O teorema do valor médio (TVM)

Na figura abaixo está representado o gráfico de uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável em todos os pontos do intervalo $]a, b[$.

Considere a reta secante s ao gráfico de f pelos pontos $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$. Agora vamos deslocar a reta s paralelamente a si mesmo. Note que existe um ponto ponto $P = (c, f(c))$, com c entre a e b, em que s "é a reta tangente ao gráfico nesse ponto". Isto é: existe algum ponto $P = (c, f(c))$, com $a < c < b$, tal que a reta tangente ao gráfico de f é paralela à reta s.

O coeficiente angular da reta secante s é $m_s = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ e o coeficiente angular da reta tangente t é $m_t = f'(c)$. Portanto $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, isto é $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

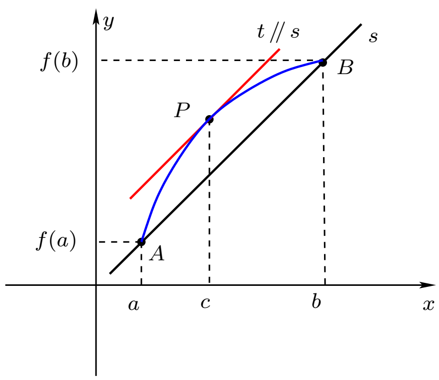

Figura 1. Interpretação geométrica para o TVM

> **O teorema do valor médio (TVM)** Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Então existe, pelo menos, um ponto c entre a e b tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

• Obs. Apesar do nome, o ponto c não é, necessariamente, o ponto médio do segmento $[a, b]$.

Algumas consequências do TVM:

> **Teorema de Rolle** Se f satisfaz as condições do TVM no intervalo $[a, b]$ e, além disso, $f(a) = f(b)$, então existirá algum ponto c entre a e b tal que $f'(c) = 0$.

Aplicando o TVM à função f em $[a, b]$ obtemos: $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Mas, então, $f'(c)(b - a) = 0$, o que acarreta $f'(c) = 0$, pois, $b - a \neq 0$.

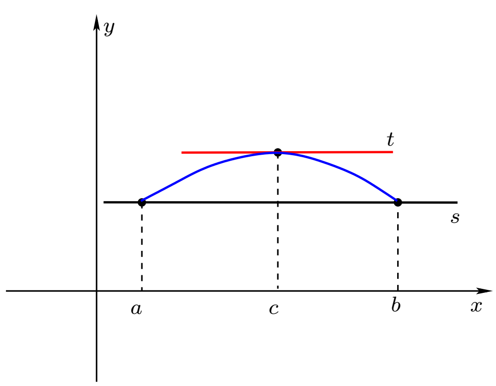

Figura 2. O teorema de Rolle

> Seja f função contínua num intervalo I e derivável no interior de I. Se $f'(x) = 0$, para todo x no interior de I, f é constante.

De fato: sejam x_1 e x_2 dois pontos do intervalo $]a, b[$ e suponha que $x_1 < x_2$. Como f é derivável para todo $a < x < b$, segue que f é contínua em $]a, b[$ e, portanto, f é contínua no intervalo $[x_1, x_2]$. Aplicando o TVM nesse intervalo obtemos $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, para algum ponto c, com $x_1 < c < x_2$. Logo, $f(x_2) - f(x_1) = 0$, pois $f'(c) = 0$. Assim $f(x_2) = f(x_1)$. Se, além disso, f estiver definida e for contínua nos ponto a e b, então $f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0$. Vale o mesmo para o ponto b. Assim, f será constante em todo intervalo $[a, b]$.

> Seja f função contínua num intervalo I e derivável no interior de I. Se $f'(x) > 0$ para todo x no interior de I, então f é crescente nesse intervalo. Analogamente: se $f'(x) < 0$ para todo x no interior de I, então f é decrescente nesse intervalo.

