Derivada

Declividade de uma curva num ponto

Um dos problemas que levaram à noção de derivada foi o chamado *problema da reta tangente*: dada uma curva e um ponto nela, determinar a reta tangente à curva pelo ponto dado.

Sejam $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ dois pontos sobre uma mesma curva. A *declividade* ou o coeficiente angular da *reta secante* s (veja figura 1) por P e Q é dado por:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

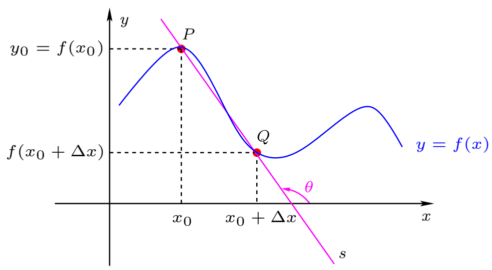

Figura 1. $\operatorname{tg} \theta = m_s = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Vamos, agora, manter P fixo e fazer o ponto Q deslizar sobre a curva aproximando-se de P. Se existir, e for finito, o limite dos coeficientes angulares das retas secantes quando $Q \to P$, então, por definição, tomamos tal número como o coeficiente angular da reta tangente à curva em P:

(**Coeficiente angular da reta tangente**)

$$m_t = \lim_{P \to Q} m_s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

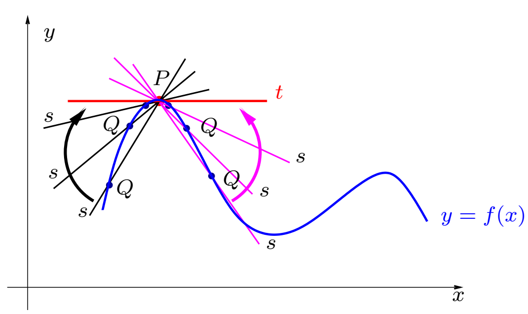

Figura 2. A reta t é "posição final" das retas secantes.

(**Reta tangente**) Definimos a *reta tangente* ao gráfico de f em P, como a reta que passa por P e tem coeficiente angular dado por m_t calculado acima.

A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P é dada por

$$y - y_0 = m_t(x - x_0), \text{ sendo } y_0 = f(x_0)$$

Exemplo 1. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ nos pontos: (a) $x_0 = 2$; (b) $(-1, 1)$.

No lugar de calcularmos o coeficente angular da reta tangente, m_t, no ponto $x_0 = 2$ e depois repetir todo o processo para o ponto $(-1, 1)$, calcularemos m_t num ponto genérico P do gráfico e, depois, faremos a abscissa deste ponto genérico igual ao valor que desejarmos. As coordenas de P serão $(x, f(x))$ (em vez de $(x_0, f(x_0))$), para facilitar a escrita.

$$\begin{aligned} m_t &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x \end{aligned}$$

Assim:

(a) $x_0 = 2 \Rightarrow m_t = 4$, $y_0 = f(x_0) = f(2) = 4$ e a equação da reta tangente neste ponto é $y - 4 = 4(x - 2)$, isto é, $y = 4x - 4$

(b) $x_0 = -1 \Rightarrow m_t = -2$, $y_0 = 1$ (dado) e a equação da reta tangente neste ponto é $y - 1 = -2(x - (-1))$, isto é, $y = -2x - 1$

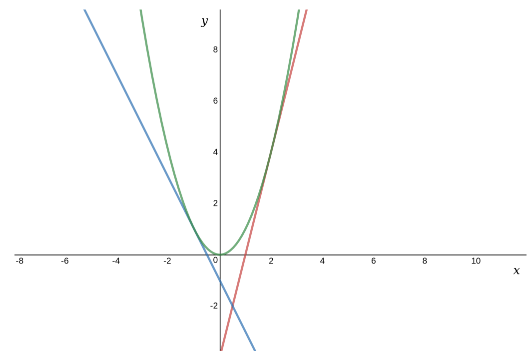

Figura 3. Retas tangentes em $x_0 = 2$ e em $(-1, 1)$

Velocidade instantânea

Suponha que um determinado móvel percorre uma trajetória com equação horária dada por $S(t)$. Qual é a velocidade instantânea do móvel num instante t?

