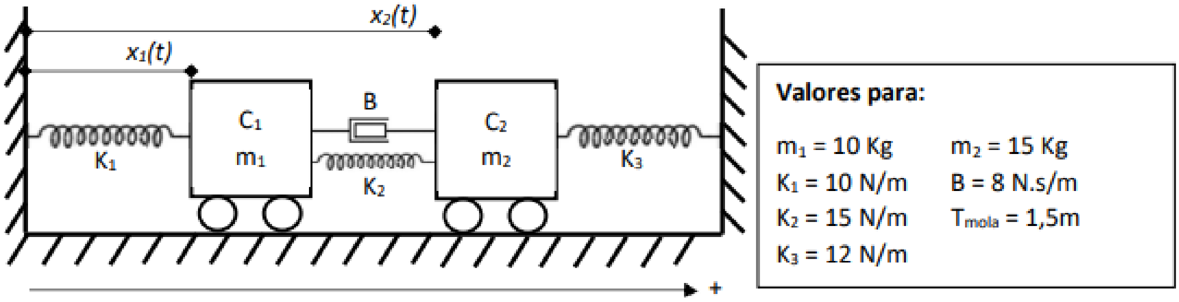
Trabalho de ASL



Modelagem de um sistema de dois graus de liberdade

Discentes:

Pedro Siade Ferreira

João Pedro dos Santos Nunes

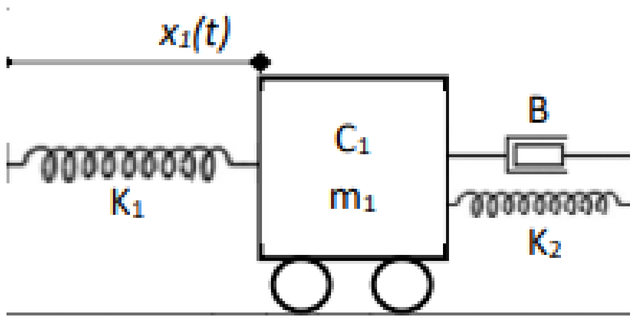
Docente:

Sandrerley Ramos Pires

Modelagem

Estratégia utilizada:

Representar cada bloco separadamente, com as forças que atuam sobre o mesmo, definindo assim uma equação para cada um.



Equação para C1:

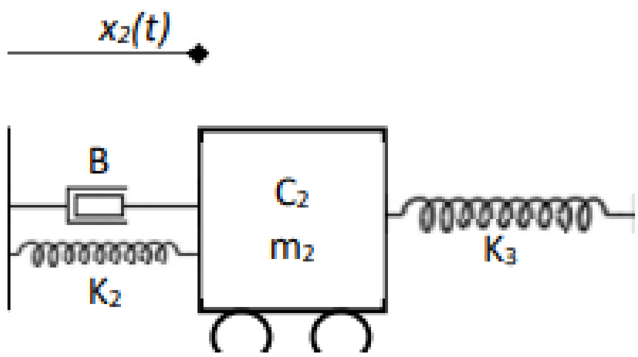
$$Fr = -Fk1 - Fk2 - FB2$$

$$m1 * x1(t)'' = -B\big(x1(t) - x2(t)\big) - k1x1(t) - k2\big(x1(t) - x2(t)\big)$$

$$m1 * x1(t)'' + B\big(x1(t) - x2(t)\big)' + k1x1(t) + k2\big(x1(t) - x2(t)\big) = 0$$

$$m1 * x1(t)'' + B\big(x1(t) - x2(t)\big)' + k1x1(t) + k2\big(x1(t) - x2(t)\big) = 0$$

$$10 * x1(t)'' + 8x1(t)' - 8x2(t)' + 10x1(t) + 15x1(t) - 15x2(t)) = 0 \quad (1)$$



Equação para C2:

$$m2 * x2(t)'' = -B\big(x2(t) - x1(t)\big)' - k3x2(t) - k2\big(x2(t) - x1(t)\big)$$

$$m2 * x2(t)'' + B\big(x2(t) - x1(t)\big)' + k3x2(t) + k2\big(x2(t) - x1(t)\big) = 0$$

$$m2 * x2(t)'' + Bx2(t)' - Bx1(t)' + k3x2(t) + k2x2(t) - k2x1(t)) = 0$$

$$15 * x2(t)'' + 8x2(t)' - 8x1(t)' + 12x2(t) + 15x2(t) - 15x1(t)) = 0 \quad (2)$$

Dessa forma, há um sistema com duas equações:

$$10 * x1(t)'' + 8x1(t)' - 8x2(t)' + 10x1(t) + 15x1(t) - 15x2(t)) = 0 \quad (1)$$

$$15 * x1(t)'' + 8x2(t)' - 8x1(t)' + 12x2(t) + 15x2(t) - 15x1(t)) = 0 \quad (2)$$

Resolução do sistema:

Além disso, considerou-se as seguintes condições iniciais:

x1(0) = c, x2(0) = d, x1(0)' e x2(0)'=0

Para resolver o sistema foi utilizado Laplace, além disso foi utilizado o software Wolfram a fim de facilitar os cálculos.

