Derivadas de ordens superiores

Seja f uma função e $n \geq 1$. A derivada de ordem n de f, indicada por $f^{(n)}$ e é definida por:

$$f^{(n)} = \begin{cases} \left(f^{(n-1)}\right)', & \text{se } n > 1 \\ f', & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

- A notação de Leibnitz para a derivada de ordem n de f é:

$$\frac{d^n f}{d x^n}, \quad \text{ou} \quad \frac{d^n}{d x^n} f(x)$$

- A definição de derivada de ordem n é, na notação de Leibnitz é:

$$\frac{d^n f}{d x^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{d x^{n-1}}\right)$$

- A derivada de ordem zero de f é a própria f e f' é a derivada de ordem 1 de f.

- Para pequenos valores de n, digamos $n = 1, 2$ ou 3, escreve-se f', f'' e f''' para indicar, respectivamente, as derivadas de ordem 1, 2 e 3 de f.

- Note que se $y = f(x)$, então escreve-se y', y'', no lugar de f', f'', etc.

Exemplo 1. Deterninar todas as derivadas de $y = x^3$.

Temos:

- $y' = \dfrac{dy}{dx} = 3x^2$
- $y'' = \dfrac{d^2 y}{d x^2} = (3x^2)' = 6x$
- $y^{(3)} = \dfrac{d^3 y}{d x^3} = (6x)' = 6$
- $y^{(4)} = \dfrac{d^4 y}{d x^4} = 6' = 0$

Vemos que, para $n \geq 4$, $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{d x^n} = 0$

Exemplo 2. Determinar todas as derivadas de $y = \dfrac{1}{x}$

Note que $y = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$. Assim,

- $y' = -x^{-2}$
- $y'' = (-x^{-2})' = 2x^{-3}$
- $y''' = -2 \cdot 3x^{-4}$
- $y^{(4)} = 2 \cdot 3 \cdot 4x^{-5}$
- $y^{(5)} = -2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5x^{-6}$

Lembrando que: $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$, $0! = 1! = 1$ e que

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ -1, & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}$$

podemos escrever

$$y^{(n)} = (-1)^n \, n! \, x^{-(n+1)}$$

Exemplo 3. Calcule $f'(1), f''(1)$ e $f'''(1)$, sendo $f(x) = \sqrt{x}$.

Temos:

- $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x^{1/2}} = \dfrac{1}{2} x^{-1/2}$
- $f''(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{x^{-3/2}}{2} = -\dfrac{1}{4} x^{-3/2}$
- $f'''(x) = \dfrac{3}{2}\dfrac{x^{-5/2}}{4} = \dfrac{3}{8} x^{-5/2}$

Assim, $f'(1) = \dfrac{1}{2}$, $\quad f''(1) = -\dfrac{1}{4}$ e $f'''(1) = \dfrac{3}{8}$

Exemplo 4. Determine todas as derivadas de $f(x) = e^{-2x}$.

Temos:

- $f'(x) = (e^{-2x})' = e^{-2x} \overbrace{(-2x)'}^{-2} = -2e^{-2x}$
- $f''(x) = (-2e^-2x)' = -2e^{-2x} \overbrace{(-2x)'}^{-2} = 2^2 e^{-2x}$
- $f'''(x) = (2^2 e^{-2x})' = 2^2 e^{-2x} \overbrace{(-2x)'}^{-2} = -2^3 e^{-2x}$
- $f^{(4)}(x) = (-2^3 e^{-2x})' = -2^3 e^{-2x} \overbrace{(-2x)'}^{-2} = 2^4 e^{-2x}$

Assim,

$$f^n(x) = (-1)^n 2^n e^{-2x}$$

Exemplo 5. Determinar todas as derivadas de $y = \ln x$

Temos:

- $y' = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$
- $y'' = (-x^{-1})' = -x^{-2}$
- $y''' = (-x^{-2})' = 2 \cdot x^{-3}$
- $y^{(4)} = (2 \cdot x^{-3})' = -2 \cdot 3 \cdot x^{-4}$
- $y^{(5)} = (-2 \cdot 3 \cdot x^{-4})' = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x^{-5}$

Assim,

$$y^n(x) = (-1)^{n+1}(n-1)! x^{-n}$$

Exemplo 6. Sendo $y = e^x(-3\cos 2x + 5 \operatorname{sen} 2x)$, mostre que $y'' - 2y' + 5y = 0$

Temos:

$$y' = (e^x)'(-3\cos 2x + 5\operatorname{sen} 2x) + e^x(-3\cos 2x + 5\operatorname{sen} 2x)'$$

$$= e^x(-3\cos 2x + 5\operatorname{sen} 2x) + e^x(6\operatorname{sen} 2x + 10\cos 2x)$$

$$= e^x(7\cos 2x + 11\operatorname{sen} 2x)$$

$$y'' = (e^x)'(7\cos 2x + 11\,\mathrm{sen}\,2x) + e^x(7\cos 2x + 11\,\mathrm{sen}\,2x)'$$

$$= e^x(7\cos 2x + 11\,\mathrm{sen}\,2x) + e^x(-14\,\mathrm{sen}\,2x + 22\cos 2x)$$

$$= e^x(29\cos 2x - 3\,\mathrm{sen}\,2x)$$

Assim,

$$y'' - 2y' + 5y = e^x(29\cos 2x - 3\,\mathrm{sen}\,2x) - 2e^x(7\cos 2x + 11\,\mathrm{sen}\,2x)$$

$$+ 5e^x(-3\cos 2x + 5\,\mathrm{sen}\,2x) = e^x(29\cos 2x - 3\,\mathrm{sen}\,2x)$$

$$+ e^x(-14\cos 2x - 22\,\mathrm{sen}\,2x) + e^x(-15\cos 2x + 25\,\mathrm{sen}\,2x)$$

$$= e^x(29\cos 2x - 14\cos 2x - 15\cos 2x - 3\,\mathrm{sen}\,2x - 22\,\mathrm{sen}\,2x + 25\,\mathrm{sen}\,2x)$$

$$= e^x \cdot 0 = 0$$

Exercícios de revisão

1 Sendo $y = e^{\cos x}$, calcular y''.

2 Sendo $y = \dfrac{x}{x^2+1}$, calcular y''.

3 Sendo $f(x) = xe^x$, calcular $f^n(x)$.

4 Sendo $y = e^x(5\cos 3x - 7\,\mathrm{sen}\,3x)$, mostre que $y'' - 2y' + 10y = 0$.

5 Sendo $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, calcule $E = \dfrac{y''}{y'}$.

6 Sendo $y = 5e^{-x} + 7e^{3x} - x + 2$, mostre que $y'' - 2y' - 3y = 3x - 4$.

7 Determine todas as derivadas de $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$

Respostas

1 $y'' = e^{\cos x}(\mathrm{sen}^2\,x - \cos x)$

2 $y'' = \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

3 $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$

5 $E = \dfrac{-3x}{x^2+1}$

7 $f^{(n)}(x) = 2 \cdot (-1)^n \cdot n!(2x-1)^{-(n+1)}$