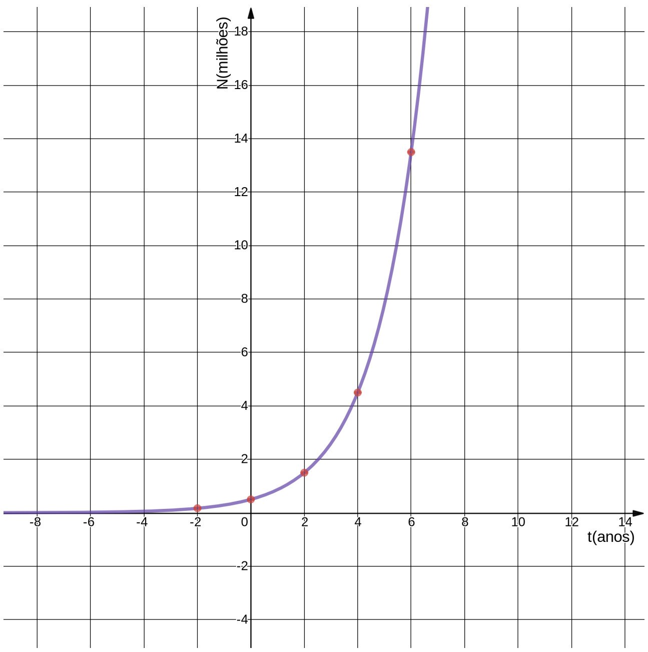
Função exponencial

Exemplo 1. O número de usuários da rede social "Juntos" praticamente tem triplicado a cada 2 anos. Suponha que em determinado ano ($t = 0$), o serviço contasse com meio milhão de usuários.

Sendo o tempo (t) medido em anos e o número de usuários (N) medido em milhões, temos:

- Tabela com alguns dados:

t	-2	0	2	4	6
$N(t)$	0,17	0,5	1,5	4,5	13,5



- Vamos obter uma fórmula para N em função de t

t(anos)	N(milhões)
-2	$0,17 = 0,5/3 = 0,5\cdot 3^{-1} = 0,5\cdot 3^{-2/2}$
0	$0,5 = 0,5\cdot 3^0 = 0,5\cdot 3^{0/2}$
2	$1,5 = 0,5\cdot 3 = 0,5\cdot 3^{2/2}$
4	$4,5 = 0,5\cdot 3 = 0,5\cdot 3^2 = 0,5\cdot 3^{4/2}$
6	$13,5 = 4,5\cdot 3 = 0,5\cdot 2^3 = 0,5\cdot 3^{6/2}$

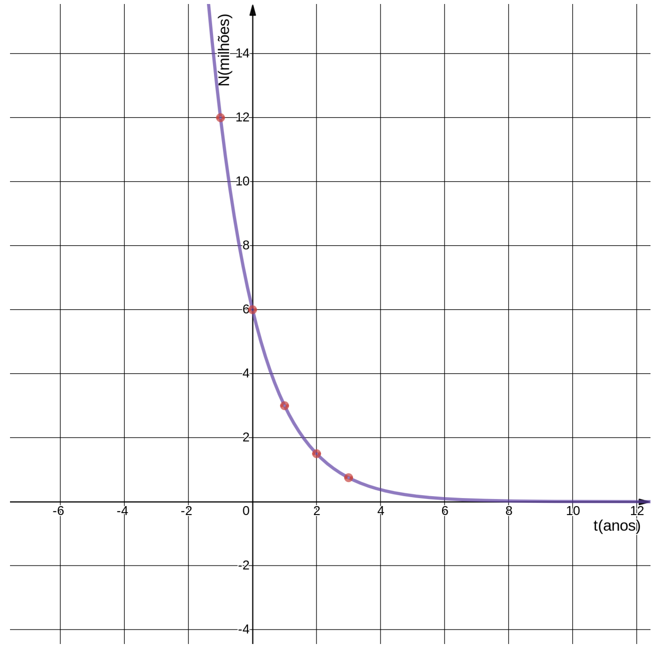
Portanto $N(t) = 0,5\cdot 3^{t/2}$

Exemplo 2. Enquanto a rede "Juntos" faz sucesso, na rede "Tchau" o número de usuários de cada ano é a metade da quantidade do ano anterior. Suponha que no ano correspondente a $t = 0$, o serviço contasse com 6 milhões de usuários.