Laplace de (1):

$$10 * (s2x1(t) - sx1(0) - x(0)') + 8(sx1(s) - x1(0)) - 8(sx2(s) - x2(0)) + 25x1(s) - 15x2(s)) = 0 \; 10 * (s2x1(s) - cs) + 8(sx1(s) - c) - 8(sx2(s) - d) + 25x1(s) - 15x2(s)) = 0$$

$$x1(s)(10 * s2 + 8s + 25) = x2(s)(8s + 15) + 10 * c * s + 8 * c - 8 * d$$

$$x1 = (x2(s)(8s + 15) + 10 * c * s + 8c - 8 * d)(10 * s2 + 8s + 25) \quad (1)$$

Laplace de (2):

$$15 * (s2x2(s) - sx2(0) - x2(0)') + 8 * \left(sx2(s) - x2(0)\right) - 8\left(sx1(s) - x1(0)\right) + 27x2(t) - 15x1(s) = 0$$

$$15 * (s2x2(s) - ds) + 8 * (sx2(s) - d) - 8(sx1(s) - c) + 27x2(t) - 15x1(s) = 0$$

$$x2(s) * (15s2 + 8s + 27) = 15 * d * s + 8 * d - 8 * c + x1(s)(8s + 15)$$

$$x2(s) = \left(15 * d * s + 8 * d - 8 * c + x1(s)(8s + 15)\right)(15s2 + 8s + 27) \quad (2)$$

Substituindo x2(s) em x1(s) obtemos uma função dependente apenas de x1(s):

x1(s)=((15*d*s+8*d-8*c+x1(s)(8s+15))(15s2+8s+27))*(8s+15)+10*c*s+8c-8*d)(10*s2+8s+25))

Isolando x1(s)

x1(s)= (150 c s^3 + 200 c s^2 + 270 c s + 96 c + 225 d s - 96 d)/(150 s^4 + 200 s^3 + 645 s^2 + 176 s + 450)

Substituindo x1(s) em x2(s), a fim de determinar x2(s):

x2(s)=(((150 c s^3 + 200 c s^2 + 270 c s + 96 c + 225 d s - 96 d)/(150 s^4 + 200 s^3 + 645 s^2 + 176 s + 450))*(8s+15)+15*d*s+8*d-8*c)/(15s2+8s+27) x2(s)=(5*(30 d s^3 + 40 d s^2 + 75 d s + 16 d + 30 c s - 16 c))/(150 s^4 + 200 s^3 + 645 s^2 + 176 s + 450)

Utilizando a seguinte calculadora, foi obtido a inversa de x1(s) e x2(s):

x1(t):