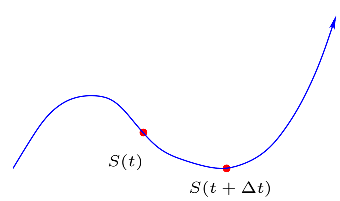

Figura 4. Trajetória de um móvel

Sabemos que a *velocidade média* entre os instantes t e $t + \Delta$ é dada por

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

Note que a velocidade média pressupõe dois instantes t_0 e $t_0 + \Delta t$ distintos, portanto $\Delta t \neq 0$. Porém isto não ocorre com a velocidade instantânea: aqui há apenas o instante t e, portanto, $\Delta t = 0$. Então não podemos obter a velocidade instantânea a partir da velocidade média, simplesmente fazendo $\Delta t = 0$. Porém podemos fazer Δt aproximar–se de zero e verificar o que acontece com as velocidades médias para esses valores de Δt.

Se, conforme Δt aproxima–se de zero, as velocidades médias correspondentes aproximam–se de algum valor definido, então é razoável definir como velocidade instantânea esse "valor final" das velocidades médias.
Assim, a *velocidade instantânea* do móvel num instante t, é o limite das velocidades médias quando Δt tende a zero. Isto é:

$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0} v_m = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+Deltat)-S(t)}{\Delta t}$$

Exemplo 2. A equação horária de um móvel é dada por $S(t) = 80 + 3t + 5t^2$, com t em segundos (s) e S em metros (m). Determine a velocidade instantânea desse móvel nos instantes $t = 0,\ \ t = 2\ \text{ e }\ t = 5$.

Vamos, inicialmente, calcular a velocidade num instante t qualquer e, depois, fazemos $t = 0$, $t = 2$ e $t = 5$:

$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{80+3(t+\Delta t)+5(t+\Delta t)^2-(80+3t+5t^2)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{80+3t+3\Delta t+5(t^2+2t\Delta t+(\Delta t)^2)-80-3t-5t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{3\Delta t+5t^2+10t\Delta t+5(\Delta t)^2-5t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t(3+10t+5\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}(3+10t+5\Delta t)$$

$$=3+10t$$

Assim, a velocidade do móvel em qualquer instante t é

$$v(t) = 3 + 10t\ m/s$$

Logo:

- $t = 0\,s \Rightarrow v(0) = 3\ m/s$
- $t = 2\,s \Rightarrow v(2) = 23m/s$
- $t = 5\,s \Rightarrow v(5) = 53m/s$

Aceleração instantânea

O mesmo processo que levou da equação horária para a velocidade instantânea, nos fornece a aceleração instantânea, quando aplicado à velocidade de um móvel.

Se um móvel tem velocidade instantânea dada por $v(t)$, então a *aceleração instantânea* desse móvel no instante t é:

$$a(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

Exemplo 3. Determine a aceleração instantânea, num instante qualquer, de um móvel cuja equaç]ao da velocidade é dada por $v(t) = 3t^2 - t$

Temos:

$$a(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{3(t+\Delta t)^2-(t+\Delta t)-(3t^2-t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{3(t^2+2t\Delta t+(\Delta t)^2)-t-\Delta t-3t^2+t}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{3t^2+6t\Delta t+3(\Delta t)^2-\Delta t-3t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t(6t+3\Delta t-1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}(6t+3\Delta t-1) = 6t-1$$

Portanto, a aceleração do móvel é $a(t) = 6t - 1m/s^2$.

Taxa de variação

Se $y = f(x)$, então a *taxa média de variação* de y em relação a x, quando x varia de x_0 até $x + \Delta x$, é $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_)}{\Delta x}$.

A *taxa pontual (ou instantânea) de variação*, ou simplesmente *taxa de variação* de y em relação a x, em $x = x_0$, é o limite:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Assim, velocidade é a taxa de variação da posição em relação ao tempo e a acleração é a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo.

Exemplo 4. A quantidade de água, Q em litros, num reservatório pode variar em relação ao tempo, t em minutos. A água pode estar saindo do reservatório ou nele entrando. Se Q varia de uma quantidade ΔQ num intervalo de tempo que vai de um instante t_0 até o instante $t_0 + \Delta t$, então taxa média de variação de Q será $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ $(\ell/min$ e a taxa instantânea de variação de Q em relação a t, no instante t_0, será $\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{Q(t_0+\Delta t)-Q(t_0)}{\Delta t}$.

