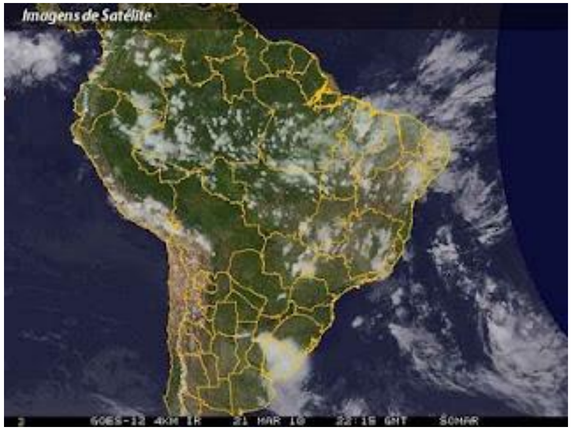
V- PROBABILIDADE

Professora Nanci de Oliveira



O termo probabilidade

É usado na conversação diária para sugerir um certo grau de incerteza sobre acontecimentos do passado, do futuro ou do presente.

Exemplos:

– A “probabilidade” de um certo time ganhar é pequena.
– A “probabilidade” de um aluno obter bom resultado numa prova é grande.

Utilização da probabilidade

A probabilidade desempenha papel importante em muitas situações que envolvam uma **tomada de decisão**.

Exemplo:

- Suponhamos que um empresário deseja abrir uma nova lanchonete em um determinado ponto comercial. A decisão dele de abrir ou não a lanchonete no referido local pode ser obtida a partir de informações sobre a “probabilidade” de sucesso ou não para seu negócio.

- É útil em diversas áreas do conhecimento humano:
  - Administração
  - Economia
  - Engenharia
  - Logística
  - Psicologia
  - Biologia
  - Genética
  - etc

DESENVOLVIMENTO DA PROBABILIDADE

- **Século XVII:**
  - Primeiros estudos de probabilidade
    - **Jogos de azar**
  - Matemáticos responsáveis:

FERMAT

PASCAL

- **Curiosidade histórica:**
- Os matemáticos franceses ***Pascal e Fermat*** *trocaram correspondências com o intuito de discutir problemas sobre jogos de azar.*
- *As suas cartas são considerados os documentos fundadores da Teoria das Probabilidades.*

DESENVOLVIMENTO DA PROBABILIDADE

- **Jerónimo Cardano (1501-1576)**, italiano, escreveu um trabalho notável sobre probabilidades: "*Livros sobre jogos de azar*", mas só apareceu impresso em **1663**.

CARDANO

- **Laplace (1749-1827)**, francês, enunciou pela primeira vez a definição clássica de probabilidade.

LAPLACE

DESENVOLVIMENTO DA PROBABILIDADE

- **Gauss (1777-1855):** alemão - as aplicações do cálculo de probabilidade se voltaram decisivamente para a ciência.

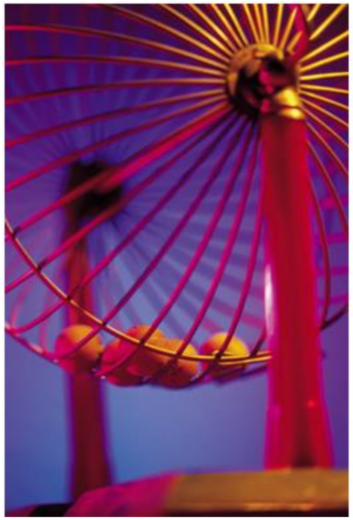
GAUSS

- **Século XX:**
  - Desenvolvimento de uma teoria matemática rigorosa, baseada em axiomas, definições e teoremas.
  - **Kolmogorov** – soviético (Moscou), participou das principais descobertas científicas do século XX nas áreas de probabilidade e estatística , propôs uma axiomática completa e consistente do cálculo de probabilidades.

KOLMOGOROV

EXPERIMENTO ALEATÓRIO

- É aquele fenômeno que, mesmo repetidos várias vezes, sob condições semelhantes, apresentam resultados imprevisíveis.
- **Exemplos:**






ESPAÇO AMOSTRAL (S)

- ***Espaço amostral*** ou ***conjunto universo*** é o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

- O espaço amostral é representado pela letra **S** maiúscula do nosso alfabeto.

EVENTO

- ***Evento*** é qualquer subconjunto do *espaço amostral S* de um experimento aleatório.

- Os eventos são representados por letras maiúsculas do nosso alfabeto, com exceção da letra S, que representa o Espaço Amostral. **Exemplos:** evento E, evento A, evento P, etc.

