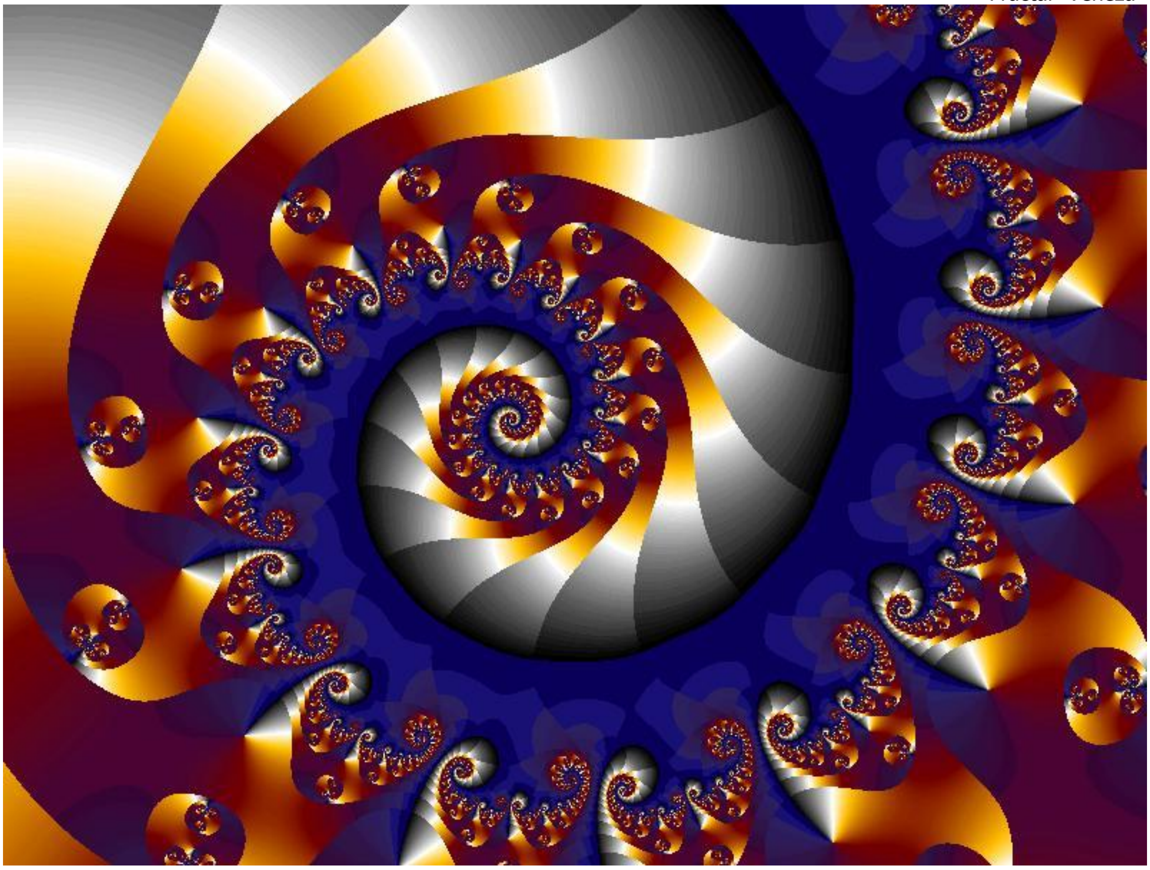
Material Básico de Estudo

Sistemas de Equações Lineares

Fractal "Veneza"



"Eu nunca ensino aos meus alunos, apenas tento dar condições nas quais eles possam aprender".
[Albert Einstein]

Estudante: ____

Turma: ______________________________ Semestre: __________

Material elaborado pelo Prof. Júlio César Tomio*

***** Professor do Instituto Federal de Santa Catarina [IFSC] – Campus Joinville.

MENSAGEM PARA O ESTUDANTE!

Com satisfação, apresento este material que tem como finalidade dar suporte à unidade curricular [disciplina] de Matemática III que se estende durante o 3º Módulo do seu Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio, e, consequentemente, auxiliar em futuras aplicações nas disciplinas subsequentes que necessitarão dos conhecimentos e conceitos aqui trabalhados e desenvolvidos. A concepção deste, baseada na experiência de alguns anos de docência, também objetiva otimizar o processo de estudo, principalmente no ambiente de sala de aula.

Esta obra almeja mediar com excelência o processo de ensino-aprendizagem dos Sistemas de Equações Lineares. Para tanto, contribuições em forma de crítica, sugestões ou correções serão calorosamente recebidas. Ficarei imensamente agradecido caso você queira fazer parte do processo de aprimoramento deste material.

A realização de um Curso Técnico é um fato que pode fazer muita diferença na sua vida pessoal e profissional. Dedique-se! Faça tudo da melhor maneira que puder, pois desta forma você estará justificando um dos maiores (e também um dos melhores) investimentos que você já fez em você mesmo.

Desejo que a sua vivência no ambiente escolar seja a melhor possível e que a passagem por mais esta etapa de sua vida contribua para o seu engrandecimento pessoal e futuramente profissional. Acredito que isso possibilitará uma melhora significativa na sua qualidade de vida e também na daqueles que convivem próximos de você.

Muita garra e sucesso!

Prof. Júlio César Tomio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Este material foi produzido utilizando como base, parte da bibliografia indicada abaixo e também através de contribuições minhas e de alguns colegas professores, com os quais tive o prazer de trabalhar.

Normalmente, as Referências Bibliográficas aparecem nas últimas páginas de um livro. Apresento estas referências aqui, objetivando sempre lembrá-lo que a busca por outras fontes de informação é um fator de grande importância em qualquer estudo que se queira realizar. Experimente! Vá até a biblioteca e faça uma consulta.

- ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com aplicações**. 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- BOLDRINI, José Luiz, et al. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo, Harbra, 1986.
- GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática: uma nova abordagem**. v.2. São Paulo: FTD, 2000.
- KOLMAN, Bernard; HILL, David R. **Introdução à Álgebra Linear: com aplicações**. 8 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- LEON, S. J. **Álgebra Linear com aplicações**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- MACHADO, Antônio dos Santos. **Sistemas Lineares e Combinatória**. São Paulo: Atual, 1986.
- PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. v.2. São Paulo: Moderna, 1995.
- POOLE, David. **Álgebra Linear**. São Paulo: Thomson, 2004.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, Paulo. **Introdução à álgebra linear**. São Paulo: McGraw-Hill, 1990.

Não tenha medo de crescer lentamente. Apenas tenha medo de ficar parado. [Provérbio chinês]

ÍNDICE

Estudo dos Sistemas de Equações Lineares

Equação Linear [ou Equação do 1º Grau] 04
Solução de uma Equação Linear 04
Sistema Linear 04
Solução de um Sistema de Equações 05
Sistemas Equivalentes 05
Métodos "Básicos" para resolução de Sistemas Lineares 05
Classificação de um Sistema Linear quanto ao número de Soluções 06
Análise Gráfica 07
Métodos para resolução de Sistemas Lineares 08
Regra de Cramer 09
Escalonamento (ou Eliminação) de Gauss 10
Casos Especiais: Sistemas Não Quadrados 14
Caso Particular: Sistemas Lineares Homogêneos 16
Discussão de um Sistema Linear através de um Parâmetro 19
Tópico Extra: Método da Matriz Inversa 22
Tópico Especial: Relembrando Inversão de Matrizes 23
Exercícios 24
Exercícios – Aplicações Usuais de Sistemas Lineares 27
Algumas Aplicações Especiais de Sistemas Lineares 28
Exercícios 32

Apêndice: Quadro Resumo para Discussão e Classificação de Sistemas Lineares 34

Cabe aqui o meu voto de louvor ao professor (e amigo) **Marcos A. Rebello**, que contribuiu com a produção deste material.

ESTUDO DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

O mundo estava cheio de equações...
Deve haver uma resposta para todas as coisas, se
pelo menos você souber como colocar as questões.

Anne Tyler
The accidental tourist
Alfred A. Knopf, 1985. p.235

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Conceitos Iniciais

• Equação Linear [ou Equação do 1º Grau]:

É toda equação do tipo: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$

Onde: $\begin{cases} a_1 , a_2 , ... , a_n & \rightarrow \text{ são os coeficientes;} \\ x_1 , x_2 , ... , x_n & \rightarrow \text{ são as incógnitas;} \\ b & \rightarrow \text{ é o termo independente.} \end{cases}$

NÃO são equações lineares:

$x^3 - 5y = 0$

$2xy + z = 10$

$^1/_x + {^1/_y} - 3z = 12$

Exemplos: (i) $4x - y + 9z = 0$

(ii) $3a + 5b - c + 2d = 1$

(iii) $x + y = 10$ **ou** $x_1 + x_2 = 10$

Observações:

Uma equação linear **não** apresenta termos com potência [x^2], termos com radical [$\sqrt{x}$], multiplicação de incógnitas [x.y], expoente negativo [x^{-1}], etc. Cada termo tem uma única incógnita, com expoente 1, por isso também é denomidada equação do 1º grau.

Uma equação linear é dita "homogênea" quando o seu termo independente é nulo, ou seja, b = 0. [Exemplo (i) acima]

• Solução de uma Equação Linear:

A sequência **ordenada** $(\alpha_1 , \alpha_2 , ... , \alpha_n)$ é uma solução da equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$ se $a_1(\alpha_1) + a_2(\alpha_2) + ... + a_n(\alpha_n) = b$ for sentença verdadeira.

Exemplos: **#** Considere a equação linear: $5x + 2y = 14$

Os pares ou duplas ordenadas (4, –3) e (0, 7) são **duas** das **infinitas soluções**,
pois: $5.(4) + 2.(-3) = 14$ e $5.(0) + 2.(7) = 14$.

Considere a equação linear: $x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -8$

A sequência (2, 1, –1, 5) é **uma** das **infinitas soluções**, pois: $(2) - 3(1) + 2(-1) - (5) = -8$.

• Sistema Linear:

É o conjunto de m ($m \geq 1$) equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...+ a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Que também tem sua apresentação na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

↳ Sendo: $x_1 , x_2 , ... , x_n \rightarrow$ as incógnitas [variáveis] e $a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , ... , a_{mn} , b_1 , b_2 , ... , b_m \rightarrow$ números reais

Exemplos:

a) $\begin{cases} x+3y=1 \\ 4x-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} -x+2y-z=1 \\ 2x-y+5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

• Solução de um Sistema de Equações:

A sequência **ordenada** $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ será solução do sistema [ou uma das soluções], se for solução de **todas** as equações envolvidas no mesmo.

• Sistemas Equivalentes:

São sistemas que admitem a mesma solução. Veja abaixo dois sistemas equivalentes:

$\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ e $\begin{cases} 7x-y=13 \\ \dfrac{x}{2}-y=0 \end{cases}$ Observe que o conjunto solução de ambos é: **S = {(2, 1)}**

• Métodos "Básicos" para resolução de Sistemas Lineares:

Consideramos métodos básicos de resolução, como sendo os métodos mais usados para sistemas lineares de duas equações com duas incógnitas. São eles:

Método da Substituição
Método da Adição
Método da Comparação [este não será abordado aqui]

 # Método da Substituição:

Consideremos o sistema: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ Então, vamos determinar o seu conjunto solução.

Resolução:

Inicialmente, isolamos (convenientemente) uma das incógnitas. Neste caso, escolhemos a incógnita "x" da equação (II):

$\begin{cases} 2x - y = 0 & \text{(I)} \\ x + 3y = 7 & \text{(II)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 7 - 3y}$ (III)

Agora, na equação (I), **substituiremos** a equação (III):

(I) $2x - y = 0$
$2(7 - 3y) - y = 0$
$14 - 6y - y = 0$
$14 - 7y = 0$
$-7y = -14 \Rightarrow$ **y = 2**

Então, substituímos o valor [y = 2] na equação (III).

(III) $x = 7 - 3y$
$x = 7 - 3(2)$
$x = 7 - 6$
x = 1

Logo, o conjunto solução do sistema é: **S = {(1, 2)}**

Nota:

Podemos isolar qualquer incógnita em qualquer uma das equações. Normalmente escolhemos a incógnita que facilita o processo de resolução [evitando frações, por exemplo].

Perceba que poderíamos isolar a incógnita "y" na 1ª equação, e assim teríamos **y = 2x** para realizar a substituição. Esta opção seria um "pouquinho" mais simples que a apresentada ao lado.

Método da Adição:

Vamos considerar o mesmo sistema do exemplo anterior, para propor uma comparação entre os métodos.

Para o sistema: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ Vamos determinar o seu conjunto solução.

Resolução:

Este método consiste em **adicionarmos** os termos semelhantes (com mesmas incógnitas e também os termos independentes) das equações de modo que uma das incógnitas "desapareça". Para tanto, o sistema deve estar organizado (como é o caso do exemplo em questão). Em certos casos, necessitamos multiplicar uma ou mais equações por valores numéricos (diferentes de zero) para que, após a soma dos termos semelhantes, aconteça o desaparecimento de uma das incógnitas.