Medindo o tempo em anos e o número de usuários (N) em milhões, temos:

- Tabela com alguns dados:

t	-1	0	1	2	3
$N(t)$	12	6	3	1,5	0,75



- Vamos, agora, expressar N em função de t.

t(anos)	N(milhões)
-1	$12 = 6/0,5 = 6\cdot (1/2)^{-1}$
0	$6 = 6\cdot (1/2)^0$
1	$3 = 6\cdot (1/2)^1$
2	$1,5 = 3\cdot (1/2) = 6\cdot (1/2)^2$
3	$0,75 = 1,5\cdot (1/2) = 6\cdot (1/2)^3$

Portanto $N(t) = 6\cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$

A função $f(x) = a^x$ é chamada de função *exponencial* (de base a), sendo a um número real positivo e diferente de 1.

- O domínio de uma função exponencial é $\mathbb{R}$ e a imagem é $]0, +\infty[$

- Se $a > 1$, então $f(x) = a^x$ é *crescente*; e se $0 < a < 1$, então $f(x) = a^x$ é *decrescente*.

- Um caso particular, mas muito importante, ocorre quando a base é o chamado númro de Euler, que é denotado por e. O número e é irracional e vale aproximadamente $2,71828$. A função $f(x) = e^x$ também é denotada por $\exp(x)$.

Exemplo 3. A função $f(x) = (0,63)^x$ é decrescente, pois tem base $(0,63)$ entre 0 e 1.

A função $f(x) = (\sqrt{2})^x$ é crescente, pois sua base é maior que 1.

A função $y = 5^{-x}$ é decrescente, pois sua base é $1/5$: $5^{-x} = (1/5^x) = (1/5)^x$

A função $y = -3\cdot 2^x$ é decrescente: a função $y = 2^x$ é crescente, pois a base é maior que 1, assim ao multiplicarmos por um número negativo, -3, obtemos uma função decrescente.

Propriedades Sejam a, b números reais positivos, x e y números reais quaisquer. Então

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ $\qquad$ $a^0 = 1$ $\qquad$ $a^1 = a$

$a^x a^y = a^{x+y}$ $\qquad$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\qquad$ $(a^x)^y = a^{xy}$

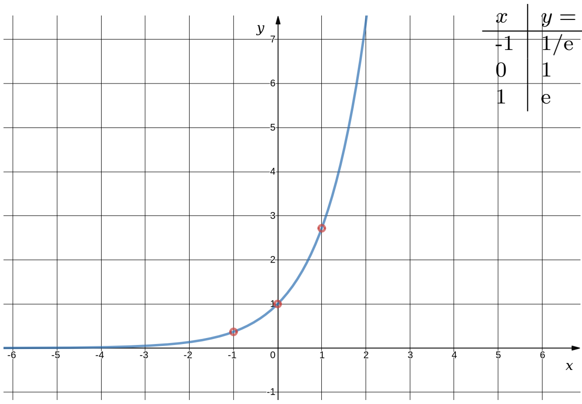
$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\qquad$ $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ $\qquad$ $(ab)^x = a^x b^x$

- Note que $(a^x)^y \neq a^{x^y}$: $\quad (2^3)^2 = 2^6 = 64$, mas $2^{3^2} = 2^9 = 512$

- $2^3 = \frac{1}{2^{-3}}$

Gráfico de $f(x) = a^x$.

- Considere a função $f(x) = e^x$. Sabemos que f é crescente, nunca é negativa ou zero e que quanto e^x pode ser tão grande quanto queiramos, bastando tomar x suficientemente grande, isto é, $\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$. Também vemos que podemos tornar e^x tão próximo de zero quanto queiramos, basta tomar x negativo, mas com módulo grande, isto e, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. A tabela abaixo apresenta alguns valores para o gráfico da função:

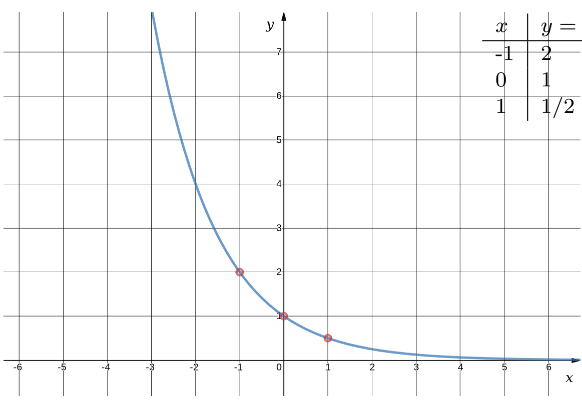


x	$y = e^x$
-1	1/e
0	1
1	e

- Toda função exponencial $y = a^x$, com $a > 1$ tem gráfico *semelhante* ao gráfico acima.

- Vamos esboçar o gráfico de $f(x) = (1/2)^x$.

f é decrecente, $\lim_{x\to-\infty} (1/2)^x = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} (1/2)^x = 0$.



x	$y = (1/2)^x$
-1	2
0	1
1	1/2

- Toda função exponencial $y = a^x$, com $0 < a < 1$ tem gráfico *semelhante* ao gráfico acima.

Função logarítmica

A função $f(x) = a^x$ tem inversa, pois é crescente ou decrescente, conforme a base a. Assim, fica definida a função f^{-1}:$]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ que associa a cada número real positivo x um número real y, desde que $f(y) = x$, isto é, $f^{-1}(x) = y \iff a^y = x$. A função f^{-1} é a função logaritmíca de base a: $f^{-1}(x) = \log_a x$.

- Note que: $\log_a x = y \iff a^y = x$.

- O domínio da função $\log_a$ é $]0, +\infty[$ e sua imagem é $\mathbb{R}$.

- O logaritmo de x na base a é o expoente ao qual devemos elevar a para obter x.

- Se $a > 1$, então a função $\log_a x$ é *crescente*; se $0 < a < 1$, então a função $f(x) = \log_a x$ é *decrescente*

- O *logaritmo natural* ou *neperiano* de x $(x > 0)$ é $\log_e x$, que é denotado por $\ln x$. Isto é: $\ln x = \log_e x$. Assim,

$$\ln x = y \iff e^y = x$$

Exemplo 4.

- $\log_2 1 = 0$, pois $2^0 = 1$
- $\log_5 1 = 0$, pois $5^0 = 1$
- $\log_4 2 = \frac{1}{2}$, pois $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$
- $\log_8 2 = 1/3$, pois $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$
- $\log_2 0{,}5 = -1$, pois $2^{-1} = \frac{1}{2}$
- $\log_{\frac{1}{3}} 9$, pois $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 9$
- $\log_\pi \pi^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, pois $\pi^{\sqrt{2}} = \pi^{\sqrt{2}}$
- $\log_a a^b = b$, pois $a^b = a^b$

Propriedades Seja a número real positivo e diferene de 1. Então

$\log_a 1/a = -1$ $\qquad$ $\log_a 1 = 0$ $\qquad$ $\log_a a = 1$

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

$\log_a x/y = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^y = y \log_a x$

Mudança de base: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$. Em particular $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

$\log_a a^x = x$ $\qquad$ $a^{\log_a x} = x$

Em particular: $\ln(e^x) = x$ $\qquad$ $e^{\ln x} = x$

- Não existe $\log_a 0$, qualquer que seja a base a.

- Se x é negativo, então $\log_a x$ não é número real.

- $\ln e = 1$.

Exemplo 5. • A função $y = \ln x$ é crescente, pois sua base é o número e, que é maior que 1.

• A função $f(x) = \log_{0,5} x$ é decescente, pois sua base é $0,5$, que é um número entre 0 e 1.

• A função $y = -3\log x$ é decrescente: $\log x$ é crescente, pois sua base é 10, que é maior que 1. Mas ao multiplicarmos por número negativo, obtemos uma função decrescente.

• função $f(x) = 2\ln x$ é crescente: $\ln x$ é crescente, pois a base é e, que é maior que 1. Portanto, ao multiplicarmos por um número positivo, a função obtida continua sendo crescente.