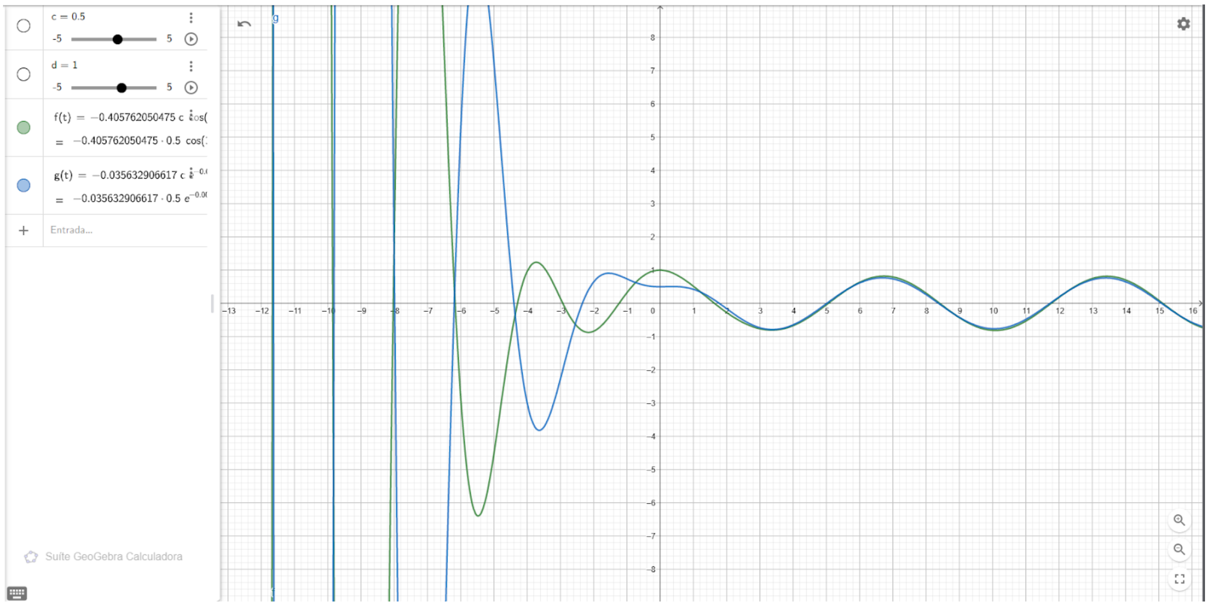
-0.035632906617*c*e^(-0.000797351457*t)*sin(0.936459671869*t)+0.259029417775*c*e^(-0.665869315209*t)*sin(1.725554106593*t)+0.379765860396*c*cos(0.936459671869*t)*e^(-0.000797351457*t)+0.620234139604*c*cos(1.725554106593*t)*e^(-0.665869315209*t)-0.582099687076*d*cos(1.725554106593*t)*e^(-0.665869315209*t)-0.232972905387*d*e^(-0.665869315209*t)*sin(1.725554106593*t)+0.016373699932*d*e^(-0.000797351457t)*sin(0.936459671869*t)+0.582099687076*d*cos(0.936459671869*t)*e^(-0.000797351457t)

x2(t):

-0.405762050475*c*cos(1.725554106593*t)*e^(-0.665869315209*t)-0.142530574607*c*e^(-0.665869315209*t)*sin(1.725554106593*t)-0.025194048546*c*e^(-0.000797351457*t)*sin(0.936459671869*t)+0.405762050475*c*cos(0.936459671869*t)e^(-0.000797351457*t)+0.037005880652*d*e^(-0.000797351457*t)*sin(0.936459671869*t)+0.127296276424*d*e^(-0.665869315209*t)*sin(1.725554106593*t)+0.380439685332*d*cos(1.725554106593*t)e^(-0.665869315209*t)+0.619560314668*d*cos(0.936459671869*t)*e^(-0.000797351457*t)

[Calculadora de Transformada inversa de Laplace online (calculadoras online.com)]

Análise gráfica do resultado:



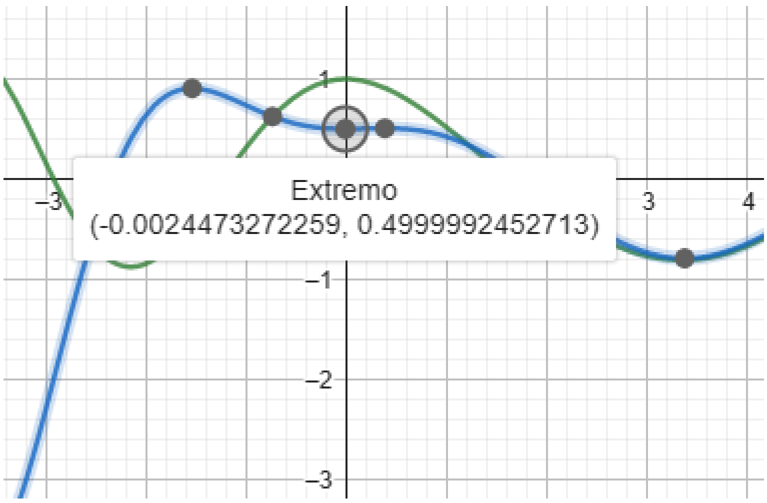
Com o comportamento gráfico de x1 e x2 é possível conferir o movimento oscilatório esperado pelo trabalho. Além disso, tanto quanto x1 e x2 cumprem as condições iniciais, haja vista que determinando c=0.5 e d=1.0, é possível conferir que x1(0) =0.5 e x2(0)=1, logo a função obtida cumpre as condições iniciais, o PVI.

Outrossim, é importante ressaltar a presença da função degrau unitário, a qual faz parte da transformada inversa de ambas funções, com isso se t<0, então x1 e x2 =0. Dessa forma, é plausível considerar x1 e x2 no gráfico apenas para valores em que t>=0.