No sistema em questão, a adição "direta" dos termos, não resulta no desaparecimento de uma das incógnitas. Então multiplicaremos uma das equações por um valor numérico adequado, gerando um sistema equivalente.

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 7 \quad .(-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -2x - 6y = -14 \end{cases}$$

Escolhemos multiplicar por (–2) a 2ª equação para eliminarmos a incógnita "x".

$$+\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -2x - 6y = -14 \end{cases}$$

Adicionando as "colunas" com termos semelhantes, temos:

$$-7y = -14$$

$$\mathbf{y = 2}$$

Caso desejássemos eliminar por primeiro a incógnita "y", multiplicaríamos a 1ª equação por (3).

Agora, basta substituir o valor encontrado [y = 2] em qualquer uma das equações do sistema.
Então:

$$x + 3y = 7$$
$$x + 3(2) = 7$$
$$x = 7 - 6$$
$$\mathbf{x = 1}$$

Logo, o conjunto solução do sistema é: **S = {(1, 2)}**

Nota: Outros Métodos para Resolução de Sistemas Lineares:

Existem vários métodos para resolução de sistemas lineares, tais como: Regra de Cramer, Método do Escalonamento (Gauss), Método de Castilho, Método da Matriz Inversa, Eliminação de Gauss-Jordan, entre outros. Alguns destes métodos serão abordados a seguir.

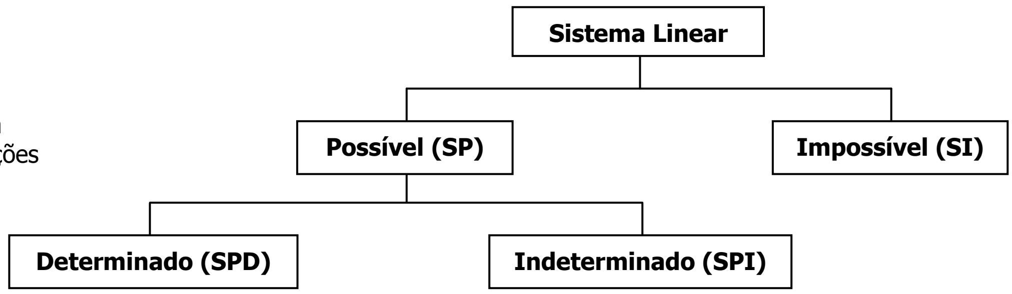
Estes outros métodos são, na sua maioria, aplicados em sistemas que possuem mais [ou muito mais] do que duas incógnitas [variáveis]. Em tais situações, os métodos básicos apresentados até aqui, tornam-se "obsoletos" ou inapropriados.

• **Classificação de um Sistema Linear quanto ao número de Soluções**:

Sendo que:

SP → Admite solução
SI → Não admite solução

SPD → Admite solução única
SPI → Admite infinitas soluções



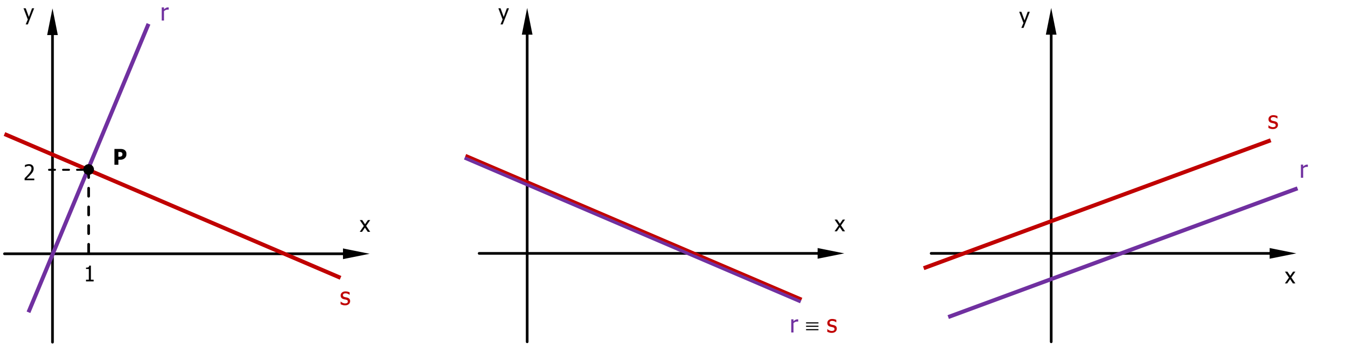
Nota: O termo "possível" pode ser substituído eventualmente por "compatível" ou "consistente".
O termo "impossível" pode ser substituído eventualmente por "incompatível" ou "inconsistente".

• Análise Gráfica

Os sistemas com duas incógnitas [variáveis] podem ser facilmente reprentados no sistema cartesiano ortogonal. Sem perda de generalidade, usaremos sistemas lineares no R^2 para representar os 3 casos vistos anteriormente.

Veja:

a) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 2x + 6y = 12 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ -2x + 6y = 3 \end{cases}$



SPD $\Rightarrow$ S = {(1, 2)}

Retas concorrentes [r × s]

SPI $\Rightarrow$ S = {todos os pontos da reta}

Retas paralelas coincidentes [r ≡ s]

SI $\Rightarrow$ S = { }

Retas paralelas distintas [r // s]

Observação:

Note que se organizarmos as equações dos sistemas **(a)**, **(b)** e **(c)**, exemplificados acima, na forma $\mathbf{y = ax + b}$, sendo esta forma conhecida como "função do 1º grau"; com um pouco de conhecimento a respeito desse tipo de função, poderemos facilmente classificar os sistemas através da simples observação das equações escritas neste formato.

Os sistemas apresentados acima ficariam assim:

a) $\begin{cases} y = 2x \\ y = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{7}{3} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = -\dfrac{x}{3} + 2 \\ y = -\dfrac{x}{3} + 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Nota:

O "Método da Comparação" para resolver sistemas de equações do 1º grau [que foi citado anteriormente e que por opção não fará parte deste nosso estudo] pode ser útil em sistemas que se apresentam na forma acima, ou seja, com uma das incógnitas "isoladas" em ambas as equações.

Interessou? Pesquise e procure saber mais!

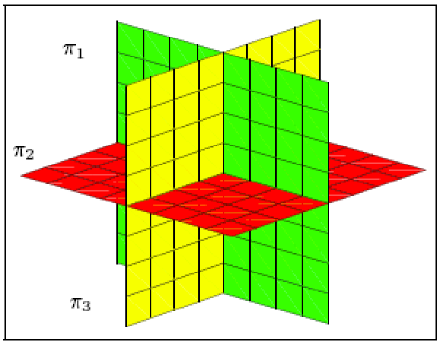
Agora, para exemplificar de forma mais ampla, vamos considerar um sistema de três variáveis e três equações de maneira genérica. Assim temos:

$$\begin{cases} \pi_1: & a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ \pi_2: & a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ \pi_3: & a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{cases}$$

Para todos os efeitos, denominamos π_1, π_2 e π_3 para cada uma das equações do sistema em questão.

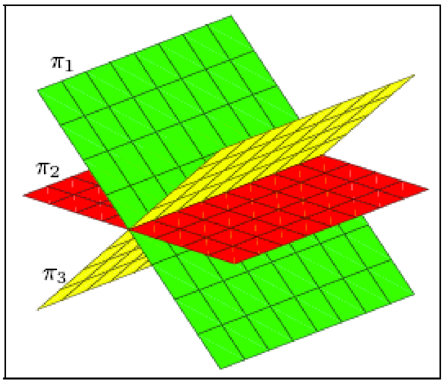
Vale destacar que, no $\mathbf{R^3}$, cada uma das equações do sistema considerado é representada graficamente por um **plano**.

Assim:



• Se o sistema em questão for do tipo **SPD**, terá solução única que será dada por uma tripla ordenada (x, y, z) e que no R^3 representará um único ponto. Geometricamente temos:

Os três planos se interceptam segundo um único ponto.



• Se o sistema em questão for do tipo **SPI**, terá infinitas soluções que serão definidas por triplas ordenadas (x, y, z) e, que no R^3, são os infinitos pontos de uma reta comum aos planos. Geometricamente temos:

Os três planos se interceptam segundo uma reta.

• Se o sistema em questão for do tipo **SI**, não haverá solução (x, y, z). Isso significa que não existirá uma interseção para os três planos no R^3. Geometricamente teremos várias situações. Algumas delas são:

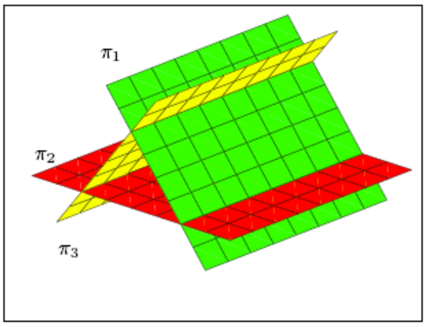


Figura 01

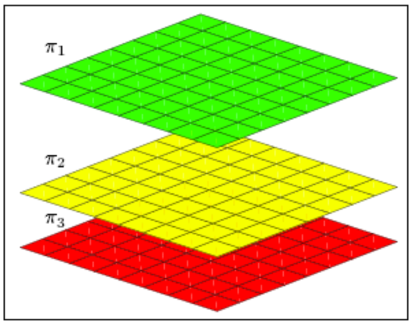


Figura 02

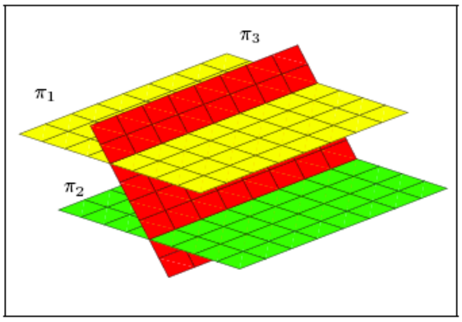


Figura 03

Figura 01: Os três planos interceptam-se dois a dois.
Figura 02: Os três planos são paralelos distintos [não se interceptam].
Figura 03: Dois dos planos são paralelos distintos [não se interceptam].

Aplicando um método de resolução de sistemas lineares convenientemente, pode-se identificar cada um dos casos mencionados acima [SPD, SPI ou SI]. A escolha do "melhor" método será um dos objetivos do nosso estudo.

Nota: As figuras contidas nessa página foram extraídas de: http://www.mat.ufmg.br/~regi/gaalt/sistlin2.pdf

Métodos para resolução de Sistemas Lineares:

Existem vários métodos para resolução de sistemas lineares, tais como: Regra de Cramer, Método do Escalonamento (Gauss), Método de Castilho, Método da Matriz Inversa, Eliminação de Gauss-Jordan, entre outros.

Inicialmente, destacaremos em nosso estudo, apenas alguns dos métodos existentes. Os outros métodos, que não abordaremos, aqui costumam ser "variações" dos métodos que estudaremos. A busca por outros métodos de resolução de sistemas ficará a cargo do leitor [que, em breve, já terá uma boa base para avançar nos estudos individualmente].

REGRA DE CRAMER

Seja um sistema linear **quadrado** (número de equações igual ao número de incógnitas) na forma matricial. Considerando "**D**" o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas (chamaremos de determinante principal) e "$\mathbf{D_i}$" o determinante da matriz modificada através da troca da i-ésima coluna pela coluna dos termos independentes, podemos encontrar o conjunto solução do sistema de "**n**" variáveis, fazendo:

$$\mathbf{x_i} = \frac{\mathbf{D_i}}{\mathbf{D}} \quad \forall \mathbf{i} \in \{1, 2, 3, ..., n\}$$ com D ≠ 0 para **Sistemas Possíveis e Determinados** [SPD]

Resolução de um Sistema Linear pela Regra de Cramer:

Consideremos como exemplo, o sistema linear: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x-y-z=-4 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$

Escrevendo na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{onde temos que:} \quad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad \text{[Determinante Principal]}$$

Observe que para calcularmos Dx, trocamos a coluna da variável "x" pela coluna dos termos independentes.

$$Dx = \begin{vmatrix} \mathbf{6} & 1 & 1 \\ \mathbf{-4} & -1 & -1 \\ \mathbf{1} & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \qquad Dy = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{6} & 1 \\ 1 & \mathbf{-4} & -1 \\ 2 & \mathbf{1} & 1 \end{vmatrix} = -12 \qquad \text{Assim:} \quad x = \frac{Dx}{D} = \frac{-4}{-4} = 1 \quad \text{e} \quad y = \frac{Dy}{D} = \frac{-12}{-4} = 3$$

Substituindo os valores **x = 1** e **y = 3** na primeira equação do sistema, temos:

$x + y + z = 6 \;\Rightarrow\; 1 + 3 + z = 6 \;\Rightarrow\; z = 6 - 4 \;\Rightarrow\; \mathbf{z = 2}$

Logo, a solução do sistema em questão é: **S = {(1, 3, 2)}**

Observação 1: Caso desejássemos calcular também o valor de "z" pela Regra de Cramer, teríamos:

$$Dz = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{6} \\ 1 & -1 & \mathbf{-4} \\ 2 & -1 & \mathbf{1} \end{vmatrix} = -8 \quad \text{e então:} \quad z = \frac{Dz}{D} = \frac{-8}{-4} = 2$$

Observação 2: Após encontrarmos o valor de "x" pela Regra de Cramer, **caso seja conveniente**, podemos substitui-lo no sistema inicial dado e resolvê-lo então com apenas duas incógnitas [y e z], suprimindo desta forma, o cálculo de Dy e Dz.