PROBABILIDADE

O **sucesso da ocorrência de um experimento qualquer A** é dado por:

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{número de casos favoráveis do evento } A}{\text{número de casos possíveis do espaço amostral } S}}$$

Observação:

A probabilidade é sempre expressa por um número puro, ou seja, sem unidade de medida.

EXEMPLO 1

Considerando o lançamento de um dado não viciado, qual a probabilidade de ocorrer um número ímpar?

Experimento aleatório: lançamento de um dado

Espaço amostral: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Evento: A = {ocorrer um número ímpar} = {1,3,5}

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \;\; ou \;\; 50\%}$$

EXEMPLO 2

Considerando uma partida de futebol entre dois times A e B, qual a probabilidade do time A vencer a partida?

Experimento aleatório: partida de futebol

Espaço amostral: S = {A vence, A perde, A empata}

Evento: E = {A vence}

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{3} = 0{,}3333 \text{ ou } 33{,}33\%$$

EXEMPLO 3

Extrai-se uma só carta de um baralho com 52 cartas. Determine a probabilidade de obter:

a) Um valete.

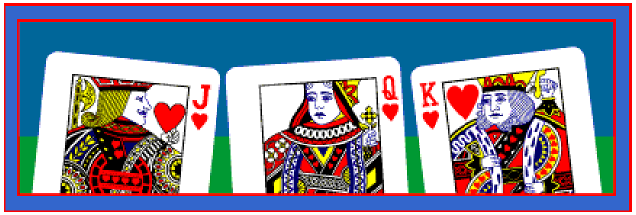
b) Um dez de paus.

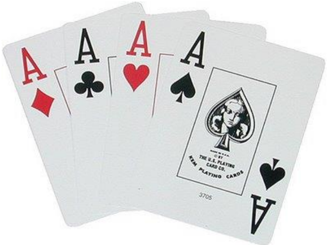
c) Uma carta de espadas.

Antes da solução desse exemplo, vamos lembrar quais são as cartas de um baralho completo...

BARALHO COMPLETO - 52 CARTAS

- **4 NAIPES:** Copas, Espadas, Ouros, Paus
- **13 CARTAS DE CADA NAIPE:**
  - ✓ um ÁS (representado pela letra A);
  - ✓ todos os NÚMEROS de 2 a 10;
  - ✓ três figuras:
    - o VALETE - letra J (Jack);
    - a DAMA (RAINHA) - letra Q (Queen)
    - o REI - letra K (King).





- Ao ÁS geralmente é dado o valor 1.
- Às figuras são dados, respectivamente, os valores 11, 12 e 13.
- Alguns jogos também incorporam um par de cartas com valor especial, e que nunca aparecem com naipe: os **CORINGAS.**
- No cálculo de probabilidades, não utilizaremos os coringas.

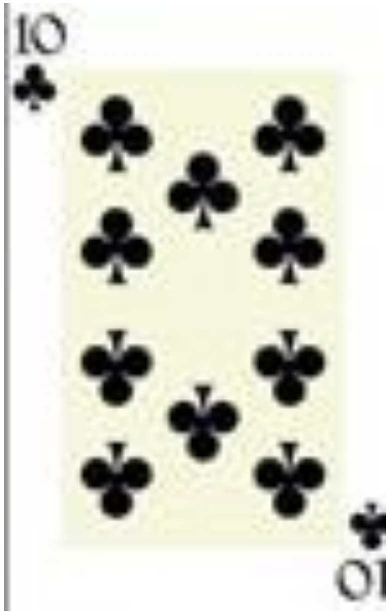
SOLUÇÃO DO EXEMPLO 3

a) Probabilidade de obter um valete.

$$P(J) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} = 0{,}0769 \;\; ou \;\; 7{,}69\,\%$$

SOLUÇÃO DO EXEMPLO 3

b) Probabilidade de obter um dez de paus.



$$P(E) = \frac{1}{52} = 0{,}0192 \; ou \; 1{,}92\,\%$$

SOLUÇÃO DO EXEMPLO 3

c) Probabilidade de se obter uma carta de espadas.

$$P(E)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}=0{,}25\,ou\ \ 25\%$$

AXIOMAS DA PROBABILIDADE

(REGRAS QUE DEFINEM PROBABILIDADE)

n(S) = n, ou seja, o número de elementos do espaço amostral S é n.

1) A PROBABILIDADE DE OCORRER O "EVENTO CERTO" É IGUAL A 1

P(S) = 1

EXEMPLO

No lançamento de um dado honesto, qual a probabilidade de ocorrer um número menor que 7?