- Uma função f é dita *crescente* num intervalo I, se para todos x_1 e x_2 em I, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

- Uma função f é dita *decrescente* num intervalo I, se para todos x_1 e x_2 em I, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Prova da afirmação acima: sejam x_1 e x_2 dois pontos de I, com $x_1 < x_2$. Como f é derivável em $]a, b[$, segue que f que f é contínua nesse intervalo. Portanto, f é contínua em $[x_1, x_2]$. Aplicando o TVM nesse último intervalo obtemos: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, para algum $x_1 < c < x_2$. Como $f'(c)$ e $x_2 - x_1$ são ambos positivos, obtemos $f(x_2) - f(x_1) > 0$, isto é, $f(x_2) > f(x_1)$. Portanto f é crescente em $]a, b[$

Exemplo 1. Considere a função $x^3 + x^2 - x + 1$. Vamos determinar os intervalos de crescimento/decrescimento de f.

Derivando f temos: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Desejamos saber onde f' é positiva e onde é negativa, isto é, querenos os sinais de f'.

Inicialmente encontramos suas raízes:

$$\Delta = 16, \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 1/3.$$

O gráfico de f' e seus sinais estão na figura abaixo:

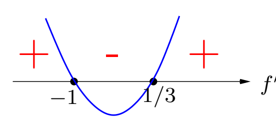

Figura 3. Sinais de $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

Assim f é decrescente no intervalo $]-1, 1/3[$ e é crescente em $]-\infty, -1[\cup]1/3, +\infty[$.

Para indicar o crescimento/decrescimento da função f usamos o seguinte esquema:

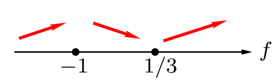

Figura 4. Crescimentto/decrescimento de f

A figura abaixo mostra o gráfico de f e as retas tangentes nos pontos $P_1 = (-1, f(-1))$ e $P_2 = (1/3, f(1/3))$.
O ponto $x = -1$ é dito um ponto de *máximo local* de f e o ponto $x = 1/3$ é dito um ponto de *mínimo local* de f.

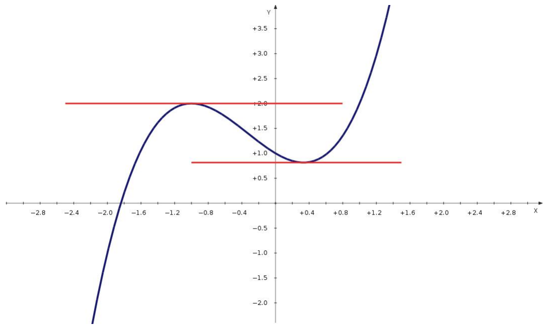

FIGURA 5. Gráfico de $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

MÁXIMOS E MÍNIMOS

Considere a função f dada pelo gráfico abaixo.

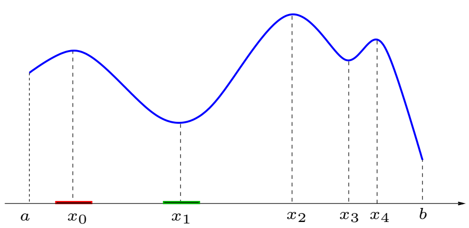

FIGURA 6. Máximos e mínimos locais

Note que existe um pequeno intervalo aberto em torno de x_0 (a região em vermelho) com a seguinte propriedade: se x está nesta região, então $f(x) \geq f(x_0)$. Dizemos, então, que x_0 é um ponto de *máximo local de* f. De modo análogo, x_1 é *ponto de mínimo local de* f. Também x_2 e x_4 são pontos de máximo local de f e x_3 é ponto de mínimo local de f.

