Módulo

O módulo de um número real x é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Por exemplo, $|-3{,}15| = 3,15$, $|7| = 7$, $|0| = 0$.

- Note que $\sqrt{x^2} = |x|$

Exemplo 1.

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x+3, & \text{se } 2x-3 \geq 0 \\ -2x+3, & \text{se } 2x-3 < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 2x-3, & \text{se } x \geq 3/2 \\ -2x+3, & \text{se } x < 3/2 \end{cases}$$

Exemplo 2. A *função módulo* é a função

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Para esboçar o gráfico de f considere as funções $y = x$ e $y = -x$:

x	$y = x$
0	0
1	1

x	$y = -x$
0	0
1	-1

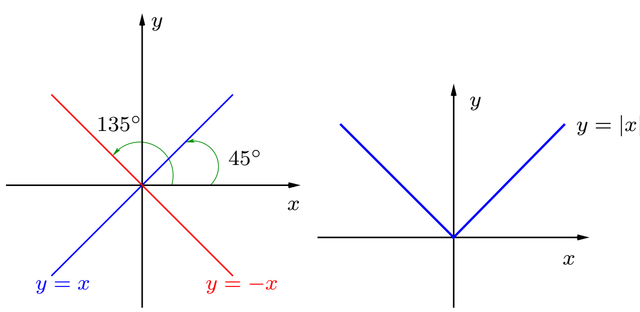


Figura 1. A função módulo

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty[$.

Exemplo 3. Seja $f(x) = (x+1)|x-3|$.

Vamos começar reescrevendo a função sem o símbolo de módulo:

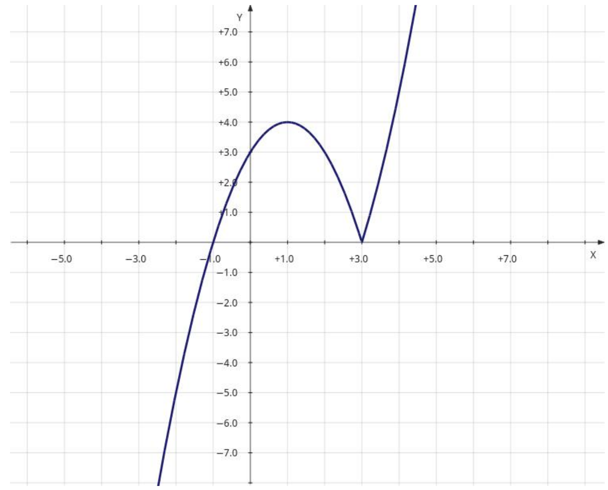
$$f(x) = \begin{cases} (x+1)(x-3), & \text{se } x-3 \geq 0 \\ (x+1)(-x+3), & \text{se } x-3 < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x^2-2x-3, & \text{se } x \geq 3 \\ -x^2+2x+3, & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

Para esboçar o gráfico de f considere as funções:

$y = x^2 - 2x - 3$ e $y = -x^2 + 2x + 3$

$y = x^2 - 2x - 3$	
raízes	-1 e 3
vértice	$v = (1, -4)$

$y = -x^2 + 2x + 3$	
raízes	-1 e 3
vértice	$v = (1, 4)$

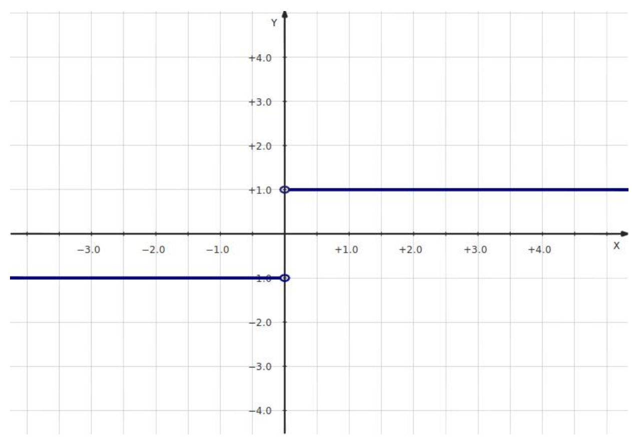


$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

Exemplo 4. Seja $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

Para esboçar o gráfico de f vamos reescrever, de forma equivalente, a função sem o símbolo de módulo.