Espaço amostral: S= {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Evento: *A* = {ocorrer um número menor que 7} = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A é evento certo.

Veja que A = S.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{6}=1 \text{ ou } 100\%$$

2) A PROBABILIDADE DE OCORRER O "EVENTO IMPOSSÍVEL" É IGUAL A ZERO

P(∅)= 0

EXEMPLO

Ao lançarmos um dado honesto, qual a probabilidade de dar resultado igual a 8?

Espaço amostral: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Evento: A = {o resultado é igual a 8} = { }

A é evento impossível!
Logo, P(A)= P(∅) = 0

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0$$

3) A PROBABILIDADE DE OCORRER O "EVENTO B QUALQUER" ($B \subset S$) É
$0 \leq P(B) \leq 1$

Ao lançarmos um dado honesto, qual a probabilidade de dar resultado maior que 4?

Espaço amostral: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Evento: A = {o resultado é maior que 4} = {5, 6}

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}33$$

$$Logo: \ 0 \leq 0{,}33 \leq 1$$

EVENTOS COMPLEMENTARES

Sejam

p = ***P(E)*** = probabilidade de que ocorra um evento em particular = **SUCESSO**

q = $\boldsymbol{P(\overline{E})}$ = probabilidade que não ocorra o evento em particular = **FRACASSO**

Para ***p*** e ***q***, existe sempre a relação: $\boxed{\boldsymbol{p + q = 1}}$

Dizemos que ***p*** e ***q*** são eventos complementares.

Como consequência:

$\boxed{\boldsymbol{p = 1 - q}}$ e $\boxed{\boldsymbol{q = 1 - p}}$ para um mesmo evento.

EXEMPLO 1 – EVENTOS COMPLEMENTARES

No tratamento de uma doença, a probabilidade de cura é 0,98. Então:

p = P(A) = probabilidade de cura da doença (**SUCESSO**)
q = P($\bar{A}$) = probabilidade de não cura da doença (**FRACASSO**)

Sucesso: ***p = 0,98*** *(98%)*

Fracasso: ***q = 1 – p = 1-0,98 = 0,02*** *(2%)*

Como os eventos são complementares:

p + q = 0,98 + 0,02 = 1 *(100%)*

EXEMPLO 2 – EVENTOS COMPLEMENTARES

A probabilidade de um aluno resolver um problema é de 3/7. Qual a probabilidade de que o problema não seja resolvido?

$$p = \frac{3}{7} \text{ (SUCESSO)}$$

$$q = 1 - p$$

$$q = 1 - \frac{3}{7} \Rightarrow q = \frac{7}{7} - \frac{3}{7} \Rightarrow q = \frac{4}{7} = 0,5714$$

ou $q = 57{,}14\%$

TEOREMA DA SOMA

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dizemos que dois ou mais **eventos são mutuamente exclusivos quando a realização de um exclui a realização do outro** ou dos outros. Neste caso, **$A \cap B = \{\ \}$ e $P(A \cap B) = 0$, então:**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

EXEMPLO 1 – TEOREMA DA SOMA

Ao lançarmos um dado honesto, qual é a probabilidade de sair a face 3 ou 5?

O espaço amostral S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
Sejam os eventos A={3} e B= {5}.

A e B são mutuamente exclusivos, pois $A \cap B = \{\ \}$
A probabilidade de se tirar 3 ou 5, ou seja, ***P(A ou B)*** é:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Temos: $P(A) = \frac{1}{6}$ *e* $P(B) = \frac{1}{6}$

Então: $P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}3333$ *ou* $33{,}33\%$

EXEMPLO 2 – TEOREMA DA SOMA

De uma urna que contém 3 bolas brancas, 5 pretas e 10 azuis, é retirada uma bola aleatoriamente. Qual é a probabilidade da bola ser azul ou preta?

$P(A \cup P) = P(A) + P(P) =$

$$= \frac{10}{18} + \frac{5}{18} = \frac{15}{18} = 0,8333 \; ou \; 83,33\%$$

EXEMPLO 3 – TEOREMA DA SOMA

Dois dados honestos são lançados conjuntamente.

Qual a probabilidade da soma dos resultados das faces ser 10 ou maior que 10?