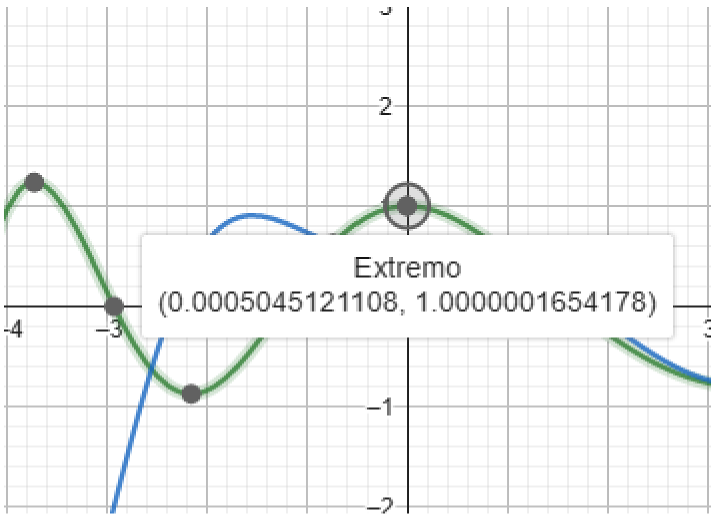
x1:azul

x2:verde

x1(0)=0.5



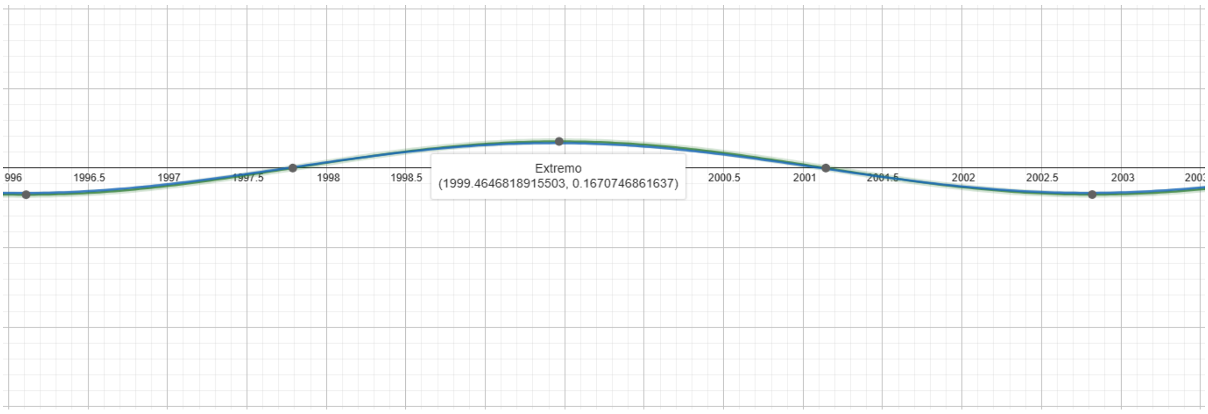
x2(0)=1



Outra questão imprescindível notada pelo gráfico é a função do amortecedor, o mesmo é responsável pelo fato do sistema não ser um MHS, sendo responsável por exercer papel resistivo, tendo como consequência o seguinte resultado:

$$Se\ t \rightarrow \infty,\ v1 = v2 = x1 = x2 = 0$$

x1 e x2



Quando ‘t’ se aproxima de valores grandes como 2000 é possível conferir que o sistema está tendendo a zero e que a amplitude da senoide está próxima de zero. Haja vista que, quando t=0, ambas senoides possuíam amplitude maior que a conferida pelo gráfico acima, entre (0.5 e 1), sendo assim é possível concluir que o valor máximo de x1 e x2 estão decrescendo e caminhando para zero. Dessa forma, é possível afirmar que o resultado está de acordo com a teoria e ainda verificar graficamente a função do amortecedor.

Conclusão:

Com essa análise do resultado pode-se concluir que o resultado esperado foi obtido, sendo as funções obtidas senoides amortecidas como o esperado.

Foi conferido x1(0) e x2(0) a fim de validar a inversa encontrada pelo software citado.

Na simulação dos blocos é possível perceber a desaceleração do bloco para valores grandes de ‘t’, além da baixa amplitude de movimentação de ambos blocos.

Ressalta-se a complexidade da análise de sistemas de dois graus de liberdade. Os preceitos utilizados na análise de sistema de um grau de liberdade ainda são utilizados, mas é notório a maior complexidade em questão de cálculo, por conta disso torna-se fundamental ajuda computacional a fim de se obter as funções as quais descrevem o movimento.