MAC120 - Cálculo Diferencial e Integral

Pedro Schneider

2° Semestre de 2024

Sumário

1 Cronograma e Notas

1.1 Critério de Aproveitamento

A média final M é calculada pela fórmula:

$$\boldsymbol{M} = 0.3A + 0.7PF$$

Serão efetuadas três atividades *(A1, A2 e A3)* e uma prova final *(PF)*, sendo A a média aritmética das atividades.
Se a média *(M)* for menor que 5.0, o aluno(a) poderá fazer uma prova substitutiva *(SUB)*. A nota da prova *SUB* poderá substituir a nota da prova final *PF*. A substituição só ocorrerá se a nota da prova substitutiva for maior que a nota da prova final. O cálculo da nova média é feito pela mesma fórmula acima, trocando a nota da prova final pela nota da prova substitutiva, se for o caso.

1.2 Cronograma

Tabela 1: Cronograma semestral

Datas	**Conteúdo**
08/08 a 17/08	Apresentação do plano de ensino da disciplina: cronograma, critério de notas e bibliografia. Exercícios de revisão sobre funções.
19/08 a 24/08	Limite e continuidade: noções intuitivas e exemplos. Propriedades algébricas dos limites. Indeterminação $\frac{0}{0}$: funções racionais.
26/08 a 31/08	Indeterminação $\frac{0}{0}$: raiz quadrada. Indeterminação $\frac{0}{0}$: raízes. Mudança de variável no limite e primeiro limite fundamental.
02/09 a 07/09	Limites no infinito. Segundo limite fundamental.
09/09 a 14/09 **Atividade** A_1	Limites laterais e continuidade.
16/09 a 21/09	Os problemas da reta tangente e da velocidade instantânea. Derivada: definição e exemplos. Regras de derivação.
23/09 a 28/09	A regra da cadeia.
30/09 a 05/10	Derivação implícita e derivadas de ordens superiores. Reta tangente e reta normal. Regras de L'Hôpital.
07/10 a 12/10	Estudo do comportamento das funções. Problemas de otimização.
14/10 a 19/10 **Atividade** A_2	Problemas de otimização.
21/10 a 26/10	Integral: primitivas e propriedades básicas. Integrais imediatas. Métodos de integração: substituição.
28/10 a 02/11	Métodos de integração: por partes e integração de funções racionais.
04/11 a 09/11	Integral definida e propriedades básicas. Teorema fundamental do cálculo. Aplicações da integral definida: áreas e comprimento de curvas.
11/11 a 19/11 **Atividade** A_3	Aplicações da integral definida: áreas e comprimento de curvas.
21/11 a 30/11	**Provas Finais**
02/12 a 07/12	**Atividades Especiais**
09/12 a 14/12	**Provas Substitutivas**

2 Conjuntos e Intervalos Numéricos

2.1 Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$)

O conjunto dos números naturais é representado pelo símbolo $\mathbb{N}$ e é composto pelos números inteiros não negativos, ou seja, os números 0, 1, 2, 3, ... O conjunto dos números naturais é utilizado para contar objetos e representar quantidades.

2.2 Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

O conjunto dos números inteiros é representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$ e é composto pelos números naturais, seus opostos negativos e o número zero. Ou seja, o conjunto dos números inteiros inclui os números ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

2.3 Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

O conjunto dos números racionais é representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$ e é composto por todos os números que podem ser expressos na forma de fração, onde o numerador e o denominador são números inteiros e o denominador é diferente de zero. Por exemplo, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{-5}{2}$ são números racionais. Além disso, os números inteiros também são considerados números racionais, pois podem ser expressos como frações com denominador igual a 1.

2.4 Conjunto dos Números Irracionais ($\mathbb{I}$)

O conjunto dos números irracionais é representado pelo símbolo $\mathbb{I}$ e é composto por todos os números que não podem ser expressos na forma de fração. Esses números têm infinitas casas decimais não periódicas. Exemplos de números irracionais são π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

2.5 Conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$)

O conjunto dos números reais é representado pelo símbolo $\mathbb{R}$ e é a união dos conjuntos dos números racionais e irracionais. Ou seja, o conjunto dos números reais inclui todos os números que podem ser expressos como frações e todos os números que não podem ser expressos como frações. O conjunto dos números reais é utilizado para representar quantidades contínuas, como medidas, valores monetários, entre outros.

