centro universitário

# Centro Universitário da FEI

# PRODUTO ESCALAR

***RESUMO TEÓRICO E EXERCÍCIOS***

*Baseado na bibliografia básica*

**Equipe de MAG110**

Setembro - 2020

# PRODUTO ESCALAR

Dados dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ em relação a uma base ortonormal $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

O produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é o número real obtido por:

$$\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}$$

## EXEMPLO:

$$\boldsymbol{\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}}$$

$$\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = 2.(-1) + (-3).2 + 1.(-3) = -2 - 6 - 3 = -11}$$

## Obs.:

**a)** O produto escalar só se define se a base for ortonormal;
**b)** Notação utilizada para produto escalar: ·;
**c)** O produto escalar pode ser um número positivo, negativo ou nulo.

# Produto Escalar

## Propriedades:

Dados $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ escritos em uma base ortonormal $\boldsymbol{B} = (\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ tem-se:

*1)* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ ,$\forall\, \vec{u}, \vec{v}$ - comutativa

*2)* $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}), \forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall\vec{u}, \vec{v},$

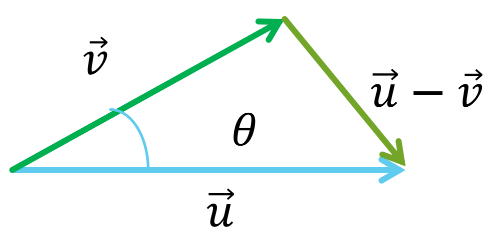
3) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ *e* $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ ,$\forall\, \vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ - distributiva

4) Módulo de um vetor:

$$\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2 u_3})$$

$$|\vec{\boldsymbol{u}}| = \sqrt{\boldsymbol{u_1^2} + \boldsymbol{u_2^2} + \boldsymbol{u_3^2}} = \sqrt{\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}}$$

5) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$, onde θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$:




Aplicando a lei dos cossenos.

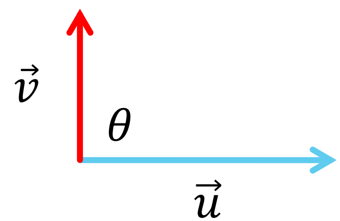
# Produto Escalar

6) Condição de Ortogonalidade de dois vetores:

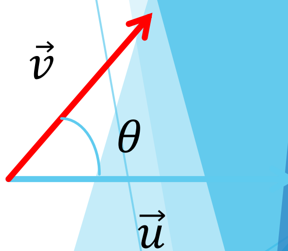
Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ $e$ $\vec{v} \neq \vec{0}$ então $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$, isto é, $\vec{u} \perp \vec{v}$.

7) Ângulo entre dois vetores: $cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$, logo $\theta = arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$;

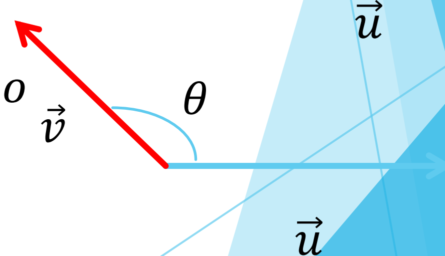
❖ Se $\theta = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow cos\theta = 0 \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$




❖ Se $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \leftrightarrow cos\theta > 0 \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \rightarrow$ $\hat{a}ngulo$ é $agudo$




❖ Se $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \leftrightarrow cos\theta < 0 \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \rightarrow$ $\hat{a}ngulo$ é $obtuso$



**Exemplo1:** A, B e C são vértices de um triângulo onde $\overrightarrow{AB} = (2,1,2)$ e $\overrightarrow{AC} = (-4,1,1)$ na base $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a) Calcule o comprimento dos lados do triângulo,

b) O cosseno do maior ângulo,

c) Classifique o triângulo quanto esse ângulo.

**Resp. a)** $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{18}, |\overrightarrow{AB}| = 3 \; e \; |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{37}$

b)$\cos(A) = -\frac{5\sqrt{2}}{18}$

c) O triângulo é obutusângulo, ângulo obtuso no vértice A

Exemplo2: Dados os vetores $\vec{a} = (1,2,1)$, $\vec{b} = (-1,0,3)$ e $\vec{c} = (2,1,1)$ , calcule as coordenadas do $\vec{u}$ que satisfaça as condições: $\vec{u}$ é coplanar com $\vec{a}$ e $\vec{b}$, $\vec{u} \perp \vec{c}$ , $|\vec{u}| = \sqrt{236}$, $\vec{u}$ formando um ângulo obtuso com o vetor $\vec{t} = (2,0,1)$.

**Resp.** $\boldsymbol{\vec{u} = (6, 2, -14)}$

**Bibliografia:**

1) Loreto, A. C. C.; Junior, A. P. L. VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA Teoria e Exercícios. 4° Ed. LCTE Editora. 2014. São Paulo.
2) Watanabe, R. G., Mello, D. A. VETORES E UMA INICIAÇÃO A GEOMETRIA ANALÍTICA. 2° Ed. LF Editorial. 2011. São Paulo.