

# MAG120 - Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Pedro Schneider

2º Semestre de 2024

## 1 Cronograma e Notas

### 1.1 Critério de Aproveitamento

A média final  $MF$  é calculada pela fórmula:

$$MF = 0.3 \times \frac{(AT1 + AT2)}{2} + 0.7 \times PF$$

AT1, AT2 e AT3 - Atividades Avaliativas (avaliação continuada) com as datas pré-estabelecidas no cronograma.

**OBS.:** SERÃO REALIZADAS TRÊS ATIVIDADES, PORÉM SÓ SERÃO UTILIZADAS AS DUAS MAIORES NOTAS (A MENOR DELAS SERÁ DESCARTADA).

**PF** - Prova final contemplando todo conteúdo do semestre.

A nota da avaliação PF poderá ser substituída pela nota da avaliação PS, caso o aluno não alcance média final maior ou igual a 5,0.

### 1.2 Cronograma

Tabela 1: Cronograma semestral

Semanas	Datas	Conteúdo
Sem. 1	08/08 a 10/08	MATRIZES. OPERAÇÕES. MATRIZ TRANSPOSTA E MATRIZ INVERSA. FÓRMULA DE BINET
Sem. 2	12/08 a 16/08	SISTEMAS LINEARES
Sem. 3	19/08 a 24/08	SISTEMAS LINEARES
Sem. 4	26/08 a 31/08 <b>ATP 1</b>	SEGMENTOS ORIENTADOS. EQUIPOLÊNCIA VETORES. OPERAÇÕES COM VETORES.
Sem. 5	02/09 a 07/09 <b>Feriado 07/09</b>	DEPENDÊNCIA LINEAR E BASES. COORDENADAS DE UM VETOR
Sem. 6	09/09 a 14/09	MUDANÇA DE BASE. EQUAÇÕES DE MUDANÇA
Sem. 7	16/09 a 21/09	PRODUTOS ESCALAR
Sem. 8	23/09 a 28/09	PRODUTOS ESCALAR (continuação). VETOR PROJEÇÃO ORTOGONAL e COSSENOS DIRETORES
Sem. 9	30/09 a 04/10 <b>ATP 2</b>	PRODUTO VETORIAL E APLICAÇÕES.
Sem. 10	07/10 a 12/10 <b>Feriado 12/10</b>	PRODUTO MISTO.
Sem. 11	14/10 a 19/10	SISTEMAS DE COORDENADAS. EQUAÇÕES DA RETA. Posições relativas entre duas retas.
Sem. 12	21/10 a 26/10 <i>22 e 23 - INOVAÇÃO</i>	EQUAÇÕES DO PLANO. VETOR NORMAL A UM PLANO.
Sem. 13	28/10 a 02/11 <b>Feriado 02/11</b>	EQUAÇÕES DO PLANO. VETOR NORMAL A UM PLANO.
Sem. 14	04/11 a 09/11 <b>ATP 3</b>	POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS E PLANOS.
Sem. 15	11/11 a 16/11	PROBLEMAS CLÁSSICOS DE GEOMETRIA ESPACIAL.
Sem. 16	18/11 a 20/11	DISTÂNCIAS.
Sem. 17-19	21/11 a 30/11 02/12 a 07/12 09/12 a 14/12 20/12	PERÍODO PROVAS FINAIS REVISÃO DE PROVAS PERÍODO PROVAS SUBSTITUTIVAS

## 2 Semana 1 - Matrizes

### 2.1 Fundamentos e tipos

#### 2.1.1 O que são matrizes?

É uma tabela contendo  $M \times N$  elementos, com  $M, N \in \mathbb{N}$ , dispostos em linhas e colunas.  
Ex.:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 0 \\ \sqrt{7} & 1/3 \end{pmatrix}$$

#### 2.1.2 Como indicar matrizes?

Com letra latina maiúscula,  $A = [a_{ij}]$ , onde  $i$  indica a **linha** e  $j$  indica a **coluna** em que se encontra o elemento; sabendo que  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ .

$$A = [a_{ij}] \quad \text{onde} \quad 1 \leq i \leq 2 \text{ e } 1 \leq j \leq 3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

#### 2.1.3 Matriz Quadrada

Quando  $m = n$ , ou seja, número de linhas é igual ao número de colunas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

#### 2.1.4 Matriz Retangular

Quando  $m \neq n$ , ou seja, número de linhas é diferente do número de colunas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ordem  $3 \times 2$

#### 2.1.5 Matriz Nula

Quando todos os elementos são nulos, ou seja, iguais a 0.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 2.1.6 Matriz Identidade

Quando temos uma matriz quadrada onde os elementos da diagonal principal são unitários e os demais são nulos, ou seja, se  $i = j \rightarrow a_{ij} = 1$  e se  $i \neq j \rightarrow a_{ij} = 0$ .

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 2.1.7 Matriz Diagonal

Quando temos uma matriz quadrada onde os elementos da diagonal principal são unitários e os demais são nulos, ou seja, se  $i = j \rightarrow a_{ij} \neq 0$  e se  $i \neq j \rightarrow a_{ij} = 0$ .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

### 2.1.8 Matriz Transposta

Dada a matriz  $A = [a_{ij}]$ ;  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ , a matriz transposta é indicada por  $A^T$ , e é a matriz tal que  $B = [b_{ij}]$ , onde  $b_{ij} = a_{ij}$ .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

## 2.2 Operações com matrizes

### 2.2.1 Adição

Dadas duas matrizes de mesma ordem:  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$ ,  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ , a soma é a matriz:  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ .

Ex.:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$$

### Propriedades da adição de matrizes

$\forall A, B, C$ , de mesma ordem, tem-se:

- a) **Comutatividade:**  $A + B = B + A$
- b) **Associatividade:**  $A + (B + C) = (A + B) + C$
- c) **Existência do elemento neutro:**  $A + 0 = A$
- d) **Existência do elemento oposto:**  $A + (-A) = 0$

### 2.2.2 Multiplicação por um número real

Dado um número real  $\lambda$  e uma matriz  $A = [a_{ij}]$ , de ordem  $M \times N$ :

$$\lambda A = \lambda[a_{ij}] = \lambda a_{ij}$$

Ex.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, 3A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 24 & 15 \end{pmatrix}$$

### Propriedades da multiplicação de matrizes por um número real

$\forall A, B$ , de mesma ordem,  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tem-se:

- a)  $(\lambda A)\mu = (\lambda\mu)A$
- b)  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- c)  $(\lambda\mu)A = \lambda A + \mu A$
- d) **Existência do elemento neutro:**  $1A = A$

### 2.2.3 Multiplicação entre duas raízes

Dadas duas matrizes  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{jk}]$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$  e  $1 \leq k \leq p$ , o produto de A por B é uma matriz  $C = [c_{ik}]$ , de ordem  $N \times P$ , onde  $c_{ik} = \sum_1^n a_{ij}b_{jk}$ . O produto entre duas matrizes só é possível se o número de **colunas** da matriz A for **igual** ao número de **linhas** da matriz B.

Ex.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$
$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$$

### Propriedades da multiplicação entre matrizes

- a) O produto AB e BA não é comutativo, dependendo da ordem das matrizes esse produto pode nem existir, e caso exista, a ordem da matriz produto poderá ser diferente.

Ex.:  $A_{3 \times 2} B_{2 \times 1} = C_{3 \times 1}$  e  $B_{2 \times 1} A_{3 \times 2} = \nexists$  (**Não é possível realizar essa operação**)

- b)  $(A + B) \cdot C = AC + BC$  é válida?  
Sim, desde que existam esses produtos.

### 2.2.4 Operações com matriz transposta

#### Propriedades da matriz transposta

a)  $(A + B)^T = A^T + B^T$

b)  $(AB)^T = B^T A^T$

c)  $(A^T)^T = A$

d)  $(\lambda A)^T = \lambda A^T, \lambda \in \mathfrak{R}$