Sejam f uma função e x_0 um ponto do domínio de f. Dizemos que x_0 é um ponto de :

- *máximo local* de f, se existir intervalo aberto I tal que $x_0 \in I$ e $f(x_0) \geq f(x)$, para todo $x \in I$;
- *mínimo local* de f, se existir intervalo aberto I tal que $x_0 \in I$ e $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in I$;
- *máximo global ou absoluto* de f, se $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$;
- *mínimo global ou absoluto* de f, se $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$

• Um ponto de máximo/mínimo local de f também é chamado de ponto de máximo/mínimo relativo de f. Um ponto de máximo/mínimo global de f também é dito um ponto de máximo/mínimo absoluto ou simplesmente ponto de máximo/mínimo de f. Pontos de máximo/mínimo (local ou relativo) de f são chamados de pontos de extremo (local ou relativo) de f.

• O valor da função num ponto de máximo/mínimo local de f é dito um *valor máximo/mínimo local* de f. O valor da função num ponto de máximo global de f é chamado de *valor máximo* de f e é denotado por $\max f$, e o valor da função num ponto de mínimo global de f é chamado de *valor mínimo* de f e é denotado por $\min f$.

Um ponto x_0 do domínio de uma função f é dito um *ponto crítico* de f se $f'(x_0) = 0$ ou se não existe $f'(x_0)$.

O resultado abaixo estabelece uma conexão entre ponto de extremo relativo e ponto crítico.

Sejam f uma função definida num intervalo I e x_0 um ponto interior de I e suponha que f é derivável em x_0. Se x_0 é ponto de extremo relativo de f, então x_0 é ponto crítico de f, isto é $f'(x_0) = 0$.

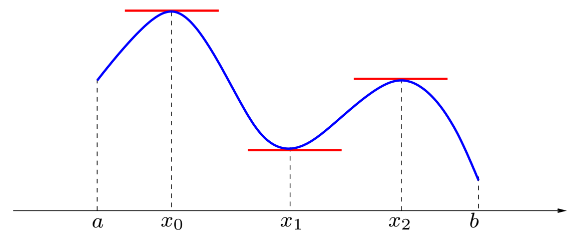

FIGURA 7. Pontos de extremo relativo são pontos críticos

• Não vale a recíproca da proposição acima. Isto é: x_0 ponto crítico de f não implica, necessariamente, que x_0 é ponto de máximo/mínimo local de f. Como exemplo considere a função $f(x) = x^3$. Temos: $f'(x) = 0 \iff 3x^2 = 0 \iff x = 0$, mas 0 não é ponto de máximo local e nem de mínimo local de f, pois f é crescente. Veja a figura 8 abaixo.

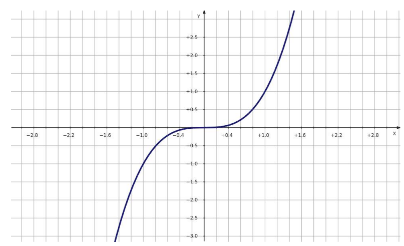

FIGURA 8. $x = 0$ é ponto crítico, mas não é ponto de extremo relativo

Exemplo 2. Estudar o crescimento/decrescimento e os pontos de max./min. local de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Note que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Temos:

$$f'(x) = \frac{1(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Para estudar o sinal de f', podemos desprezar o denominador, pois este é sempre positivo. Logo o sinal de f' será o sinal do numerador $1 - x^2$.

Para estudar o sinais de $1 - x^2$, começamos descobrindo suas raízes: $1 - x^2 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$. Lembrando que o gráfico de $y = 1 - x^2$ é uma parábola côncava para baixo temos os sinais para f' e daí, os intervalos de crescimento/decrescimento de f.

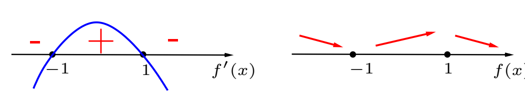

FIGURA 9. Sinais de f' e comportamento de f

Assim f é crescente em $]-1,1[$, e decrescente em $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

$x = -1$ é ponto de mínimo local de f e $x = 1$ é ponto de máximo local de f.

Exemplo 3. Determine os intervalos de crescimento/decrescimento e os pontos de máximo/mínimo local de: (a)$f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, (b) $f(x) = xe^x$.

