MAG120 - Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Pedro Schneider

2° Semestre de 2024

Sumário

1 Cronograma e Notas

1.1 Critério de Aproveitamento

A média final MF é calculada pela fórmula:

$$\boldsymbol{MF} = 0.3 \times \frac{(\boldsymbol{AT1} + \boldsymbol{AT2})}{2} + 0.7 \times \boldsymbol{PF}$$

AT1, AT2 e AT3 - Atividades Avaliativas (avaliação continuada) com as datas pré-estabelecidas no cronograma.
OBS.: SERÃO REALIZADAS TRÊS ATIVIDADES, PORÉM SÓ SERÃO UTILIZADAS AS DUAS MAIORES NOTAS (A MENOR DELAS SERÁ DESCARTADA).

PF - Prova final contemplando todo conteúdo do semestre.
A nota da avaliação PF poderá ser substituída pela nota da avaliação PS, caso o aluno não alcance média final maior ou igual a 5,0.

1.2 Cronograma

Tabela 1: Cronograma semestral

Semanas	**Datas**	**Conteúdo**
Sem. 1	08/08 a 10/08	MATRIZES. OPERAÇÕES. MATRIZ TRANSPOSTA E MATRIZ INVERSA. FÓRMULA DE BINET
Sem. 2	12/08 a 16/08	SISTEMAS LINEARES
Sem. 3	19/08 a 24/08	SISTEMAS LINEARES
Sem. 4	26/08 a 31/08 **ATP 1**	SEGMENTOS ORIENTADOS. EQUIPOLÊNCIA VETORES. OPERAÇÕES COM VETORES.
Sem. 5	02/09 a 07/09 ***Feriado 07/09***	DEPENDÊNCIA LINEAR E BASES. COORDENADAS DE UM VETOR
Sem. 6	09/09 a 14/09	MUDANÇA DE BASE. EQUAÇÕES DE MUDANÇA
Sem. 7	16/09 a 21/09	PRODUTOS ESCALAR
Sem. 8	23/09 a 28/09	PRODUTOS ESCALAR (continuação). VETOR PROJEÇÃO ORTOGONAL e COSSENOS DIRETORES
Sem. 9	30/09 a 04/10 **ATP 2**	PRODUTO VETORIAL E APLICAÇÕES.
Sem. 10	07/10 a 12/10 ***Feriado 12/10***	PRODUTO MISTO.
Sem. 11	14/10 a 19/10	SISTEMAS DE COORDENADAS. EQUAÇÕES DA RETA. Posições relativas entre duas retas.
Sem. 12	21/10 a 26/10 *22 e 23 - INOVAÇÃO*	EQUAÇÕES DO PLANO. VETOR NORMAL A UM PLANO.
Sem. 13	28/10 a 02/11 ***Feriado 02/11***	EQUAÇÕES DO PLANO. VETOR NORMAL A UM PLANO.
Sem. 14	04/11 a 09/11 **ATP 3**	POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS E PLANOS.
Sem. 15	11/11 a 16/11	PROBLEMAS CLÁSSICOS DE GEOMETRIA ESPACIAL.
Sem. 16	18/11 a 20/11	DISTÂNCIAS.
Sem. 17-19	**21/11 a 30/11** **02/12 a 07/12** **09/12 a 14/12** **20/12**	**PERÍODO PROVAS FINAIS** **REVISÃO DE PROVAS** **PERÍODO PROVAS SUBSTITUTIVAS**

2 Semana 1 - Matrizes

2.1 Fundamentos e tipos

2.1.1 O que são matrizes?

É uma tabela contendo $M \times N$ elementos, com $M, N \in \mathbb{N}$, dispostos em linhas e colunas.
Ex.:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 0 \\ \sqrt{7} & 1/3 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Como indicar matrizes?