A = {a soma é 10}
B = {a soma é 11}
C = {a soma é 12}

P(SOMA ≥ 10) = P(AUBUC) = P(A) + P(B) + P(C) = ?

n(S) = 36 é o número de elementos do Espaço Amostral (Nº de somas possíveis)

P(SOMA ≥ 10) = P(AUBUC) = P(A) + P(B) + P(C) $= \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = 0{,}1667 \; ou \; 16{,}67\%$

SOMA	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

36 somas

EXEMPLO 4 – TEOREMA DA SOMA

Durante uma dada semana as probabilidades de que uma ação na bolsa de valores aumente sua cotação (A), ou permaneça constante (C), ou diminua (D), foram estimadas respectivamente: 0,30; 0,20 e 0,50. Determine a probabilidade de:

a) a cotação desta ação aumentar ou permanecer constante.
b) a cotação desta ação se alterar durante a semana.

EXEMPLO 4 – SOLUÇÃO

P(A)= 0,30
P(C) = 0,20
P(D) = 0,50

a) a cotação desta ação aumentar ou permanecer constante.

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = 0{,}30 + 0{,}20 = 0{,}50$ ou 50%

b) a cotação desta ação se alterar durante a semana.

$P(A \cup D) = P(A) + P(D) = 0{,}30 + 0{,}50 = 0{,}80$ ou 80%

TEOREMA DO PRODUTO

<u>TEOREMA DO PRODUTO PARA EVENTOS INDEPENDENTES</u>

Dizemos que dois eventos são independentes quando a realização ou não realização de um dos eventos não afeta a probabilidade da realização do outro e vice-versa.

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{ou} \quad \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

EXEMPLO 1 – TEOREMA DO PRODUTO

Jogam-se duas moedas honestas, uma em seguida da outra. Qual a probabilidade de ambas darem CARA?

No lançamento de uma moeda: S={Ca, Co}

Os eventos são: A = {cara na 1ª moeda} = {Ca}

B = {cara na 2ª moeda} = {Ca}

A e B são independentes.

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad e \quad P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \;\; ou \;\; 25\%$$

EXEMPLO 2 – TEOREMA DO PRODUTO

Em um campeonato de futebol o time A tem 40% de probabilidade de ganhar a partida, o time B tem 30%. O campeonato consta de 03 partidas. Qual a probabilidade de:

a) O time A ganhar as 03 partidas?

b) O time B ganhar as 03 partidas?

EXEMPLO 2 – SOLUÇÃO

a) O time A ganhar as 03 partidas?

$P(A \cap A \cap A) = P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) =$

$= 0{,}40 \cdot 0{,}40 \cdot 0{,}40 = 0{,}064$ ou 6,4%

b) O time B ganhar as 03 partidas?

$P(B \cap B \cap B) = P(B) \cdot P(B) \cdot P(B) =$

$= 0{,}30 \cdot 0{,}30 \cdot 0{,}30 = 0{,}027$ ou 2,7%

EXEMPLO 3 – TEOREMA DO PRODUTO

Num torneio de tiro ao alvo, a probabilidade de João acertar o alvo é de ½ e a de Pedro é de 3/5. Qual a probabilidade do alvo ser atingido se ambos atirarem?

$$P(J) = \frac{1}{2}$$

$$P(P) = \frac{3}{5}$$

EXEMPLO 3 – SOLUÇÃO

O alvo será atingido se João ou Pedro atingirem o alvo, mas existe a possibilidade de ambos atingirem o alvo, ou seja, João e Pedro acertarem o alvo. Logo, os eventos não são mutuamente exclusivos (por isso o Teorema da Soma deve estar completo).

$$P(J \cup P) = P(J) + P(P) - P(J \cap P) =$$

$$= P(J)+P(P) - P(J) \cdot P(P) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10} + \frac{6}{10} - \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = 0{,}8 \text{ ou } 80\%$$

EXEMPLO 4 – TEOREMA DO PRODUTO

A probabilidade de um ônibus de uma linha partir no horário é de 0,80, e a probabilidade desse ônibus partir e chegar no horário é 0,72. Qual é a probabilidade de que o ônibus chegue no horário?

$P(P) = 0{,}80$

$P(P \cap C) = 0{,}72$

$P(C) = ?$

$$P(P \cap C) = P(P) \cdot P(C)$$

$\Rightarrow \quad 0{,}72 = 0{,}80 \cdot P(C) \quad \Rightarrow \quad \frac{0{,}72}{0{,}80} = P(C) \quad \Rightarrow$ **P(C) = 0,9 ou 90%**

