centro universitário FEI Centro Universitário da FEI

VETORES

RESUMO TEÓRICO E EXERCÍCIOS

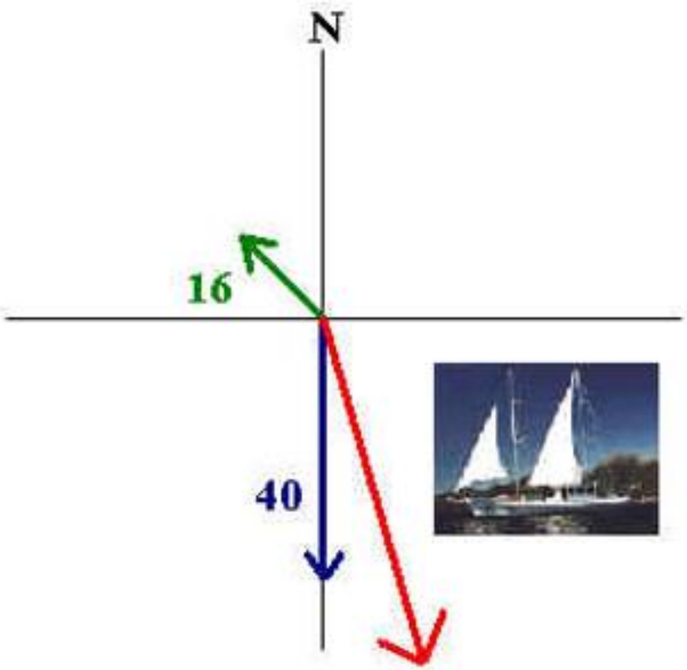
EQUIPE MAG110

Baseado na bibliografia básica

Fevereiro – 2021

EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Você é o capitão de um barco e quer viajar para o sul a 40 nós. Se a corrente marítima está se movendo para noroeste a 16 nós, em que direção e magnitude você deve operar o motor?



SEGMENTOS ORIENTADOS

Segmentos Orientados

Sejam dois pontos distintos A e B do espaço:

$A \longrightarrow B$

A → origem B→ extremidade

Igualdade de Segmentos Orientados: AB=CD ↔ A=C e B=D

$A{=}C \longrightarrow B{=}D$

Segmentos Orientados Nulos

• **A=B**

Segmentos Orientados Opostos

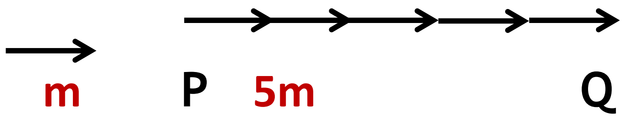
$A \longrightarrow B$

$D \longleftarrow C$

SEGMENTOS ORIENTADOS

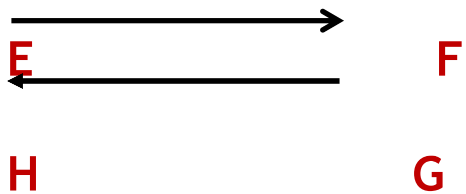
Características dos Segmentos Orientados

COMPRIMENTO: Medida do segmento geométrico, em relação a uma unidade fixada.

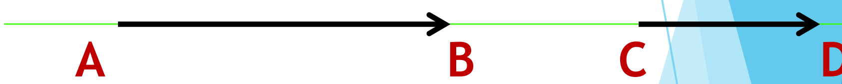


- Comprimento sempre um nº positivo ou nulo.

DIREÇÃO: Dois segmentos orientados não nulos AB e CD têm a mesma direção se e somente se as retas AB e CD forem paralelas ou coincidentes.

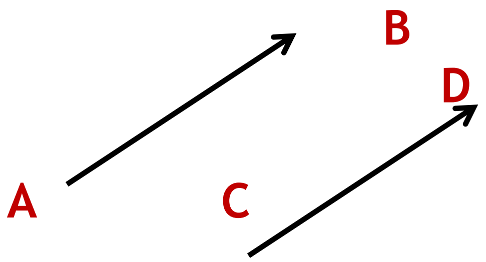


EF e GH têm a mesma direção e sentidos opostos



AB e CD têm a mesma direção e sentido

SENTIDO: **Dois segmentos orientados de mesma direção podem ter o mesmo sentido ou sentidos opostos. Só é possível comparar os sentidos se eles têm a mesma direção.**