Com letra latina maiúscula, $A = [a_{ij}]$, onde i indica a **linha** e j indica a **coluna** em que se encontra o elemento; sabendo que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

$$A = [a_{ij}] \quad \text{onde} \quad 1 \leq i \leq 2 \text{ e } 1 \leq j \leq 3 \;\rightarrow\; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

2.1.3 Matriz Quadrada

Quando $m = n$, ou seja, número de linhas é igual ao número de colunas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.4 Matriz Retangular

Quando $m \neq n$, ou seja, número de linhas é diferente do número de colunas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ordem 3×2

2.1.5 Matriz Nula

Quando todos os elementos são nulos, ou seja, iguais a 0.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1.6 Matriz Identidade

Quando temos uma matriz quadrada onde os elementos da diagonal principal são unitários e os demais são nulos, ou seja, se $i = j \rightarrow a_{ij} = 1$ e se $i \neq j \rightarrow a_{ij} = 0$.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1.7 Matriz Diagonal

Quando temos uma matriz quadrada onde os elementos da diagonal principal são unitários e os demais são nulos, ou seja, se $i = j \rightarrow a_{ij} \neq 0$ e se $i \neq j \rightarrow a_{ij} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

2.1.8 Matriz Transposta

Dada a matriz $A = [a_{ij}]$; $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, a matriz transposta é indicada por A^T, e é a matriz tal que $B = [b_{ij}]$, onde $b_{ij} = a_{ij}$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

2.1.9 Matriz Simétricas

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$ para todos os elementos da matriz. Em outras palavras, é uma matriz quadrada tal que: $A = A^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, A = A^T$$

2.1.10 Matriz Antissimétricas

Uma matriz quadrada tal que: $A = -A^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}, A = -A^T$$

2.1.11 Matriz Inversa

Se a matriz A é quadrada, quem é sua inversa?
É outra matriz quadrada, indicada por A^{-1}, que satisfaz a condição $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$, sendo I_n a matriz identidade de ordem n.

Ex.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, entao : A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 7 \end{pmatrix}, pois A^{-1}A = I_3$$

Toda matriz quadrada é invertível?
Não, a matriz só possui inversa se o seu determinante for não nulo ($det(A) \neq 0$).

2.2 Operações com matrizes

2.2.1 Adição

Dadas duas matrizes de mesma ordem: $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, a soma é a matriz: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.
Ex.:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriedades da adição de matrizes
$\forall A, B, C$, de mesma ordem, tem-se:

a) **Comutatividade**: $A + B = B + A$

b) **Associatividade**: $A + (B + C) = (A + B) + C$

c) **Existência do elemento neutro**: $A + 0 = A$

d) **Existência do elemento oposto**: $A + (-A) = 0$

2.2.2 Multiplicação por um número real

Dado um número real λ e uma matriz $A = [a_{ij}]$, de ordem $M \times N$:
$\lambda A = \lambda[a_{ij}] = \lambda a_{ij}$
Ex.:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}, 3A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 24 & 15 \end{pmatrix}$$

Propriedades da multiplicação de matrizes por um número real
$\forall A, B$, de mesma ordem, $\forall \lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$ tem-se:

a) $(\lambda A)\mu = (\lambda\mu)A$

b) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

c) $(\lambda\mu)A = \lambda A + \mu A$

d) **Existência do elemento neutro**: $1A = A$

2.2.3 Multiplicação entre duas raízes

Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{jk}]$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq p$, o produto de A por B é uma matriz $C = [c_{ik}]$, de ordem $N \times P$, onde $c_{ik} = \sum_1^n a_{ij}b_{jk}$. O produto entre duas matrizes só é possível se o número de **colunas** da matriz A for **igual** ao número de **linhas** da matriz B.
Ex.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$$

Propriedades da multiplicação entre matrizes

a) O produto AB e BA não é comutativo, dependendo da ordem das matrizes esse produto pode nem existir, e caso exista, a ordem da matriz produto poderá ser diferente.

Ex.: $A_{3\times2}B_{2\times1} = C_{3\times1}$ e $B_{2\times1}A_{3\times2} = \nexists$ **(Não é possível realizar essa operação)**

b) $(A + B) \cdot C = AC + BC$ é válida?
Sim, desde que existam esses produtos.