Estas taxas são a *vazão média* e a *vazão (instantânea)*, respectivamente.

Definição de derivada

O processo de determiar o coeficiente angular da reta tangente repete-se se desejamos calcular a velocidade instantânea de um móvel em dado instante, ou sua aceleração instantânea, ou ainda, de modo geral, se desejamos a taxa de variação instantânea de uma quantidade em relação a uma outra. Tal processo é chamado de *derivada*.

A *derivada* de uma função f num ponto x, indicada por $f'(x)$, é definida por

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

desde que tal limite exista e seja finito

- Note que x é um ponto do domínio de f e que f deve estar definida, pelo menos, numa "pequena vizinhança" do ponto x (=intervalo aberto contendo o ponto x), para que faça sentido calcularmos $f(x + h)$ para valores pequenos de h e para tomarmos limite.

• Se existe a derivada de f em x, então dizemos que f é *derivável* ou *diferenciácel* em x. Dizemos que f é derivável ou diferenciável num intervalo I, se f possuir derivada em todo ponto de I.

• Trocando h por Δx, podemos escrever a definição de derivada como

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

• Se fizermos $z = x + h$, então $h = z - x$, $\ h \to 0 \Rightarrow z \to x$, e a definição de derivada fica:

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

• Usam-se várias notações para indicar a derivada:

(a) $f'(x)$ (Lagrange)

(b) $\dfrac{df}{dx}$ ou $\dfrac{d}{dx}f(x)$ (notação de Leibnitz)

(c) Se estamos calculando o valor da derivada num ponto x_0 específico, então escrevemos:

$$f'(x_0) \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}f(x)\Big|_{x_0}$$

(d) $D_x f$, também, indica $f'(x)$ e $D_x f(x_0)$ indica $\dfrac{df}{dx}(x_0)$

• Se escrevemos $y = f(x)$, então podemos trocar f por y nas notações acima: y' ou $y'(x)$ no lugar de $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$ no lugar de $\dfrac{df}{dx}$, etc.

Exemplo 5. Calcular a derivada da função $f(x) = k$, com k constante.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Assim escrevemos: $k' = 0$, $\dfrac{dk}{dx} = 0$

Em particular: $2' = 0$, $\pi' = 0$, etc

• Se $f(t) = -5$, então $f'(t) = 5' = 0$, ou $\dfrac{d5}{dt} = 0$

Exemplo 6. Calcular $f'(x)$, sendo $f(x) = x$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Portanto $x' = 1$, ou $\dfrac{dx}{dx} = 1$, ou $\dfrac{d}{dx}x = 1$

Assim, por exemplo, $\dfrac{dx}{dx}(2) = 1$, $\left.\frac{dx}{dx}\right|_{x=-3} = 1$

• Se $f(t) = t$, então $f'(t) = t' = 1$, ou $\dfrac{dt}{dt} = 1$

Exemplo 7. Calcular $f'(x)$, sendo $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$$

Portanto $(x^2)' = 2x$, ou $\dfrac{dx^2}{dx} = 2x$, ou $\dfrac{d}{dx}x^2 = 2x$

Assim, por exemplo, $\dfrac{dx^2}{dx}(1) = 2$, $\left.\dfrac{dx^2}{dx}\right|_{x=2} = 4$

• Se $f(t) = t^2$, então $f'(t) = 2t$, ou $\dfrac{dt^2}{dt} = 2t$

Exemplo 8. Calcular a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

• Aqui usaremos o seguinte produto notável $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, com $a = \sqrt{x+h}$ e $b = \sqrt{x}$.

• O termo $a - b$ é chamado de *conjugado* de $a + b$, e vice-versa.

Multiplicando numerador e denominador pelo conjugado do numerador, temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \text{se } x > 0$$

Portanto, para $x > 0$, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ou $\dfrac{d(\sqrt{x})}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

• Note que $(\sqrt{3})' = 0$, pois $\sqrt{3}$ é uma constante. Outra questão é: quanto vale a derivada da função raiz quadrada no ponto 3. Temos $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Assim, $f'(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, isto é, a derivada da raiz quadrada no ponto 3 é $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

Regras de Derivação

As regras de derivação ou propriedades algébricas das derivadas dizem como a derivada se comporta em relação à soma, subtração, multiplicação e divisão de funções.