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{x}{x}, & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{x}{-x}, & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^*$ e $\mathrm{Im}(f) = \{-1, 1\}$

Exemplo 5. Seja $f(x) = x|x-1| - x^2 + 1$

Reescrevendo $f(x)$ obtemos:

$$f(x) = \begin{cases} x(x-1) - x^2 + 1, & \text{se } x - 1 \geq 0 \\ x(-x+1) - x^2 + 1, & \text{se } x - 1 < 0 \end{cases}$$

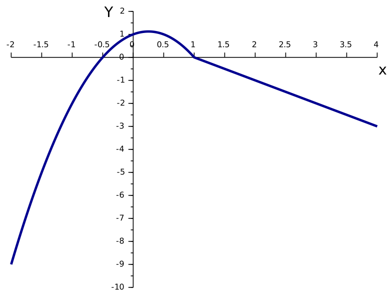
Portanto

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{se } x \geq 1 \\ -2x^2 + x + 1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Para esboçar o gráfico de f considere as funções $y = -x + 1$ e $y = -2x^2 + x + 1$:

$y = -x + 1$	
x	y
0	1
1	0

$y = -2x^2 + x + 1$	
raízes	-1/2 e 1
vértice	$v = (1/4, 9/8)$



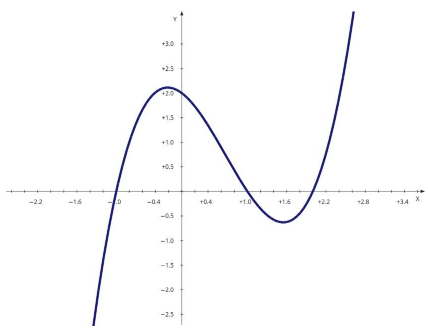
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \quad \text{e } \text{Im}(f) =]-\infty, 9/8]$$

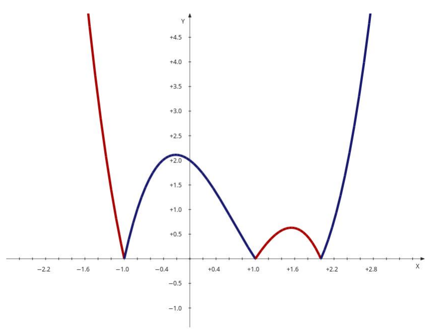
Exemplo 6. Considere a função $g = |f|$. Então,

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Assim, o gráfico de $|f|$ coincide com o gráfico de f onde f for positiva ou nula e coincide com o gráfico de $-f$ onde f for negativa, isto é, o gráfico de f será girado 180° no eixo x, onde f for negativa.

As duas figuras abaixo são os gráficos de uma função f e de $|f|$.

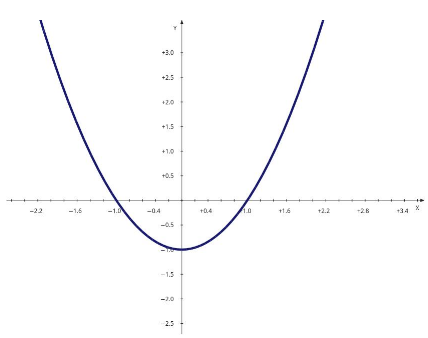




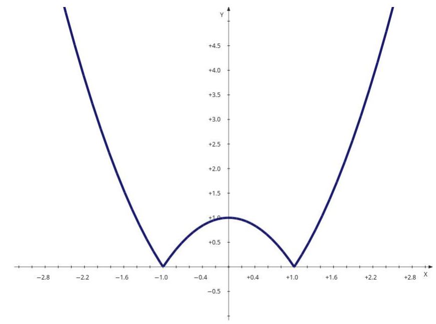
Exemplo 7. Seja $f(x) = |x^2 - 1|$

Primeiro esboçamos o gráfico de $y = x^2 - 1$:

$y = x^2 - 1$	
raízes	-1 e 1
vértice	$v = (0, -1)$



Para esboçar o gráfico de $f(x) = |x^2 - 1|$, giramos 180° em torno do eixo x, aquela(s) parte(s) do gráfico de $y = x^2 - 1$ em que y é negativo:



Exercícios de revisão

1 Esboce o gráfico indicando domínio, imagem, intersecções com os eixos coordenados e vértices (se houver):

(a) $f(x) = (x-1)|x+2|$

(b) $f(x) = |x-1|(x+2)$

(c) $f(x) = |2x+3| - 2x + 1$

(d) $f(x) = -x^2 + x|x|$

(e) $f(x) = x^2 + |x-1| + 1$

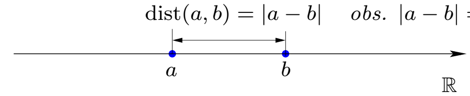
(f) $f(x) = x|x-1|$

(g) $f(x) = |-x^2 + 1|$

(h) $f(x) = |x^2 + 2x| + 3$

2 A *distância* entre dois pontos a e b em $\mathbb{R}$, denotada por $\text{dist}(a, b)$ é o módulo da diferença entre eles, isto é, $\text{dist}(a, b) = |a - b|$. Como $|x| = |x - 0|$, então $|x|$ é a distância de x até a origem 0.

$\text{dist}(a, b) = |a - b|$ *obs.* $|a - b| = |b - a|$



Assim,

- $|x| = 2 \iff x = \pm 2$, pois queremos aqueles números cuja distância até a origem vale 2.
- $|x| = 0 \iff x = 0$, $|x| = -2$ não tem solução
- De modo geral: se $a \geq 0$, então $|x| = a \iff x = \pm a$; se $a < 0$, então $|x| = a$ não tem solução.
- $|x| < 3 \iff$ a distância entre$x$ e 0 é menor que 3. Portanto $|x| < 3 \iff -3 < x < 3$.
- $|x| \leq 3 \iff$ a distância entre$x$ e 0 é menor ou igual a 3. Portanto $|x| < 3 \iff -3 \leq x \leq 3$.
- $|x| > 3 \iff$ a distância entre$x$ e 0 é maior que3. Portanto $|x| > 3 \iff x < -3$ ou $x > 3$.
- $|x| \geq 3 \iff$ a distância entre$x$ e 0 é maior ou iguall a 3. Portanto $|x| \geq 3 \iff x \leq -3$ ou $x \geq 3$.
- De modo geral, se $a > 0$, então:

  $|x| < a \iff -a < x < a$.

  $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$.

  $|x| > a \iff x < -a$ ou $x > a$.

  $|x| \geq a \iff x \leq -a$ ou $x \geq a$.

Resolva:

(a) $|3x-1|=4$

(b) $|-4x+1|=2$

(c) $|5x-2|=0$

(d) $|x^2-x+1|=1$

(e) $\left|\dfrac{2x+1}{x-2}\right|=1$

(f) $|3x-1|<4$

(g) $|-4x+1|\geq 2$

(h) $|5x-2|<0$

(i) $|x^2-x+1|<1$

(j) $\left|\dfrac{2x+1}{x-2}\right|\geq 1$

Respostas

2 (a) $x=-1$ ou $x=5/3$

(b) $x=3/4$ ou $x=-1/4$

(c) $x=2/5$

(d) $x=-1$ ou $x=2$

(e) $x=-3$ ou $x=1/3$

(f) $]-1,4/3[$

(g) $]-\infty,1/4]\cup[3/4,+\infty[$

(h) $\emptyset$

(i) $]0,1[$

(j) $]-\infty,-3]\ \cup\ [1/3,2[\ \cup\ ]2,+\infty[$