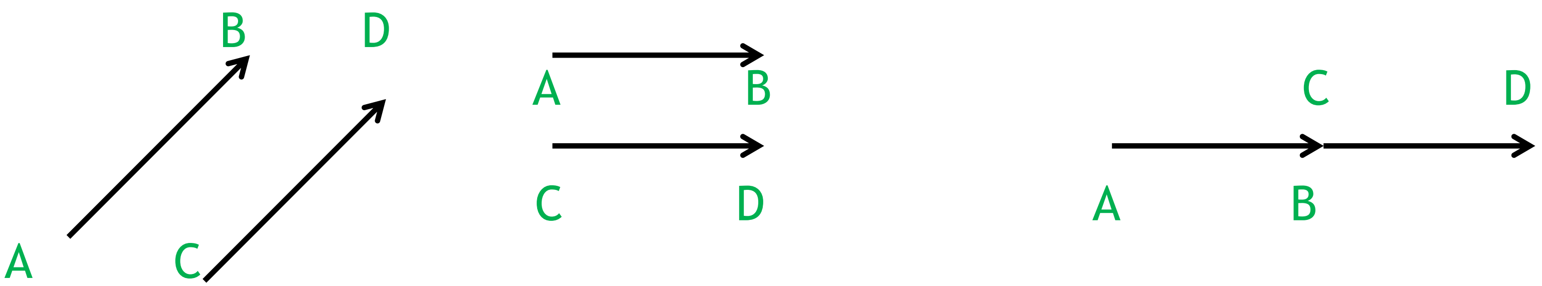
SEGMENTOS ORIENTADOS

Equipolência de Segmentos Orientados

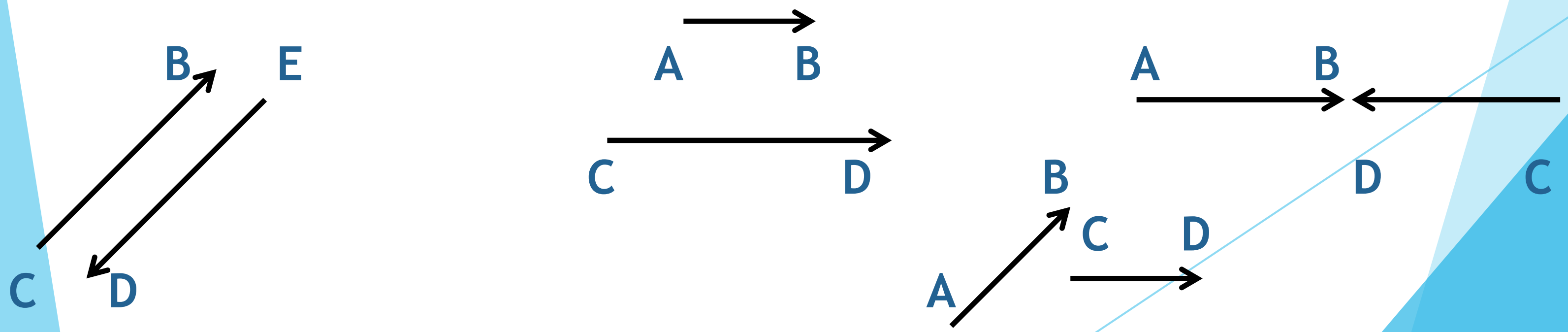
Dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes se, e somente se, AB e CD tiverem as mesmas características, isto é, mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido.

AB~CD

Ex. de pares de segmentos equipolentes:



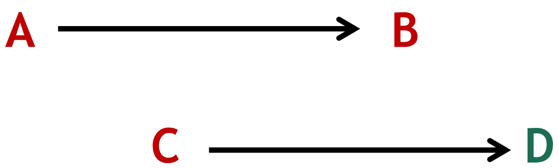
Ex. de pares de segmentos não equipolentes