(a) $\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

$$f'(x) = \frac{x'(x^2-1) - x(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)}$$

Os sinais de f' são os sinais de seu numerador $-x^2-1$, pois $(x^2-1)^2$ é positivo para todo $x \neq \pm 1$.

Mas $-x^2-1$ tem sempre sinal negativo.

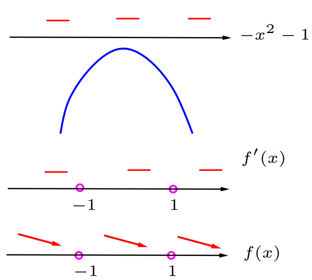

Figura 10. Sinais de f' e comportamento de f

Assim, f é decrescente em $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$. Não há pontos de máximo ou mínimo local.

(b) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

Como f' é o produto de dois termos ($1+x$ e e^x), seus sinais são o produto dos sinais de tais termos. Mas, e^x é sempre positivo, portanto os sinais de f' são os sinais de $1+x$.

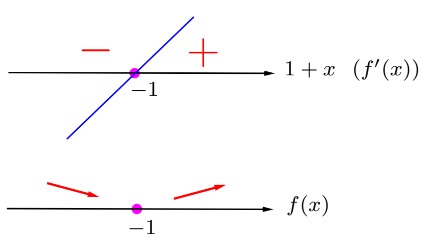

Figura 11. Sinais de f' e comportamento de f

Assim, f é decrescente em $]-\infty,-1[$ e é crescente em $]-1,+\infty[$. O ponto $x=-1$ é ponto de minimo local (e global). Não há pontos de máximo local.

Exemplo 4. Determine o maior valor e o menor valor da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ no intervalo $[-1,4]$.

Aqui devemos considerar apenas o intervalo $[-1,4]$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x$. Assim,

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x = 0 \iff 3x(x-2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Portanto, $x=-1$ ou $x=2$ será ponto de mínino global de f (no intervalo considerado) e $x=0$ ou $x=4$ será ponto de máximo global de f (no intervalo considerado). calculando os valores de f nesses pontos obtemos: $f(-1) = -3$, $f(0) = 1$, $f(2) = -3$ e $f(4) = 17$. Portanto $x =$

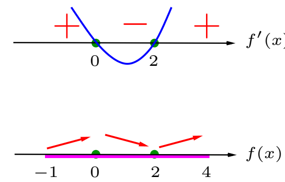

Figura 12. Sinais de f' e comportamento de f

-1 e $x=2$ são pontos de mínimo global de f (no intervalo considerado) e $x=4$ é ponto de máximo global de f (no intervalo considerado). Além disso, $\min f = -3$ e $\max f = 17$.

Concavidades e ponto de inflexão

Observando o gráfico abaixo vemos que o trecho correspondente ao intervalo $]a,b[$ assemelha-se a uma parábola côncava para baixo, o trecho correspondente ao intervalo $]b,c[$ assemelha-se a uma parábola côncava para cima e o trecho correspondente ao intervalo $a]c,d[$ assemelha-se a uma parábola côncava para baixo novamente. Dizemos, então, que a função f (ou seu gráfico) tem *concavidade para baixo* em $]a,b[\cup]c,d[$ e *concavidade para cima* em $]b,c[$.

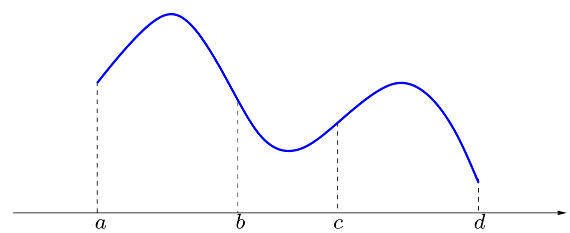

Figura 13. Concavidades e pontos de inflexão

Vamos examinar mais detalhadamente o que ocorre quando o gráfico tem concavidade para baixo. A figura abaixo mostra uma função concavidade para baixo e algumas retas tangentes ao gráfico da função.