Sejam u e v funções deriváveis num intervalo I. Então as funções $u \pm v$, kv (k constante), uv são deriváveis em I e a função u/v é derivável nos pontos de I onde $v(x) \neq 0$. Além disso valem:

(i) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

(ii) $(kv)' = kv', k$ constante

(iii) $(uv)' = u'v = uv'$

(iv) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, onde $v(x) \neq 0$

Agora, faremos vários exemplos usando as regras de derivação:

Exemplo 9. $(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot x' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$

Exemplo 10. $(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot x' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3$

Exemplo 11. $(x^5)' = (x^4 \cdot x)' = (x^4)' \cdot x + x^4 \cdot x' = 4x^3 \cdot x + x^4 \cdot 1 = 5x^4$

Exemplo 12.

$$(x^{-1})' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = \frac{0-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$$

Exemplo 13.

$$\begin{aligned}(x^{-2})' =& (x^{-1} \cdot x^{-1})' = (x^{-1})' \cdot x^{-1} + x^{-1} \cdot (x^{-1})' \\ =& -x^{-2} \cdot x^{-1} + x^{-1} \cdot (-x^{-2}) = -x^{-3} - x^{-3} \\ =& -2x^{-3}\end{aligned}$$

Olhando para o exemplos acima percebemo uma regra geral: $(x^n)' = nx^{n-1}$, para todo inteiro n. Mostraremos depois que esta fórmula é válida para qualquer potência, isto é, para todo real n e não apenas para os valores inteiros.

Exemplo 14. $(2x^3)' = 2(x^3)' = 2(3x^2) = 6x^2$

Exemplo 15.

$$\left(\frac{3x^4}{5}\right)' = \left(\frac{3}{5}x^4\right)' = \frac{3}{5}(x^4)' = \frac{3(x^4)'}{5} = \frac{3(4x^3)}{5} = \frac{12x^3}{5}$$

- Note que $\left(\frac{v}{k}\right)' = \left(\frac{1}{k} \cdot v\right)' = \frac{1}{k}v' = \frac{v'}{k}$ (k constante).

Exemplo 16. $\left(\frac{x^3}{8}\right)' = \frac{(x^3)'}{8} = \frac{3x^2}{8}$

Exemplo 17. $\left(\frac{5x}{4}\right)' = \frac{(5x)'}{4} = \frac{5 \cdot x'}{4} = \frac{5}{4}$

Exemplo 18.

$$(2x^5 - x^3 + 1)' = (2x^5)' - (x^3)' + 1' = 10x^4 - 3x^2 + 0 = 10x^4 - 3x^2$$

Exemplo 19.

$$\left(-\left(\frac{3x^4}{2}\right) + 4x^3 - (\frac{x}{3})\right)' = -\frac{3 \cdot 4x^3}{2} + 4 \cdot 3x^2 - \frac{1}{3} = -6x^3 + 12x^2 - \frac{1}{3}$$

Exemplo 20.

$$\left(\frac{x-1}{x+3}\right)' = \frac{(x-1)'(x+3) - (x-1)(x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{1 \cdot (x+3) - (x-1) \cdot 1}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{x+3-x+1}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2}$$

Exemplo 21.

$$\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{(x+1)'\sqrt{x} - (x+1)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{1 \cdot \sqrt{x} - (x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{\frac{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - x - 1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x-1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

Exemplo 22. Vamos reobter a derivada de $\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$, mas evitando a regra da divisão. Podemos reescrever a expressão do seguinte modo:
$\frac{x+1}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x}{x^{1/2}} + \frac{1}{x^{1/2}} = x^{1-1/2} + x^{-1/2} = x^{1/2} + x^{-1/2}$
que é uma soma de potências de x.