Discussão de um Sistema Linear através da Regra de Cramer:

Discutir um sistema linear é avaliar as hipóteses para que ele seja **SPD**, **SPI** ou **SI**. Vale lembrar que, pela Regra de Cramer, só poderemos fazer a discussão de um sistema quadrado. Assim sendo, o sistema será:

- **SPD** (solução única) se : $D \neq 0$
- **SPI** (infinitas soluções) se : D = 0
- **SI** (sem solução) se : D = 0

Histórico:

Gabriel Cramer (Genebra, 31/07/1704 — Bagnols, França, 04/01/1752, foto ao lado) era um matemático suíço. Foi professor de Matemática e de Filosofia da Universidade de Genebra e membro da Academia de Berlim e da London Royal Society. Dedicou especial atenção à teoria das curvas. A sua obra mais importante foi *Introduction à l'analyse des courbes algébriques* (1750). Ocupou-se também da origem, a forma dos planetas e dos seus movimentos. É famosa a regra que permite a resolução dos sistemas de equações lineares que tem o seu nome, a Regra de Cramer.

O autor E. Crowe, em *A History of Vector Analysis*, hoje reeditado pela editora Dover, comenta que o primeiro aparecimento que conhece da Regra de Cramer ocorre num artigo de Augustin-Louis **Cauchy** (21/08/1789 – 23/05/1857), matemático francês, estudando um sistema de duas equações e duas incógnitas com o emprego do produto de Grassmann.

ESCALONAMENTO (OU ELIMINAÇÃO) DE GAUSS

Antes de tratarmos do processo propriamente dito, faremos algumas considerações iniciais.

Sistema Escalonado:

Observe os dois sistemas a seguir. Eles são equivalentes e, portanto, têm a mesma solução.

$$\text{(i)} \begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x + 3y - z = 13 \\ 3x - y + 2z = 12 \end{cases} \qquad \text{(ii)} \begin{cases} x + y + z = 7 \\ \quad y - 3z = -1 \\ \quad -13z = -13 \end{cases}$$

O sistema (ii) é dito ESCALONADO, pois cada equação tem uma variável a menos, até que a última equação apresente apenas uma variável.

> A palavra *escalonar* vem da palavra latina *scala*, que significa "escada" ou "degraus". Escalonar um sistema (ou uma matriz) significa dar a ele(a) a forma de escada.

Inicialmente, vamos resolver o sistema (ii):

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ \quad y - 3z = -1 \\ \quad -13z = -13 \end{cases}$$

Resolveremos começando, obviamente, pela equação que apresenta somente uma variável. Então, temos:

$-13z = -13$
$\mathbf{z = 1}$

Substituindo o valor [z = 1] na equação com duas variáveis...

$y - 3z = -1$
$y - 3(1) = -1$
$y = 3 - 1$
$\mathbf{y = 2}$

Finalmente, substituiremos os valores encontrados [z = 1 e y = 2] na equação com três variáveis...

$x + y + z = 7$
$x + (2) + (1) = 7$
$x = 7 - 3$
$\mathbf{x = 4}$

Então, a solução do sistema é: **S = {(4, 2, 1)}**

Observe que, para resolver um sistema escalonado, basta fazermos o que chamamos de "substituição inversa", como apresentado no exemplo acima.

Mas como transformar um sistema linear qualquer em um sistema escalonado?

Para isso, aplicaremos um método conhecido como ESCALONAMENTO ou ELIMINAÇÃO DE GAUSS (ou por outros nomes similares). Veremos a seguir.

Histórico: [Adaptado de: POOLE, David. **Álgebra Linear**. São Paulo: Thomson, 2004]

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) é considerado um dos três maiores matemáticos de todos os tempos, juntamente com Arquimedes e Newton. É frequentemente chamado de "príncipe dos matemáticos", apelido que ele realmente merece. Criança prodígio, conta-se que Gauss conseguia fazer aritmética antes de conseguir falar. Com três anos de idade, ele corrigiu um erro nos cálculos feitos por seu pai para a folha de pagamento da companhia, e, aos 21 anos, provou em sua dissertação de doutorado, que todo polinômio de grau "n" com coeficientes reais ou complexos tem exatamente "n" raízes, contando suas multiplicidades – o Teorema Fundamental da Álgebra. O escalonamento, ou método de eliminação de Gauss, era conhecido pelos chineses no terceiro século a.C., mas carrega o nome de Gauss por causa da sua redescoberta em um artigo no qual ele resolveu um sistema de equações lineares para descrever a órbita de um asteróide.

Para refletir: A verdadeira medida de um homem não é como ele se comporta em momentos de conforto e conveniência, mas como ele se mantém em tempos de controvérsia e desafio. [Martin Luther King]

Resolução de um Sistema Linear através do Escalonamento:

Poderemos resolver um sistema qualquer na sua forma original ou na forma matricial. Para ambos os casos, devemos transformar o sistema em questão em um sistema escalonado equivalente. Para isso, realizaremos **operações elementares com as linhas** do sistema. São elas:

- Trocar duas (ou mais) linhas de posição.
- Multiplicar uma linha por uma constante não nula.
- Somar um múltiplo escalar de uma linha com outra linha.

Veja os exemplos:

Exemplo 1: Determine o conjunto verdade do sistema linear $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 3y + z = 9 \\ 3x - y - 2z = -10 \end{cases}$

Resolução:

Para este exemplo, resolveremos mantendo a sua "forma" original.

Observe que o termo em "x" da primeira equação tem coeficiente 1 (um), o que facilita muito todos os procedimentos. Caso o sistema não apresentasse tal situação, poderíamos "ajustá-lo" para essa configuração, utilizando as operações elementares com as linhas, obviamente.

Aplicando as operações elementares com as linhas, para eliminarmos os termos em "x" da 2ª e 3ª equações, temos:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 3y + z = 9 \\ 3x - y - 2z = -10 \end{array}\right. \quad \begin{array}{ll} .(-2) & .(-3) \\ \mathbf{+} & \\ & \mathbf{+} \end{array}$$

Agora devemos eliminar o termo em "y" da terceira equação. Então:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y - z = 3 \\ \quad - y + 3z = 3 \\ \quad - 7y + z = -19 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ .(-7) \\ \mathbf{+} \end{array}$$

Assim, temos o sistema escalonado equivalente abaixo.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ \quad - y + 3z = 3 \\ \qquad - 20z = -40 \end{cases}$$

Agora, na terceira equação, temos:

$$-20z = -40$$
$$\mathbf{z = 2}$$

Fazendo a "substituição inversa" com o valor de **z = 2**, temos:

$-y + 3z = 3$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbf{y = 3}$

$x + 2y - z = 3$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbf{x = -1}$

Logo, o conjunto verdade do sistema dado é: **V = {(–1, 3, 2)}**.

Observe que o sistema é do tipo "SPD" [Sistema Possível Determinado].

Exemplo 2: Encontre o conjunto solução do sistema de equações lineares dado por: $\begin{cases} x - y - z = 10 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 4x - 3y + z = 29 \end{cases}$

Resolução:

Resolveremos esse exemplo pelo mesmo processo, mas utilizando a sua **forma matricial**:

Escrevendo o sistema dado $\begin{cases} x - y - z = 10 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 4x - 3y + z = 29 \end{cases}$ na forma matricial e realizando as operações elementares com as linhas, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 10 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ 4 & -3 & 1 & 29 \end{array}\right] \quad .(-2)\ + \quad .(-4)\ +$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & -11 \\ 0 & 1 & 5 & -11 \end{array}\right] \quad .(-1)\ +$$

Se **0z = 0**, quais os possíveis valores para **z**?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$ Como a (última) linha é totalmente nula, temos que o sistema é **SPI**.

Como o sistema é SPI (Sistema Possível e Indeterminado), ele possui infinitas soluções.

Neste caso, para cada valor atribuído a uma das variáveis, teremos uma solução. Faremos uma escolha genérica, para então escrevermos todas as soluções possíveis do sistema em questão.

Esta escolha genérica será **z = a** (sendo "a" um número real) e substituiremos este valor na segunda equação do sistema escalonado. Então:

$y + 5z = -11$
$y + 5a = -11$
$\mathbf{y = -11 - 5a}$ (I)

Agora, substituindo a equação (I) e [z = a] na primeira equação do sistema, temos:

$x - y - z = 10$
$x - (-11 - 5a) - a = 10$
$x + 11 + 5a - a = 10$
$x = 10 - 11 - 4a$
$\mathbf{x = -1 - 4a}$

Logo a solução do sistema é: **S = { (–1 – 4a, –11 – 5a, a)**, com $a \in \mathbb{R}$ **}**.

Observações:

• Podemos visualizar algumas ternas ordenadas numéricas que resolvem o sistema acima, atribuindo alguns valores reais para "a". Escolhendo alguns valores aleatoriamente, temos:

Para a = 0, temos: $S_0 = \{ (-1, -11, 0) \}$

Para a = –2, temos: $S_{-2} = \{ (7, -1, -2) \}$

Para a = 1, temos: $S_1 = \{ (-5, -16, 1) \}$

• Caso durante a resolução do sistema escolhêssemos um valor genérico "a" para a variável "x" ou "y" a solução final teria um aspecto visual diferente, entretanto (e obviamente) a solução formaria as mesmas ternas ordenadas para o sistema resolvido.

• Quando, no escalonamento de um sistema linear com três incógnitas (por exemplo), uma linha torna-se totalmente nula, isso indica que: 0x + 0y + 0z = 0, possibilitando assim infinitos valores para as incógnitas em questão.

Exemplo 3: Determine o conjunto solução do sistema de equações lineares dado por: $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = 3 \\ x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$

Resolução:

Agora, resolveremos esse exemplo, mantendo a sua "forma" original (e não pela forma matricial).

Aplicando as operações elementares com as linhas, para eliminarmos os termos em "x" da 2ª e 3ª equações, temos:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 & \\ 2x + 3y - 3z = 3 & NL_2 = -2.L_1 + L_2 \\ x - 3y + 3z = 2 & NL_3 = -1.L_1 + L_3 \end{cases}$$

Importante:

A notação $\mathbf{NL_2 = -2.L_1 + L_2}$ significa que a NOVA Linha 2 será resultante da adição da Linha 2 com a Linha 1 multiplicada por (–2).

O sistema fica então com a forma:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ -4y + 4z = 1 \end{cases}$$

Agora devemos eliminar o termo em "y" da terceira equação. Então:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 & \\ y - z = 1 & \\ -4y + 4z = 1 & NL_3 = 4.L_2 + L_3 \end{cases}$$

Assim, temos o sistema escalonado equivalente abaixo:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ 0z = 5 \end{cases}$$

Note que a última equação do sistema escalonado é: **0z = 5**

Através dela, podemos dizer que "procuramos" por um número "z" que multiplicado por 0 (zero) resultará em 5. É fácil de perceber que tal número procurado **não existe**, pois todo número multiplicado por zero resultará em zero [e não cinco].

Concluindo, o valor de "z" procurado NÃO EXISTE, o que torna o sistema IMPOSSÍVEL!

Assim, o sistema impossível (ou incompatível) tem seu conjunto solução VAZIO, e escrevemos: **S = { }**.

Discussão de um Sistema Linear através do Escalonamento:

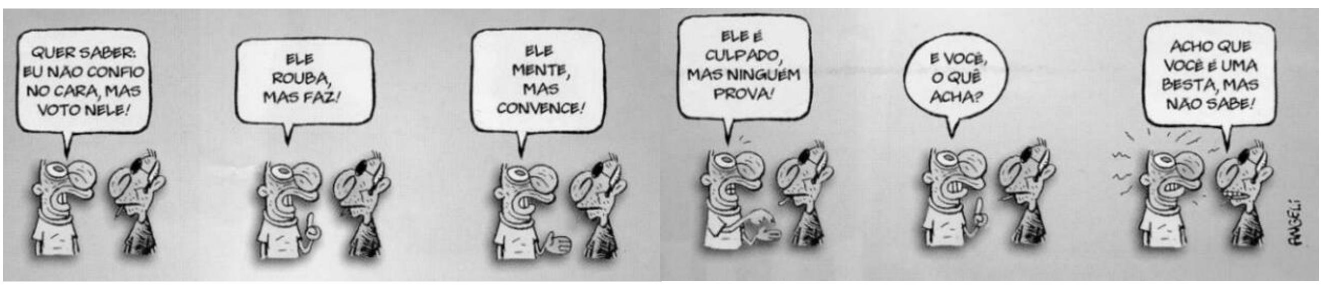
Discutir um sistema linear é avaliar as hipóteses para que ele seja **SPD**, **SPI** ou **SI**. Para um sistema escalonado, teremos (normalmente) na última equação apenas uma incógnita. Consideraremos como exemplo, a incógnita "**z**".