Exemplo 6. Determine x em cada caso:

• $\log_{\frac{1}{x}} 8 = -\dfrac{2}{3}$

Temos:

$$\log_{\frac{1}{x}} 8 = -\frac{2}{3} \iff \left(\frac{1}{x}\right)^{-2/3} = 8 \iff \frac{1}{x^{-2/3}} = 8$$

$$\iff x^{2/3} = 2^3 \iff \left(x^{2/3}\right)^{3/2} = \left(2^3\right)^{3/2} \iff x = 2^{9/2}$$

• $\ln x^5 = 2$.

Temos: $\ln x^5 = 2 \iff x^5 = e^2 \iff x = \sqrt[5]{e^2}$. Portanto, $x = e^{2/5}$

Exemplo 7. Em cada caso expresar y como função explícita de x:

• $2\log_3 y = \log_3 x + 5\log_3 2$

Temos:

$$\begin{aligned} 2\log_3 y &= \log_3 x + 5\log_3 2 \\ \log_3 y^2 &= \log_3 x + \log_3 2^5 \\ \log_3 y^2 &= \log_3 2^5 x \\ y^2 &= 2^5 x \\ y &= \sqrt{2^5 x} \\ y &= 4\sqrt{2x} \end{aligned}$$

• $\ln y = 5x - 2\ln 3$

Temos:

$$\begin{aligned} \ln y &= 5x - 2\ln 3 \\ \ln y + 2\ln 3 &= 5x \\ \ln y + \ln 3^2 &= 5x \\ \ln 3^2 y &= 5x \\ 3^2 y &= e^{5x} \\ y &= \frac{e^{5x}}{9} \end{aligned}$$

Exemplo 8. Vamos "inverter" o exemplo 1, isto é, vamos expressar t em função de N:

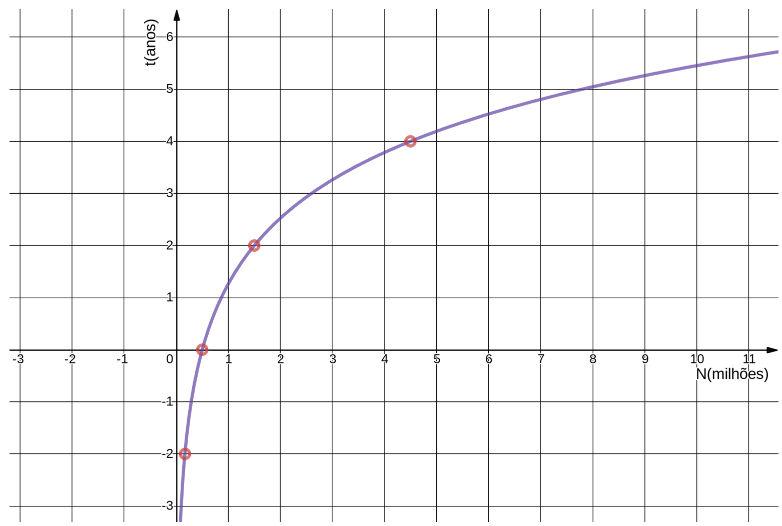
• Começamos "invertendo" a tabela:

N	0,17	0,5	1,5	4,5	13,5
$t(N)$	-2	0	2	4	6

De $N = 0,5 \cdot 3^{t/2}$, aplicando logaritmo em ambos os lados:

$$\begin{aligned} \log_3 N &= \log_3 0,5 \cdot 3^{t/2} \\ \log_3 N &= \log_3 0,5 + \log_3 3^{t/2} \\ \log_3 N - \log_3 0,5 &= \frac{t}{2}\underbrace{\log_3 3}_{1} \\ \log_3 N/0,5 &= \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} &= \log_3(N/0,5) \\ t &= 2\log_3 6N \end{aligned}$$

O gráfico de t em função de N é dado pela figura abaixo. Note que é o gráfico da figura 1. com os eixos "trocados".



