



GOVERNO DO ESTADO  
**SÃO PAULO**

# Fatec

**São José dos  
Campos**

Prof. Jessen Vidal

## **VI- DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE: BINOMIAL, GEOMÉTRICA, POISSON E NORMAL**

[nanci.oliveira@fatec.sp.gov.br](mailto:nanci.oliveira@fatec.sp.gov.br)

# VARIÁVEL ALEATÓRIA

## DEFINIÇÃO:

- Sejam  $E$  um experimento e  $S$  o espaço associado ao experimento. Uma função  $X$ , que associe a cada elemento  $s \in S$  um número real  $X(s)$  é denominado **variável aleatória**.



# EXEMPLO – VARIÁVEL ALEATÓRIA

- Experimento  $E$  = lançamento de duas moedas
- Espaço amostral  $S = \{CaCo, CoCa, CaCa, CoCo\}$   
onde  $Ca$  = cara e  $Co$  = coroa
- Variável aleatória  $X = n^\circ$  de caras na duas moedas
- A variável aleatória  $X$  pode ser 0, 1 ou 2, ou seja,  $X = \{0, 1, 2\}$ .
- A probabilidade de a variável aleatória ser 0, 1 ou 2 é:

$P(X = 0) = \frac{1}{4}$  (corresponde ao evento  $CoCo$ )

$P(X = 1) = \frac{2}{4}$  (corresponde ao evento  $CaCo$  e  $CoCa$ )

$P(X = 2) = \frac{1}{4}$  (corresponde ao evento  $CaCa$ )



# EXEMPLO - DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

No exemplo anterior, onde a variável aleatória  $X$  é o número de caras, a **Distribuição de Probabilidade** corresponde à tabela seguinte, com os valores da variável aleatória e os respectivos valores da probabilidade:

$x$	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Somando todas as probabilidades, temos:

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

# DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

- É uma apresentação de todos os valores assumidos por uma variável aleatória com seus respectivos valores de probabilidade.
- Na distribuição de probabilidade, a soma de todas as probabilidades de todos os valores que a variável aleatória pode assumir é igual a 1.

# DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

- ✓ Existem muitas distribuições de probabilidade.
- ✓ Nesse curso, vamos estudar:

## Distribuição Discreta

- Distribuição Binomial
- Distribuição Geométrica

## Distribuição Contínua

- Distribuição de Poisson
- Distribuição Normal

# DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

- ✓ **A Distribuição Binomial** envolve problemas cujo interesse é saber qual é a probabilidade de um evento ocorrer um número  $X$  de vezes quando se repete um evento  $n$  vezes, sendo  $n$  um número finito de ocorrências, denominados  $n$  provas.

## EXEMPLOS:

- ✓ Qual é a probabilidade de um time de futebol ganhar 2 partidas quando disputa 4 partidas?
- ✓ Qual é a probabilidade de 5 em 12 ratos sobreviverem por determinado tempo após a aplicação de um medicamento?

# CONDIÇÕES DO EXPERIMENTO NUMA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

1. O experimento deve ser repetido nas mesmas condições, um **número finito de vezes:  $n$  vezes**.
2. As provas repetidas devem ser independentes, isso é, o resultado de uma não deve afetar o resultado das sucessivas
3. **Em cada prova ou experimento** deve aparecer um dos possíveis resultados:  
 **$p$  = probabilidade do SUCESSO** (ocorrência de um evento particular)  
 **$q$  = probabilidade do FRACASSO** (ocorrência de qualquer evento que não seja o convencionado como sucesso)
4. No decorrer do experimento a probabilidade do sucesso e a probabilidade do fracasso se mantêm constantes.



# PARÂMETROS FUNDAMENTAIS DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Os parâmetros  $n$  e  $p$  permitem escrever a notação abreviada de uma Distribuição Binomial:

$$X: (n; p)$$

onde

$n$  = *número de provas*

$p$  = *probabilidade do sucesso em uma prova*

# FÓRMULA PARA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n - k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

**$P(X = k)$  = probabilidade de que o evento se realize “k vezes” em “n provas”**

**$n$**  = número total de provas

**$k$**  = número de vezes que se quer a ocorrência do evento

**$p$**  = probabilidade do sucesso (em uma só prova)

**$q$**  = probabilidade do fracasso (em uma prova)

# EXEMPLO 1 – DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Uma moeda é lançada cinco vezes seguidas e independentes. Calcular a probabilidade de serem obtidas três caras nessa 5 provas.

*Solução:*

$$n = 5$$

$$k = 3$$

$$p = (\text{cara}) = \frac{1}{2}$$

$$q = (\text{coroa}) = \frac{1}{2}$$

$$P(X=3) = ?$$

Substituindo na fórmula, temos:

$$P(X = k) = \frac{n!}{k! (n - k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$P(X = 3) = \frac{5!}{3! (5 - 3)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}$$



# EXEMPLO 1 – SOLUÇÃO

$$P(X = 3) = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}$$

$$P(X = 3) = \frac{5!}{(3! \cdot 2!)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$P(X = 3) = 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}$$

$$P(X = 3) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16} = 0,3125 \text{ ou } 31,25\%$$

## EXEMPLO 2 – DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Numa criação de coelhos, 40% são machos. Qual a probabilidade de que nasçam pelo menos 2 coelhos machos, se nascerem 20 coelhos num dia?



*Solução:*

$$n = 20$$

$$p = 40\% = 0,40 \text{ (SUCESSO = nascer coelho macho)}$$

$$q = 1 - p = 1 - 0,40 = 0,60 \text{ (FRACASSO = não nascer coelho macho)}$$

$$P(X \geq 2) = ?$$

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + \dots + P(X = 20)$$

## EXEMPLO 2 – SOLUÇÃO

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + \dots + P(X = 20)$$

*Para facilitar os cálculos, utilizamos o complementar :*

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

*Aplicando a fórmula da Binomial em  $P(X = 0)$  e em  $P(X = 1)$ , temos :*

$$P(X \geq 2) = 1 - \left\{ \left[ \frac{20!}{0!(20-0)!} \cdot (0,40)^0 \cdot (0,60)^{20} \right] + \left[ \frac{20!}{1!(20-1)!} \cdot (0,40)^1 \cdot (0,60)^{19} \right] \right\}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - \left\{ \left[ \frac{20!}{1 \cdot 20!} \cdot 1 \cdot 0,00003 \right] + \left[ \frac{20 \cdot 19!}{1 \cdot 19!} \cdot 0,40 \cdot 0,00006 \right] \right\}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - \{[0,00004] + [0,00048]\} \longrightarrow P(X \geq 2) = 1 - \{0,00052\}$$

*Logo,*

$$P(X \geq 2) = 0,99948$$

## DISTRIBUIÇÃO GEOMÉTRICA

- ✓ A **Distribuição Geométrica** é utilizada para o estudo de ocorrências de eventos onde ocorre um número finito de tentativas fracassadas antes de se obter o sucesso.
- ✓ Consideremos tentativas sucessivas e independentes de um mesmo experimento aleatório.
- ✓ **Cada tentativa admite:**  
 $p$  = probabilidade do SUCESSO  
 $q$  = probabilidade do FRACASSO
- ✓ Sabe-se que  **$p+q = 1$**

# FÓRMULA DA DISTRIBUIÇÃO GEOMÉTRICA

$$P(X = x) = q^{x-1} \cdot p$$

onde:

