8x-5}$ no ponto de abscissa $x_0 = -1$.

3 Determine a equação da reta tangente à curva $f(x) = \sqrt{5-x}$ que *contém* o ponto $A = (9, 0)$.

Respostas

1

(1) $y' = (3(x^2-3x+8)^2(2x-3)$

(2) $y' = \dfrac{-40}{(8x-7)^6}$

(3) $y' = 6x^5 - 24x^2$

(4) $f'(x) = \dfrac{-4}{\sqrt[3]{1-6x}}$

(5) $g'(x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{(3x-2)^3}}$

(6) $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{8t^2}{\sqrt[3]{(8t^2+27)^2}}$

(7) $\dfrac{dw}{dx} = \dfrac{-3x+2}{\sqrt{2x-1}}$

(8) $z' = \dfrac{-20(2x+1)^3}{(3x-1)^5}$

(9) $y' = \dfrac{2\sqrt{1-x}}{(1-x)^2\sqrt{x+3}}$

(10) $\dfrac{dh}{dx} = -\dfrac{7x^2+1}{(x^2-1)^5}$

(11) $g'(t) = -18t(2-3t^2)^2$

(12) $f'(x) = \dfrac{-3}{\sqrt[3]{(4-9x)^2}}$

(13) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-a^2}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$

(14) $g'(x) = \dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

(15) $g'(x) = a\cos(ax)$

(16) $y' = -6\,\mathrm{sen}(2x)$

(17) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-\,\mathrm{sen}(2t)}{\sqrt{\cos(2t)}}$

(18) $y' = 6x\cos(3x^2)$

(19) $y' = 4\,\mathrm{tg}^3\,x\sec^2 x$

(20) $y' = -3\cos^9 x\,\mathrm{sen}\,x$

(21) $f'(x) = \dfrac{4}{1-\mathrm{sen}\,t}$

(22) $g'(t) = \dfrac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} + \dfrac{\cos t}{2\sqrt{\mathrm{sen}\,t}}$

(23) $y' = \dfrac{-2}{\mathrm{sen}\,x}$ ou $y' = -2\cos(\sec x)$

(24) $\dfrac{dy}{dx} = n10^{nx}\ln 10$

(25) $y' = 2xe^{x^2} - e^{-x}$

(26) $y' = -2e^{-x} - 3e^{-3x}$

(27) $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$

(28) $y' = \dfrac{-2e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}$

(29) $\dfrac{dh}{dx} = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

(30) $f'(x) = \dfrac{a}{ax+b}$

(31) $\dfrac{dg}{dt} = \dfrac{3}{t}$

(32) $\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{3(\ln t)^2}{t}$

(33) $\dfrac{dz}{dx} = 1 + \ln x$

(34) $\dfrac{dh}{dt} = a\,\mathrm{cotg}(at)$

(35) $y' = \mathrm{tg}(2x)$

(36) $y' = e^{ax}[a\,\mathrm{sen}(bx) + b\cos(bx)]$

(37) $y' = e^{-t}[2\,\mathrm{sen}(2t) + \cos(2t)]$

(38) $y' = \dfrac{2x}{1+x^4}$

(39) $y' = \dfrac{2ax}{1+a^2x^4}$

(40) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

(41) $\dfrac{1}{49+x^2}$

(42) $\dfrac{8}{(x-1)^3} + \dfrac{2}{(x-1)^2}$

(43) $\dfrac{1}{x^2-a^2}$

(44) $e^{5x}\left(5\,\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{x}{5}\right) + \dfrac{1}{5}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{2x}{5}\right)\right)$

2 $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = f(-1) = 2.$ Reta tangente: $y = -\dfrac{5}{2}x - \dfrac{1}{2}$
Reta normal: $y = \dfrac{2}{5}x - \dfrac{8}{5}$

3 Equação da reta tangente: $x + 4y - 9 = 0$