Exemplo 9. Agora vamos tomar o exemplo 2 e expressar t em função de N:

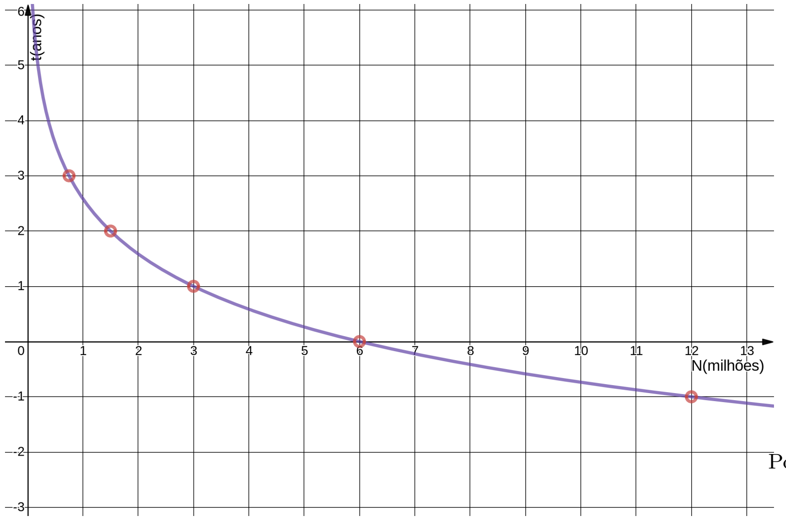
• Tabela de t em funçaõ de N:

N	12	6	3	1,5	0,75
$t(N)$	-2	0	2	4	6

De $N = 6 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^t$ aplicando logaritmo nos dois lados obtemos:

$$\begin{aligned} \log_{1/2} N &= \log_{1/2} 6(\frac{1}{2})^t \\ \log_{1/2} N &= \log_{1/2} 6 + \log_{1/2}(\frac{1}{2})^t \\ \log_{1/2} N - \log_{1/2} 6 &= t\log_{1/2}(\frac{1}{2}) \\ \log_{1/2} N/6 &= t \\ t &= \log_{1/2} N/6 \end{aligned}$$

O gráfico de t em função de N é dado pela figura abaixo. Note que é o gráfico da figura 1. com os eixos "trocados".



Exemplo 10. Nos processos radioativos *meia-vida* ou *período de semi desintegração* de um radioisótopo é o tempo necessário para que metade da massa deste isótopo desintegre-se, o que pode levar segundos ou bilhões de anos. Assim, como a meia-vida do titânio-44, Ti-44, é de 60 anos, se tivermos 10 kg deste material, depois de 60 anos teremos 5kg de Ti-44. Mais 60 anos e restarão 2,5 kg de Ti-44 e assim sucessivamente.

A meia-vida de um radioisótopo não varia com a pressão e nem com a temperatura, pois é um processo que envolve apenas o núcleo atômico, e tampouco depende da quantidade inicial da amostra. Assim, tal grandeza pode ser usada para determinar a idade de fósseis vegetais e animais, de rochas e até da própria Terra.

Nos organismos vivos o carbono-14, C-14, está presente em uma concentração constante de 10 ppb, ito é, em cada bilhão de átomos, existem 10 átomos de carbono-14. Os animais, pessoas e vegetais absorvem esse radioisótopo ao longo de suas vidas, parando de absorvê-lo somente quando morrem. Como a meia-vida de C-14 é de 5730 anos, é possível medir a concentração de carbono-14 no fóssil e determinar a sua idade.

Como exemplo, suponha que num fóssil animal o teor de carbono-14 é igual a 1,25 ppb, o que corresponde a 12,5% do teor de carbono encontrado nos seres vivos. Temos:

$$10\,\text{ppb} \xrightarrow{5730\text{ anos}} 5\,\text{ppb} \xrightarrow{5730\text{ anos}} 2,5\,\text{ppb} \xrightarrow{5730\text{ anos}} 1,25\,\text{ppb}$$

Portanto, o fóssil tem 17190 anos.

Determine uma expressão para calcular, em fósseis vegetais e animais, o teor de carbono-14, em ppb, em função de t (tempo).

Determine a idade de um fóssil cujo teor de carbono-14 é de 3,47 ppb.