***x*** = ***número de tentativas necessárias ao aparecimento do 1º sucesso***

***p*** = **probabilidade do sucesso**

***q*** = **probabilidade do fracasso**



# EXEMPLO 1 – DISTRIBUIÇÃO GEOMÉTRICA

(MORETTIN, p. 87)

A probabilidade de se encontrar aberto o sinal de trânsito numa esquina é 0,20. Qual a probabilidade de que seja necessário passar pelo local 5 vezes para encontrar o sinal aberto pela primeira vez?

$$p = 0,20$$

$$q = 0,80$$

$$P(X = 5) = (0,80)^4 \cdot (0,20) = 0,08192$$

$$\therefore \boxed{P(X = 5) = 0,08192}$$



## EXEMPLO 2 – DISTRIBUIÇÃO GEOMÉTRICA

Qual a probabilidade que um dado deva ser lançado 15 vezes, para que na 15ª vez ocorra a face 6 pela primeira vez?

$$p = \frac{1}{6} \quad = \text{probabilidade de ocorrer a face 6}$$

$$q = \frac{5}{6} \quad = \text{probabilidade de não ocorrer a face 6}$$

$$P(X = 15) = \left(\frac{5}{6}\right)^{14} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = 0,01298$$

$$\therefore \boxed{P(X = 15) = 0,01298}$$



## DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

✓ A **Distribuição de Poisson** é utilizada para o estudo de ocorrências de eventos num contexto de tempo ou espaço.

### EXEMPLOS:

- 1) Qual a probabilidade de encontrar 3 defeitos, em 10 metros de determinado tecido?
- 2) Qual a probabilidade de 5 pessoas chegarem a um caixa de um supermercado, no intervalo de três minutos?

# FÓRMULA DE POISSON

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^X}{X!}$$

onde:

***X = número de ocorrências***

***e = base dos logaritmos naturais  $\approx 2,718$***

***$\lambda$  = taxa média por unidade de tempo***

***t = número de unidades de tempo ou de medida***

***( $\mu = \lambda t$  = média de ocorrências no intervalo t)***

# EXEMPLO 1 – DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Na pintura de paredes aparecem defeitos em média na proporção de 1 defeito por metro quadrado. Qual a probabilidade de aparecerem 3 defeitos numa parede de 2x2 m?

*$X$  = número de ocorrências = 3 defeitos*

*$e$  = base dos logaritmos naturais*

*$\lambda$  = taxa média por unidade de tempo = 1 defeito/ $m^2$*

*$t$  = número de unidades de tempo ou de outra unidade = 4  $m^2$*

*$\mu = \lambda t$  = média de ocorrências no intervalo  $t = \frac{1 \text{ defeito}}{m^2} \cdot 4 m^2 = 4 \text{ defeitos}$*



$$P(X) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^X}{X!} \Rightarrow P(X = 3) = \frac{e^{-4} \cdot 4^3}{3!} = \frac{0,0183 \cdot 64}{6} = \frac{1,1712}{6} = 0,1952$$

# EXEMPLO 2 – DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Suponhamos que os navios cheguem a um porto à razão de 2 navios por hora, e que essa razão seja bem aproximada por um processo de Poisson. Durante um período de meia hora ( $\frac{1}{2}$  h), qual a probabilidade de:

- a) não chegar nenhum navio?
- b) chegarem 3 navios?

## ***Solução:***

$X$  = número de ocorrências: a)  $X = 0$  navios      b)  $X = 3$  navios

$e$  = base dos logaritmos naturais

$\lambda$  = taxa média por unidade de tempo = 2 navios/h

$t$  = número de unidades de tempo ou de outra unidade =  $\frac{1}{2}$  h

$\mu = \lambda t$  = média de ocorrências no intervalo  $t = \frac{2 \text{ navios}}{h} \cdot \frac{1}{2} h = 1 \text{ navio}$



## **Solução:**

**a)**

$X = 0$  navios

$\lambda = 2$  navios/h

$t = \frac{1}{2}$  h

$\mu = \lambda t = 1$  navio

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^X}{X!} \Rightarrow P(X = 0) = \frac{e^{-1} \cdot 1^0}{0!} = \frac{0,3679 \cdot 1}{1} = 0,3679$$

## **Solução:**

**b)**

$X = 3$  navios

$\lambda = 2$  navios/h

$t = \frac{1}{2}$  h

$\mu = \lambda t = 1$  navio

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^X}{X!} \Rightarrow P(X = 3) = \frac{e^{-1} \cdot 1^3}{3!} = \frac{0,3679 \cdot 1}{6} = 0,0613$$

# EXEMPLO 3 – DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Suponhamos que os defeitos em fios de tear possam ser aproximados por um processo de Poisson, com uma taxa de 0,2 defeitos por metro. Inspeccionando-se pedaços de fio de 6 metros de comprimento, qual a probabilidade de se encontrar menos de 2 defeitos?

## *Solução:*

*X = número de ocorrências:  $X = 0$  ou  $X = 1$*

*$\lambda$  = taxa média por unidade de tempo = 0,2 defeitos/m*

*t = número de unidades de tempo ou de outra unidade = 6 metros*

*$\mu = \lambda t$  = média de ocorrências no intervalo  $t = \frac{0,2 \text{ defeitos}}{\text{metro}} \cdot 6 \text{ metros}$*





## ***Solução:***

$$X = 0 \text{ ou } X = 1$$

$$\lambda = 0,2 \text{ defeitos/m}$$

$$t = 6 \text{ metros}$$

$$\mu = \lambda t = 1,2 \text{ defeitos}$$

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^X}{X!} \Rightarrow P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

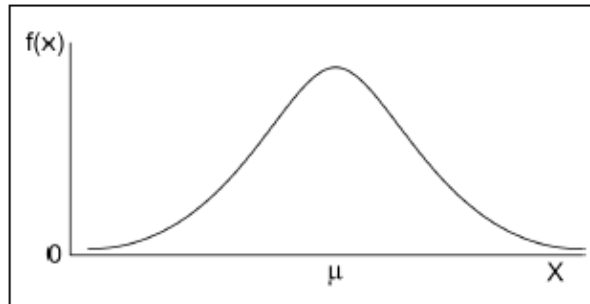
$$\begin{aligned} P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) &= \frac{e^{-1,2} \cdot (1,2)^0}{0!} + \frac{e^{-1,2} \cdot (1,2)^1}{1!} = \\ &= \frac{0,3012 \cdot 1}{1} + \frac{0,3012 \cdot 1,2}{1} = 0,3012 + 0,3614 = 0,6626 \end{aligned}$$

# DISTRIBUIÇÃO NORMAL ou DISTRIBUIÇÃO DE GAUSS

- ✓ **A Distribuição Normal é a mais importante distribuição de probabilidade.**
- ✓ Se aplica em inúmeros fenômenos.
- ✓ Tem grande aplicação em Economia, Administração e Engenharia.
- ✓ Importante no desenvolvimento da **Inferência Estatística.**
- ✓ É utilizada em controle de qualidade, controle de estoques, amostragem, etc.