Analisando a (última) equação do sistema escalonado **m.z = k** teremos:

- **SPD** (solução única) se: $m \neq 0$ e $k \in \mathbb{R}$ Exemplo: 2**z** = 8 $\Rightarrow$ **z** = 4
- **SPI** (infinitas soluções) se: $m = 0$ e $k = 0$ Exemplo: 0**z** = 0 $\Rightarrow$ **z** pode assumir qualquer valor real.
- **SI** (sem solução) se: $m = 0$ e $k \neq 0$ Exemplo: 0**z** = 7 $\Rightarrow$ não existe valor real para **z**.

Para descontrair e refletir...

Curto e Grosso



Casos Especiais: SISTEMAS NÃO QUADRADOS

Os sistemas quadrados são aqueles em que o número de incógnitas é igual ao número de equações. Nosso interesse nesse momento é justamente naqueles que não têm essa característica.

• **Sistemas em que número de incógnitas é MAIOR que o número de equações:**

Esses sistemas NUNCA serão do tipo SPD, pois, podemos dizer que falta(m) equação(ões) para obtermos uma solução única. Logo serão do tipo: SPI ou SI. Analise os exemplos a seguir:

Exemplo 1: Determine a solução do sistema linear: $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + z = 8 \end{cases}$

Resolução:

Para escalonar o sistema dado, multiplicaremos a 1ª linha por (–2) e a adicionaremos à 2ª linha. Veja:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 3y + z = 8 \qquad NL_2 = -2.L_1 + L_2 \end{cases}$$

O sistema escalonado equivalente é:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad y - z = -4 \end{cases}$$

Note que a última equação do sistema escalonado acima [$\mathbf{y} - \mathbf{z} = -\mathbf{4}$] possui duas incógnitas, o que indica que existem infinitos valores que satisfazem essa equação. Assim, escolheremos um valor arbitrário (genérico) para uma das incógnitas.

Fazendo $\boxed{z = a}$ e substituindo na referida equação, temos:

$$y - z = -4 \quad \Rightarrow \quad y - a = -4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = a - 4}$$

Agora, substituindo os valor de $\mathbf{z} = \mathbf{a}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{a} - \mathbf{4}$ na 1ª equação do sistema, temos:

$$x + y + z = 6 \quad \Rightarrow \quad x + (a - 4) + (a) = 6 \quad \Rightarrow \quad x + 2a - 4 = 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 10 - 2a}$$

Logo, o sistema dado é do tipo SPI e o conjunto solução é: S = { (10 – 2a, a – 4, a), com $a \in \mathbb{R}$ }.

Exemplo 2: Encontre o conjunto solução do sistema não quadrado: $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y + 2z = 14 \end{cases}$

Resolução:

Para escalonar o sistema dado, multiplicaremos a 1ª linha por (–2) e a adicionaremos à 2ª linha. Veja:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y + 2z = 14 \qquad NL_2 = -2.L_1 + L_2 \end{cases}$$

O sistema escalonado equivalente é:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \quad 0z = 2 \end{cases}$$

Veja que a última equação do sistema escalonado é **0z = 2** e que através dela, tem-se que o número real "z" procurado **não existe**.

Logo, o sistema é do tipo SI e o conjunto solução é: **S = { }**.

Nota: O método do Escalonamento (eliminação) de Gauss é muito bem recomendado para a resolução dos casos acima.

• Sistemas em que número de incógnitas é MENOR que o número de equações:

Esses sistemas podem ser do tipo: SPD, SPI ou SI (como qualquer sistema quadrado). O que muda em relação aos sistemas quadrados são alguns detalhes presentes na forma de resolução. Veja os exemplos:

Exemplo 1: Qual a solução do sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x-3y=13 \\ 3x+4y=-6 \end{cases}$?

Resolução: Aplicando o escalonamento, temos:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x-3y=13 & NL_2 = -2.L_1 + L_2 \\ 3x+4y=-6 & NL_3 = -3.L_1 + L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ -5y=15 & \rightarrow \quad y=-3 \\ y=-3 & \rightarrow \quad y=-3 \end{cases}$$

Como ambos os valores de "y" encontrados são idênticos, temos um valor ÚNICO para "y".

Assim, substituindo o valor de **y = –3** na primeira equação do sistema, temos:

$x + y = -1 \quad \Rightarrow \quad x + (\mathbf{-3}) = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 3 - 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

Logo, o sistema dado é do tipo **SPD** e o conjunto solução é: **S = { (2 , –3) }**.

Exemplo 2: Encontre a solução do sistema linear: $\begin{cases} x+y=13 \\ 2x-y=23 \\ x+2y=12 \end{cases}$

Resolução: Aplicando o escalonamento, temos:

$$\begin{cases} x+y=13 \\ 2x-y=23 & NL_2 = -2.L_1 + L_2 \\ x+2y=12 & NL_3 = -1.L_1 + L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=13 \\ -3y=-3 & \rightarrow \quad y=1 \\ y=-1 & \rightarrow \quad y=-1 \end{cases}$$

Como os valores de "y" encontrados são **diferentes**, NÃO temos um valor ÚNICO para "y".

Assim, há uma inconsistência no sistema em questão.

Logo, o sistema dado é do tipo **SI** e o conjunto solução é: **S = { }**.

Exemplo 3: Determine o conjunto solução do sistema dado por: $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+6y=10 \\ 3x+9y=15 \end{cases}$

Resolução: Aplicando o escalonamento, temos:

$$\begin{cases} x+3y=5 & \\ 2x+6y=10 & NL_2 = -2.L_1 + L_2 \\ 3x+9y=15 & NL_3 = -3.L_1 + L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ \quad 0y=0 \quad \rightarrow \quad y \in \Re \\ \quad 0y=0 \quad \rightarrow \quad y \in \Re \end{cases}$$

AMBAS as expressões encontradas indicam a possibilidade de **infinitos valores** para "y".

Assim, para encontrarmos essas soluções, definiremos um valor genérico "a" para a variável em questão.

Fazendo **y = a** e substituindo na primeira equação do sistema, temos:

$x + 3y = 5 \quad \Rightarrow \quad x + 3(\mathbf{a}) = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 5 - 3a$

Logo, o sistema dado é do tipo **SPI** e o conjunto solução é: $\mathbf{S = \{ (5 - 3a\ ,\ a),\ com\ a \in \mathbb{R} \}}$.

Nota: Nos casos exemplificados acima, você poderia escolher duas equações do sistema e resolvê-las separadamente por um método conveniente, fazendo a verificação da resposta encontrada na equação que não foi utilizada inicialmente. Entretanto este procedimento nem sempre é aconselhável, principalmente se o sistema apresentar um "formato" diferente dos casos apresentados acima.

Observação: Vale lembrar que alguns métodos de resolução, como a Regra de Cramer, **não** podem ser aplicados "diretamente" em sistemas lineares que não sejam quadrados.

Para refletir: Não procure felicidade dentro de outro ser humano e sim dentro do seu próprio coração.
Muitas vezes ela está tão perto que não conseguimos enxergá-la, pois o essencial é invisível aos olhos. [Autor desconhecido]

Caso Particular: SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS

Um sistema é dito "sistema linear homogêneo" quando é composto somente por equações lineares homogêneas.
Vale lembrar que, assim, os termos independentes de todas as equações envolvidas no sistema serão nulos.

Exemplos: (a) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 5x-y+z=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-3y=0 \\ 3x+4y=0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x+y-4z=0 \\ 2x-y+5z=0 \\ 3x+2y-z=0 \end{cases}$

Atenção! O sistema abaixo NÃO é Homogêneo.

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ 2x-y+7=0 \\ 3x+2y-1=0 \end{cases} \xrightarrow{organizando} \begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=-7 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$$

Note que os termos independentes das equações estavam no primeiro membro (à esquerda do símbolo de igualdade).

Observação: A sequência ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ onde $\alpha_i = 0$, sempre será solução de um sistema homogêneo, chamada de **Solução Trivial**.

Podemos concluir então que um sistema homogêneo nunca será impossível (SI), pois terá pelos menos uma solução, neste caso, a trivial. Quando possuir mais [infinitas] soluções, estas serão chamadas de **soluções próprias**.

Resolução de um Sistema Linear Homogêneo:

Podemos optar por um dos métodos de resolução vistos anteriormente, entre outros. Entretanto, uma escolha "adequada" pode facilitar o processo. Veja os exemplos.

Exemplo 1: Encontre a solução do sistema homogêneo dado por: $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 4x-y-z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$

Resolução:

Calculando o determinante principal, temos: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 14$.

Como **D ≠ 0**, o sistema é do tipo **SPD**, logo: **S = {(0, 0, 0)}** → [solução trivial]

Observe que os cálculos de Dx, Dy e Dz são **DESNECESSÁRIOS**, pois quando trocarmos uma das colunas das variáveis pela coluna dos termos independentes num sistema homogêneo, teremos determinantes com uma coluna de termos nulos, o que implica em determinantes também nulos. Veja:

$$Dx = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & 1 & 2 \\ \mathbf{0} & -1 & -1 \\ \mathbf{0} & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad Dy = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & 2 \\ 4 & \mathbf{0} & -1 \\ 1 & \mathbf{0} & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad Dz = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0} \\ 4 & -1 & \mathbf{0} \\ 1 & 2 & \mathbf{0} \end{vmatrix} = 0$$

Aplicando as fórmulas da Regra de Cramer, teríamos:

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{0}{14} = 0 \quad e \quad y = \frac{Dy}{D} = \frac{0}{14} = 0 \quad e \quad z = \frac{Dz}{D} = \frac{0}{14} = 0 \quad \therefore \quad \mathbf{S = \{(0, 0, 0)\}}$$

Exemplo 2: Encontre o conjunto solução do sistema homogêneo dado por: $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 4x-y-z=0 \\ 3x-2y-3z=0 \end{cases}$

Resolução:

Calculando o determinante principal, temos: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$.

Como **D = 0**, o sistema é do tipo **SPI**, tendo: [solução trivial] + [infinitas soluções próprias].

Nota: A aplicação (neste caso) da Regra de Cramer para a obtenção do conjunto solução do sistema dado, não é conveniente, pois o sistema em questão é do tipo SPI. Assim, aplicaremos o escalonamento de Gauss que conduzirá ao conjunto solução procurado.
Escalonando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 4x-y-z=0 & NL_2 = -4.L_1 + L_2 \\ 3x-2y-3z=0 & NL_3 = -3.L_1 + L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ -5y-9z=0 \\ -5y-9z=0 & NL_3 = -L_2 + L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ -5y-9z=0 \quad (*) \\ 0z=0 \end{cases}$$

Algumas ternas ordenadas que satisfazem o sistema ao lado:

$S_0 = \{(0, 0, 0)\}$

$S_1 = \left\{\left(-\frac{1}{5}, -\frac{9}{5}, 1\right)\right\}$

$S_5 = \{(-1, -9, 5)\}$

$S_{-4} = \left\{\left(\frac{4}{5}, \frac{36}{5}, -4\right)\right\}$

$S_{-10} = \{(2, 18, -10)\}$

Como se pode notar, o sistema é do tipo SPI e por isso tem infinitas soluções.
Assim, escolheremos um valor arbitrário (genérico) para uma das variáveis.

Fazendo $\mathbf{z = a}$ e substituindo na equação (*) temos:

$$-5y - 9z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -5y - 9a = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{9a}{5}$$

Agora, substituindo $\mathbf{z = a}$ e $\mathbf{y = -\frac{9a}{5}}$ na primeira equação do sistema, encontramos:

$$x + y + 2z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x - \frac{9a}{5} + 2a = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -\frac{a}{5}$$

Assim, o conjunto solução procurado é: $S = \left\{\left(-\frac{a}{5}, -\frac{9a}{5}, a\right) \text{com } a \in R\right\}$.

Exemplo 3: Classifique o sistema: $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$ em SPD, SPI ou SI.

Resolução:

Analisando...

♦ O sistema em questão é HOMOGÊNEO, logo, terá solução, ou seja, é do tipo: SPD ou SPI.
♦ O sistema em questão tem o número de incógnitas MAIOR que o número de equações, logo, pode ser: SPI ou SI.

Considerando as duas análises acima, concluímos que o sistema é do tipo **SPI** (Sistema Possível Indeterminado).

Nota: Em alguns casos (específicos como este), podemos classificar o sistema sem a necessidade de realizar algum cálculo.

Discussão de um Sistema Linear Homogêneo através da Regra de Cramer:

Discutir um sistema linear homogêneo é avaliar as hipóteses para que ele seja **SPD** ou **SPI**. Para discutir um sistema linear homogêneo pela Regra de Cramer, analisamos:

- **SPD** (solução única) se: $D \neq 0$ somente a solução trivial: S= {(0, 0, 0)}
- **SPI** (infinitas soluções) se: $D = 0$ a solução trivial + as infinitas soluções chamadas de "próprias"

Lembrete: Um Sistema Homogêneo nunca será impossível (**SI**), pois sempre terá, pelo menos, a solução trivial.