SEGMENTOS ORIENTADOS EQUIPOLENTES

Propriedades da Equipolência

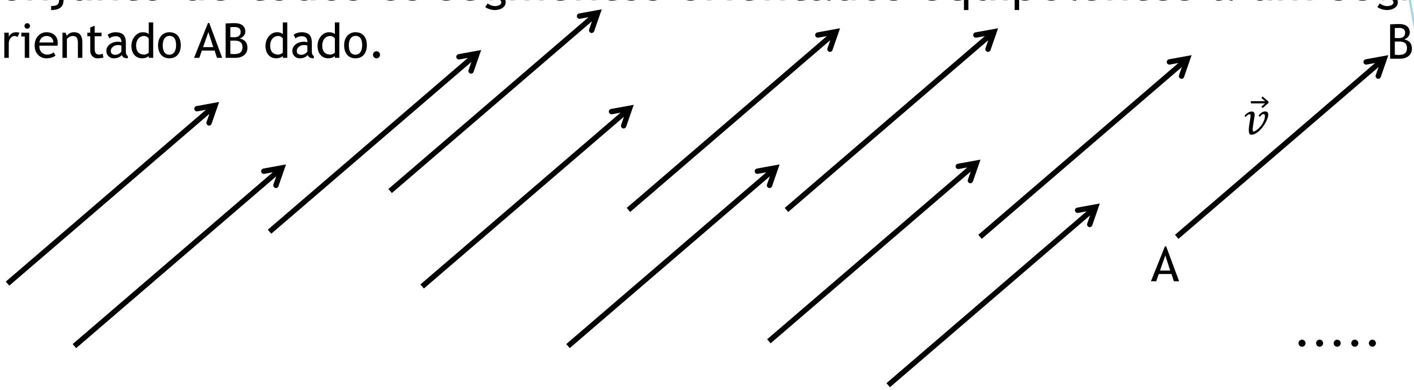
REFLEXIVA: AB~AB,
SIMÉTRICA: se AB~CD, então CD~AB
TRANSITIVA: se AB~CD e CD~EF, então AB~EF
TRANSPORTE: Dado o segmento AB e o ponto C, existe um único ponto D tal que AB~CD.



VETORES

Conceito de Vetor

Um vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados, ou seja, é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a um segmento orientado AB dado.



Notações Utilizadas

$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ ou notação de Grassmann $\vec{v}$ =(B-A)

Igualdade de Vetores

Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{CD}$ são iguais se, e somente se, os segmentos orientados AB e CD são equipolentes.

Vetores nulos são indicados por $\vec{0}$, são segmentos orientados nulos equipolentes entre si.

VETORES

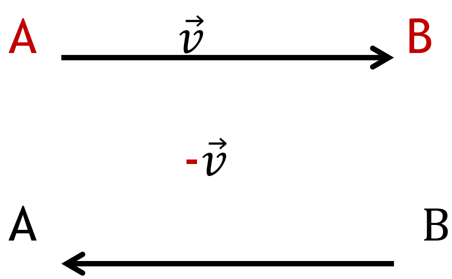
Características de um Vetor

MÓDULO: é o comprimento de qualquer um dos representantes do vetor, isto é, o comprimento de qualquer um dos segmentos orientados equipolentes que determinam esse vetor. Módulo é um número positivo para vetor não nulo e zero para vetor nulo.

DIREÇÃO: é a mesma direção dos segmentos orientados que o representam. Dois vetores são paralelos quando têm a mesma direção. O Vetor nulo não tem direção.

SENTIDO: é o mesmo sentido dos segmentos orientados que o representam. Só comparamos os sentidos se os vetores tiverem a mesma direção (ou seja, forem paralelos).
O vetor nulo não tem sentido.

VETOR OPOSTO:



$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} \quad x(-1)$$

$$-\vec{v} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

OPERAÇÕES COM VETORES

Soma de um ponto com um vetor:

A $\vec{v}$ B B=A+$\vec{v}$

Notação de Grassmann: $\vec{v}$= (B-A)