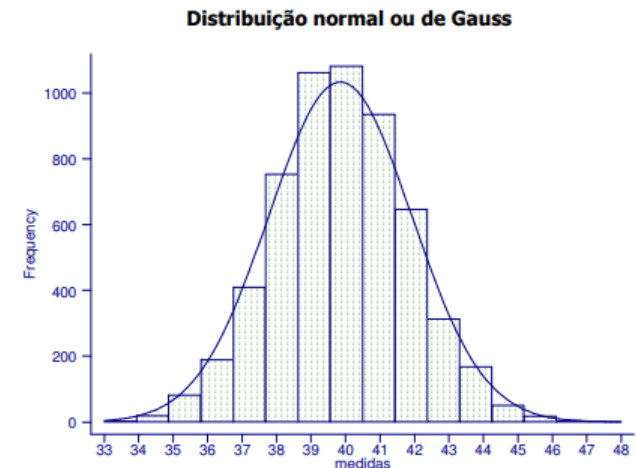
# GRÁFICO DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

- ✓ Uma variável aleatória  $X$  tem distribuição normal se o seu **gráfico** tem a **forma de um sino** e é simétrico em relação à **média**.



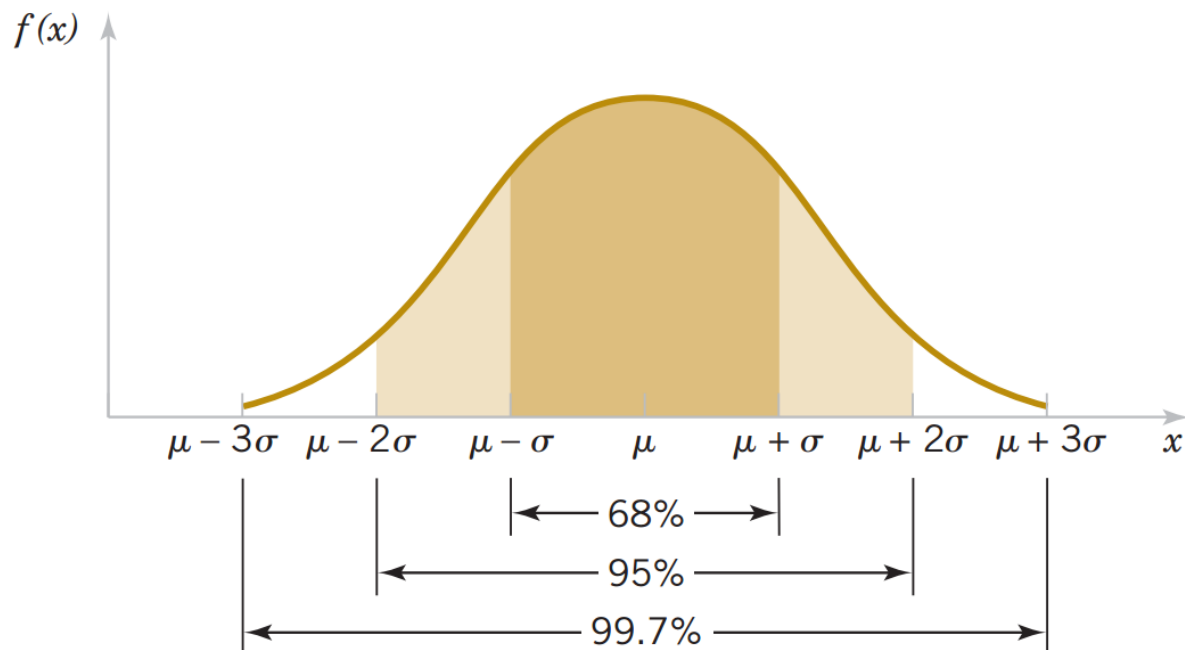
## Observações:

- ✓  $\bar{X}$  é utilizado para a **média da amostra**.
- ✓ A letra  $\mu$  (lê-se “mi”) é utilizada para a **média da população**.
- ✓ O gráfico de uma distribuição normal é conhecido como **CURVA NORMAL** ou **CURVA DE GAUSS**.



# PROPRIEDADES DA CURVA NORMAL

- ✓ A média situa-se na origem do gráfico.
- ✓ O gráfico é simétrico em relação à origem.
- ✓ A curva possui um ponto de máximo na origem ou média.
- ✓ A curva é assintótica, ou seja, o gráfico tende a zero quando  $x$  tende a  $+\infty$  ou  $-\infty$ .
- ✓ O gráfico tem dois pontos de inflexão, ou seja, dois pontos onde a curva muda a concavidade: em  $\mu + \sigma$  e  $\mu - \sigma$ , para  $\sigma$  = desvio padrão da população.



# DISTRIBUIÇÃO NORMAL e PROBABILIDADE

- ✓ Quando a função  **$f(x)$**  que representa a distribuição normal é integrada entre dois limites, ela produz uma probabilidade, que é a área sob a curva da função entre  **$x = a$**  e  **$x = b$** , para  **$a < b$** . Assim:
- ✓ A probabilidade de  **$a < x < b$**  é dada por:

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$$

- ✓ A probabilidade de um ponto qualquer é nula:  **$P(x = a) = \int_a^a f(x) dx = 0$**
- ✓ A área sob a curva normal equivale a 1, ou seja:

$$P(-\infty < x < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

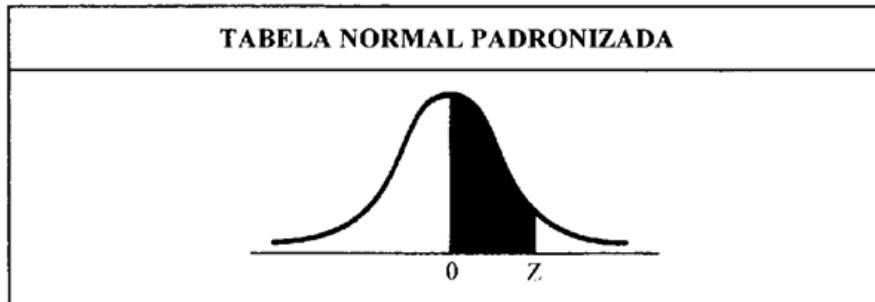
# TABELA DE DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRONIZADA

- ✓ Existe uma distribuição normal especial chamada **Distribuição Normal Padronizada**, com **média  $\mu = 0$**  e **variância  $\sigma^2 = 1$** , cujos valores encontram-se em tabelas.
- ✓ Há vários tipos de tabelas que oferecem as áreas (probabilidades) sob a curva normal padrão. Vamos utilizar a **Tabela de Faixa Central**.
- ✓ A **Tabela de Faixa Central** dá a área sob a curva normal padrão entre  **$z = 0$**  e **qualquer valor positivo de  $z$** .
- ✓ A simetria em torno de  $z = 0$  permite obter a área entre quaisquer valores de  $z$  (positivos ou negativos).
- ✓ A tabela oferece a área entre 0 e  $z_0$  ou  **$P(0 \leq z \leq z_0)$** .