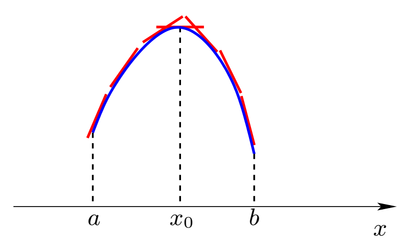

Figura 14. Concavidade para baixo

Vemos, da figura que os coeficientes da retas tangentes decrescem no intervalo $]a,b[$: inicialmente as retas tangentes são crescentes, portanto seus coeficientes angulares são positivos, mas decrescem até 0 no ponto correspondente a x_0, a partir desse ponto tornam-se negativos, mas continuam decrescendo, pois as retas tangentes tornam-se mais inclinadas, o que significa que os ângulos formados por tais retas e o eixo x ficam mais próximos de $90°$, mas como são ângulos do segundo quadrante, suas tangentes decrescem.

Como os coeficientes angulares das retas tangentes são dados pela derivada f', vemos que f' é decrescente no intervalo $]a,b[$. Assim, se a função f possuir derivada segunda, essa deverá ser negativa em $]a,b[$: se $f''(x) > 0$ em $]a,b[$, então f' seria crescente nesse intervalo, o que não ocorre. Podemos concluir que, se $f''(x) < 0$ para todo $x \in]a,b[$, então f terá concavidade para cima nesse intervalo.

Uma análise análoga mostra que, se $f''(x) > 0$ num intervalo I, então f será côncava para cima nesse intervalo.

(Concavidades e pontos de inflexão) Seja f função duas vezes derivável no intervalo $]a, b[$.

Se, $f''(x)$ for positiva em todo ponto do intervalo $]a, b[$, então f terá concavidade para cima nesse intervalo.

Se, $f''(x)$ for negativa em todo ponto do intervalo $]a, b[$, então f terá concavidade para baixo nesse intervalo.

Um *ponto de inflexão* é um ponto do domínio de f que corresponde a uma mudança de concavidade.

Exemplo 5. Determinar as concavidades e pontos de inflexão da função $f(x) = xe^x$.

Temos: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Do exemplo (3b) temos: $f'(x) = (x+1)e^x$.

Então, $f''(x) = (x+1)'e^x + (x+')(e^x)' = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$

Portanto, os sinais de f'' são os produtos dos sinais de $x+2$ e e^x. Mas e^x é sempre positivo. Assim, os sinais de f'' são os sinais de $x+2$.

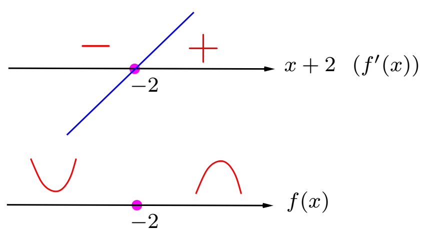

Figura 15. Sinais de f'' e concavidades de f

Portanto, f tem concavidade para cima em $]-\infty, -2[$ e tem concavidade para baixo em $]-2, +\infty[$. Oponto $x = -2$ é um ponto de inflexão de f.

Exemplo 6. Determinar os intervalos de crescimento/decrescimeto, os pontos de máx./mín. local, as concavidades e os pontos de inflexão de $f(x) = \ln(x^2+1)$.

Temos: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' = \frac{2x}{x^2+1}$$

Assim, os sinais de f' são a divisão dos sinais de $2x$ e de $(x^2+1)^2$. Porém, $(x^2+1)^2$ é positivo para to $x \in \mathbb{R}$. Portanto, os sinais de f' são os sinais de $2x$.

Vemos que f é decrescente em $]-\infty, 0[$ e é crescente em $]0, +\infty[$. O ponto $x = 0$ é ponto de mínimo local (e global).