2.6 Denominação de Intervalos Numéricos

Intervalos numéricos são conjuntos de números reais que estão entre dois valores específicos. A denominação de intervalos é útil para descrever conjuntos contínuos de números e representar intervalos de valores em problemas matemáticos.

Um intervalo numérico é denotado por um par de valores separados por um símbolo especial. Existem diferentes tipos de intervalos, dependendo das propriedades dos valores incluídos no intervalo.

2.6.1 Intervalo Fechado

Um intervalo fechado inclui todos os números reais entre dois valores específicos, incluindo os próprios valores. É denotado pelo símbolo $[a, b]$, onde a e b são os valores extremos do intervalo. Por exemplo, o intervalo fechado $[2, 5]$ inclui todos os números reais de 2 a 5, incluindo 2 e 5.

2.6.2 Intervalo Aberto

Um intervalo aberto inclui todos os números reais entre dois valores específicos, excluindo os próprios valores. É denotado pelo símbolo (a, b) ou $]a, b[$, onde a e b são os valores extremos do intervalo. Por exemplo, o intervalo aberto $(2, 5)$ inclui todos os números reais entre 2 e 5, excluindo 2 e 5.

2.6.3 Intervalo Semiaberto

Um intervalo semiaberto inclui todos os números reais entre dois valores específicos, incluindo um dos valores e excluindo o outro. Existem dois tipos de intervalos semiabertos: intervalo semiaberto à esquerda e intervalo semiaberto à direita.

Um intervalo semiaberto à esquerda é denotado pelo símbolo $[a, b)$, onde a é incluído no intervalo e b é excluído. Por exemplo, o intervalo semiaberto à esquerda $[2, 5)$ inclui todos os números reais de 2 a 5, incluindo 2 e excluindo 5.

Um intervalo semiaberto à direita é denotado pelo símbolo $(a, b]$, onde a é excluído e b é incluído no intervalo. Por exemplo, o intervalo semiaberto à direita $(2, 5]$ inclui todos os números reais entre 2 e 5, excluindo 2 e incluindo 5.

2.6.4 Intervalo Infinito

Um intervalo infinito inclui todos os números reais maiores ou menores que um valor específico. Existem dois tipos de intervalos infinitos: intervalo infinito à esquerda e intervalo infinito à direita.

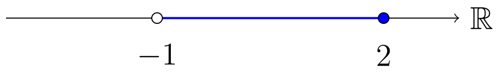
Um intervalo infinito à esquerda é denotado pelo símbolo $(-\infty, a)$, onde a é o valor extremo do intervalo. Por exemplo, o intervalo infinito à esquerda $(-\infty, 2)$ inclui todos os números reais menores que 2.

Um intervalo infinito à direita é denotado pelo símbolo (a, ∞), onde a é o valor extremo do intervalo. Por exemplo, o intervalo infinito à direita $(2, \infty)$ inclui todos os números reais maiores que 2.

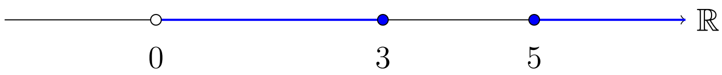
- **Intervalo fechado**: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- **Intervalo aberto**: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- **Intervalo aberto à direita**: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- **Intervalo aberto à esquerda**: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- **Intervalo infinito à esquerda**: $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
- **Intervalo infinito à direita**: $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

2.6.5 Exemplos de Intervalos Numéricos

Os extremos do intervalo $]-1, 2]$ são os pontos -1 e 2, e todo x com $-1 < x < 2$ é ponto interior do intervalo. A representação desse intervalo na reta é:



O conjunto marcado abaixo representa $]0, 3] \cup [5, +\infty[$, que é a união de dois intervalos, mas não um intervalo.



3 Generalidades de Funções

Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma função de A em B é uma regra que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$. Se f é o nome da função, então escreve-se $y = f(x)$ para indicar o elemento y de B associado ao elemento $x \in A$.