2.2.4 Operações com matriz transposta

Propriedades da matriz transposta

a) $(A + B)^T = A^T + B^T$

b) $(AB)^T = B^T A^T$

c) $(A^T)^T = A$

d) $(\lambda A)^T = \lambda A^T, \lambda \in \mathbb{R}$

2.2.5 Operações com matriz inversa

Propriedades da matriz inversa

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

c) $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}, \lambda \in \mathbb{R}$

2.3 Fórmula de Binet e determinante

2.3.1 Determinante

O determinante de uma matriz quadrada A de ordem n é indicado por $det(A)$ ou $|A|$, e é um número real que pode ser calculado de diversas formas, como por exemplo, pelo método de cofatores. Considerando a matriz A de ordem 2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

O determinante de A é dado por:

$$det(A) = ad - bc$$

Já para uma mtriz de ordem 3, podemos usar, por exemplo, a **Regra de Sarrus**:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

O determinante de A é dado por:

$$det(A) = aei + bfg + cdh - \mathbf{ceg} - \mathbf{bdi} - \mathbf{afh}$$

O determinante de uma matriz quadrada de ordem n pode ser calculado por meio de operações com matrizes, como a eliminação de Gauss, por exemplo. Além disso, o determinando é um fator de multiplicação que depende de n, por exemplo: numa matriz de **ordem** 2, seu determinante é um fator de multiplicação da **área**; já para uma de **ordem** 3, é um fator de multiplicação do **volume**.

2.3.2 Fórmula de Binet

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, a fórmula de Binet é dada por:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot det(A_{ij})$$

onde A_{ij} é a matriz obtida de A eliminando a linha i e a coluna j.

Ou, pode ser escrita da seguinte forma:

$$M^{-1} = \frac{1}{\Delta}(cofM)^T$$

Com M sendo a matriz quadrada de ordem n, Δ sendo o determinante de M e $cofM$ sendo a matriz dos cofatores de M.

Ex.:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Cof}M = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(\text{Cof}M)^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \cdot (\text{Cof}M)^T = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 4 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

3 Semana 2 e 3 - Sistemas Lineares

3.1 Introdução

3.1.1 O que é um sistema linear?

É um conjunto de equações lineares, ou seja, um conjunto de equações do tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$.

Existem três tipos de sistemas lineares:

1. **Sistema Possível e Determinado (SPD)**: quando o sistema possui uma única solução.

2. **Sistema Possível e Indeterminado (SPI)**: quando o sistema possui infinitas soluções.

3. **Sistema Impossível (SI)**: quando o sistema não possui solução.

3.1.2 Como resolver um sistema linear?

Existem diversos métodos para resolver sistemas lineares, como por exemplo:

1. **Método de Substituição**: consiste em isolar uma variável em uma equação e substituir nas demais.

2. **Método de Igualdade**: consiste em igualar duas equações e resolver o sistema resultante.

3. **Método de Adição**: consiste em somar ou subtrair duas equações para eliminar uma variável.

4. **Método de Matriz Inversa**: consiste em utilizar a matriz inversa para encontrar a solução do sistema.

Além desses métodos, é possível matrizes para resolver sistemas lineares utilizando, por exemplo, a **Regra de Cramer** ou **escalonamento** (ou *Método de Gauss*).

3.2 Resolução do sistema linear utilizando a regra de Cramer

Para resolver o sistema linear utilizando a regra de Cramer, siga os seguintes passos:

1. Escreva o sistema linear na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Calcule o determinante da matriz dos coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Calcule o determinante da matriz obtida substituindo a coluna dos coeficientes de x pela coluna dos termos independentes:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Calcule o determinante da matriz obtida substituindo a coluna dos coeficientes de y pela coluna dos termos independentes:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5. Calcule o determinante da matriz obtida substituindo a coluna dos coeficientes de z pela coluna dos termos independentes:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

6. Calcule as soluções do sistema utilizando as fórmulas de Cramer:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Nese caso, a solução será:

$$x = 1, \quad y = 3, \quad z = 2$$

3.3 Resolução do sistema linear utilizando escalonamento

Para resolver o sistema linear utilizando escalonamento, siga os seguintes passos:

1. Escreva o sistema linear na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Realize as operações elementares nas linhas da matriz aumentada até obter uma matriz triangular superior.

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

a. Diminuir a segunda linha pela primeira e a terceira linha por 2 vezes a segunda.

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow 2\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \end{array}$$

b. Dividir a segunda linha pela sua metade negativa.