Podemos também analisar (discutir) um sistema homogêneo através do escalonamento. Veja:

Discussão de um Sistema Linear Homogêneo através do Escalonamento:

Para um sistema escalonado, teremos (normalmente) na última equação apenas uma incógnita. Consideraremos como exemplo, a incógnita "z". Analisando a (última) equação do sistema escalonado **m.z = 0** teremos:

- **SPD** (solução única) se: $m \neq 0$ Exemplo: $3\mathbf{z} = 0 \Rightarrow \mathbf{z} = 0$
- **SPI** (infinitas soluções) se: $m = 0$ Exemplo: $0\mathbf{z} = 0 \Rightarrow$ **z** pode assumir qualquer valor real.

Comentário Final:

O escalonamento é o mais indicado para resolução e discussão de sistemas lineares com muitas variáveis, pois é o mais versátil e assim, pode ser aplicado em qualquer tipo de sistema (com número de equações diferente do número de incógnitas).

Para refletir: Creio que as conquistas dependem de 50% de inspiração, criatividade e sonhos,
e 50% de disciplina, trabalho árduo e determinação. São duas pernas que devem caminhar juntas. [Augusto Cury]

DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR ATRAVÉS DE UM PARÂMETRO:

Discutir um sistema linear através de um parâmetro é identificar os valores que um ou mais parâmetros podem assumir para que o sistema seja classificado como SPD, SPI ou SI.

Vejamos os exemplos:

1) Faça a discussão, em função do valor de "m", do sistema linear: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$.

Resolução:

Para efeito de comparação, vamos discutir o sistema através de dois métodos diferentes:

 # Através da Regra de Cramer, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m - 2 \quad \therefore \quad D = m - 2$$

Assim: • Se $D \neq 0$ então o sistema é do tipo SPD.

$$m - 2 \neq 0$$
$$m \neq 2$$

• Se $D = 0$ então o sistema é do tipo SPI ou SI.

$$m - 2 = 0$$
$$m = 2$$

Entretanto quando $m = 2$ não sabemos se o sistema é SPI ou SI.
Então faremos a substituição do valor de "m" no sistema para identificar qual caso ocorre.
Veja:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + my = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ 0y = -4 \end{cases} \Rightarrow$$ Daí concluímos que para $m = 2$ o sistema é SI.

Logo: $\begin{cases} \text{O sistema será do tipo SPD para } m \neq 2 \\ \text{O sistema será do tipo SI para } m = 2 \end{cases}$

> **Note que:**
>
> $\nexists\ m \in \Re$ para que o sistema seja do tipo SPI.
>
> Assim, poderíamos também escrever:
>
> $\begin{cases} \text{O sistema será do tipo SPD para } m \neq 2 \\ \text{O sistema será do tipo SI para } m = 2 \\ \text{O sistema nunca será do tipo SPI} \end{cases}$

 # Através do Escalonamento, temos:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ (m - 2)y = -4 \end{cases}$$

Analisando a última equação do sistema, temos:

• Se $m - 2 \neq 0$ então o sistema é do tipo SPD.

$$m \neq 2$$

• Se $m - 2 = 0$ então o sistema é do tipo SI

$$m = 2$$

Logo: $\begin{cases} \text{O sistema será do tipo SPD para } m \neq 2 \\ \text{O sistema será do tipo SI para } m = 2 \end{cases}$

2) Discuta o sistema linear: $\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 3x + 2y = b \end{cases}$ em função dos valores de "a" e "b".

Resolução:

Para efeito de comparação, vamos discutir o sistema através de dois métodos diferentes:

 # Através da Regra de Cramer, temos:

$$D = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 6 \quad \therefore \quad D = 2a - 6$$

Assim: • Se $D \neq 0$ então o sistema é do tipo SPD.

$2a - 6 \neq 0$

$2a \neq 6$

$a \neq 3$

• Se $D = 0$ então o sistema é do tipo SPI ou SI.

$2a - 6 = 0$

$2a = 6$

$a = 3$

Entretanto quando $a = 3$ não sabemos se o sistema é SPI ou SI.
Então faremos a substituição do valor de "a" no sistema para identificar qual caso ocorre.

$$\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 3x + 2y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 3x + 2y = b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 3x + 2y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ \quad\quad 0y = b - 1 \end{cases}$$

Assim: • Se $b - 1 = 0$ então o sistema é do tipo SPI.

$b = 1$

• Se $b - 1 \neq 0$ então o sistema é do tipo SI.

$b \neq 1$

Logo: O sistema será do tipo: $\begin{cases} \text{SPD para } a \neq 3 \\ \text{SPI para } a = 3 \text{ e } b = 1 \\ \text{SI para } a = 3 \text{ e } b \neq 1 \end{cases}$

 # Através do escalonamento, temos:

$$\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 3x + 2y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + ax = 1 \\ 2y + 3x = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + ax = 1 \\ \quad (3 - a)x = b - 1 \end{cases}$$

Assim:

• Se $3 - a \neq 0$ então o sistema é do tipo SPD [Note que, neste caso: $b \in \Re$].
$a \neq 3$

• Se $3 - a = 0$ e $b - 1 = 0$ então o sistema é do tipo SPI.
$a = 3$ $b = 1$

• Se $3 - a = 0$ e $b - 1 \neq 0$ então o sistema é do tipo SI.
$a = 3$ $b \neq 1$

Logo: O sistema será do tipo: $\begin{cases} \text{SPD para } a \neq 3 \\ \text{SPI para } a = 3 \text{ e } b = 1 \\ \text{SI para } a = 3 \text{ e } b \neq 1 \end{cases}$

> Os exemplos 1 e 2 foram adaptados do livro: IEZZI, Gelson. et al. **Matemática: ciência e aplicações, 2**. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010. [p. 128]

3) Discuta o sistema linear: $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 3x-y-z=0 \\ x+2y+kz=0 \end{cases}$ em função dos valores de "k".

Resolução:

Note que o sistema em questão é HOMOGÊNEO e, portanto, será do tipo SPD ou SPI.
Além disso, o sistema é quadrado e assim a aplicação da Regra de Cramer será bem oportuna.
Veja:

 # Através da Regra de Cramer, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & k \end{vmatrix} = -k-1+12-(-2-2+3k) = -k+11-(-4+3k) \quad \therefore \quad D = 15-4k$$

Assim: • Se $D \neq 0$ então o sistema é do tipo SPD.

$$15-4k \neq 0$$
$$-4k \neq -15$$
$$k \neq \frac{-15}{-4}$$
$$k \neq \frac{15}{4}$$

• Se $D = 0$ então o sistema é do tipo SPI

$$15-4k = 0$$
$$-4k = -15$$
$$k = \frac{-15}{-4}$$
$$k = \frac{15}{4}$$

Logo: $\begin{cases} \text{Para } k \neq \dfrac{15}{4} \text{ o sistema será do tipo SPD} \\ \text{Para } k = \dfrac{15}{4} \text{ o sistema será do tipo SPI} \end{cases}$

4) Discuta, em função dos valores de "m", o sistema linear: $\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x-4y+mz=0 \end{cases}$.

Resolução:

Note que o sistema em questão é HOMOGÊNEO e, portanto, será do tipo SPD ou SPI.
Além disso, o sistema tem o número de incógnitas MAIOR que o número de equações e, portanto, NÃO será do tipo SPD.

Considerando a intersecção das duas informações acima, o sistema obrigatoriamente será do tipo SPI, independentemente do valor que o parâmetro "m" assumir.

Logo, o sistema em questão será do tipo SPI para qualquer valor real de "m".

Simbolicamente, temos: Para $\forall m \in \Re \rightarrow \text{SPI}$

Para descontrair, se você puder...

Tópico Extra: MÉTODO DA MATRIZ INVERSA

Vimos anteriormente que todo sistema linear, quando disposto na forma matricial, apresenta o seguinte formato:

$$[A].[X]=[B]$$

Onde: $[A]$ $\rightarrow$ Matriz dos coeficientes
$[X]$ $\rightarrow$ Matriz das incógnitas (x, y, z,... ou x_1, x_2, x_3, ... , x_n)
$[B]$ $\rightarrow$ Matriz dos termos independentes

Para determinarmos a matriz $[X]$ (que possui as incógnitas procuradas), devemos resolver a expressão matricial:

$[A].[X]=[B]$ Lembre-se que **não** é definida a divisão de matrizes.

Então, formalmente, temos:

$[A].[X]=[B]$ ... Multiplicamos ambos os membros da equação por $[A]^{-1}$.

$[A]^{-1}.[A].[X]=[A]^{-1}.[B]$ ... Sabemos que $[A]^{-1}.[A]=[I]$.

$[I].[X]=[A]^{-1}.[B]$ ... Sabemos que $[I].[X]=[X]$.

$[X]=[A]^{-1}.[B]$

Observações:

Este método:
- torna-se útil quando o sistema a ser resolvido é **quadrado** e do tipo **SPD**.
- pode ser aplicado com o auxílio de uma planilha eletrônica, como o **Microsoft Excel** ou similar.

Assim, podemos determinar o valor das incógnitas em $[X]$, de um Sistema Linear, através do produto da matriz inversa de $[A]$ pela matriz dos termos independentes $[B]$.

Exemplo:

Resolva o sistema $\begin{cases} x+2y=1 \\ -x+3y=4 \end{cases}$ pelo método da matriz inversa.

Resolução:

Escrevendo o sistema dado na forma matricial, temos: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Multiplicamos os "dois lados" da equação pela inversa: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

O produto de uma matriz com a sua inversa é a matriz identidade: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Calcula-se a matriz inversa da matriz dos coeficientes: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Multiplica-se as matrizes, observando suas ordens: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Assim, a solução do sistema dado é $S=\{(-1, 1)\}$.

Nota: Experimente resolver o exemplo acima utilizando o Microsoft Excel ou um similar!

Para refletir: Não aprenda a desejar aquilo que não merece. [retirado de um biscoito da sorte chinês]

Tópico Especial: Relembrando Inversão de Matrizes!

• Podemos encontrar a inversa de uma matriz quadrada, aplicando a sua **definição**. Veja:

Seja A uma matriz inversível $[\det(A) \neq 0]$. Então: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$.

Para exemplificar de forma simples, utilizaremos uma matriz de ordem 2, sendo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Fazendo: $A.A^{-1} = I_2$, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2m+p & 2n+q \\ 4m+3p & 4n+3q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo os sistemas, teremos: $m = 3/2$, $n = -1/2$, $p = -2$ e $q = 1$.

Como definimos a que $A^{-1} = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$, temos que: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Equivalência de Matrizes:

Para duas matrizes A e B, de mesma ordem, diz-se que a matriz B é EQUIVALENTE à matriz A, e representa-se por **B ~ A**, se for possível transformar A em B por meio de uma sucessão finita de operações elementares.

As operações elementares com as linhas (ou colunas) de uma matriz são:

- Trocar duas (ou mais) linhas de posição.
- Multiplicar uma linha por uma constante não nula.
- Somar um múltiplo escalar de uma linha com outra linha.

Inversão de uma Matriz por meio de Operações Elementares:

Poderemos encontrar a inversa de uma matriz A, não singular, pelo procedimento descrito acima. Inicialmente escreve-se a matriz A dada e ao seu lado a matriz identidade I de mesma ordem. As operações elementares devem ser realizadas nas duas matrizes simultaneamente. O método consiste em transformar a matriz A dada na matriz identidade I. Quando o processo for completado, a matriz identidade escrita inicialmente será a matriz inversa procurada.

Esquematicamente: $\left\langle A \mid I \right\rangle \cdots \rightarrow \ operações \ elementares \ \rightarrow \cdots \left\langle I \mid A^{-1} \right\rangle$

Veja o **exemplo** abaixo:

Determine a inversa da matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ por meio de operações elementares.

Resolução:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle L_3 = L_1 + L_3 \quad \Rightarrow \quad \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle L_3 = L_2 + L_3$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle L_2 = -L_3 + L_2 \quad \Rightarrow \quad \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle L_1 = L_3 + L_1$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle$$

Assim, a matriz inversa procurada é: $M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Nota: Existem outros métodos para encontrarmos a inversa de uma matriz [**pesquise!**]

Tópico Especial: Análise de Métodos Diretos para Resolução de Sistemas de Equações Lineares

Prof. Dr. Milton Procópio de Borba [adaptado]

Os métodos diretos se caracterizam por uma sequência de operações (quantidade definida de operações), depois da qual se obtém a solução do sistema. Os mais conhecidos são os Métodos de Cramer e de Eliminação de Gauss. A tabela a seguir tira qualquer dúvida de qual dos dois métodos citados é mais útil para grandes sistemas.

Nota: Foi considerado um tempo de 5 segundos/operação.

Formato do Sistema	**Método de Cramer**		**Método de Gauss**	
	Número de Operações	Tempo de Resolução	Número de Operações	Tempo de Resolução
2 x 2	11	55 segundos	09	45 segundos
3 x 3	59		28	
4 x 4	319		62	
5 x 5	1.943		115	
6 x 6	13.691	19 horas	191	16 minutos
7 x 7	109.591		294	
8 x 8	986.399	57 dias	428	35 minutos
9 x 9	9.234.089	534 dias	597	50 minutos
10 x 10	101.575.099		805	
20 x 20	$1,3 \times 10^{20}$	$2,1 \times 10^{13}$ anos	5.910	8h 12 min

Considerando agora um tempo de 3,6 μs/operação [1 μs = 10^{-6} s], a última linha da tabela acima ficará assim:

20 x 20	$1,3 \times 10^{20}$	$1,5 \times 10^{7}$ anos	5.910	0,021 segundo

Surpreendeu-se? Aproveite e complete os espaços da tabela e procure saber mais!