Ao morrer, o animal ou vegetal, tem uma concentração de 10 ppb de C-14, que cai pela metade a cada período de 5730 anos.

t(anos)	C (concentração em ppb)
$0 \times 5730 = 0$	$10 = 10 \cdot (1/2)^0$
$1 \times 5730 = 5730$	$5 = 10 \cdot (1/2) = 10 \cdot (1/2)^1$
$2 \times 5730 = 11460$	$2,5 = 5 \cdot (1/2) = \cdot(1/2) = 10 \cdot (1/2)^2$
$3 \times 5730 = 17190$	$1,25 = 2,5 \cdot (1/2) = 10 \cdot (1/2)^3$

Assim, a concentração, em ppb., é $C = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5730}$, com t em anos.

Se o teor de carbono-14, em ppb, de um fóssil é igual a 3,47, então:

$$\begin{aligned}
C &= 3,47\\
10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5730} &= 3,47\\
\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5730} &= 3,47/10\\
\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5730} &= \ln(0,347)\\
\frac{t}{5730}\ln(1/2) &= \ln(0,347)\\
t &= 5730 \cdot \frac{\ln(0,347)}{\ln(1/2)}\\
t &= 8.749,66
\end{aligned}$$

Portanto o fóssil tem, aproximadamente, 8.750 anos.

Gráfico de $f(x) = \log_a x$

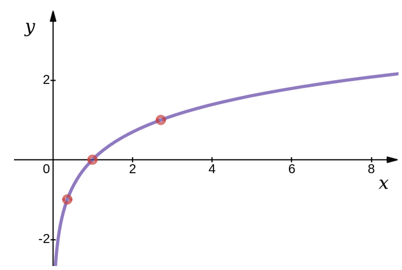
- Considere a função $f(x) = \ln x$. Aqui a base é e, portanto a função é crescente ($e > 1$).

Note que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ e que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Você pode perceber isso fazendo uma tabela de $\ln x$ para algum valores "bem grandes" de x e para valores positivos de x, mas "próximos" de zero:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
e	1	e^{-1}	-1
e^{10}	10	e^{-10}	-10
e^{100}	100	e^{-100}	-100
e^{1000}	1000	e^{-1000}	-1000

Conhecendo o comportamento da função, basta fazer uma tabela em alguns poucos pontos:

x	$f(x)$
$1/e = e^{-1}$	-1
$1 = e^0$	0
$e = e^1$	1



Todas as funções logarítmicas de base maior que 1 tem gráfico *semelhante* ao gráfico acima.

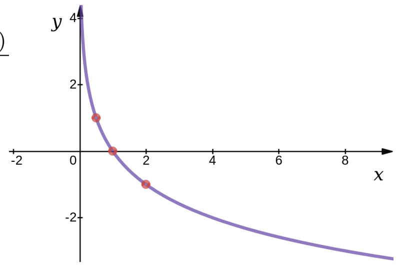
- Considere, agora, a função $f(x) = \log_{1/2} x$. Aqui a base é $1/2$, portanto a função é crescente ($0 < 1/2 < 1$).

Note que $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_{1/2} = -\infty$ e que $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_{1/2} x = +\infty$. Você pode perceber isso fazendo uma tabela de $\log_{1/2} x$ para algum valores "bem grandes" de x e para valores positivos de x, mas "próximos" de zero:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
$1/2$	1	$(1/2)^{-1}$	-1
$(1/2)^{10}$	10	$(1/2)^{-10}$	-10
$(1/2)^{100}$	100	$(1/2)^{-100}$	-100
$(1/2)^{1000}$	1000	$(1/2)^{-1000}$	-1000

Conhecendo o comportamento da função, basta tabela a função em alguns poucos pontos:

x	$f(x)$
$1/2 = (1/2)^1$	1
$1 = (1/2)^0$	0
$2 = (1/2)^{-1}$	-1



Todas as funções logarítmicas de base entre 0 e 1 tem gráfico *semelhante* ao gráfico acima.

Exercícios de revisão

1 Decidir, em cada caso, se a função é crescente ou decrescente. Justifique as respostas.

(a) $f(x) = 1,04^x$ (b) $f(x) = 0{,}8^x$ (c) $f(x) = e^x$

(d) $f(x) = \ln x$ (e) $f(x) = \log_{0,7} x$ (f) $f(x) = \log_{\pi} x$

2 A meia vida do fósforo-32 é de aproximadamente 14 dias. Para uma amostra inicial de 12 g determine:

(a) Uma expressão para a massa, $m(t)$, restante após t dias.