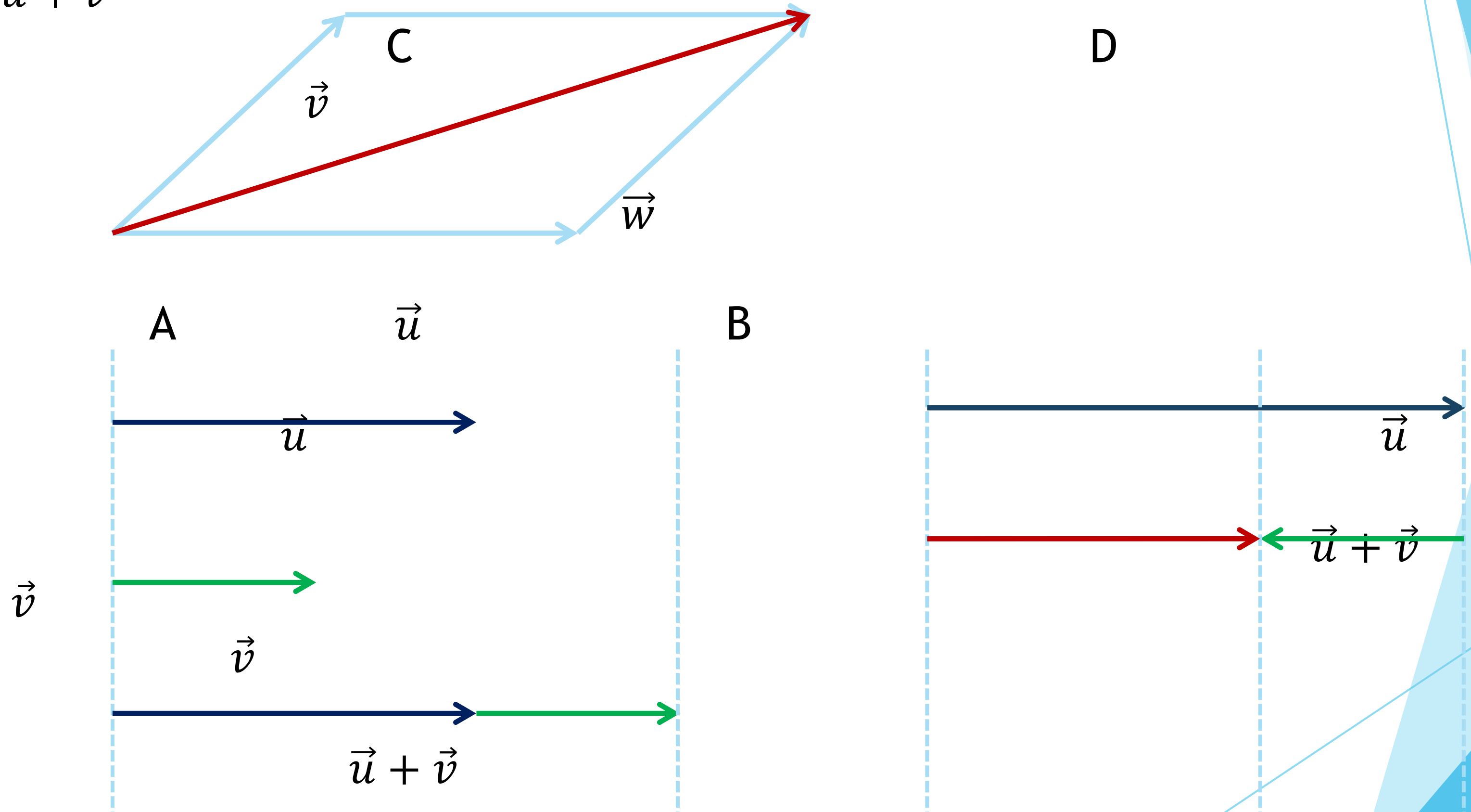
PROPRIEDADES: Para $\forall\, \vec{u}\ e\ \vec{v}$, e quaisquer pontos A, B, C e D são válidas as seguintes propriedades:

a) A+$\vec{0}$= A, isto é A-A=$\vec{0}$
b) A-$\vec{v}$=A+$(-\vec{v}\,)$
c) A+$\vec{v}$=B+$\vec{v}$ $\Rightarrow A \equiv B$
d) A+$\vec{u} = A + \vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{u} = \vec{v}$
e) A+(B-A)=B
f) (B-A)=-(A-B)
g) (B-A)=(D-C) $\Rightarrow$ (C-A)=(D-B)

OPERAÇÕES COM VETORES

Adição de Vetores

Dados dois vetores $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ pelos seus representantes, considere um ponto qualquer A e os pontos $B = A + \vec{u}$e $C = A + \vec{v}$. Por definição, o vetor $\vec{w} = \overrightarrow{AD} = (D - A) \rightarrow \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$