EXEMPLO 5 – TEOREMA DO PRODUTO

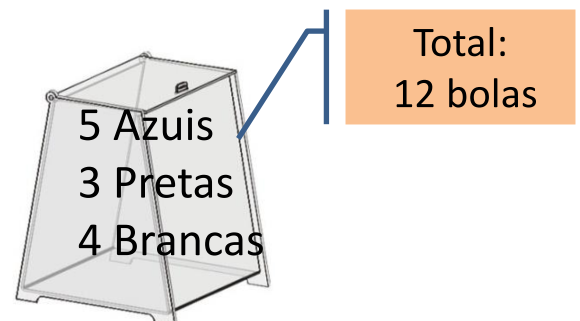
Dispõe-se de duas urnas, sendo que na primeira temos cinco bolas azuis, três pretas e quatro brancas. Na segunda temos seis azuis, quatro pretas e dez brancas, todas de mesmo raio. Se uma bola é retirada de cada urna, qual a probabilidade de ambas serem da cor azul?

$$P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A) = \frac{5}{12} \cdot \frac{6}{20} = \frac{30}{240} = \frac{1}{8} = \mathbf{0{,}125}\ ou\ \mathbf{12{,}5\%}$$

EXEMPLO 6 – TEOREMA DO PRODUTO

De uma urna com cinco bolas azuis, três pretas e quatro brancas, são retiradas 2 bolas, sem reposição, qual a probabilidade de ambas serem da cor azul?

P(A ∩ A) = P(A) · P(A) = $\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{20}{132} = \mathbf{0{,}1515}\ \boldsymbol{ou}\ \mathbf{15{,}15\%}$



EXEMPLO 7 – TEOREMA DO PRODUTO

Mike tem dois carros velhos. Nas manhãs frias há 20% de probabilidade de um deles não pegar e 30 % do outro não pegar também. Qual é a probabilidade de apenas um pegar?

Sejam os eventos:

$P(\bar{A})$ =P(A não pegar) = 20% = 0,20 ⇒ P(A) = P(A pegar) = 0,80

P($\bar{B}$) = P(B não pegar) = 30% = 0,30 ⇒ P(B) = P(B pegar) = 0,70

P(apenas um pegar) =

= P[(A pegar e B não pegar) **ou** (A não pegar e B pegar)] =

= $P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) =$

= $P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) =$

= *0,80 · 0,30 + 0,20 · 0,70 = 0,24 + 0,14 =* ***0,38 ou 38%***

PROBABILIDADE CONDICIONAL

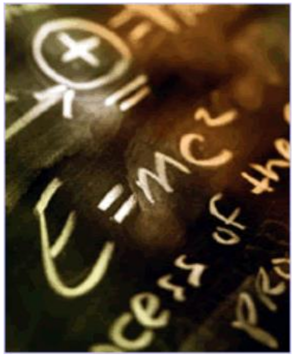
<u>PROBABILIDADE CONDICIONAL</u> (Seja α = S)

Sejam $A \subset \alpha$ *e* $B \subset \alpha$. Definimos **probabilidade condicional de A dado que B ocorre (A/B)** como segue:

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad se \quad P(B) \neq 0}$$

EXEMPLO 1 – PROBABILIDADE CONDICIONAL

Consideremos 250 alunos que cursam o primeiro ciclo de uma faculdade. Destes alunos, 100 são homens (H) e 150 são mulheres (M), 110 cursam física (F) e 140 cursam química (Q). A distribuição dos alunos é a seguinte:



	F	Q	Total
H	40	60	100
M	70	80	150
Total	110	140	250

Um aluno é sorteado ao acaso. Qual a probabilidade de que esteja cursando química, dado que é mulher?

EXEMPLO 1 – SOLUÇÃO

	F	Q	Total
H	40	60	100
M	70	80	150
Total	110	140	250

Qual a probabilidade de que esteja cursando química, dado que é mulher?

Utilizando a definição de probabilidade condicional:

$$P(Q/M) = \frac{P(M \cap Q)}{P(M)} = \frac{\frac{80}{250}}{\frac{150}{250}} = \frac{80}{250} \div \frac{150}{250} = \frac{80}{250} \cdot \frac{250}{150} = \frac{80}{150} = 0,5333$$

$P(Q/M) = 0,5333$ ou $53,33\%$

é a probabilidade de que o aluno curse química, condicionado ao fato de ser mulher.

EXEMPLO 2 – PROBABILIDADE CONDICIONAL

Em uma pesquisa realizada com 10.000 consumidores sobre a preferência da marca de sabão em pó, verificou-se que: 6.500 utilizam a marca A; 5.500 utilizam a marca B; 2000 utilizam as duas marcas.