A notações $f : A \to B$ e $A \xrightarrow{f} B$ indicam uma função, de A em B, chamada f.

3.1 Domínio

O domínio de uma função é o conjunto de todos os valores de entrada para os quais a função está definida. Em outras palavras, é o conjunto de valores de x para os quais a função $f(x)$ produz um valor válido. O domínio é geralmente expresso como um intervalo ou uma combinação de intervalos.

O conjunto A é chamado de domínio de f e indicado por $Dom(f)$ ou por $D(f)$. O conjunto B é o *contra-domínio* de f e pode ser indicado por $CDom(f)$ ou por $CD(f)$.

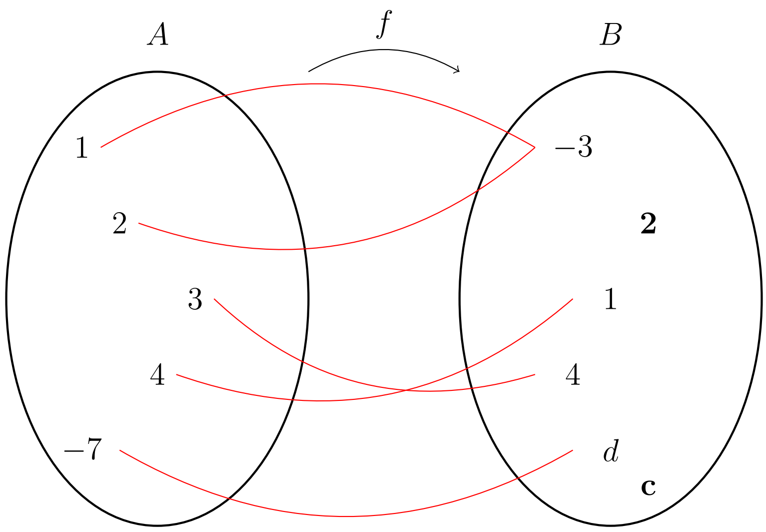
Duas funções f e g são iguais se, e somente se, possuírem o mesmo domínio, o mesmo contra-domínio e $f(x) = g(x)$, para todo $x \in Dom(f) = Dom(g)$.

3.2 Imagem

A imagem de uma função é o conjunto de todos os valores de saída que a função pode assumir. Em outras palavras, é o conjunto de valores de y que a função $f(x)$ pode assumir para diferentes valores de x. A imagem é geralmente expressa como um intervalo ou uma combinação de intervalos.

A imagem de f, denotada por $Im(f)$, por $f[A]$, ou por $f(A)$, é o seguinte subconjunto do contra-domínio: $Im(f) = \{f(x) \,|\, x \in A\} = \{y \in B \,|\, y = f(x) \text{ para algum } x \in A\}$.

3.2.1 Exemplo



Neste caso $Dom(f) = A = \{-7, 1, 2, 3, 4\}$, contra-domínio de f é o conjunto $B = \{-3, 1, 2, 4, c, d\}$ e $Im(f) = \{-3, 1, 4, d\}$. Note que:

- $B \neq Im(f)$
- $-3 \in B$ é a imagem dos pontos 1 e 2 de A, isto é $f(1) = f(2) = -3$
- $1 \in B$ é a imagem do ponto 4 de A, isto é $f(4) = 1$
- $4 \in B$ é a imagem do ponto 3 de A, isto é $f(3) = 4$
- $d \in B$ é a imagem do ponto -7 de A, isto é $f(-7) = d$
- Os elementos 2 e c de B não são imagens de nenhum ponto de A.
- $f^{-1}(-3) = \{1, 2\}$, $f^{-1}(1) = \{4\}$, $f^{-1}(2) = \emptyset$, $f^{-1}(4) = \{3\}$, $f^{-1}(c) = \emptyset$, $f^{-1}(d) = \{-7\}$.

Uma função também pode ser especificada via uma tabela. Para a função desse exemplo teríamos:

x	$f(x)$
-7	d
1	-3
2	-3
3	4
4	1

3.3 Gráfico e raízes

O gráfico de uma função é uma representação visual da relação entre os valores de entrada e os valores de saída da função. É uma representação bidimensional que mostra como os valores de x se relacionam com os valores de y da função. O gráfico pode ser plotado em um sistema de coordenadas cartesianas, onde o eixo horizontal representa os valores de x (abscissa) e o eixo vertical representa os valores de y (ordenada).