OPERAÇÕES COM VETORES

Propriedades

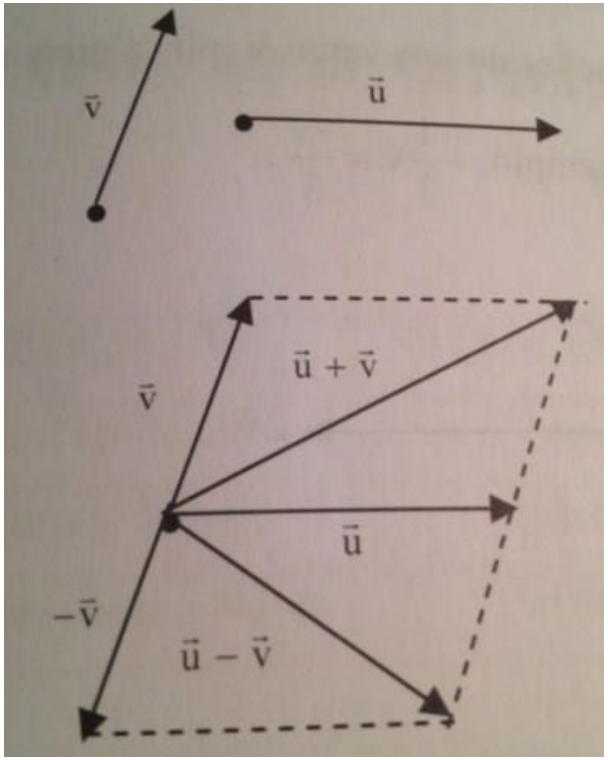
a) ASSOCIATIVA: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

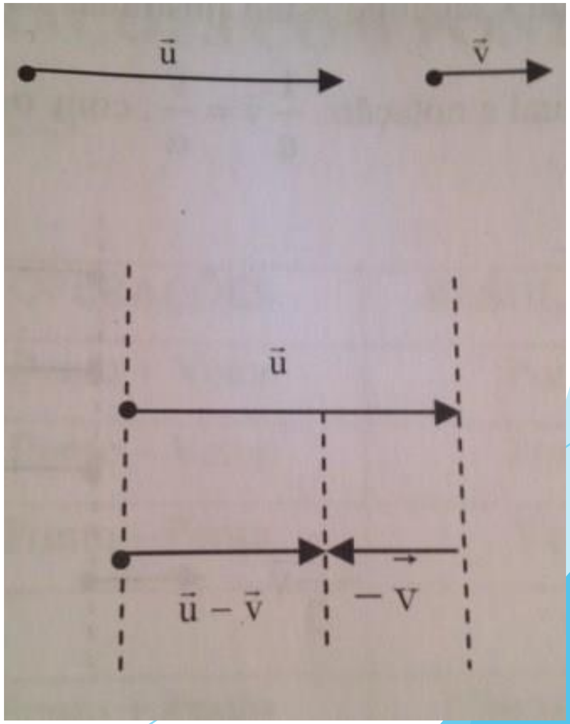
b) COMUTATIVA: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

c) ELEMENTO NEUTRO: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

d) ELEMENTO OPOSTO: $\forall \vec{u} \neq \vec{0}, \exists\ (-\vec{u})\ |\ \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

DIFERENÇA DE DOIS VETORES





OPERAÇÕES COM VETORES

Multiplicação de um Número Real por um Vetor

Dados $\alpha \in \Re$ $e\ um\ vetor\ qualquer\ \vec{v}$, define-se a multiplicação por $\alpha\vec{v}$ da seguinte forma:

a) Se $\alpha = 0$ ou se $\vec{v} = \vec{0}$ então $\alpha\vec{v}$ é o vetor nulo, ou seja, $\alpha\vec{v} = \vec{0}$.

b) Se $\alpha \neq 0$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então definimos para o vetor $\alpha\vec{v}$:

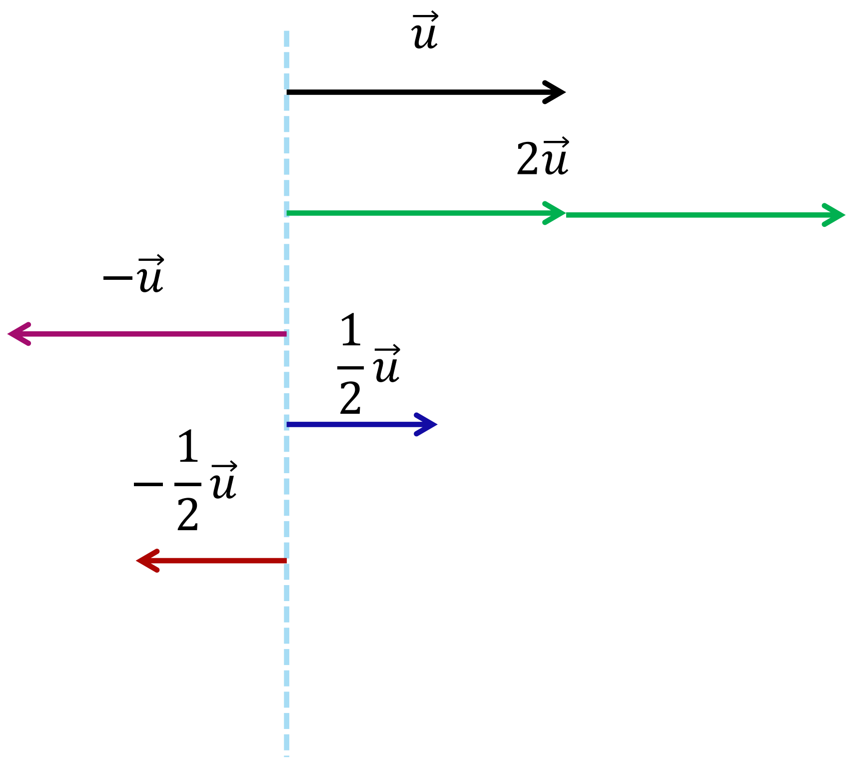
   a) Módulo: $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$,

   b) Direção: $\alpha\vec{v}$ é paralelo ao vetor $\vec{v}$,

   c) Sentido: Se $\alpha > 0$ o sentido de $\alpha\vec{v}$ é o mesmo de $\vec{v}$,
   Se $\alpha < 0$ o sentido de $\alpha\vec{v}$ é oposto ao de $\vec{v}$.

OPERAÇÕES COM VETORES

Exemplos:



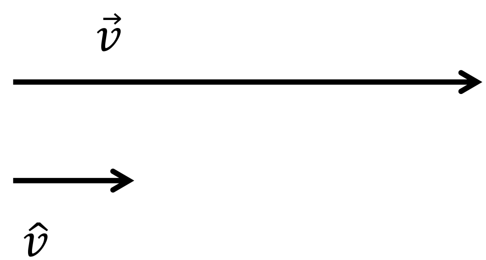
OPERAÇÕES COM VETORES

Propriedades: $\forall\, \vec{u}\ e\ \vec{v}\ e\ \forall\ \alpha, \beta\ \in \Re$ são válidas as seguintes propriedades:

a) $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$; $\forall \alpha, \beta\ \in \Re$; ASSOCIATIVA;
b) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}, \forall \alpha\ \in \Re$; DISTRIBUTIVA À ESQUERDA;
c) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u},\ \forall \alpha, \beta\ \in \Re$; DISTRIBUTIVA À DIREITA;
d) $1\vec{u} = \vec{u}$; ELEMENTO NEUTRO DA OPERAÇÃO.

VERSOR DE UM VETOR:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}$$



Características do **Versor**: mesma direção e mesmo sentido de $\vec{v}$ porém, módulo unitário.

Exemplos:

1) Localize os pontos de acordo com cada equação:

$a)\ \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

$b)\ \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

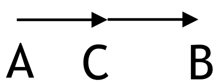
d) $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$

e) $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

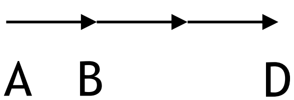
Exemplos:

1) Localize os pontos de acordo com cada equação:

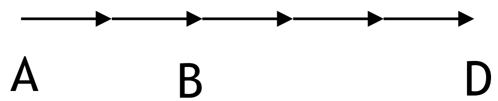
a) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$



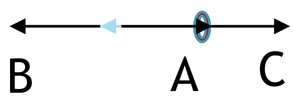
b) $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$



