centro universitário FEI

Centro Universitário da FEI

Mudança de Base

RESUMO TEÓRICO E EXERCÍCIOS

Baseado na bibliografia básica

Equipe de MAG-110

Agosto - 2020

Mudança de Base Livro texto págs. 66-68

Dado um vetor $\vec{u} = (x, y, z)$ em uma base $\mathrm{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ e são conhecidos os vetores de outra base F= $(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3})$, pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} \overrightarrow{f_1} = a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{21}\overrightarrow{e_2} + a_{31}\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_2} = a_{12}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2} + a_{32}\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_3} = a_{13}\overrightarrow{e_1} + a_{23}\overrightarrow{e_2} + a_{33}\overrightarrow{e_3} \end{cases}$$

Pretende-se as coordenadas de (x_F, y_F, z_F), do vetor $\vec{u} = (x_E, y_E, z_E)$ na nova base F.

O vetor $\boldsymbol{\vec{u} = x_E\overrightarrow{e_1} + y_E\overrightarrow{e_2} + z_E\overrightarrow{e_3} = x_F\overrightarrow{f_1} + y_F\overrightarrow{f_2} + z_F\overrightarrow{f_3}}$ tem coordenadas, simultaneamente nas duas bases, vamos utilizar as expressões dos vetores $\overrightarrow{f_1}$, $\overrightarrow{f_2}$ e $\overrightarrow{f_3}$:

$$\vec{u} = x_F(a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{21}\overrightarrow{e_2} + a_{31}\overrightarrow{e_3}) + y_F(a_{12}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2} + a_{32}\overrightarrow{e_3}) + z_F(a_{13}\overrightarrow{e_1} + a_{23}\overrightarrow{e_2} + a_{33}\overrightarrow{e_3})$$

$$\vec{u} = \underbrace{(a_{11}x_F + a_{12}y_F + a_{13}z_F)}_{x_E}\overrightarrow{e_1} + \underbrace{(a_{21}x_F + a_{22}y_F + a_{23}z_F)}_{y_E}\overrightarrow{e_2} + \underbrace{(a_{31}x_F + a_{32}y_F + a_{33}z_F)}_{z_E}\vec{e}_3$$

Mudança de Base

Comparando a expressão acima com as coordenadas de $\vec{u}$ na base E, que devem ser únicas tem-se:

$$\begin{cases} x_E = a_{11}x_F + a_{12}y_F + a_{13}z_F \\ y_E = a_{21}x_F + a_{22}y_F + a_{23}z_F \\ z_E = a_{31}x_F + a_{32}y_F + a_{33}z_F \end{cases}$$

Essas expressões podem ser escritas, usando a notação matricial como segue:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix}}_{E} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{M_{E\to F}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{bmatrix}}_{F} = M_{E\to F} \underbrace{\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{bmatrix}}_{F}$$

Para calcularmos $\overrightarrow{u_F}$, basta multiplicarmos os dois membros por$M_{E\to F}^{-1} = M_{F\to E}$

Lembrando que $\quad M_{E\to F}^{-1}.M_{E\to F} = I_n$

Mudança de Base

Equação mudança de base:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{bmatrix}}_{\overrightarrow{u_F}} = M_{E\to F}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix}}_{\overrightarrow{u_E}} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{bmatrix}}_{\overrightarrow{u_F}} = M_{F\to E} \underbrace{\begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix}}_{\overrightarrow{u_E}}$$

$$\boxed{\vec{u}_F = M_{F\to E}\vec{u}_E}$$

$$\boxed{\vec{u}_E = M_{E\to F}\vec{u}_F}$$

ATENÇÃO AQUI

Exemplo: Determine as coordenadas do vetor $\vec{u} = 3\overrightarrow{e_1}$- $2\overrightarrow{e_2}$+ $2\overrightarrow{e_3}$

na base F, sabendo que: $\begin{cases} \overrightarrow{f_1} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_2} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{f_3} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \overrightarrow{e_3} \end{cases}$.

A matriz de mudança de base de E para base F é : $M_{E\to F} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Como o exercício pede $\vec{u}_F$ então lembrar que: $\vec{u}_F = \boldsymbol{M_{F\to E}}\vec{u}_E$

Para calcular $\boldsymbol{M_{F\to E}} = M_{E\to F}^{-1}$, siga os passos:

a) $M_{E\to F} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ b) det(M)=4 c) $\mathrm{Cof(M)} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

d) $\mathrm{Adj(M)} = [\mathrm{Cof(M)}]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ e) $M_{E\to F}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

Exemplo(continuação):

Usando a equação de mudança: $\vec{u}_F = \boldsymbol{M_{F\to E}}\vec{u}_E$

$$M_{E\to F}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \boldsymbol{M_{F\to E}}$$

Logo: $\vec{u}_F = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

Então o vetor u na base F é: $\boxed{\vec{u}_F = 3\vec{f}_1 + 2\vec{f}_2 - 5\,\vec{f}_3}$

Para treinar:

Determine as coordenadas dos vetores $\vec{u} = 2\overrightarrow{e_1}$- $\overrightarrow{e_2}$+ $3\overrightarrow{e_3}$ na base F e

$\vec{v} = 3\overrightarrow{f_1} + 3\ \overrightarrow{f_2}$+ $2\overrightarrow{f_3}$ na base E, sabendo que: $\begin{cases} \overrightarrow{e_1} = 2\vec{f_1} + 1\overrightarrow{f_3} \\ \overrightarrow{e_2} = 1\vec{f_1} - \vec{f_2} \\ \overrightarrow{e_3} = 1\vec{f_1} + 2\vec{f_2} + \overrightarrow{f_3} \end{cases}$

Respostas

$$\vec{u} = 6\overrightarrow{f_1} + 7\,\overrightarrow{f_2} + 5\overrightarrow{f_3}$$

$$\vec{v} = 0\overrightarrow{e_1} + 1\,\overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$$

Bibliografia:

1) Loreto, A. C. C.; Junior, A. P. L. VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA Teoria e Exercícios. 4° Ed. LCTE Editora. 2014. São Paulo.
2) Watanabe, R. G., Mello, D. A. VETORES E UMA INICIAÇÃO A GEOMETRIA ANALÍTICA. 2° Ed. LF Editorial. 2011. São Paulo.