Foi sorteada uma pessoa desse grupo e verificou-se que ela utiliza a marca A. Qual a probabilidade dessa pessoa ser também usuária da marca B?

n(S) = total de consumidores = 10.000

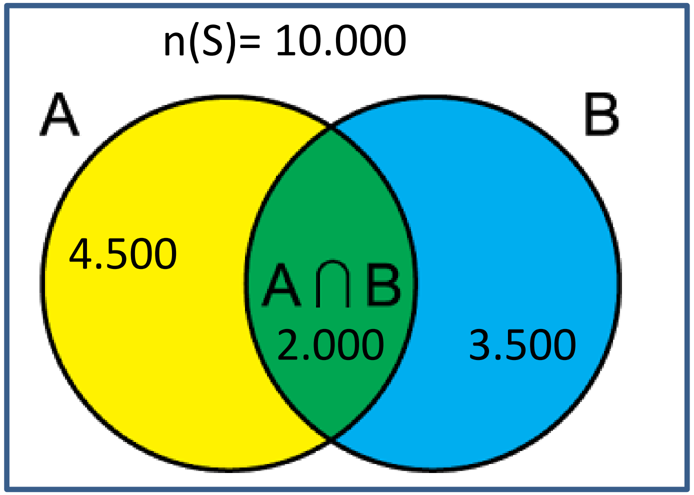
n(A) = 6.500

n(B) = 5.500

A ∩ B = usuário da marca X e Y = 2000

Somente A = 6500 – 2000 = 4500

Somente B = 5500 – 2000 = 3500



EXEMPLO 2 – SOLUÇÃO

$$P(B/A)=\frac{\mathrm{P(B\cap A)}}{\mathrm{P(A)}}=?$$

$$P(B\cap A)=\frac{n(B\cap A)}{n(S)}=\frac{2000}{10000}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

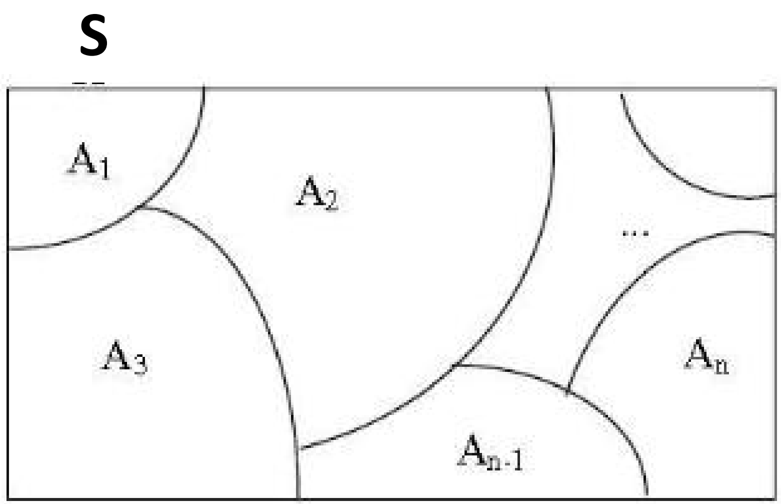
$$\mathrm{P(A)}=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4500}{10000}=\frac{45}{100}=\frac{9}{20}$$

$$Logo,\ P(B/A)=\frac{\mathrm{P(B\cap A)}}{\mathrm{P(A)}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{20}}=\frac{1}{5}\div\frac{9}{20}=\frac{1}{5}\cdot\frac{20}{9}=\frac{4}{9}=0{,}4444 \text{ ou } 44{,}44\%$$

PARTIÇÃO DO ESPAÇO AMOSTRAL

Dizemos que os eventos A_1 , A_2 , … , A_n formam uma partição do espaço amostral S se:

- ✓ Não há eventos vazios: $A_i \neq \emptyset$, $\mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{n}$
- ✓ Não há intersecção entre os eventos: $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$
- ✓ A união dos eventos é o espaço amostral: $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \mathrm{S}$



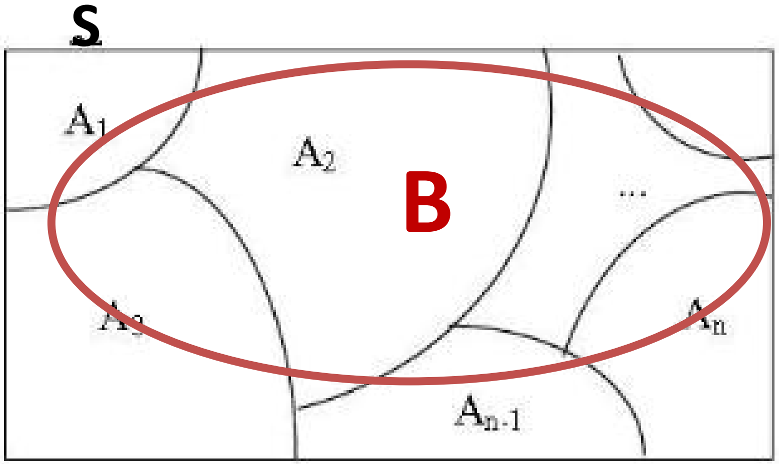
TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL

Sejam A_1 , A_2 , … , A_n eventos que formam uma partição do espaço amostral S.