O gráfico da função $f : A \to B$ é o conjunto $G(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\}$. Um ponto $P = (a, b)$ está no gráfico de f se, e somente, se $a \in Dom(f)$ e $b = f(a)$.

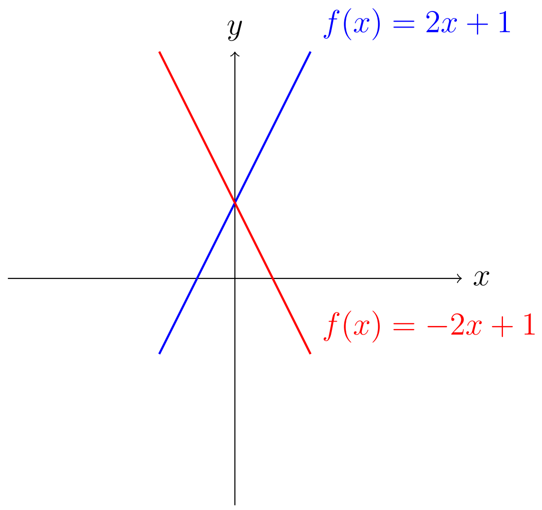
As raízes de uma função são os valores de x para os quais a função $f(x)$ é igual a zero. Em outras palavras, são os valores de entrada que fazem com que a função se anule. As raízes podem ser encontradas resolvendo a equação $f(x) = 0$.

3.3.1 Gráfico da Função

Considere uma função da forma $f(x) = ax + b$. O gráfico dessa função é uma reta, que pode ter diferentes inclinações e interceptações dependendo dos valores dos coeficientes a e b.

Ex.:

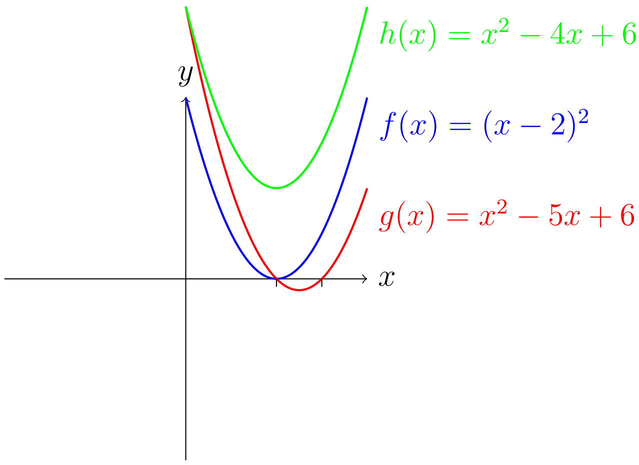
- $f(x) = 2x + 1$ é uma reta com inclinação positiva $(a > 0)$ e interceptação no eixo y em $y = 1$.
- $f(x) = -2x + 1$ é uma reta com inclinação negativa $(a < 0)$ e interceptação no eixo y em $y = 1$.



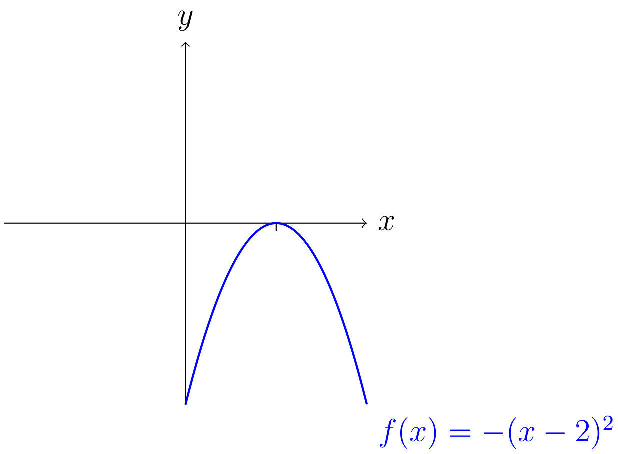
Considere uma função da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. O gráfico dessa função é uma parábola, que pode ter diferentes formatos dependendo dos valores dos coeficientes a, b e c.