(b) A massa remanescente após 8 dias.

(c) O gráfico de $m(t)$.

(d) Quanto tempo é necessário para que a amostra fique reduzida a 0,5g?

3 Um capital C_0 é investido a uma taxa de 1,5% ao mês. Determine:

(a) A expressão do capital C no mês t.

(b) O tempo necessário para que um investimento inicial de R$ 2.000,00 duplique.

4 O número N de bactérias numa dada colônia era de 800 em $t = 2$h e de 32500 em $t = 6$h. Sabe–se que o crescimento do número de bactérias é exponencial e dado por $N(t) = N_0 e^{kt}$. Determine

(a) A expressão para calcular a quantidade N de bactérias.

(b) O número inicial de bactérias.

(c) A partir do instante inicial, em quanto tempo o número de bactérias dobrou?

5 Um paciente recebe uma dose de codeína. A quantidade Q, em miligramas, na corrente sanguínea t horas após ter recebido a droga é dada por $Q(t) = 400(0{,}6)^t$.

(a) Esboce o gráfico de $Q(t)$.

(b) Calcule a quantidade da droga que permance na corrente sanguínea após 4 horas. Qual a quantidade eliminada em 4 horas?

(c) Se a quantidade da droga na corrente sanguínea estiver abaixo de 10mg ela não é mais detectada. Quanto tempo levará para isso ocorrer?

6 Determinar x em cada caso:

(a) $\log_2 16 = x$ (b) $\log_x 0{,}008 = -3$

(d) $\log 100 = x$ (e) $\log_7 x = \frac{2}{3}$

(g) $\log x = 3$ (h) $\ln x = -2$

(j) $\log_{\frac{1}{x}} 16 = -\frac{4}{3}$ (k) $\ln 3x = -1$

(m) $\log_b 6 = \frac{1}{2}$ (n) $\log_k x^2 = c$

7 Exprimir y como função de x:

(a) $\ln y = 3\ln x + \ln 5$ (b) $\ln y = mx + \ln c$

(c) $2\log y = 3\log x + 4\log 5$ (d) $\log_2 y = 2x + \log_2 7$

(e) $\ln y = k\ln x + \ln c$ (f) $5\log_3 y = 3\log_3 x - \log_3 2$

Respostas

1 (a), (c), (d) e (f) são crescentes, pois têm bases maiores que 1. Já (b) e (e) são decrescentes, pois suas bases são menores que 1 (mas positivas).

2 (a) $m(t) = 12(0{,}5)^{t/14}$ (b) 8,08 g (d) 64,2 dias

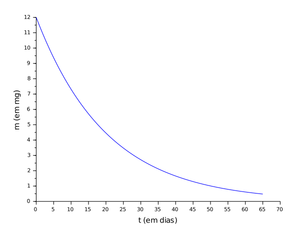
3 (a) $C(t) = C_0(1{,}015)^t$ (b) 46,6 anos

4 (a) $N(t) = 126\, e^{0{,}9261t}$ (b) 126 (c) 0,7485 h ou 44 min e 54 s

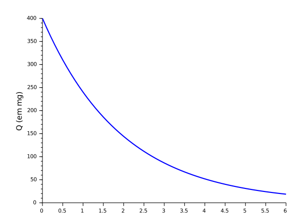
5 (b) Ao término de 4h ainda haverá na corrente sanguínea 51,84 mg.

Quantidade eliminada em 4h: $400 - 51{,}84 = 348{,}16$ mg.

(c) 7,22h (ou 7h13min)



Exercício 2(c)



Exercício 5(a)

6 (a) 4 (b) 5 (c) a (d) 2 (e) $\sqrt[3]{49}$ (f) $e^{7/3}$ (g) 1000 (h) $1/e^2$ (i) 3/2 (j) 8 (k) $1/3e$ (l) 2 (m) 36 (n) $\sqrt{k^c}$ (o) 47

7 (a) $y = 5x^3$ (b) $y = c\, e^{mx}$ (c) $y = 25x\sqrt{x}$ (d) $y = 7(4^x)$ (e) $y = c\, x^k$ (f) $y = \sqrt[5]{x^3/2}$