# TABELA DE DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRONIZADA

TABELA DA DISTRIBUIÇÃO NORMAL



Para utilizarmos a tabela, devemos utilizar a seguinte **FÓRMULA**:

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$$

onde:

X = valor assumido pela variável

$\bar{X}$  = média

$\sigma$  = desvio padrão

Tabela A6.2 Distribuição normal – valores de  $P(0 \leq Z \leq z_0)$

$z_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

# EXEMPLO 1 – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

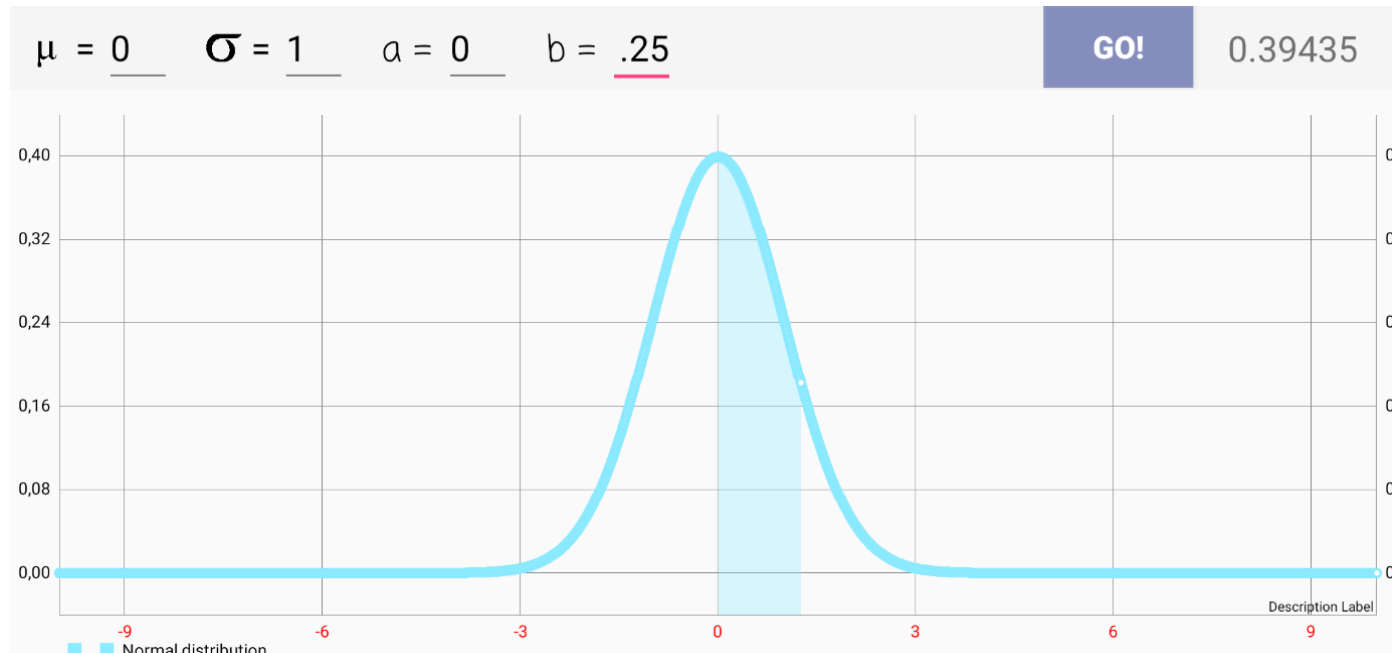
Numa distribuição normal com média 0 e desvio padrão igual a 1, ou seja,  $\bar{X} = 0$  e  $\sigma = 1$ , determine as seguintes probabilidades:

- a)  $P(0 < z < 1,25)$
- b)  $P(-1,25 < z < 0)$
- c)  $P(-0,5 < z < 1,48)$
- d)  $P(0,8 < z < 1,23)$
- e)  $P(z > 0,6)$
- f)  $P(z < 0,92)$