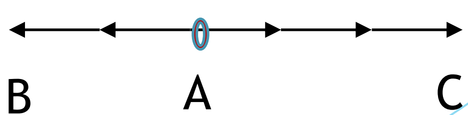
c) $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$



d) $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}$



e) $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

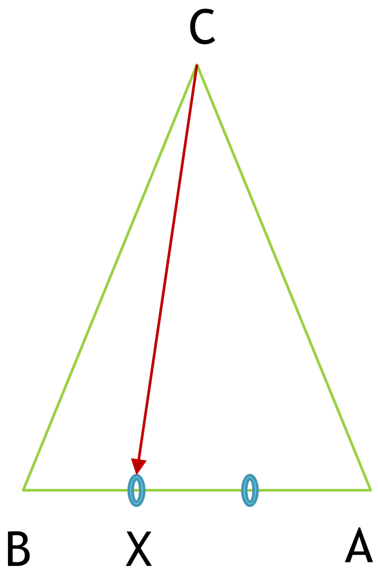


Exemplos:

2) Dado um triângulo ABC e sabendo que sabendo que $\overrightarrow{BX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ escreva $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

Exemplos:

2) Dado um triângulo ABC e sabendo que sabendo que $\overrightarrow{BX} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ escreva $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.



$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BX}$$

$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$$

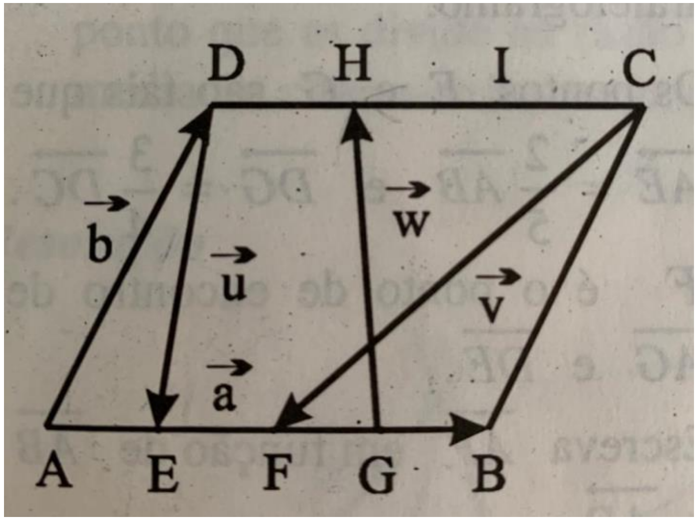
$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)$$

$$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{CB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$

$$\boxed{\overrightarrow{CX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}}$$

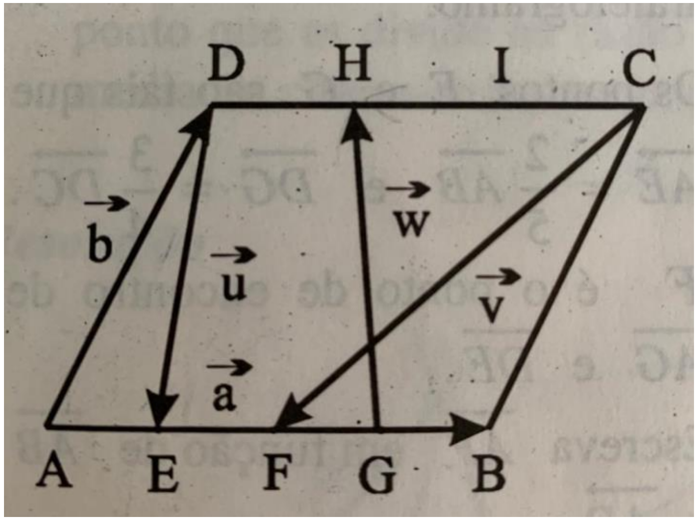
Exemplos:

3) A, B, C e D são vértices de um paralelogramo. O lado $\overline{AB}$ foi dividido em 4 partes iguais e o lado $\overline{DC}$ em três partes iguais.
Sendo $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{AD} = \vec{b}$, $\vec{u} = \overrightarrow{DE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CF}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{GH}$, escreva $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ em função de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.



