Centro Universitário da FEI

MATRIZES-2

RESUMO TEÓRICO E EXERCÍCIOS

Equipe de MAG110

Fevereiro - 2021

MATRIZES SIMÉTRICAS E ANTISSIMÉTRICAS

Matriz Simétrica

É uma matriz quadrada tal que : $A = A^T$

Ex.: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 6 \\ 7 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $A = A^T$

Matriz Antissimétrica

É uma matriz quadrada tal que: $A = -A^T$

Ex.: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, $A = -A^T$

MATRIZES INVERSAS

Se a matriz A é quadrada, quem é a sua inversa?

É outra matriz quadrada, indicada por A^{-1}, que satisfaz a condição $A.A^{-1} = A^{-1}A = I_n$, sendo I_n a matriz identidade de ordem n.

Ex.: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ então:

$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, pois $A^{-1}A = I_3$ verifique!

MATRIZES INVERSAS

Toda matriz quadrada A é invertível?

Não, a matriz só possui inversa se o seu determinante for não nulo.

Cálculo do determinante de uma matriz quadrada:

Um processo de cálculo é repetir as duas primeiras colunas, e efetuar os produtos, conforme indicado no exemplo:

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix} = [(1.1.3 + 2.0.1 + 1.2.3)] - [(1.1.1 + 1.0.3 + 2.2.3)] = -4$$

MATRIZES INVERSAS

Propriedades da Matriz Inversa

Matriz quadrada com determinante diferente de zero tem-se:

a) $(A^{-1})^{-1}$=A
b)$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
c) $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$, $\lambda \in \Re$

MATRIZES INVERSAS

Processo para Inversão de Matrizes

Fórmula de Binet: $M^{-1} = \frac{1}{\Delta}(cof M)^T$

Δ→ determinante da matriz M

cofM → matriz dos cofatores dos elementos da matriz M

Ex.: Calcular a matriz inversa da matriz dada $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$:

MATRIZES INVERSAS

Matriz M	$\text{cof}M$	$\text{Adj}\,M = (\text{cof}M)^t$	$M^{-1} = \frac{1}{\Delta}.(\text{cof }M)^t$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

Aplicações da Teoria de Matrizes na Engenharia

CRIPTOGRAFIA

É a técnica de codificar e decodificar mensagens; ela existe desde o tempo da Grécia antiga. Um código simples pode ser construído associando-se um número diferente a cada letra do alfabeto. Por exemplo:

A → 1
B → 2
C → 3
D → 4
.
Z → 26

Suponha que João e Paula são dois agentes secretos que querem se comunicar usando um código, porque suspeitam que seus telefones estão grampeados e que suas cartas estão sendo interceptadas. Em particular, João quer mandar a seguinte mensagem para Paula:

ENCONTRO AMANHÃ

Usando o esquema de substituição acima, João envia a seguinte mensagem:

5 14 3 15 14 20 18 15 1 13 1 14 8 1 14

(onde o Ã foi substituído por AN) Um código desse tipo pode ser quebrado sem muita dificuldade por uma série de técnicas, incluindo a análise de frequência das letras. Para dificultar a quebra do código, os agentes procederam da seguinte maneira: em primeiro lugar, ao aceitar a missão, eles escolheram uma matriz 3x3,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

João, então, separa a mensagem em cinco vetores em $\Re^3$ (caso isso não fosse possível, adicionaria letras). Então, os vetores:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 \\ 14 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 18 \\ 15 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 13 \\ 1 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

João, agora, usa a transformação linear L: $\Re^3 \rightarrow \Re^3$ dada por L(x)=Ax, de modo que a mensagem fique:

$$A\begin{bmatrix} 5 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 25 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 15 \\ 14 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 103 \\ 69 \\ 54 \end{bmatrix}, \; A\begin{bmatrix} 18 \\ 15 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51 \\ 35 \\ 17 \end{bmatrix}, \; A\begin{bmatrix} 13 \\ 1 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 42 \\ 29 \end{bmatrix}, \; A\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 \\ 37 \\ 29 \end{bmatrix}$$

Portanto, a seguinte mensagem é enviada para Paula:

42 25 20 103 69 54 51 35 17 57 42 29 52 37 29

$$x = A^{-1}L(x)$$

Que após decodificada: ENCONTRO AMANHÃ

EXERCÍCIOS

Escrever a matriz $A = (a_{ij})$ nos seguintes casos:

1) A é do tipo 2x3 com a_{ij}=0 para i=j e a_{ij}=1 para i≠j;

2) A é do tipo 3x2 com a_{ij}=2 para i=j-1 e a_{ij}=0 para i≠j-1;

3) A é quadrada de ordem 3 com a_{ij}=2i+3j-1.

EXERCÍCIOS

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, Calcular:

a) A+B

b) A+B+C

c) X=C-A+B

EXERCÍCIOS

Dadas as matrizes do tipo 2x3, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, calcular:

a) 2A-3B+C

b) A matriz X, tal que X=3B+C

EXERCÍCIOS

Dadas as matrizes A= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$,

calcular:

a) AB e BA

b) 2A-3B^T

c) (A+B^T)(A^T-B)

a) Dadas as matrizes quadradas $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, calcular A^2 e B^3.

b) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, calcular $A^2 - 6A + 5I_2$.

EXERCÍCIOS

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ calcular:

a) AB e BA;

b) A matriz X tal que XA=B.

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1+2y & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ determine x e y para que existam suas inversas.

Bibliografia:

1) Loreto, A. C. C.; Junior, A. P. L. VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA Teoria e Exercícios. 4° Ed. LCTE Editora. 2014. São Paulo.
2) Watanabe, R. G., Mello, D. A. VETORES E UMA INICIAÇÃO A GEOMETRIA ANALÍTICA. 2° Ed. LF Editorial. 2011. São Paulo.