Para refletir: O mundo é um belo livro, mas pouco útil para quem não o sabe ler. [Carlo Goldoni]

Há quem passe pelo bosque e só veja lenha para fogueira. [Tolstoi]

EXERCÍCIOS – Sistemas Lineares

1) Determine o valor de "k" para que a terna ordenada **(–1, 1, –2)** seja uma solução da equação linear **kx + y – 2z = 6**.

2) [Fuvest-SP] Determine **a** e **b**, de modo que sejam equivalentes os sistemas lineares: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 1 \end{cases}$.

3) Considere o sistema linear $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + ky = 2 \end{cases}$. Observe que, quando "k" é próximo de 1, as retas representadas pelas equações do sistema são "quase" paralelas. Assim:

a) Utilize a regra de Cramer para mostrar que uma solução do sistema é: $\mathbf{x} = 1 - \frac{1}{k-1}$, $\mathbf{y} = \frac{1}{k-1}$.

b) Um sistema é dito **mal-condicionado** quando uma pequena modificação num dado de entrada (por exemplo, os coeficientes de x e y) causa uma mudança significativa ou grande na saída ou solução. Verifique isso obtendo a solução do sistema para k = 1,01 e para k = 0,99.

4) Resolva os sistemas lineares abaixo pelo Regra de Cramer e pelo Método da Matriz Inversa (utilize o MS Excel ou similar).

a) $\begin{cases} 3x + 4y - z = 1 \\ 4x - 5y + z = 13 \\ 5x + y - z = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - y + 3z = -3 \\ y + z = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & -5 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 13 \end{bmatrix}$

Para refletir: Bem melhor arriscar coisas grandiosas mesmo expondo-se à derrota, do que formar fila com os pobres de espírito, os quais vivem nessa penumbra cinzenta, e não conhecem nem vitória, nem derrota. [Theodore Roosevelt]

5) Resolva e classifique os sistemas lineares abaixo através do Escalonamento.

O exercício 3 desta lista foi adaptado do exercício 12 [p. 116] do livro:

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Matemática Avançada para Engenharia 2**: **Álgebra linear e cálculo vetorial**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2009.

a) $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x+7y+2z=2 \\ 5x-y+2z=12 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x-3y+z=8 \\ 2y+z=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a+b+c=12 \\ 3a-b+2c=14 \\ 2a-2b+c=-3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+y-z+t=0 \\ x-y+z-t=2 \\ -x+y+z-t=-4 \\ x-y-z-t=-4 \end{cases}$ **e)** $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

f) $\begin{cases} 2x_1+x_2=5 \\ 6x_1+3x_2=15 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 2x+4y+2z=1 \\ x+y=z+3 \\ 4x+6y-1=0 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 5x-y+2z=-1 \\ 4x-2y+4z=-2 \end{cases}$

6) Determine o valor de "k" para que o sistema $\begin{cases} 3x+y=k^2-9 \\ x-2y=k+3 \end{cases}$, seja homogêneo.

7) Os sistemas homogêneos abaixo são do tipo SPI. Determine a solução geral de cada sistema e também uma solução não nula, chamada de "solução própria".

a) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ x-4y+2z=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+2y+4z=0 \\ 2x+3y-z=0 \\ x-14z=0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+5y+2z=0 \\ x+4y+7z=0 \\ x+3y+3z=0 \end{cases}$

8) Determine o conjunto solução e classifique os sistemas lineares dados a seguir:

a) $\begin{cases} x+3y+2z=4 \\ 2x+6y-z=3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x_1+6x_2-8x_3=21 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=10 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -4x+5y+z=-14 \\ 2x-3y-z=7 \end{cases}$

9) Determine o conjunto solução e classifique os sistemas lineares dados a seguir:

a) $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 3x+5y=22 \\ x+2y=9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+3y=0 \\ 3x+9y=1 \\ 2x+3y=3 \end{cases}$ **c)** $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \\ 21 \end{bmatrix}$

10) [FGV-SP] Resolvendo o sistema de equações: $\begin{cases} 3x+y=3 \\ 5x+3y=1 \\ x-4y=7 \end{cases}$ temos que:

a) x = 1, y = 0
b) é impossível
c) é indeterminado
d) x = 3, y = –1
e) é determinado

11) [UFSC] Dado o sistema $\begin{cases} 2x+y=4 \\ \dfrac{3(x+z)}{2}-2(x-y)=5 \\ 4x-3(z-1)=10 \end{cases}$, o valor de **2x – y – 3z** é:

12) Se (x, y, z) é a solução do sistema $\begin{cases} 3^{-x}.9^{y}.3^{z} = 1/3 \\ \dfrac{7^{x}}{7^{y}.7^{z}} = 49 \\ 5^{x}.5^{y}.5^{z} = 1 \end{cases}$, então, **x + y + z** é igual a:

13) [Fesp / Adaptada] A soma dos valores de x e y que satisfazem a equação matricial $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} y+1 \\ x-2 \end{bmatrix}$ é:

a) -3
b) -2
c) 3
d) -1
e) 1

14) Um usuário de um caixa eletrônico deseja fazer um saque no valor de 310 reais. Sabendo que a máquina dispõe somente cédulas de 10, 50 e 100 reais e que ele recebeu 9 cédulas no saque, pode-se afirmar [**V**erdadeiro ou **F**also]:

[ ] A máquina pagou apenas 2 cédulas de 100 reais.
[ ] A máquina pagou com 6 cédulas de 10 reais.
[ ] Para fazer tal pagamento [com 9 cédulas], só é possível fazê-lo de uma única forma.
[ ] Considerando soluções com números reais, o sistema gerado pelo problema, é do tipo SPD.
[ ] Uma das equações do sistema em questão é 10x + 50y + 100z + 310 = 0, sendo x, y e z, o número de cédulas de 10, 50 e 100 reais, respectivamente.

15) Determine o valor de "k" para que o sistema homogêneo $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + ky + z = 0 \end{cases}$ admita soluções não-triviais.

16) Faça a discussão do sistema $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + 3y = m \end{cases}$ em função do valor de "m".

17) Determine os valores de "a", de modo que o sistema $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$ dado nas incógnitas x, y e z tenha:

a) nenhuma solução,
b) mais de uma solução,
c) solução única.

RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS

1) k = –1 **2)** a = 0 e b = 1 **4a)** S = {(2, 0, 5)} **4b)** S = {(1, 2, –1)} **4c)** SPI ou SI **5a)** S = {(1, –1, 3)} ∴ SPD

5b) S = {(1, –1, 2)} ∴ SPD **5c)** S = { } ∴ SI **5d)** S = {(1, –2, 3, 4)} ∴ SPD **5e)** S = {(a, a–1, –a) com a ∈ R} ∴ SPI

5f) S = {([5–a]/2, a) com a ∈ R} ∴ SPI **5g)** S = { } ∴ SI **5h)** S = {(0, 2k+1, k) com k ∈ R} ∴ SPI **6)** k = –3

7a) S = {(2a/5, 3a/5, a) com a ∈ R} ⇒ Escolhendo a = 5, temos: S_5 = {(2, 3, 5)}

7b) S = {(14k, –9k, k) com k ∈ R} ⇒ Escolhendo k = 2, temos: S_2 = {(28, –18, 2)}

7c) S = {(9a, – 4a, a) com a ∈ R} ⇒ Escolhendo a = 1, temos: S_1 = {(9, – 4, 1)}

8a) S = { (2 – 3y, y , 1), com y ∈ ℝ } ∴ SPI **8b)** S = { } ∴ SI **8c)** S = { (7/2–k, –k, k), com k ∈ ℝ } ∴ SPI

9a) S = { (–1, 5) } ∴ SPD **9b)** S = { } ∴ SI **9c)** S = { ([7–3y]/2 , y), com y ∈ ℝ } ∴ SPI **10)** B

11) 2x – y – 3z = 3 **12)** x + y + z = 0 **13)** A **14)** V – V – V – F – F **15)** k = 1

16) SPI para m = 3 e SI para m ≠ 3

17a) SI para a = –3 **17b)** SPI para a = 2 **17c)** SPD para a ≠ 2 e a ≠ –3

EXERCÍCIOS – Aplicações Usuais de Sistemas Lineares

1) [GIOVANNI / Adaptada] Um caminhão (tipo baú) pode levar, no máximo, 58 caixas do tipo A ou B, de mesmo tamanho. Elas têm, respectivamente, 56 kg e 72 kg. A carga máxima para esse caminhão é de 3,84 toneladas em cada viagem. Quantas caixas de cada tipo são transportadas por esse caminhão, estando ele com a capacidade máxima ocupada?

2) [Unicamp-SP] Um copo cheio de água pesa 385 g; com 2/3 de água, pesa 310 g. Pergunta-se:
a) Qual é o peso do copo vazio?
b) Qual é o peso do copo com 3/5 de água?

3) [Fuvest-SP] Carlos e sua irmã Andréia foram com seu cachorro Bidu à farmácia de seu avô. Lá encontraram uma velha balança com defeito que só indicava corretamente pesos superiores a 60 kg. Assim eles se pesaram dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:
- Carlos e o cão pesam juntos 87 kg;
- Carlos e Andréia pesam 123 kg;
- Andréia e Bidu pesam 66 kg.

Nessas condições, determine a peso de cada um deles.

4) [GIOVANNI] Num concurso público, foram realizadas três provas, com 10 questões em cada uma. Cada questão valia um ponto, mas os pesos x, y e z das provas, nessa ordem, eram diferentes. O primeiro classificado no concurso, que acertou 8 questões na primeira prova; 9 na segunda e 10 na terceira, obteve no final, um total de 93 pontos. O segundo classificado acertou, nessa mesma ordem, 9, 9 e 7 questões, totalizando 80 pontos. O terceiro classificado acertou 8, 8 e 7 questões, respectivamente, atingindo a soma de 75 pontos no final. Calcule os pesos x, y e z.

5) Dona Elza deu R$ 13,50 para sua filha comprar tantos sabonetes e tantas pastas dentais. Nem precisou falar de que marca, pois isso a menina já sabia. Só recomendou que ela não se esquecesse de pegar o troco. No supermercado, a menina pegou 4 sabonetes e 6 pastas. Quando a moça do caixa avisou que faltavam R$ 0,30, ela pensou: "Se o dinheiro não deu para comprar 4 sabonetes e 6 pastas, então minha mãe deve ter pedido 6 sabonetes e 4 pastas". E fez a troca. Voltando ao caixa, recebeu R$ 0.30 de troco. Qual era o preço de cada sabonete comprado?

6) [UCS-BA] Xisto, Yuri e Zoltan tinham juntos 97 figurinhas. Xisto deu a metade de suas figurinhas a Yuri e este ficou com 13 figurinhas a mais que Zoltan. Em seguida, Zoltan deu metade de suas figurinhas a Xisto, que ficou então com 9 figurinhas a menos que Yuri. O número de figurinhas que Yuri tinha inicialmente era?

7) [Fesp-SP] Uma pessoa alimenta seu cão combinando o conteúdo de duas marcas de rações preparadas pelos fabricantes X e Y. A tabela abaixo discrimina a quantidade de unidades de vitaminas e de sais minerais em cada saco de ração e a quantidade mínima de unidades que o cão deve consumir:

	Ração X	Ração Y	Mínimo
Vitaminas	40	20	200
Sais Minerais	20	40	200

Se o saco da ração X custa R$ 10,00 e o da Y custa R$ 15,00, determine o inteiro mais próximo do total de sacos a serem comprados de modo a minimizar os custos e satisfazer as quantidades mínimas requeridas.

8) [UFSC / Adaptada] Três pessoas foram a uma lanchonete. A primeira tomou 2 (dois) guaranás e comeu 1 (um) pastel e pagou R$ 4,00. A segunda tomou 1 (um) guaraná e comeu 2 (dois) pastéis e pagou R$ 5,00. A terceira tomou 2 (dois) guaranás e comeu 2 (dois) pastéis e pagou R$ 7,00. Com essas informações, podemos dizer que, pelo menos, uma das pessoas não pagou o preço correto?

9) [PUC] Sabe-se que na compra de uma caixa de lenços, dois bonés e três camisetas gasta-se um total de R$ 127,00. Se três caixas de lenços, quatro bonés e cinco camisetas, dos mesmos tipos que os primeiros, custam juntos R$ 241,00, a quantia a ser desembolsada na compra de apenas três unidades desses artigos, sendo um de cada tipo, será?

10) [UFMG] Em três tipos de alimentos verificou-se que, para cada grama:
- o alimento I tem 2 unidades de vitamina A, 2 unidades de vitamina B e 8 unidades de vitamina C;
- o alimento II tem 2 unidades de vitamina A, 1 unidade de vitamina B e 5 unidades de vitamina C;
- o alimento III tem 3 unidades de vitamina A, não contém vitamina B e tem 3 unidades de vitamina C.