Esse procedimento não funciona (por enquanto) se tivéssemos no denominador algo diferente de apenas uma potência de x, como por exemplo $\sqrt{x+1}$, ou $(2x-3)^2$, etc. Assim,

$$\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)' = (x^{1/2})' + (x^{-1/2})' = \frac{1}{2}x^{1/2-1} - \frac{1}{2}x^{-1/2-1}$$

$$= \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{2}x^{-3/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} - \frac{1}{2x^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

Exemplo 23.

$$\left(\frac{2}{x^3} - \frac{1}{2x^4}\right)' = \left(2x^{-3} - \frac{x^{-4}}{2}\right)' = -6x^{-4} + \frac{4x^{-5}}{2} = -\frac{6}{x^4} + \frac{2}{x^5}$$

Interpretações para derivada

(a) Do que vimos sobre declividade de uma curva, concluimos que $f'(x_0)$ é a declividade da curva $y = f(x)$ no ponto $P = (x_0, f(x_0))$, isto é, $f'(x_0)$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P = (x_0, f(x_0))$. Portanto, a equação da reta tangente em P é:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

A *reta normal* ao gráfico de uma função f num ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é a reta que passa por P e faz ângulo reto com a reta tangente ao gráfico de f em P. Assim o produto dos coeficientes angulares das duas retas vale -1 ou a reta tangente é horizontal (tem coeficiente angular nulo) e, portanto, a reta normal é vertical (não tem coeficiente angular).

Portanto, $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$, se $m_t = f'(x_0) \neq 0$.

(b) Se $S(t)$ é a equação horária de um móvel, então a velocidade deste móvel num instante t qualquer é $v(t) = S'(t)$ e a aceleração deste mesmo móvel no instante t é $a(t) = v'(t)$.

(c) Generalizando o item anterior: se $y = f(x)$, então $f'(x_0)$ é a taxa (instantânae) de variação de f em relação a x em x_0.

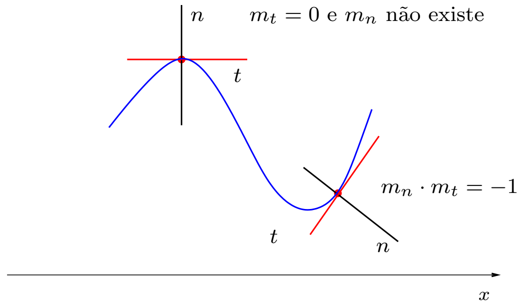

Figura 5. Reta normal

Exemplo 24. Determinar a velocidade e a aceleração no instante $t = 2s$ de um móvel cuja equação horária é dada por $S(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 1$, com S em metros.

Temos: a velocidade $v(t)$ num instante qualquer é $v(t) = S'(t) = 3t^2 - 6t + 5$ e a aceleração é $a(t) = v'(t) = 6t - 6$. Assim, $v(2) = 5m/s$ e $a(2) = 6\, m/s^2$.

Exemplo 25. Vamos determinar as equações das retas tangente e normal à curva $f(x) = x^2 - x + 1$ em $P = (-2, 7)$.

Temos: $f'(x) = 2x - 1$ e portanto coeficiente angular da reta tangente em P é: $m_t = f'(-2) = -5$ e o coeficiente angular da reta normal é $m_n \cdot m_t = -1 \Rightarrow m_n = -\dfrac{1}{m_t} = -\dfrac{1}{-5} = \dfrac{1}{5}$.

A e equação da reta tangente e $y - 7 = -5(x+2)$, isto é, $y = -5x - 3$ e a equação da reta normal é $y - 7 = \dfrac{1}{5}(x+2)$, isto é, $y = \dfrac{x}{5} + \dfrac{37}{5}$ ou $x - 5y + 37 = 0$.

Exemplo 26. Determinar a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 + x$ em que a reta tangente é paralela à reta $r:\ -6x + 3y + 1 = 0$.

$$-6x + 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x - \frac{1}{3} \Rightarrow m_r = 2.$$

Queremos a(s) reta(s) t tangente(s) ao gráfico de f que é (são) paralela(s) à reta r, portanto $m_t = 2$.

Mas $m_t = f'(x_0)$, sendo (x_0, y_0) o ponto de tangência no gráfico de f. Portanto devemos resolver a equação $f'(x) = 2$ para encontrar os possíves valores de x_0.