# SOLUÇÃO 1a – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

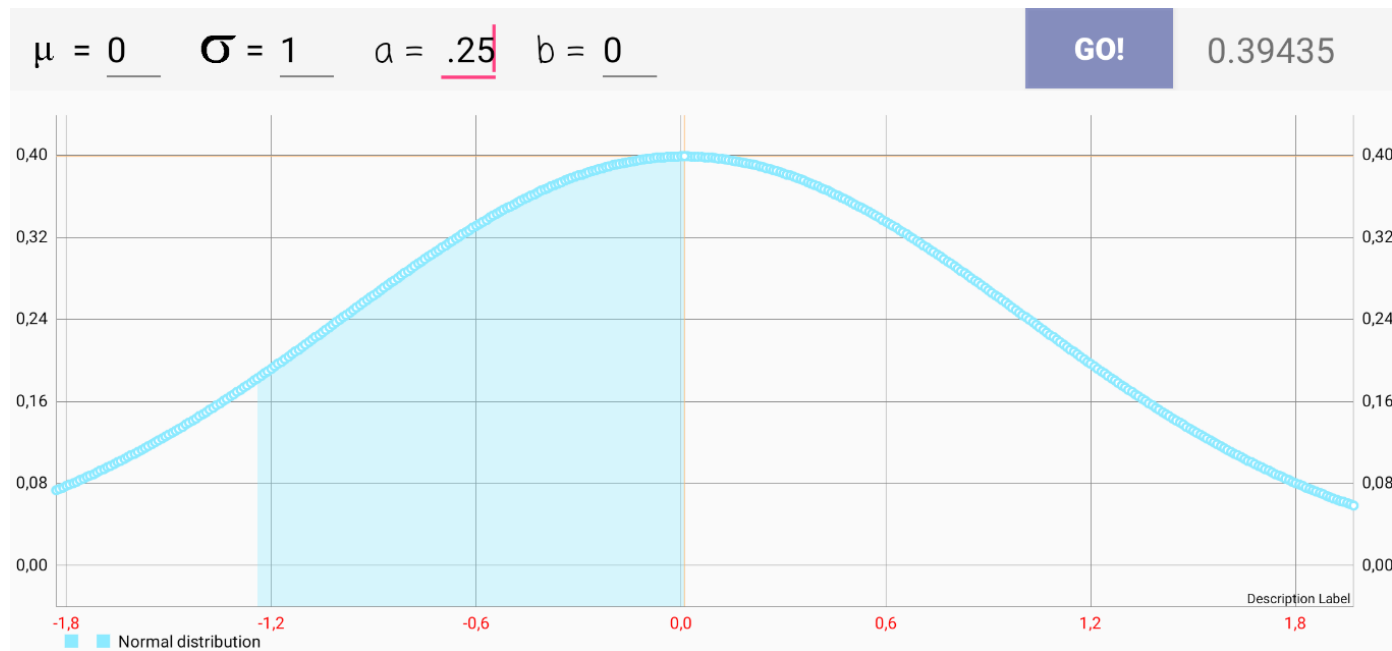
a)  $P(0 < z < 1,25)$



$$P(0 < z < 1,25) = 0,3944 \text{ ou } 39,44\%$$

# SOLUÇÃO 1b – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

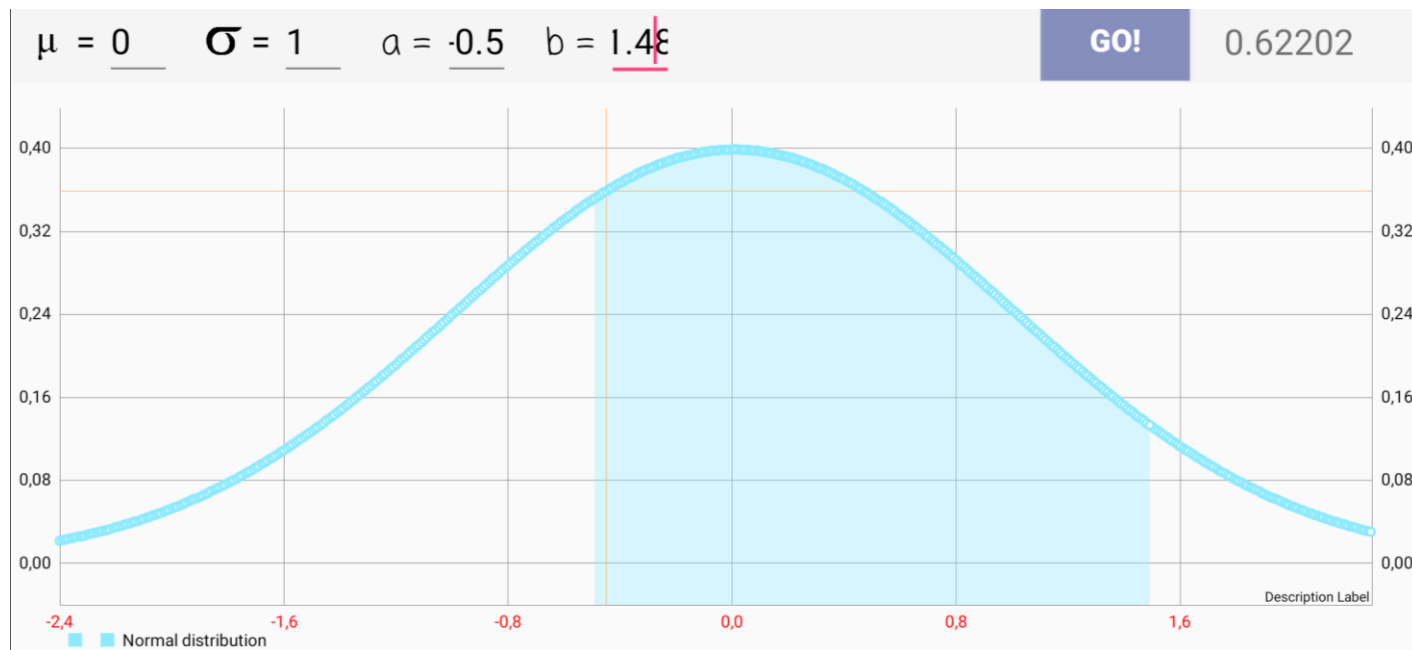
b)  $P(-1,25 < z < 0)$



$$P(-1,25 < z < 0) = P(0 < z < 1,25) = 0,3944 \text{ ou } 39,44\%$$

# SOLUÇÃO 1c – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

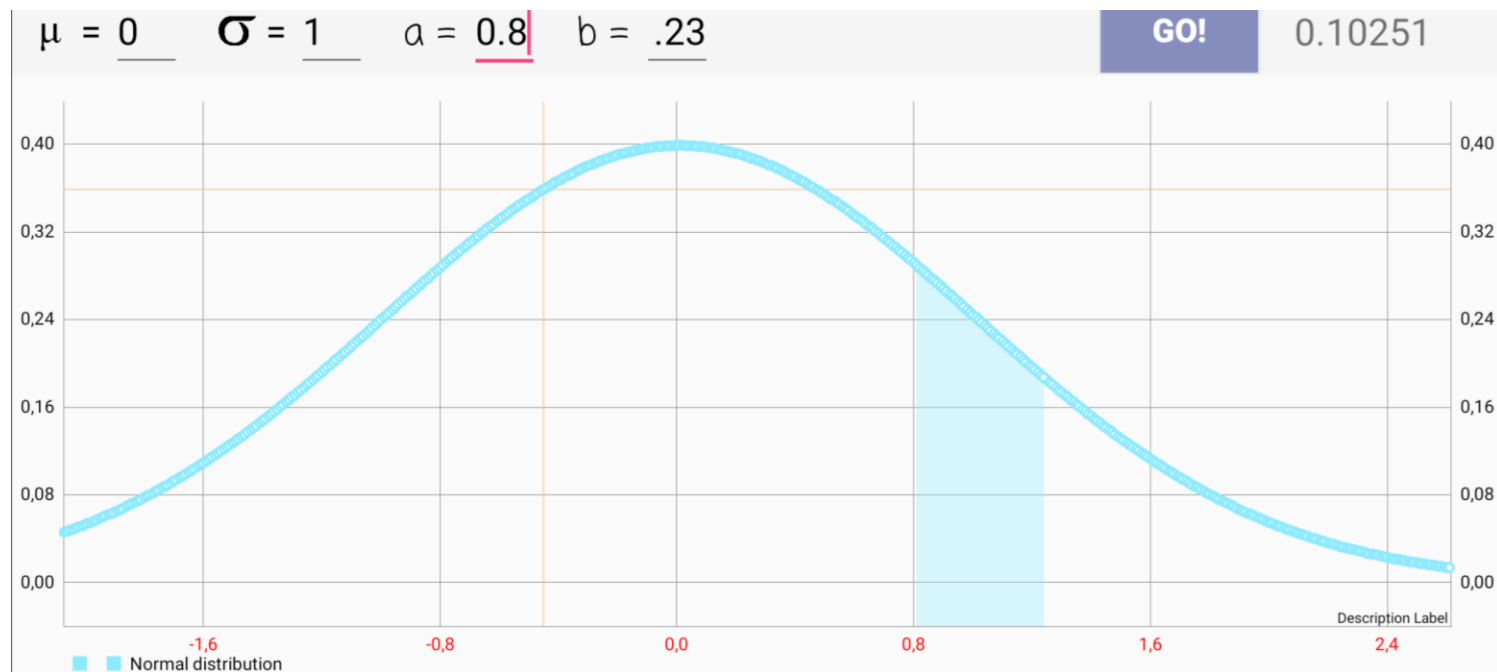
c)  $P(-0,5 < z < 1,48)$



**$P(-0,5 < z < 1,48) = 0,1915 + 0,4306 = 0,6221$  ou 62,21%**

# SOLUÇÃO 1d – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

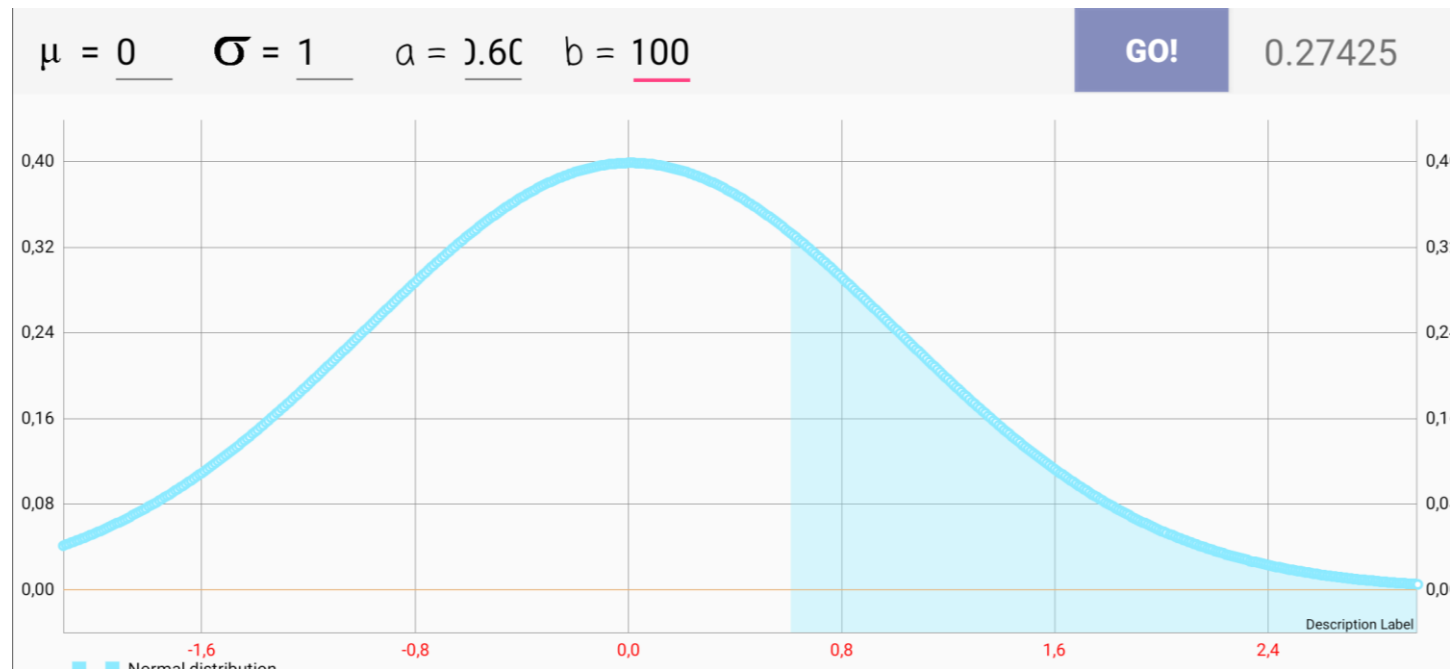
d)  $P(0,8 < z < 1,23)$



$$P(0,8 < z < 1,23) = 0,3907 - 0,2881 = 0,1026 = \text{ou } 10,26\%$$