Calcule todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III que forneçam, simultaneamente, 11 unidades de vitamina A, 3 de vitamina B e 20 de vitamina C.

RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS

1) S = {(21, 37)} **2a)** 160 g **2b)** 295 g **3)** Andréia = 51 kg; Carlos = 72 kg e Bidu = 15 kg **4)** {(2, 3, 5)}

5) R$ 1,20 **6)** 25 figurinhas **7)** 7 sacos **8)** Sim **9)** R$ 57,00 **10)** $I = \frac{3z-5}{2}$; $II = 8-3z$; $III = \frac{5}{3} \leq z \leq \frac{8}{3}$

Algumas Aplicações Especiais de Sistemas Lineares

[Adaptado de: POOLE, David. **Álgebra Linear**. São Paulo: Thomson, 2004]

Existe uma quantidade muito vasta de aplicações dos sistemas de equações lineares, além das vistas anteriormente. Através de alguns exemplos e exercícios, vamos apresentar algumas situações específicas onde encontramos tais aplicações.

• Alocação de Recursos

Uma grande quantidade de aplicações de sistemas lineares envolve alocação de recursos limitados sujeitos a um conjunto de restrições. Vejamos um caso:

Exemplo: Um biólogo colocou três espécies de bactérias (denotadas por I, II e III) em um tubo de ensaio, onde elas serão alimentadas por três fontes diferentes de alimentos (A, B e C). A cada dia serão colocadas no tubo de ensaio 2300 unidades de A, 800 unidades de B e 1500 unidades de C. Cada bactéria consome um certo número de unidades de cada alimento por dia, como mostra a tabela abaixo. Quantas bactérias de cada espécie podem coexistir no tubo de ensaio de modo a consumir todo o alimento?

	Bactéria I	Bactéria II	Bactéria III
Alimento A	2	2	4
Alimento B	1	2	0
Alimento C	1	3	1

Resolução:

Sejam x_1, x_2 e x_3 os números das bactérias I, II e II, respectivamente. Como cada uma das x_1 bactérias da espécie I consome duas unidades de A por dia, o grupo I consome um total de $2x_1$ unidades por dia. Analogamente, os grupos II e II consomem um total de $2x_2$ e $4x_3$ unidades do alimento A diariamente. Como queremos usar todas as 2300 unidades de A, temos a equação: $2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2300$.

Da mesma forma, obtemos as equações correspondentes ao consumo de B e C:

$$x_1 + 2x_2 = 800$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 1500$$

Assim, obtemos um sistema de três equações lineares em três variáveis.
Escrevendo o sistema na forma matricial e resolvendo-o teremos:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2300 \\ x_1 + 2x_2 = 800 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 1500 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2300 \\ 800 \\ 1500 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 350 \\ 350 \end{bmatrix} \Rightarrow S = \{(100, 350, 350)\}$$

Portanto, $x_1 = 100$, $x_2 = x_3 = 350$. O biólogo deve colocar 100 bactérias da espécie I e 350 de cada uma das espécies II e II no tudo de ensaio para que todo o alimento seja consumido.

• Balanceamento de Equações Químicas

Quando uma reação química ocorre, certas moléculas (os reagentes) se combinam para formar novas moléculas (os produtos). Uma **equação química balanceada** é uma equação algébrica que dá o número relativo de reagente e produtos na reação e tem o mesmo número de átomos de cada tipo dos lados esquerdo e direito. A equação é usualmente escrita com os reagentes à esquerda, os produtos à direita e uma seta entre os dois lados para mostrar a direção da reação.

Por exemplo, para a reação nas qual os gases hidrogênio (H_2) e oxigênio (O_2) se combinam para formar água (H_2O), uma equação química balanceada é:

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

Indicando que duas moléculas de hidrogênio se combinam com uma molécula de oxigênio para formar duas moléculas de água. Observe que a equação é balanceada, pois há quatro átomos de hidrogênio e dois átomos de oxigênio de cada lado da equação. Note que nunca haverá uma única equação balanceada para uma reação, já que todo múltiplo inteiro positivo de uma equação balanceada será também uma equação balanceada. Por exemplo, $6H_2 + 3O_2 \rightarrow 6H_2O$ é também balanceada. Assim, usualmente procuramos a equação balanceada "mais simples" para uma reação.

Embora o método de tentativa e erro freqüentemente funcione em exemplos simples, o processo de balanceamento de equações químicas na verdade envolve a resolução de um sistema de equações lineares homogêneo, e por essa razão podemos usar as técnicas de desenvolvemos para evitar os "chutes".

Exemplo: A combustão de amônia (NH_3) em oxigênio produz nitrogênio (N_2) e água. Encontre uma equação química balanceada para essa reação.

Resolução:

Se denotarmos os números de moléculas de amônia, oxigênio, nitrogênio e água por **w**, **x**, **y** e **z**, respectivamente (que são os coeficientes estequiométricos), estaremos procurando uma equação da forma:

$$\mathbf{w}NH_3 + \mathbf{x}O_2 \rightarrow \mathbf{y}N_2 + \mathbf{z}H_2O$$

Comparando os números de átomos de nitrogênio, hidrogênio e oxigênio nos reagentes e nos produtos, obtemos o seguinte sistema de equações:

Nitrogênio: $w = 2y$
Hidrogênio: $3w = 2z$
Oxigênio: $2x = z$

Reescrevendo essas equações na forma padrão de sistema, encontramos o **sistema linear homogêneo** de **três equações** com **quatro variáveis**. Assim:

$$\begin{cases} w - 2y = 0 \\ 3w - 2z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo-o, determinamos que se trata de um sistema do tipo **SPI** com solução geral:

$$S = \left\{ \left(\frac{2z}{3}, \frac{z}{2}, \frac{z}{3}, z \right) com\, z \in R \right\}$$

Mas a solução mais **adequada** para o **problema de balanceamento** é:

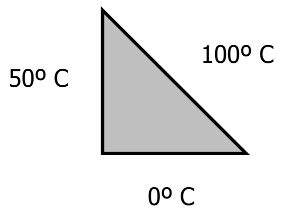
$$S = \left\{ \left(\frac{2z}{3}, \frac{z}{2}, \frac{z}{3}, z \right) com\ z\ múltiplo\ positivo\ de\ 6 \right\}.$$

Isso por que o menor valor positivo de z que fornecerá valores **inteiros** e **positivos** para **todas** as quatro variáveis é o menor denominador comum das frações $2/3$, $1/2$ e $1/3$, a saber, 6 [pois m.m.c.(3, 2, 3) = 6], que fornece os valores: $w = 4$, $x = 3$, $y = 2$ e $z = 6$, formando uma solução particular do problema.

Assim, a equação química balanceada (na sua forma mais simples) é: $\mathbf{4}NH_3 + \mathbf{3}O_2 \rightarrow \mathbf{2}N_2 + \mathbf{6}H_2O$

• **Distribuição de Temperaturas numa Placa (Metálica)**

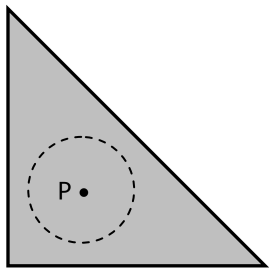
Exemplo: Suponha que cada lado (aresta) de uma placa de metal (triangular) foi submetido a uma temperatura constante, como na figura ao lado.



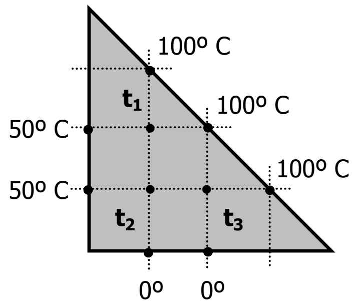
Com o passar do tempo, a temperatura de cada ponto do interior da placa alcançará um "equilíbrio", e a seguinte propriedade poderá ser comprovada:

Propriedade da Temperatura (Valor) Média: A temperatura em cada ponto P interior em uma placa é a média das temperaturas na circunferência de qualquer círculo dentro da placa, centrado em P. Veja a figura ao lado.

Esta propriedade é uma conseqüência de certas leis básicas do movimento molecular que nós não deduziremos aqui.



A aplicação dessa propriedade em um exemplo real requer técnicas de cálculo diferencial e integral. Como alternativa, podemos aproximar a situação colocando sobre a placa uma grade (quadrangular), que chamaremos de **malha**, com um número finito de pontos de intersecção, como mostra a figura a seguir.



A versão discreta do problema de distribuição de temperatura no interior da placa metálica.

Os pontos de intersecção das linhas da malha são chamados de **pontos de malha** que são classificados em *pontos de malha de contorno* (que estão no contorno da placa) e *pontos de malha interiores* (que estão no interior da placa).

A versão discreta da propriedade da temperatura média que governa o equilíbrio de temperaturas é assim enunciada:

Propriedade da Temperatura Média (formulação discreta):

A temperatura em cada ponto interior P é (aproximadamente) a média das temperaturas nos pontos adjacentes a P.

Diante do **problema** exposto, qual a temperatura nos pontos internos $\mathbf{t_1}$, $\mathbf{t_2}$ e $\mathbf{t_3}$ da placa metálica em questão?

Resolução:

Nessa situação (figura acima) há três pontos interiores, cada um adjacente a quatro outros pontos. Sejam t_1, t_2 e t_3 as temperaturas de equilíbrio dos pontos interiores da placa de metal. Então, pela propriedade da temperatura média, temos:

$$t_1 = \frac{100+100+t_2+50}{4}, \qquad t_2 = \frac{t_1+t_3+0+50}{4} \quad \text{e} \quad t_3 = \frac{100+100+0+t_2}{4}.$$

Organizando as equações, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} 4t_1 - t_2 = 250 \\ -t_1 + 4t_2 - t_3 = 50 \\ -t_2 + 4t_3 = 200 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por um método conveniente, encontramos a solução: $S = \left\{ \left(\frac{2075}{28}, \frac{325}{7}, \frac{1725}{28} \right) \right\}$.

Finalmente, podemos escrever as temperaturas: $t_1 \cong 74{,}107\,^\circ C$, $t_2 \cong 46{,}429\,^\circ C$ e $t_3 \cong 61{,}607\,^\circ C$.

Observações:

● Utilizando uma malha mais "fina" (com mais pontos) poderemos obter informações tão precisas quanto necessário sobre as temperaturas nos vários pontos do plano da peça. Quando o espaçamento da malha tende a zero, as aproximações tendem à distribuição EXATA de temperatura.

● Essa técnica também se aplica em situações tridimensionais. Na realidade, nossa "placa" poderia representar um corte transversal de algum objeto sólido se o fluxo de calor, perpendicular ao corte, é desprezível. Por exemplo, a peça do exemplo em questão poderia ser (de forma bem simplificada) a secção transversal de uma longa represa. A represa está exposta a três temperaturas diferentes: a temperatura do solo em sua base, a temperatura da água de um lado e a do ar do outro. Para determinar as tensões termais às quais a represa está sujeita, é necessário o conhecimento da distribuição de temperatura dentro da estrutura da represa.

• **Circuitos Elétricos**

Circuitos elétricos formam um tipo especializado de rede com informações sobre fontes de energia, tais como baterias, e dispositivos alimentados por essas fontes (os resistores), tais como lâmpadas ou motores. Uma fonte de energia "força" o fluxo de uma corrente de elétrons através da rede, onde a corrente encontra vários resistores, cada um dos quais requerendo a aplicação de certa quantidade de força elétrica para que a corrente flua através dele.

Existem três quantidades básicas associadas a circuitos elétricos:

- O **potencial elétrico** (E) medido em volts (V)
- A **resistência** (R) medida em ohms (Ω)
- A intensidade de **corrente** (I) medida em ampères (A)

Num circuito elétrico, o **potencial elétrico** entre dois pontos é chamado **diferença de potencial** ou **queda de tensão**.

O fluxo de corrente num circuito elétrico é governado por três princípios básicos:

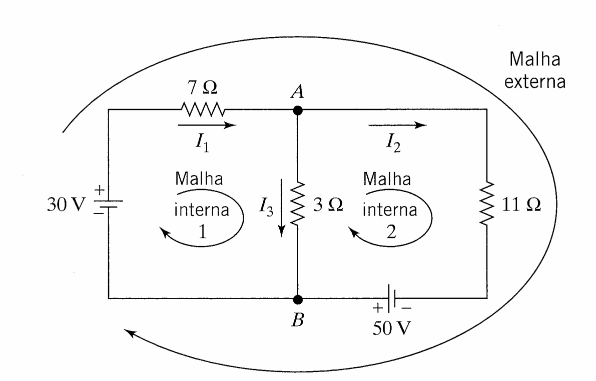
Lei de Ohm:
➘ A diferença de potencial através de um resistor é o produto da corrente que passa por ele e a resistência; ou seja, E = I.R

Leis de Kirchhoff:

➘ **Lei da Corrente (Nós):** A soma das correntes que entram em qualquer nó é igual à soma das correntes que saem dele.