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \end{array} \ \mathrm{L}_2 \leftarrow -\frac{\mathrm{L}_2}{2} \rightarrow \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \end{array}$$

c. Somar a terceira linha com a segunda.

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}$$

3. Reescreva o sistema e encontre as variáveis.
Nesse caso, a solução será:

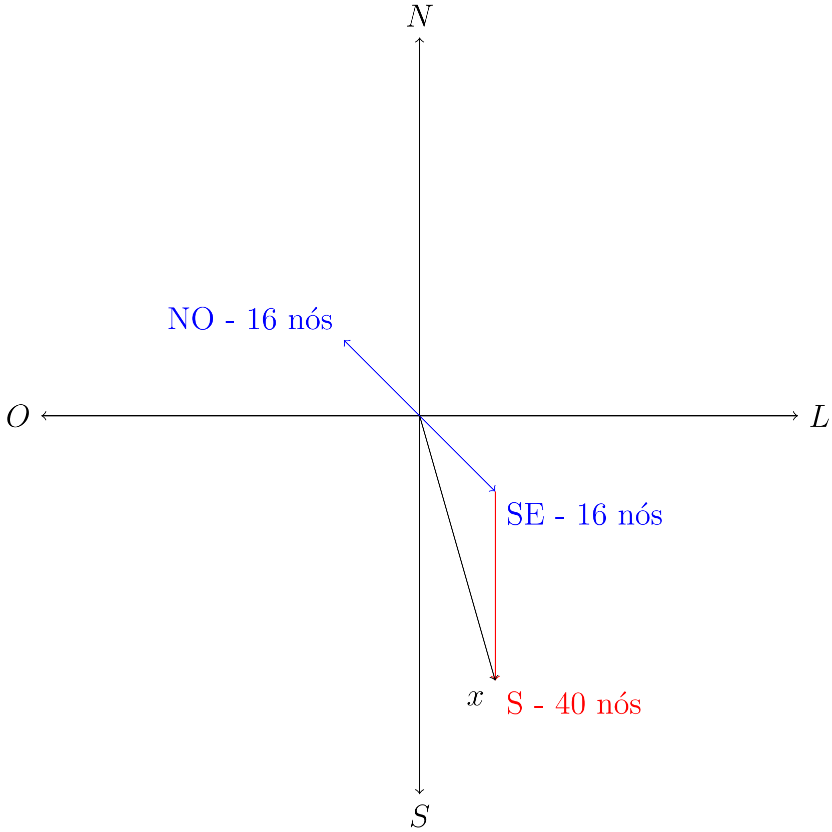
$$x = 1, \quad y = 3, \quad z = 2$$

4 Semana 4 - Segmentos orientados e vetores

4.1 Segmentos orientados

4.1.1 O que são vetores e segmentos orientados?

Um segmento orientado é um segmento de reta que possui um sentido, ou seja, uma direção. Ele é representado por uma reta que possui um ponto de origem e um ponto de destino. Considere o segmento orientado AB, onde A é o ponto de origem e B é o ponto de destino. Podemos representar esse segmento como $\overrightarrow{AB}$.
"Você é o capitão de um barco e quer viajar para o sul a 40 nós. Se a corrente marítma está se movendo para nordeste a 16 nós, em que direção e magnitude você opera o motor?"



;

São características de um segmento orientado:

1. **Módulo** (*Tamanho*): é a medida do segmento, ou seja, a distância entre os pontos A e B.
2. **Direção**: é a orientação do segmento, ou seja, o ângulo formado entre o segmento e o eixo x.
3. **Sentido**: é a direção do segmento, ou seja, a orientação do segmento.

Vetores são segmentos orientados que possuem as mesmas características, ou seja, módulo, direção e sentido.

Em outras palavras, vetores são o **conjunto de segmentos equipolentes**.

4.1.2 Notação

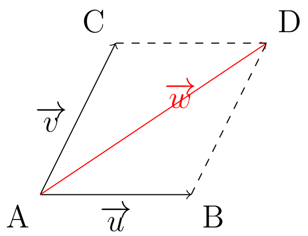
Os vetores são representados por letras minúsculas em negrito, como **v**, e são indicados por uma seta sobre a letra, como $\overrightarrow{v}$.