Seja B um evento desse espaço amostral.

Então:

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$



ou

$$\boxed{P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + ... + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

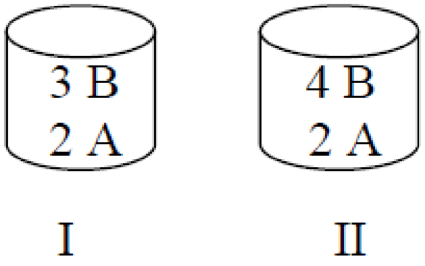
EXEMPLO – TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL

Uma urna contém 3 bolas brancas e 2 amarelas.

Uma segunda urna contém 4 bolas brancas e 2 amarelas. Escolhe-se, ao acaso, uma urna e dela retira-se, também ao acaso uma bola.

Qual a probabilidade de que a bola seja branca?

Solução:



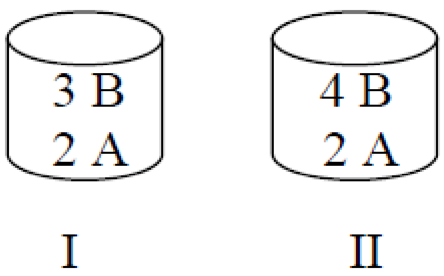
P(B) = ?

As urnas I e II são eventos que formam uma partição do espaço amostral S e B o evento "sair bola branca".

Pelo Teorema da Probabilidade Total:

$$\boxed{P(B) = P(I) \cdot P(B/I) + P(II) \cdot P(B/II)}$$

Calculamos as probabilidades separadamente:



$$P(I) = \frac{1}{2} \quad e \quad P(II) = \frac{1}{2}$$

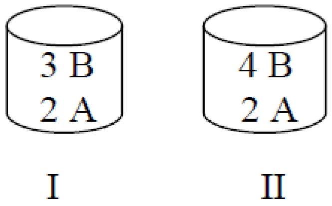
$$P(B/I) = \frac{3}{5} \quad e \quad P(B/II) = \frac{4}{6}$$

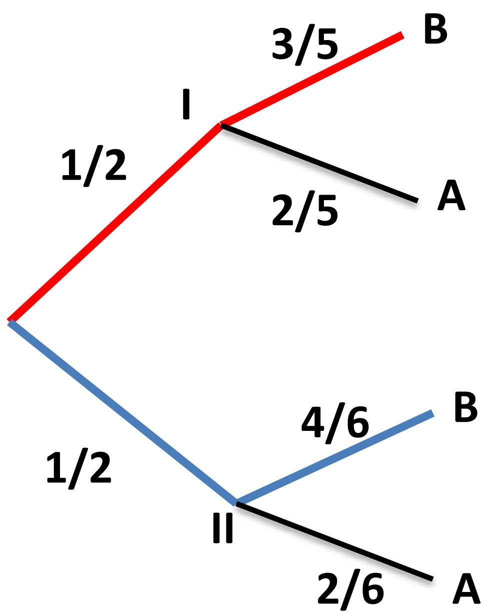
Substituímos no Teorema acima:

$$\boxed{P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{10} + \frac{4}{12} = \frac{18}{60} + \frac{20}{60} = \frac{38}{60} = \frac{19}{30} = 0{,}6333 \text{ ou } 63{,}33\%}$$

DIAGRAMA EM ÁRVORE

Resolvendo pelo diagrama em árvore:





$$P(B) = P(I \cap B) + P(II \cap B)$$

$$\boxed{P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{10} + \frac{4}{12} = \frac{18}{60} + \frac{20}{60} = \frac{38}{60} = \frac{19}{30} = 0{,}6333 \quad \text{ou} \quad 63{,}33\%}$$

TEOREMA DE BAYES

Sejam A_1 , A_2 , … , A_n eventos que formam uma partição do espaço amostral S.
Seja B C S.
Sejam conhecidas $\mathrm{P}(A_i)$ e $\mathrm{P}(\mathrm{B}\ /A_i)$, i = 1, 2, ..., n.
Então:

$$\boldsymbol{P(A_j/B) = \frac{P(A_j)\cdot P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B/A_i)}, j = 1, 2, \dots, n}$$


Thomas Bayes (1701-1761)

O Teorema de Bayes relaciona uma das parcelas da probabilidade total com a mesma.