# SOLUÇÃO 1e – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

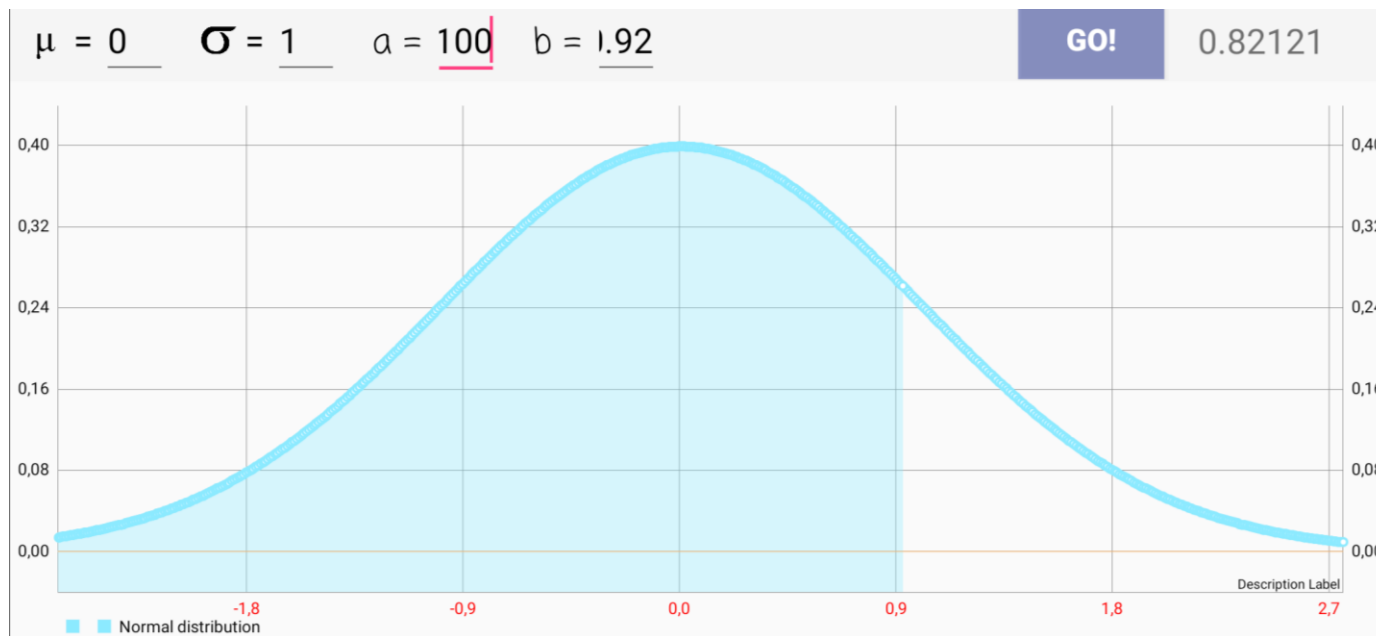
e)  $P(z > 0,6)$



$$P(z > 0,6) = 0,5 - 0,2257 = 0,2743 = \text{ou } 27,43\%$$

# SOLUÇÃO 1f – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

f)  $P(z < 0,92)$



$$P(z < 0,92) = 0,5 + 0,3212 = 0,8212 \text{ ou } 82,12\%$$

## EXEMPLO 2 – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Em uma prova de Estatística aplicada em uma turma de 40 estudantes, a média e o desvio padrão obtidos foram, respectivamente,  $\bar{X} = 5$  e  $\sigma = 1,5$ .

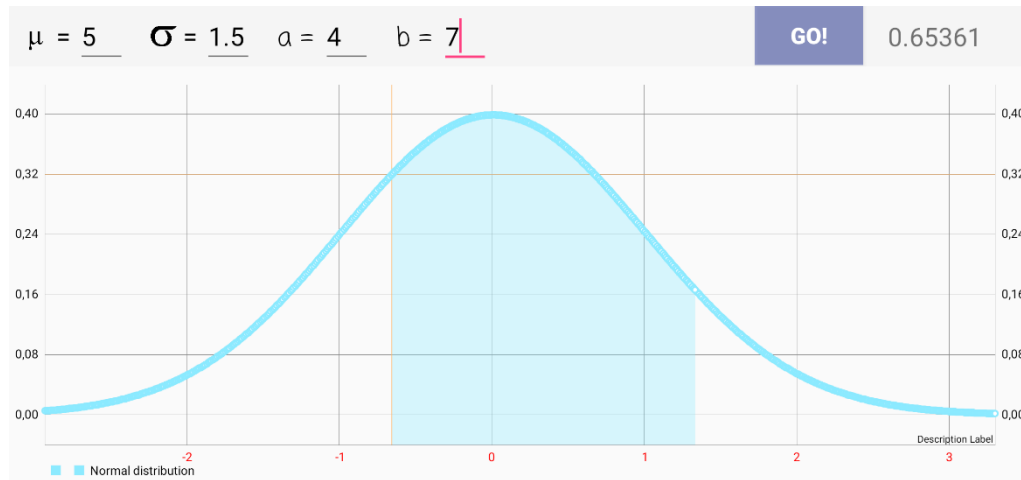
Sabendo-se que as notas são distribuídas normalmente, determine:

- a) a probabilidade e o número de estudantes que tiveram nota entre 4 e 7.
- b) a probabilidade e o número de estudantes que tiveram nota maior que 8.