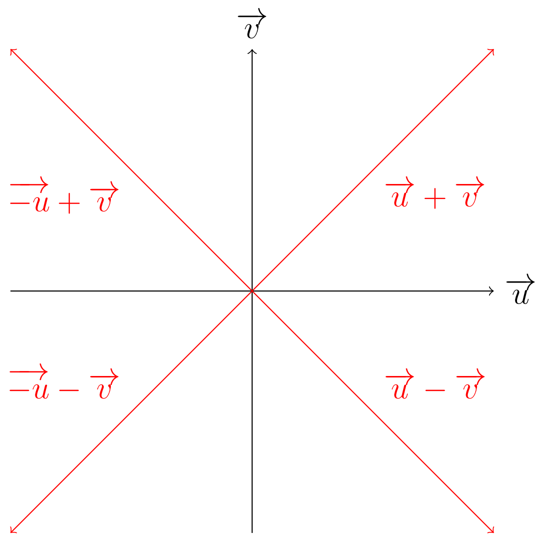
$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \quad \text{ou na notação de Grassmann} \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (B - A) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

4.1.3 Operações com vetores

1. **Soma de vetores**: a soma de vetores é realizada pela regra do paralelogramo, ou seja, a soma de dois vetores é um vetor que possui a mesma direção e sentido da diagonal do paralelogramo formado pelos vetores.
   Ex.: Dado dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$ pelos seus representantes, considere um ponto qualquer A e os pontos $B = A + \overrightarrow{u}$ e $C = A + \overrightarrow{v}$.

   Por definição, o vetor $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD} = (D - A) \rightarrow \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$





2. **Subtração de vetores**: a subtração de vetores é realizada pela soma do vetor com o vetor oposto, ou seja, a subtração de dois vetores é a soma do vetor com o vetor oposto.

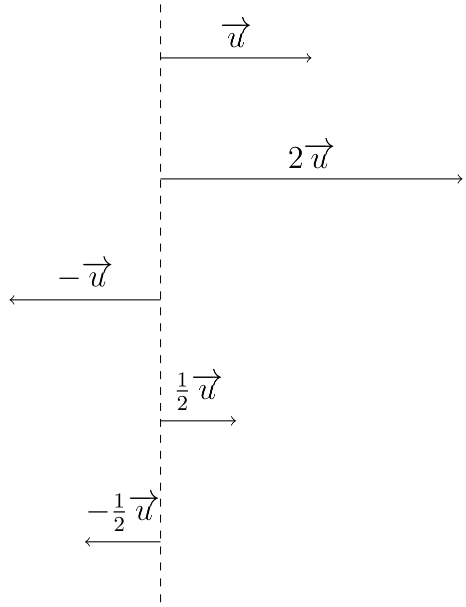
3. **Multiplicação de vetor por um escalar**: a multiplicação de um vetor por um escalar é realizada multiplicando cada componente do vetor pelo escalar.

   Dado $a \in \mathbb{R}$ e um vetor qualquer $\overrightarrow{v}$, define-se $a\overrightarrow{v}$:

   a) se $a = 0$ ou se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, então $a\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ (Vetor nulo).

   b) se $a \neq 0$ ou se $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, então:
      Módulo: $|a\overrightarrow{v}| = |a||\overrightarrow{v}|$
      Direção: Mesma direção de $\overrightarrow{v}$ $(a\overrightarrow{v} // \overrightarrow{v})$
      Sentido: Se $a > 0$, mesmo sentido de $\overrightarrow{v}$;
      se $a < 0$, sentido oposto de $\overrightarrow{v}$.

Ex.:



4. **Multiplicação de vetor por outro vetor**: $\forall \overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são válidas as seguintes propriedades:

   a) $\alpha\beta\overrightarrow{v} = (\alpha\beta)\overrightarrow{v}$ **Associativa**

   b) $\alpha(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}$ **Distributiva à esquerda**

   c) $(\alpha + \beta)\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}$ **Distributiva à direita**

   d) $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ **Elemento neutro da operação**

   Versor de um vetor
   Mesma direção e mesmo sentido de $\overrightarrow{v}$ módulo unitário.

$$\hat{v} = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|} = \frac{1}{|\overrightarrow{v}|}\overrightarrow{v}$$