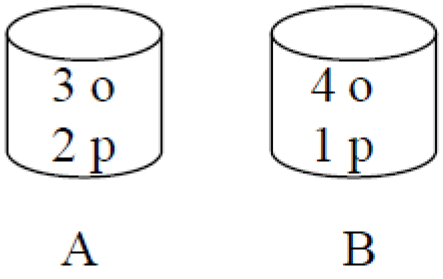
EXEMPLO – TEOREMA DE BAYES

Temos duas urnas A e B.

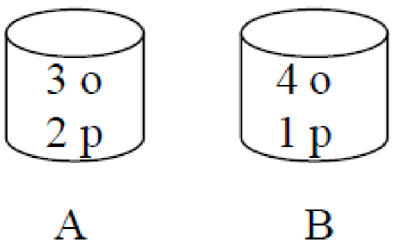
A urna A tem 3 moedas de ouro e 2 de prata.

A urna B tem 4 moedas de ouro e 1 de prata.
Seleciona-se uma urna e dela retira-se uma moeda. A moeda é de ouro.

Qual a probabilidade que a urna A tenha sido a escolhida?



Solução:



Qual a probabilidade que a urna A tenha sido a escolhida (dado que a moeda é de ouro)?

Eventos de S**: *A, B, O***

A e B: eventos que formam uma partição de S

O = "retirar uma moeda de ouro"

P(A/o) = ?

Pelo Teorema de Bayes:

$$\boxed{P(A/o) = \frac{P(A)\cdot P(o/A)}{P(A)\cdot P(o/A) + P(B)\cdot P(o/B)}}$$

Calculando as probabilidades:

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad e \quad P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(o/A) = \frac{3}{5} \quad e \quad P(o/B) = \frac{4}{5}$$

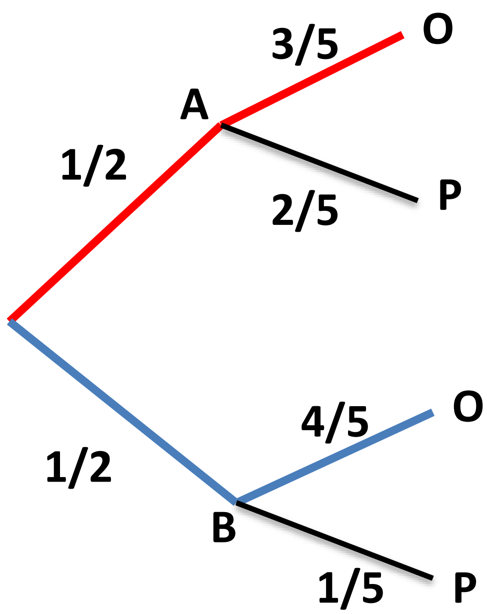
Então:

$$P(A/o) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}} \Rightarrow P(A/o) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{10} + \frac{4}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{3}{10}\cdot\frac{10}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\therefore \boxed{P(A/o) = \frac{3}{7} = 0{,}4286 \;\; ou \;\; 42{,}86\%}$$

DIAGRAMA EM ÁRVORE

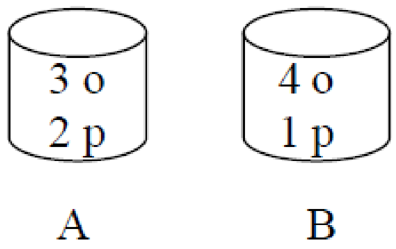
Resolvendo pelo diagrama em árvore:



$$P(A/O) = \frac{P(A \cap O)}{P(A \cap O) + P(B \cap O)}$$

$$P(A/O) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}} \Rightarrow P(A/O) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{10} + \frac{4}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{7} = \frac{3}{7}$$

$$P(A/O) = \frac{3}{7} = 0{,}4286 \text{ ou } 42{,}86\%$$



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COSTA NETO, Pedro Luiz de Oliveira;CYMBALISTA, Melvin. **Probabilidades**. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2005.

CRESPO, Antônio Arnot. **Estatística Fácil**. São Paulo: Atual Editora, 1990.

MARTINS, Gilberto de Andrade; DONAIRE, Denis. **Princípios de Estatística**. 4 ed. São Paulo: Atlas, 2012 (900 exercícios resolvidos e propostos).

MORETTIN, Luiz Gonzaga. **Estatística Básica**: probabilidade. 6 ed. São Paulo: Makron Books, 1994.