# SOLUÇÃO 2a – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

$$\bar{X} = 5 \text{ e } \sigma = 1,5$$

a) a probabilidade e o número de estudantes que tiveram nota entre 4 e 7.



$$z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$$

$$z_1 = \frac{X - \bar{X}}{\sigma} = \frac{4 - 5}{1,5} = -\frac{1}{1,5} = -0,6666 \rightarrow z_1 = -0,67$$

$$z_2 = \frac{X - \bar{X}}{\sigma} = \frac{7 - 5}{1,5} = \frac{2}{1,5} = 1,3333 \rightarrow z_2 = 1,33$$



# SOLUÇÃO 2a – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Tabela A6.2 Distribuição normal – valores de  $P(0 \leq Z \leq z_0)$

$z_1 = -0,67 \rightarrow$  **0,2486**  
Tabela

$z_2 = 1,33 \rightarrow$  **0,4082**  
Tabela

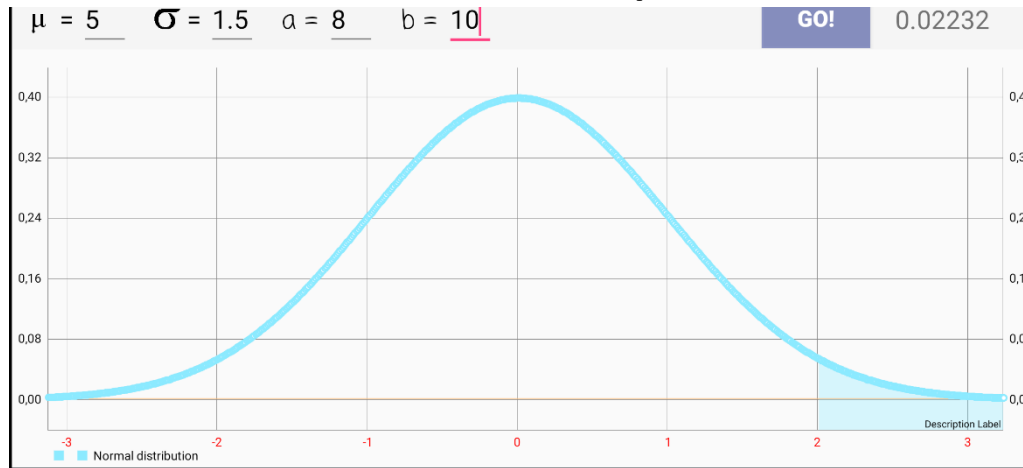
$z_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319

$P(4 < X < 7) = P(-0,67 < z < 1,33) = 0,2486 + 0,4082 = 0,6568$  ou 65,68%, que equivale a 26 estudantes, pois  $0,6568 \times 40 = 26,272$ .

# SOLUÇÃO 2b – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

$$\bar{X} = 5 \text{ e } \sigma = 1,5$$

b) a probabilidade e o número de estudantes que tiveram nota maior que 8.



$$z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$$

$$z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma} = \frac{8 - 5}{1,5} = \frac{3}{1,5} = 2 \rightarrow \boxed{z = 2,00}$$

# SOLUÇÃO 2b – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Tabela A6.2 Distribuição normal – valores de  $P(0 \leq Z \leq z_0)$

$z = 2,00 \longrightarrow$  **0,4772**  
Tabela

$z_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857

**$P(X > 8) = 0,5 - 0,4772 = 0,0228$  ou 2,28%, que equivale a 1 estudante, pois  $0,0228 \times 40 = 0,912 \cong 1$ .**

# EXEMPLO 3 – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

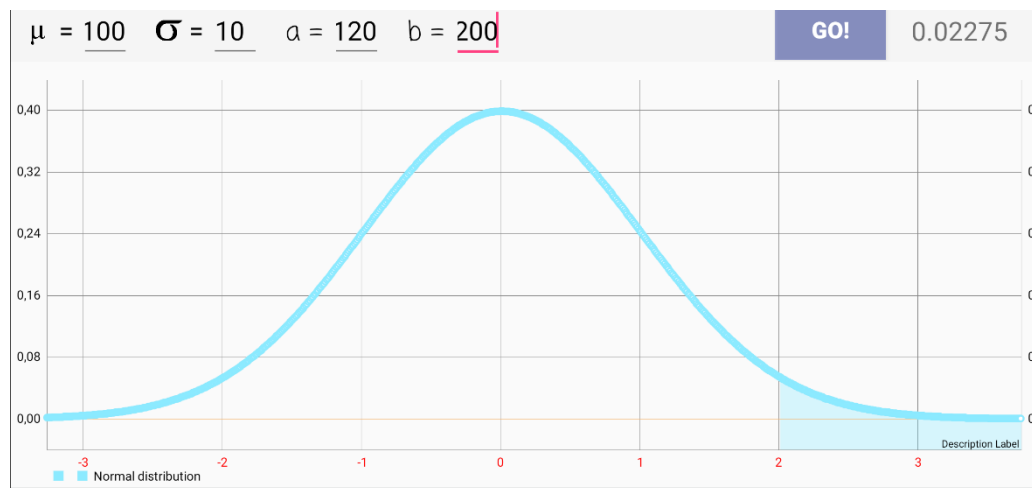
Um teste padronizado de escolaridade tem distribuição normal com média 100 e desvio padrão 10.

Qual a probabilidade de um indivíduo submetido ao teste:

- a) ter nota maior que 120?
- b) ter nota maior que 80?
- c) ter nota entre 85 e 115?
- d) ter nota maior que 100?

# EXEMPLO 3a – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

a) Qual a probabilidade de um indivíduo submetido ao teste ter nota maior que 120?



$$z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$$

$$z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma} = \frac{120 - 100}{10} = \frac{20}{10} = 2 \rightarrow z = 2,00$$

# SOLUÇÃO 3a – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Tabela A6.2 Distribuição normal – valores de  $P(0 \leq Z \leq z_0)$

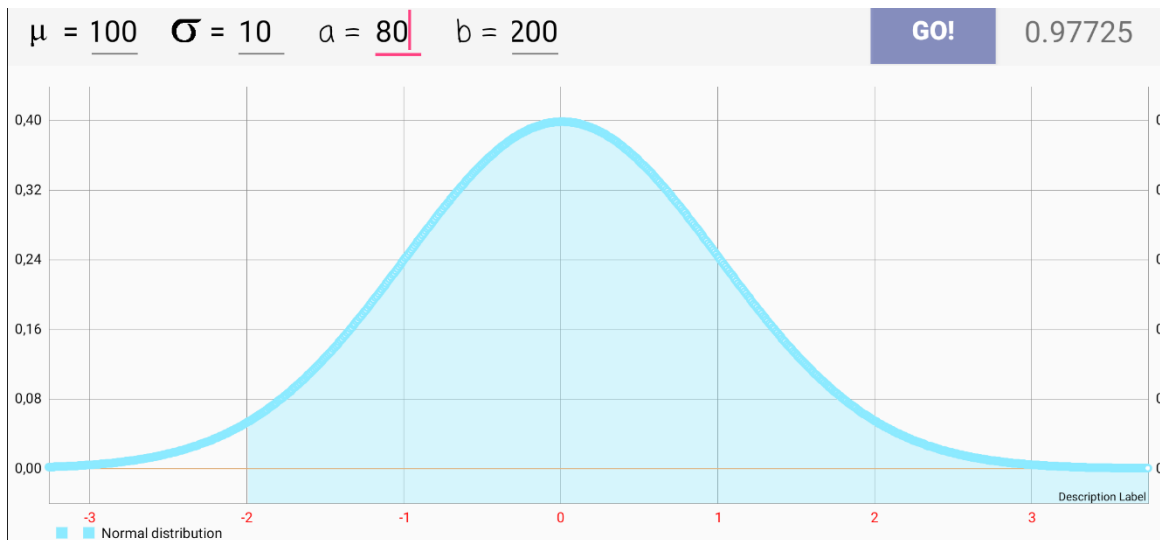
$z = 2,00 \xrightarrow{\text{Tabela}} 0,4772$