Ex.:

- $f(x) = (x-2)^2$ é uma parábola com concavidade para cima ($a > 0$) e uma raíz real em $x = 2$ ($\Delta = 0$).
- $g(x) = x^2 - 5x + 6$ é uma parábola com concavidade para cima ($a > 0$) e raízes em $x = 2$ e $x = 3$ ($\Delta > 0$).
- $h(x) = x^2 - 4x + 6$ é uma parábola com concavidade para cima ($a > 0$) e sem raízes reais ($\Delta < 0$).



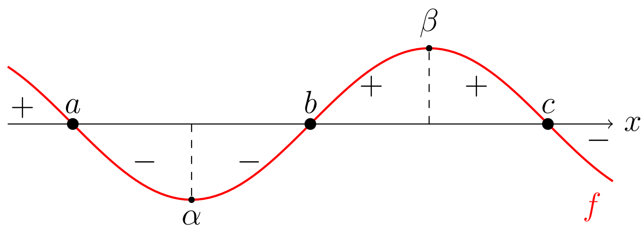
Obs.: Caso o coeficiente a seja negativo ($a < 0$), a parábola terá concavidade para baixo.



3.4 Sinais

Os sinais de uma função são os valores de y que a função $f(x)$ pode assumir para diferentes valores de x. Os sinais podem ser positivos, negativos ou zero, dependendo do valor da função para um determinado valor de x. Os sinais podem ser determinados analisando o gráfico da função ou avaliando a função para diferentes valores de x.

Se $f(\alpha) > 0$, então dizemos que f tem sinal positivo em α e, se $f(\alpha) < 0$, então dizemos que f tem sinal negativo em α. Dizemos que f tem sinal positivo no intervalo I, se $f(\alpha)$ for positivo, para todo α em I. Dizemos que f tem sinal negativo no intervalo I, se $f(\alpha)$ for negativo, para todo α em I.



3.5 Retas

3.5.1 Coeficiente angular

O coeficiente angular de uma reta é uma medida da inclinação da reta em relação ao eixo horizontal. Ele é calculado como a razão entre a variação da coordenada y e a variação da coordenada x entre dois pontos da reta.

3.5.2 Equação da reta

A equação da reta é uma expressão matemática que descreve a relação entre as coordenadas x e y de pontos pertencentes à reta. A equação da reta pode ser escrita na forma $y = mx + b$, onde m é o coeficiente angular da reta e b é o coeficiente linear.

4 Regras de Derivação

Nesta seção, vamos apresentar algumas regras básicas de derivação que serão úteis ao longo do curso. As regras de derivação nos permitem calcular a derivada de uma função de forma mais simples e eficiente.

4.1 Regra da Potência

Seja $f(x) = x^n$, onde n é um número real. A derivada de $f(x)$ em relação a x é dada por:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Essa regra nos permite calcular a derivada de funções polinomiais de forma direta.

4.2 Regra da Soma e Diferença

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções diferenciáveis. A derivada da soma ou diferença dessas funções é dada pela soma ou diferença das derivadas individuais:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Essa regra nos permite calcular a derivada de funções que são somas ou diferenças de outras funções.

4.3 Regra do Produto

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções diferenciáveis. A derivada do produto dessas funções é dada por:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Essa regra nos permite calcular a derivada de funções que são produtos de outras funções.

4.4 Regra do Quociente

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções diferenciáveis, com $g(x) \neq 0$. A derivada do quociente dessas funções é dada por:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Essa regra nos permite calcular a derivada de funções que são quocientes de outras funções.

4.5 Regra da Cadeia

Seja $f(x)$ uma função diferenciável e $g(x)$ uma função diferenciável de u. A derivada da composição dessas funções é dada por:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Essa regra nos permite calcular a derivada de funções compostas.

Essas são apenas algumas das regras de derivação mais comuns. Existem outras regras que podem ser utilizadas para calcular a derivada de funções mais complexas. Ao longo do curso, vamos explorar essas regras em mais detalhes e aprender como aplicá-las em diferentes situações.