Para a determinação das concavidades devemos olhar os sinais da derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{(2x)'(x^2+1) - 2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

Assim, os sinais de f'' são os sinais de seu numerador, $2 - 2x^2$, pois seu denominador é sempre positivo.

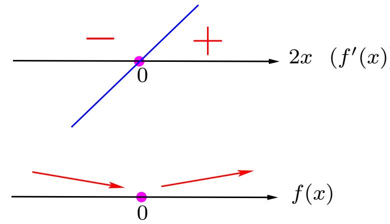

Figura 16. Sinais de f' e comportamento de f

Para analisar os sinais de $2 - 2x^2$ começamos descobrindo suas raízes: $2 - 2x^2 = 0 \iff 2x^2 = 2 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$

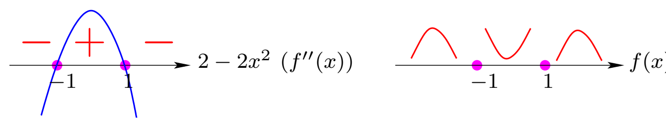

Figura 17. Sinais de f'' e as concavidades de f

Da figura acima vemos que f tem concavidade para baixo em $]-\infty, -1[\, \cup\,]1, +\infty[$ e tem convavidade para cima em $]-1, 1[$. Os pontos $x = -1$ e $x = 1$ são pontos de inflexão.

O teste da derivada segunda

Suponha que f'' é contínua num intervalo aberto I contendo o ponto x_0. Então:

$f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ é ponto de mínimo local de f;

$f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ é ponto de máximo local de f.

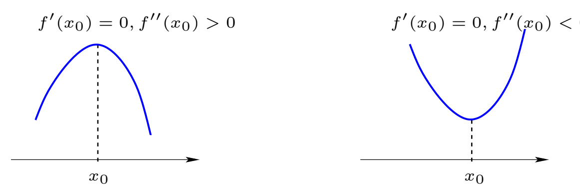

Figura 18. Teste da derivada segunda

Exemplo 7. Seja $f(x) = x^4 - x^3 - \dfrac{x^2}{2}$

Temos:

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - x$ e $f''(x) = 12x^2 - 6x - 1$

$$f'(x) = 0 \iff x(4x^2 - 3x - 1) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ ou} \\ 4x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases}$$

As raízes de $4x^2 - 3x - 1$ são $-1/4$ e 1. Assim, os pontos críticos de f, isto é, os pontos onde f' se anula, são $x = -1/4$, $x = 0$ e $x = 1$.

• $f'(-1/4) = 0$ e $f''(-1/4) = 5/4 > 0 \Rightarrow -1/4$ é ponto de mínimo local de f.

• $f'(0) = 0$ e $f''(0) = -1 < 0 \Rightarrow 0$ é ponto de máximo local de f.
• $f'(1) = 0$ e e $f''(1) = 5 > 0 \Rightarrow 1$ é ponto de mínimo local de f.

O gráfico de f é mostrado abaixo:

Exemplo 8. Seja $f(x) = x^4 - x^3$

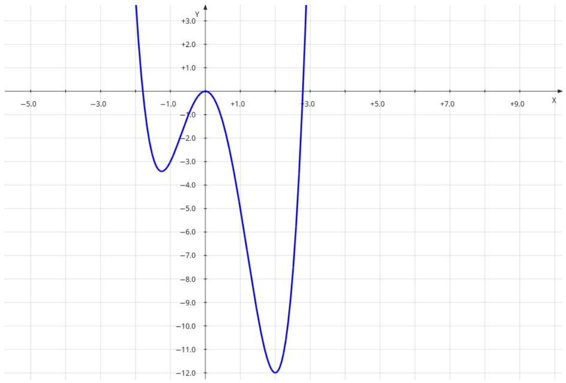

Figura 19. Exemplo para o teste da derivada segunda

Temos:

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2$ e $f''(x) = 12x^2 - 6x$

$$f'(x) = 0 \iff x^2(4x-3) \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 3/4 \end{cases}$$

Assim, os pontos críticos de f, isto é, os pontos onde f' se anula, são $x = 0$ e $x = 3/4$.