$f'(x) = 2 \iff 3x^2 - 2x + 1 = 2 \iff 3x^2 - 2x - 1 = 0$. As raízes desta última equação são $x = -\frac{1}{3}$ e $x = 1$.

Para $x_0 = -1/3$ temos: $y_0 = f(x_0) = f(-1/3) = -13/27$. Portanto o ponto de tangência procurado é $P = (-1/3, -13/27)$ e a equação da reta tangente ao gráfico de f neste ponto é $y + 13/27 = 2(x + 1/3)$, isto é, $y = 2x + 5/27$.

Para $x_0 = 1$ temos: $y_0 = f(x_0) = f(1) = 1$ e, portanto, o ponto de tangência é $P = (1, 1)$ e a equação da reta tangente é $y - 1 = 2(x - 1)$, isto é, $y = 2x - 1$.

Exemplo 27. Determine a reta tangente ao gráfico de $f = x^2 - 1$ que contém o ponto $A = (0, -3)$.

Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto arbitrário no gráfico de f. Então $y_0 = f(x_0) = x_0^2 - 1$.

A derivada de f é $f'(x) = 2x$. Portanto o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em P é $m_t = f'(x_0) = 2x_0$ e a equação da reta tangente neste ponto é

$$y - (x_0^2 - 1) = 2x_0(x - x_0) \quad (*)$$

Para que o ponto $A = (0, -3)$ esteja na reta tangente por P, suas coordenadas devem satisfazer a equação $(*)$. Substituindo $x = 0$ e $y = -3$ em $(*)$ obtemos: $-3 - (x_0^2 - 1) = 2x_0(0 - x_0)$.

Isto é, $-3 - x_0^2 + 1 = -2x_0^2$. Assim, $x_0^2 = 2$, e portanto, $x_0 = \pm\sqrt{2}$.

Vemos que há duas retas tangentes, t_1 e t_2, ao gráfico de f que contém o ponto $A = (0, -3)$.

- Usando a equação $(*)$ para $x_0 = -\sqrt{2}$ obtemos:

  $y - ((-\sqrt{2})^2 - 1) = 2(-\sqrt{2})(x - (-\sqrt{2}))$

  $y - 1 = -2\sqrt{2}(x + \sqrt{2})$

  Portanto, $t_1:\ y = -2\sqrt{2}x - 3$

- Usando a equação $(*)$ para $x_0 = \sqrt{2}$ obtemos:

  $y - ((\sqrt{2})^2 - 1) = 2(\sqrt{2})(x - (\sqrt{2}))$

  $y - 1 = 2\sqrt{2}(x\sqrt{2})$

  Portanto, $t_2:\ y = 2\sqrt{2x} + 5$

Exemplo 28. Considere a função $f(x) = |x|$. Qual é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f na origem?

Devemos calcular $f'(0)$:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

Mas, $\dfrac{|h|}{h} = \begin{cases} \frac{h}{h}, & \text{se } h > 0 \\ \frac{-h}{h}, & \text{se } h < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } h > 0 \\ -1, & \text{se } h < 0 \end{cases}$

Temoso: $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1$ e $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1$.

Portanto, não existe $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$, isto é não exite $f'(0)$ e, por conseguinte, não existe a reta tangente ao gráfico de $f(x) = |x|$ na origem.

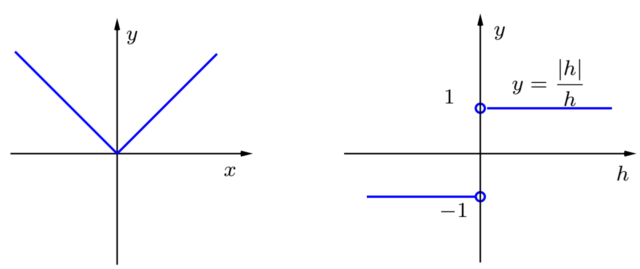

Figura 6. $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$

Note que $f'(x) = 1$, para $x > 0$ e $f'(x) = -1$, para $x < 0$.

Exemplo 29. Determine a derivada da função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & \text{se } x > -1 \\ 3x + 3, & \text{se } x \le -1 \end{cases}$$

- $x > -1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x + 2$
- $x < -1 \Rightarrow f(x) = 3x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3$
- a função não tem derivada em $x = -1$. Veja o gráfico de f abaixo.