➘ **Lei da Voltagem (Circuitos):** Em torno de qualquer circuito fechado (também chamado de malha), a soma das diferenças de potencial é igual a zero.

Exemplo: Calcule as intensidades das correntes I_1, I_2 e I_3 no circuito dado ao lado.



Resolução:

A direção dos fluxos para as correntes I_1, I_2 e I_3 (marcadas pelas setas no circuito) foram tomadas arbitrariamente. Se alguma dessas correntes acabar sendo negativa é por que, na realidade, flui no sentido oposto ao selecionado inicialmente.

Aplicando a Lei da Corrente de Kirchhoff nos pontos A e B, obtemos:

A: $I_1 = I_2 + I_3 \quad \Rightarrow \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0$
B: $I_3 + I_2 = I_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0$

Note que as duas equações, na verdade, são iguais. Então precisamos de mais duas equações para determinar os valores das correntes de forma única (número de variáveis = número de equações).

Essas equações serão obtidas com a Lei da Voltagem de Kirchhoff. Para aplicá-la a um circuito fechado, **escolha um sentido positivo** em torno do circuito (digamos, sentido horário) e faça a seguinte convenção:

♦ Uma corrente passando por um resistor produz uma diferença de potencial positiva se flui no sentido positivo do circuito e uma diferença de potencial negativa se flui no sentido negativo do circuito.

♦ Uma corrente passando por um capacitor (bateria) produz uma diferença de potencial positiva se o sentido positivo do circuito é de + para – e uma diferença de potencial negativa se o sentido positivo do circuito é de – para +.

Veja no circuito que definimos o sentido horário como positivo, nas malhas internas 1 e 2 e também na malha externa.

Agora, aplicando a Lei da Voltagem de Kirchhoff juntamente com a Lei de Ohm à malha interna 1 (veja na figura), temos:

$$7I_1 + 3I_3 - 30 = 0$$

E à malha interna 2, obtemos: $11I_2 - 50 - 3I_3 = 0$

Assim, organizando as equações obtidas, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 7I_1 \quad + 3I_3 = 30 \\ \quad 11I_2 - 3I_3 = 50 \end{cases}$$ Resolvendo o sistema determinado, encontramos a solução: $S = \left\{ \left(\frac{570}{131}, \frac{590}{131}, -\frac{20}{131} \right) \right\}$.

Finalmente, podemos escrever as correntes: $I_1 \cong 4{,}35\ A$, $I_2 \cong 4{,}50\ A$ e $I_3 \cong -0{,}15\ A$.

Observação: Note que I_3 é negativo, o que significa que esta corrente flui no sentido oposto ao sugerido inicialmente no circuito (veja figura). Vale observar que poderíamos ainda ter aplicado a Lei da Voltagem de Kirchhoff na malha externa do circuito. No entanto, este procedimento resulta numa equação redundante. [Verifique!]

EXERCÍCIOS – Algumas Aplicações Especiais de Sistemas Lineares

1) Uma florista oferece três tamanhos de arranjos de flores com rosas, margaridas e crisântemos. Cada arranjo pequeno contém uma rosa, três margaridas e três crisântemos. Cada arranjo médio contém duas rosas, quatro margaridas e seis crisântemos. Cada arranjo grande contém quatro rosas, oito margaridas e seis crisântemos. Num dia, a florista notou que havia usado um total de 24 rosas, 50 margaridas e 48 crisântemos ao preparar as encomendas desses três tipos de arranjos. Quantos arranjos de cada tipo ela fez?

2) Faça o balanceamento das equações químicas para cada reação abaixo:

a) $FeS_2 + O_2 \rightarrow Fe_2O_3 + SO_2$

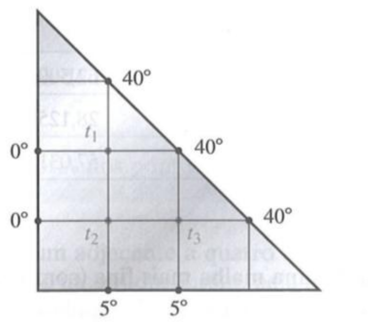
b) $CO_2 + H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$
[essa reação ocorre quando uma planta verde converte dióxido de carbono e água em glicose e oxigênio durante a fotossíntese]

c) $C_4H_{10} + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$
[essa reação acontece quando o gás butano, C_4H_{10}, queima na presença de oxigênio para formar dióxido de carbono e água]

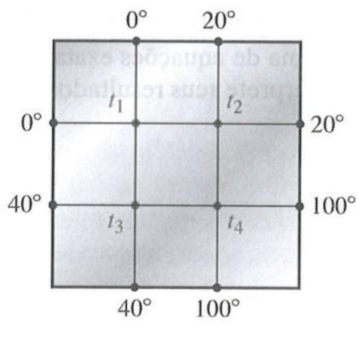
d) $C_5H_{11}OH + O_2 \rightarrow H_2O + CO_2$
[essa equação representa a combustão de álcool pentanol]

3) Nos casos abaixo, a fronteira das respectivas placas metálicas têm temperaturas constantes indicadas (em ºC). Encontre a temperatura de equilíbrio em cada um dos pontos interiores destacados na malha.

a)

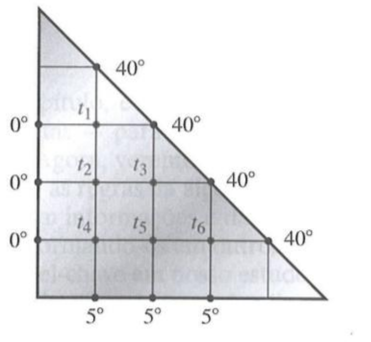


b)

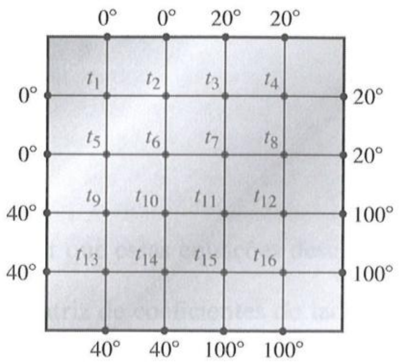


4) Nos casos a seguir, refinamos a malha utilizada no exercício anterior para obtermos informações mais acuradas sobre as temperaturas de equilíbrio (em ºC) nos pontos indicados no interior de cada placa.

a)

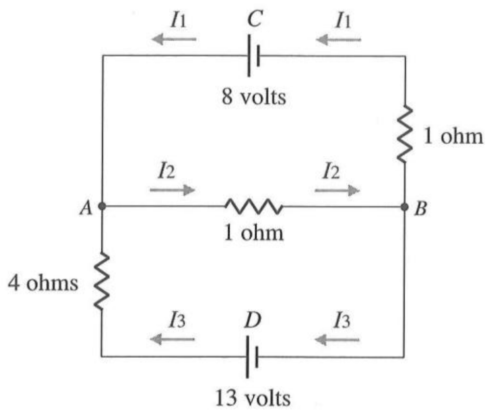


b)

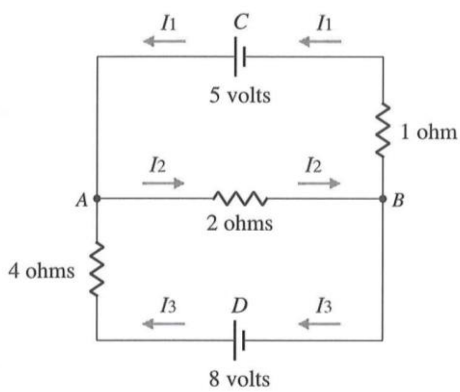


5) Considerado os circuitos elétricos dados, determine as correntes indicadas:

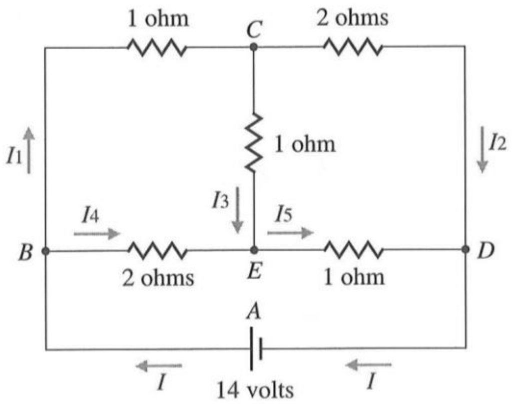
a)



b)



6) Encontre o valor das correntes I, I_1 ,I_2, ..., I_5 no circuito-ponte abaixo.



Esta lista de exercícios foi adaptada de: POOLE, David. **Álgebra Linear**. São Paulo: Thomson, 2004.

RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS – RESPOSTAS

1) 2 pequenos, 3 médios e 4 grandes **2a)** $4FeS_2 + 11O_2 \rightarrow 2Fe_2O_3 + 8SO_2$ **2b)** $6CO_2 + 6H_2O \rightarrow C_6H_{12}O_6 + 6O_2$

2c) $2C_4H_{10} + 13O_2 \rightarrow 8CO_2 + 10H_2O$ **2d)** $2C_5H_{11}OH + 15O_2 \rightarrow 12H_2O + 10CO_2$ **3a)** t_1=23,304 / t_2=13,214 / t_3=24,554 ºC

3b) t_1=18,333 / t_2=31,667 / t_3=41,667 / t_4=68,333 ºC **4a)** t_1=23,826 / t_2=15,303 / t_3=28,068 / t_4=9,318 / t_5=16,970 / t_6=25,492 ºC

4b) t_1=8,164 / t_2=14,964 / t_3=24,127 / t_4=25,473 / t_5=17,691 / t_6=27,564 / t_7=36,073 / t_8=37,764 / t_9=35,036 / t_{10}=41,527 / t_{11}=54,836

t_{12}=69,509 / t_{13}=40,927 / t_{14}=48,673 / t_{15}=72,236 / t_{16}=85,436 ºC

5a) I_1 = 3A, I_2 = 5A e I_3 = 2A **5b)** I_1 = 1A, I_2 = 2A e I_3 = 1A **6)** I = 10A, $I_1 = I_5$ = 6A, $I_2 = I_4$ = 4A e I_3 = 2A

Para refletir: Nenhum vento sopra a favor de quem não sabe para onde ir. [Lucius Annaeus Sêneca]

Leia o texto abaixo e pense a respeito...

Conta-se que numa pequena cidade do interior em tempos passados, um grupo de pessoas se divertia com um "idiota" da região. Um pobre coitado – pessoa simples – que vivia de pequenos biscates e ajuda dos vizinhos. Diariamente eles chamavam o rapaz ao bar onde se reuniam e ofereciam a ele a escolha entre duas moedas: uma grande de 400 réis e outra menor, de dois mil réis. Ele sempre escolhia a maior e menos valiosa, o que era motivo de risos para todos.

Certo dia, um dos membros do grupo chamou-o e lhe perguntou se ainda não havia percebido que a moeda maior valia menos.
"Eu sei" – respondeu o não tão tolo assim – "ela vale cinco vezes menos, mas no dia que eu escolher a outra, a brincadeira acaba e não vou mais ganhar minha moeda".

É Possível tirar várias conclusões dessa pequena narrativa:

- Primeiro: quem parece idiota, nem sempre é.
- Segundo: (dito em forma de pergunta) quais eram os verdadeiros tolos da história?
- Terceiro: se você for ganancioso, poderá acabar estragando sua fonte de renda.

Mas a conclusão mais interessante, a meu ver, é a percepção de que podemos estar bem, mesmo quando os outros não têm uma boa opinião a nosso respeito. Portanto, o que importa não é o que pensam de nós, mas o que realmente somos...

Classificação de um Sistema pelo Método de Resolução

Discussão de um Sistema Linear Quadrado:

	Regra de Cramer	**Escalonamento**
SPD [solução única]	$D \neq 0$	$m \neq 0$ e $k \in \mathbb{R}$
SPI [infinitas soluções]	$D = 0$	$m = 0$ e $k = 0$
SI [sem solução]		$m = 0$ e $k \neq 0$
Observações:	D é o Determinante Principal [determinante dos coeficientes]	A última equação do sistema escalonado é: $m.\mathbf{z} = k$

Discussão de um Sistema Linear Quadrado Homogêneo:

	Regra de Cramer	**Escalonamento**
SPD [solução única: a trivial]	$D \neq 0$	$m \neq 0$
SPI [infinitas soluções: a trivial + as próprias]	$D = 0$	$m = 0$
Observações:	D é o Determinante Principal [determinante dos coeficientes]	A última equação do sistema escalonado é: $m.\mathbf{z} = 0$

Classificação de um Sistema pelo seu "Formato"

Sistema Linear Não Homogêneo:

	n. equações < n. incógnitas	**n. equações ≥ n. incógnitas**
SPD [solução única]	☒	✓
SPI [infinitas soluções]	✓	✓
SI [sem solução]	✓	✓

Sistema Linear Homogêneo:

	n. equações < n. incógnitas	**n. equações ≥ n. incógnitas**
SPD [solução única: a trivial]	☒	✓
SPI [infinitas soluções: a trivial + as próprias]	✓	✓
SI [sem solução]	☒	☒