• $f'(0) = 0$, mas $f''(0)$. Portanto o teste não se aplica ao ponto $x = 0$.

• $f'(3/4) = 0$ e $f''(3/4) = 9/4 > 0 \Rightarrow 3/4$ é ponto de mínimo local de f.

• Obs. Para descobrir a natureza do ponto $x = 0$ podemos analisar os sinais de f' e encontrar os intervalos de crescimento/decrescimento de f e, portanto, seus pontos de máximoa/mínimo local.

O gráfico de f é mostrado abaixo:

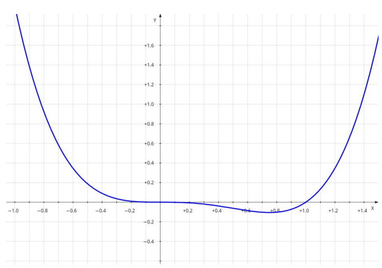

Figura 20. O teste da derivada segunda não se aplica ao ponto $x = 0$

Exercícios de revisão

1 Determine o valor máximo e o valor mínimo de $f(x) = -x^3/3 + x^2/2 + 2x$ no intervalo $[-2, 1]$.

2 Para cada item abaixo pede–se: (i) o domínio de f; (ii) os intervalos de crescimento/decrescimento, os pontos de máximo/mínimo local, as concavidades e os pontos de inflexão de f.

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ (b) $f(x) = x^4 - 16x^2$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ (d) $f(x) = xe^{-x}$

(e) $f(x) = \ln(4 + x^2)$ (f) $f(x) = x\sqrt{x}$

Respostas

1 $x = -1$ é ponto de mínimo de f e $\min f = -7/6$; $x = 1$ é ponto de máximo de f e $\max f = 13/6$

2 (a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. f é crescente em $]-\infty, 1/3[\cup]1, +\infty[$ e é decrescente em $]1/3, 1[$. $x = 1/3$ é ponto de máximo local de f e $x = 1$ é ponto de mínimo local de f. A concavidade de f é para baixo em $]-\infty, 2/3[$ e é para cima em $]2/3, +\infty[$. Ponto de inflexão :$x = 2/3$.

(b) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. f é crescente em $]8, +\infty[$ e é decrescente em $]-\infty, 8[$. $x = 8$ é ponto de mínimo local de f. A concavidade de f é para baixo em $]-\sqrt{8/3}, \sqrt{8/3}[$ e é para cima em $]-\infty, -\sqrt{8/3}[\cup]\sqrt{8/3}, +\infty[$. São pontos de inflexão de f: $x = -\sqrt{8/3}$ e $\sqrt{8/3}$.

(c) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. f é crescente em $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$. Não há pontos de máximo ou de mínimos. f tem concavidade para baixo em $]-\infty, -1[\cup]0, 1[$ e tem concavidade para cima em $]-1, 0[\cup]1, +\infty[$. Ponto de inflexão $x = 0$.

(d) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. f é decrescente em $]1, +\infty[$ e é crescente em $]-\infty, 1[$. $x = 1$ é ponto de máximo local de f. A concavidade de f é para baixo em $]-\infty, 2[$ e para cima em $]2, +\infty[$. $x = 2$ é ponto de inflexão de f.

(e) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. f é decrescente em $]-\infty, 0[$ e é crescente em $]0, +\infty[$. $x = 0$ é ponto de mínimo local de f. A concavidade de f é para cima em $]-2, 2[$ e é para baixo em $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$. Pontos de inflexão de f: $x = -2$ e $x = 2$.

(f) $\text{Dom}(f) =]0, +\infty[$. f é crescente em $]1/3, +\infty[$ e é decrescente em $]0, 1/3[$. $x = 1/3$ é ponto de mínimo local de f. A concavidade de f é para cima em $]0, +\infty[$. Não há pontos de inflexão.