Portanto, $f'(x) = \begin{cases} 2x+2, & \text{se } x > -1 \\ 3, & \text{se } x < -1 \end{cases}$

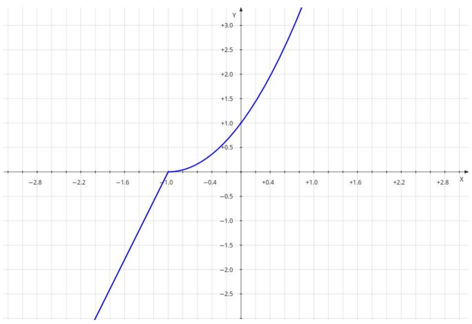

Figura 7. f não é derivável em $x = -1$

Continuidade e diferenciabilidade

O seguinte resultado facilita a verificação da continuidade de uma função.

> Se f é derivável em x_0, então f é contínua nesse ponto.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} f(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

O que mostra que f é contínua em x_0.

Assim, toda função derivável é contínua.

• Obs. Note que não vale a recíproca do resultado acima, isto é, f é contínua num ponto não implica que f seja derivável nesse ponto. É o que mostram os exemplos 28 e 29.

Exemplo 30. Verificar se é derivável em $x = -2$ a função

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - x, & \text{se } x \geq -2 \\ x + 1, & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

Vemos do gráfico de f abaixo que a função não é contínua em $x = -2$. Portanto, não é derivável em $x = -2$.

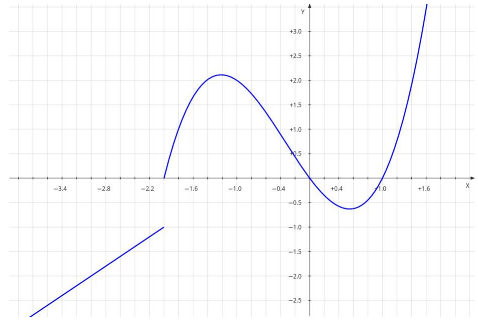

Figura 8. f não é derivável em $x = -2$

Exercícios de revisão

1 Derivar e simplificar ao máximo:

(1) $f(x) = x^{-3}$

(2) $g(x) = 6x^{5/3}$

(3) $h(x) = x^{2/3}$

(4) $y = 4 + 3x - 2x^3$

(5) $y = \dfrac{z^2}{2} - \dfrac{z^7}{7}$

(6) $f(x) = 3x^2 + \sqrt[3]{x^4}$

(7) $g(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}$

(8) $h(x) = x^{2/3} - a^{2/3}$

(9) $y = (x^3 - 1)(3 - x^2)$

(10) $y = (x^3 - 7)(2x^2 + 3)$

(11) $y = \dfrac{4t - 5}{3t + 2}$

(12) $g(t) = \dfrac{t^3 - 1}{t^3 + 1}$

(13) $h(t) = (5t + 4)^2$

(14) $w(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2}$

(15) $z(x) = \dfrac{a + bx + cx^2}{x}$

(16) $f(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{2} - \dfrac{2}{\sqrt{t}}$

(17) $y(x) = \dfrac{a - x}{a + x}$

(18) $h(x) = \dfrac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$

(19) $y = \sqrt{x}(x^2 + 1)$

(20) $y = \dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$

(21) $z = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

(22) $w = \dfrac{x^3 - \sqrt{x}}{x}$

(23) $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(24) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + x}$

(25) $g(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x}}$

(26) $h(x) = \dfrac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$

(27) $y(t) = \dfrac{t^2 - 3t}{\sqrt[3]{t^2}}$

(28) $z(t) = \dfrac{(1 + 2x)^2}{\sqrt{x}}$

(29) $f(x) = \dfrac{7}{5x^2} - \dfrac{3}{8x^5} - \dfrac{1}{x}$

(30) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}$

2 Determine as equações das retas tangente e normal à curva $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ no ponto $P = (0, 1)$.

3 Determine os pontos da curva $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ em que a reta tangente é paralela ao eixo x. Determine, também, as equações das retas tangente e normal em tais pontos.