$z_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857

$$P(X > 120) = P(X > 2,00) = 0,5 - 0,4772 = 0,0228 \text{ ou } 2,28\%.$$

# EXEMPLO 3b – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

b) Qual a probabilidade de um indivíduo submetido ao teste ter nota maior que 80?



$$z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$$

$$z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma} = \frac{80 - 100}{10} = -\frac{20}{10} = -2$$

$$z = -2,00$$

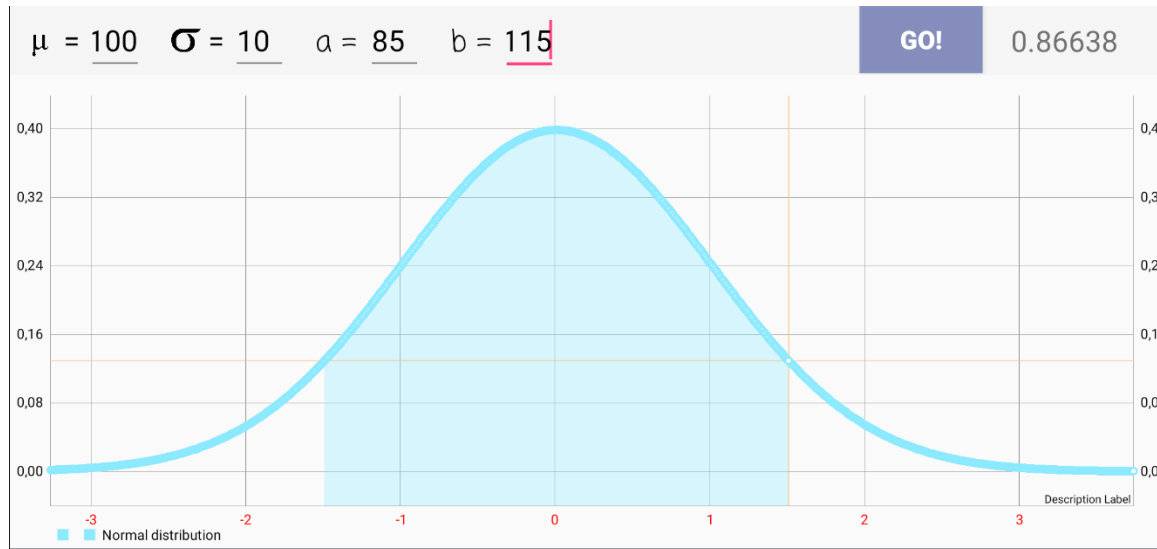
Ver Exemplo 3a)

→ 0,4772  
Tabela

$$P(X > 80) = 0,4772 + 0,5 = 0,9772 \text{ ou } 97,72 \%$$

# EXEMPLO 3c – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

c) Qual a probabilidade de um indivíduo submetido ao teste ter nota entre 85 e 115?



$$z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$$

$$z_1 = \frac{X - \bar{X}}{\sigma} = \frac{85 - 100}{10} = \frac{-15}{10} = -1,5 \longrightarrow z_1 = -1,50$$

$$z_2 = \frac{X - \bar{X}}{\sigma} = \frac{115 - 100}{10} = \frac{15}{10} = 1,5 \longrightarrow z_2 = 1,50$$



# SOLUÇÃO 3c – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Tabela A6.2 Distribuição normal – valores de  $P(0 \leq Z \leq z_0)$

$$z_1 = -1,50 \xrightarrow{\text{Tabela}} 0,4332$$

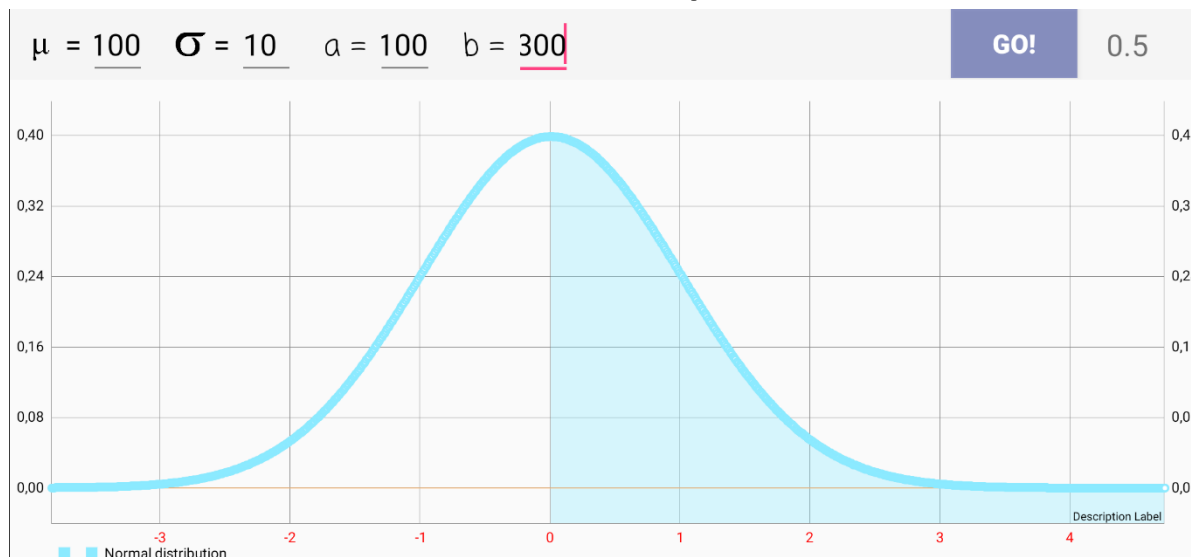
$$z_2 = 1,50 \xrightarrow{\text{Tabela}} 0,4332$$

$z_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767

$$P(85 < X < 115) = 0,4332 + 0,4332 = 0,8664 \text{ ou } 86,64\%$$

# EXEMPLO 3d – DISTRIBUIÇÃO NORMAL

d) Qual a probabilidade de um indivíduo submetido ao teste ter nota maior que 100?



***$P(X > 100) = 0,5$  ou 50%, pois a área em destaque (na cor azul) corresponde à metade da área sob a curva, por isso, não é necessário fazer cálculos, nem consultar a tabela de Distribuição Normal Padronizada.***

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ✓ CRESPO, Antônio Arnot. **Estatística fácil**. São Paulo: Atual, 1990.
- ✓ FONSECA, Jairo Simon da; MARTINS, Gilberto de Andrade. **Curso de estatística**. 6 ed. São Paulo: Atlas, 2006.
- ✓ MORETTIN, Luiz Gonzaga. **Estatística básica: probabilidade**. 6 ed. São Paulo: Makron Books, 1994.
- ✓ MONTGOMERY, Douglas C. ; RUNGER, George C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. 4 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