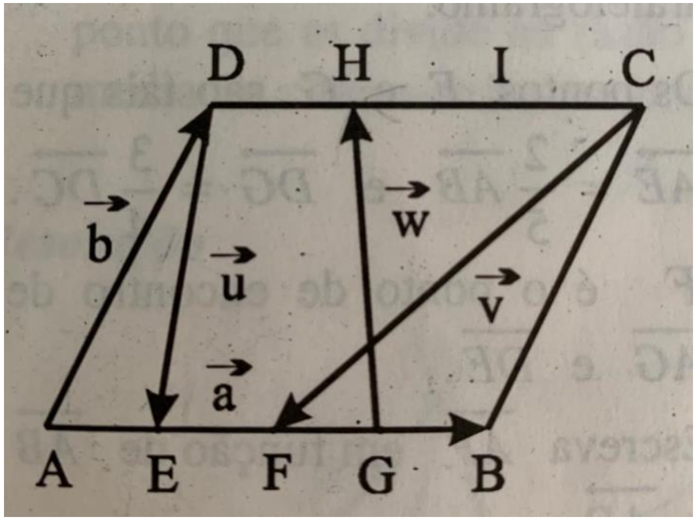
Continuação:

3) A, B, C e D são vértices de um paralelogramo. O lado $\overline{AB}$ foi dividido em 4 partes iguais e o lado $\overline{DC}$ em três partes iguais.
Sendo $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\vec{u} = \overrightarrow{DE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CF}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{GH}$, escreva $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ em função de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.



Exemplos:

3) A, B, C e D são vértices de um paralelogramo. O lado $\overline{AB}$ foi dividido em 4 partes iguais e o lado $\overline{DC}$ em três partes iguais.
Sendo $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{AD} = \vec{b}$, $\vec{u} = \overrightarrow{DE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CF}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{GH}$, escreva $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ em função de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.



$$\overrightarrow{DE} = \vec{u}$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} \qquad \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

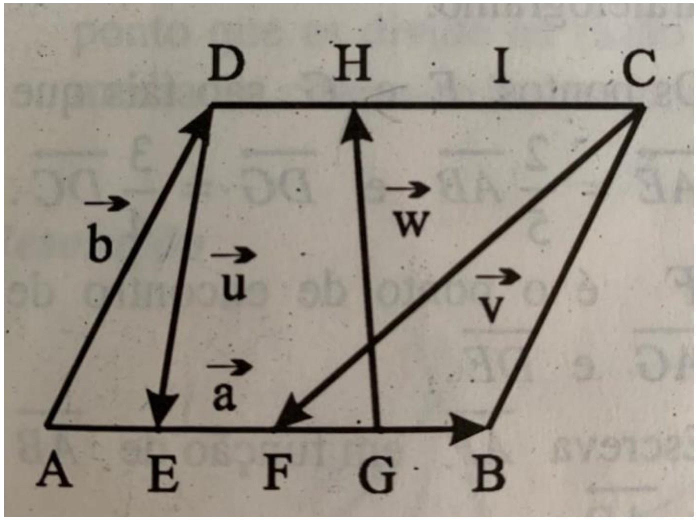
$$\overrightarrow{DE} = -\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a} \qquad \therefore \boxed{\vec{u} = -\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a}}$$

$$\underline{\overrightarrow{CF} = \vec{v}}$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} \quad \overrightarrow{CF} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \quad \therefore \boxed{\vec{v} = -\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}}$$

Continuação:

3) A, B, C e D são vértices de um paralelogramo. O lado $\overline{AB}$ foi dividido em 4 partes iguais e o lado $\overline{DC}$ em três partes iguais.
Sendo $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\vec{u} = \overrightarrow{DE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CF}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{GH}$, escreva $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ em função de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.



$$\overrightarrow{GH} = \vec{w}$$

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} \qquad \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{GH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \vec{b} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\boxed{\overrightarrow{GH} = -\frac{5}{12}\vec{a} + \vec{b}}$$

Bibliografia:

1) Watanabe, R. G., Mello, D. A. VETORES E UMA INICIAÇÃO A GEOMETRIA ANALÍTICA. 2° Ed. LF Editorial. 2011. São Paulo.

2) Loreto, A. C. C.; Junior, A. P. L. VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA Teoria e Exercícios. 4° Ed. LCTE Editora. 2014. São Paulo.

3) Winterle, P. , Vetores e Geometria Analítica. Makron Books Ltda, 2000.