4 Determine as retas tangentes à curva $f(x) = x^3 + x$ que tenham coeficiente angular 4.

5 Determine os pontos da curva $y = x^3 + x^2 + 2x + 1$ em que a reta tangente é paralela à reta $-6x + 2y - 5 = 0$.

6 Determine os pontos da curva $f(x) = x^3 + x^2 + x$ em que a reta tangente é perpendicular à reta $x + y + 2 = 0$.

7 Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ que é paralela à reta $-2x + 2y - 1 = 0$.

8 Determine a equação da reta tangente à curva $f(x) = x^2 + x + 1$ que *contém* o ponto $A = (0, -3)$.

9 Determine a reta tangente ao gráfico da função no ponto P indicado:

(a) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 + 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $\quad P = (2, 6)$

(b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{se } x < 0 \\ 3x + 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ $\quad P = (1, 4)$

(c) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{se } x < 0 \\ 3x + 2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ $\quad P = (0, 0)$

Respostas

1

(1) $f'(x) = \dfrac{-3}{x^4}$ (2) $g'(x) = 10x^{2/3}$

(3) $h'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ (4) $y' = 3 - 6x^2$

(5) $y' = z - z^6$ (6) $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{18x + 4\sqrt[3]{x}}{3}$

(7) $\dfrac{dg}{dx} = \dfrac{-2}{x^2} + \dfrac{6}{x^3}$ (8) $\dfrac{dh}{dx} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

(9) $\dfrac{dy}{dx} = -5x^4 + 9x^2 + 2x$ (10) $\dfrac{dy}{dx} = 10x^4 + 9x^2 - 28x$

(11) $y' = \dfrac{23}{(3t+2)^2}$ (12) $\dfrac{dg}{dt} = \dfrac{6t^2}{(t^3+1)^2}$

(13) $\dfrac{dh}{dt} = 50t + 40$ (14) $w' = \dfrac{-3x+2}{x^3}$

(15) $z'(x) = c - \dfrac{a}{x^2}$ (16) $f'(t) = \dfrac{1}{4\sqrt{t}} + \dfrac{1}{t\sqrt{t}}$

(17) $y'(x) = -\dfrac{2a}{(a+x)^2}$ (18) $h'(x) = \dfrac{4a^2x}{(a^2-x^2)^2}$

(19) $y' = \dfrac{5x^2+1}{2\sqrt{x}}$ (20) $y' = \dfrac{3}{4x^2\sqrt{x}}$

(21) $z' = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$ (22) $w' = \dfrac{4x^2\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}}$

(23) $y' = \dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$ (24) $f'(x) = \dfrac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}$

(25) $g'(x) = \dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$ (26) $h'(x) = \dfrac{-\sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})^2}$

(27) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{4t-3}{3\sqrt[3]{t^2}}$ (28) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{12x^2+4x-1}{2x\sqrt{x}}$

(29) $f'(x) = \dfrac{-14}{5x^3} + \dfrac{15}{8x^6} + \dfrac{1}{x^2}$ (30) $f'(x) = \dfrac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$

2 Reta tangente: $y = -2x + 1$ Reta normal: $y = \dfrac{1}{2}x + 1$

3 Os pontos são $P_1 = (-1, 27)$ e $P_2 = (2, 0)$ e as retas tangentes são, respectivamente, $y = 27$ e $y = 0$.

4 Os pontos são $P_1 = (-1, -2)$ e $P_2 = (1, 2)$. As equações das retas tangentes são, respectivamente, $t_1 : y = 4x + 2$ e $t_2 : y = 4x - 2$.

5 Os pontos são $P_1 = (-1, -1)$ e $P_2 = (1/3, 49/27)$. As equações das retas tangentes são, respectivamente, $t_1 : y = 3x + 2$ e $t_2 : y = 3x + 7/9$.

6 Os pontos são $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (-2/3, -14/27)$. As equações das retas tangentes são, respectivamente, $t_1 : y = x$ e $t_2 : y = x + 4/27$.

7 Há duas retas tangentes: $t_1 : y = x + 5$ e $t_2 : y = x + 1$

8 Há duas retas tangentes: $t_1 : y = -3x - 3$ e $t_2 : y = 5x - 3$

9 (a) $y = -2x - 1$ (b) $y = x + 4$ (c) não existe, pois f é descontínua em $x = 0$