Projeto 2 - Computação Científica

Maria Luiza C. Wuillaume e Pedro Siqueira das Neves

Fevereiro 2022

Questão 1

Para provarmos que a integral definida $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt$ é uma aplicação linear precisamos provar 2 propriedades que já provamos anteriormente no teste 7:

$$I(f+g) = I(f) + I(g)$$

$$I(kf) = kI(f)$$

Para prova-las, utilizaremos a mesma lógica utilizada no teste anterior, iremos nos aproveitar das propriedades das integrais para nosso favor. Na primeira prova, utilizaremos a propriedade que da integral que diz que a integral de uma soma, é equivalente a soma de 2 integrais:

$$\begin{aligned}
I(f+g) &= \int_{-1}^{1} (f+g)(t)dt \\
I(f+g) &= \int_{-1}^{1} f(t) + g(t)dt \\
I(f+g) &= \int_{-1}^{1} f(t)dt + \int_{-1}^{1} g(t)dt \\
I(f+g) &= I(f) + I(g)
\end{aligned}$$

E para a segunda, utilizaremos a propriedade que diz que a integral de uma constante multiplicada por uma variável é equivalente a integrar somente a variável e multiplica-la pela constante:

$$\begin{aligned}
I(kf) &= \int_{-1}^{1} (kf)(t)dt \\
I(kf) &= \int_{-1}^{1} kf(t)dt \\
I(kf) &= k\int_{-1}^{1} f(t)dt \\
I(kf) &= kI(f)
\end{aligned}$$

Com isso, podemos afirmar que $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt$ é uma aplicação linear em Pol_{n-1}, pois ela cumpre estas 2 propriedades.

Questão 2

Para explicar precisamos primeiramente entender quem é g. Pelo enunciado do projeto podemos ver que g é equivalente a $\sum g_j z^j$, e isso nos será bastante relevante para questão.

Com isso, vemos que a questão exige que $g \in Pol_{n-1}$, por isso nosso somatório de g irá de 0 até $n-1$. Além disso, sabemos que podemos inverter a ordem do cálculo da integral pelo do somatório, e a partir disso iremos desenvolver nosso raciocínio, integrando em relação a z.

$$I(g) = \int_{-1}^{1} (\sum_{j=0}^{n-1} g_j z^j) dz$$

$$I(g) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{-1}^{1} g_j z^j dz$$

$$I(g) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} g_j \frac{z^{j+1}}{j+1} \right) \Big|_{-1}^{1}$$

$$I(g) = \sum_{j=0}^{n-1} g_j \left(\frac{(1)^{j+1}}{j+1} - \frac{(-1)^{j+1}}{j+1} \right)$$

$$I(g) = \sum_{j=0}^{n-1} g_j \frac{1-(-1)^{j+1}}{j+1}$$

E assim podemos concluir que $I(g)$ e $\sum_{j=0}^{n-1} g_j \frac{1-(-1)^{j+1}}{j+1}$, são equivalentes.

Questão 3

Para esta questão, utilizaremos como base a resolução da questão 1 deste projeto, onde provamos que I é uma aplicação linear e do enunciado do projeto que nos diz que L_x também é uma aplicação linear. Com isso podemos mostrar rapidamente que:

$$I_X(f) = I(L_x(f))$$

É interessante notar também, como L_x é uma aplicação de $\mathcal{F}$ em Pol_{n-1} e como I é uma aplicação de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{R}$. E assim, quando fazemos a composição, temos uma aplicação de Pol_{n-1} em $\mathcal{R}$

Questão 4

Usando como base o enunciado da questão 3, podemos dizer que $I_X(f) = I(L_x(f))$, e por isso, I_x só depende de Pol_{n-1} gerado pela aplicação $L_x(f)$.

Vendo a decomposição de L_x percebemos que esta só depende dos valores de f nos pontos x_i, pois com esses valores apenas formaremos os polinômios de Lagrange que darão origem ao polinômio interpolador. E como descrito no enunciado do projeto, π_x é a aplicação que gera o vetor com os valores $f(x_i)$ a partir dos valores de x_i. Podemos concluir assim que, se L_x só depende de π_x e $I_X(f)$ só depende de L_x, $I_X(f)$ só depende de π_x.

Questão 5

Utilizando a definição de L_x podemos afirmar que:

$$L_x(f) = \sum f(x_i)L_n(x_i)$$

E também sabemos pela questão 3 que $I_X(f) = I(L_x(f))$, logo podemos também afirmar que:

$$I_x(f) = \int_{-1}^{1} \sum f(x_i)L_n(x_i)$$

E utilizando as propriedades descritas na questão 2, em relação a inverter a ordem de cálculo da integral e do somatório, podemos desenvolver nosso raciocínio para mostrar que:

$$I_x(f) = \int_{-1}^{1} \sum f(x_i)L_n(x_i)$$
$$I_x(f) = \sum f(x_i) \int_{-1}^{1} L_n(x_i)$$

E como sabemos que a aplicação linear do polinômio interpolador de Lagrange irá nos retornar números reais, podemos definir $w_i = \int_{-1}^{1} L_n(x_i)$, sendo estes números reais.

Questão 6

Considere o seguinte sistema linear em forma de equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Encontrar a solução desse sistema linear é encontrar os coeficientes g_j que permitem que o polinômio acerte o valor da função nos pontos de interpolação.

Sabemos que o vetor $(f(x_i)) = \pi_X$ e podemos definir M e γ tal que:

$$\gamma = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Assim, podemos reescrever o sistema linear acima de forma mais concisa.

$$M\gamma = \pi_X$$

Nosso objetivo é isolar o vetor (g_j). Para isso vamos provar que M é inversível.

A prova segue por contradição, considere que M não é inversível. Então, suas colunas são linearmente dependentes e existem coeficientes g_j diferentes de zero tais que:

$$g_0 \begin{bmatrix} x_0^0 \\ x_1^0 \\ \vdots \\ x_{n-1}^0 \end{bmatrix} + g_1 \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + \cdots + g_{n-1} \begin{bmatrix} x_0^{n-1} \\ x_1^{n-1} \\ \vdots \\ x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Generalizando, para todo x_i:

$$g_0 + g_1 x_i + \cdots + g_{n-1} x_i^{n-1} = 0$$

Pela equação acima, percebemos que todo ponto de interpolação anula o polinômio e, portanto, é raiz do polinômio. Como existem n pontos de interpolação, este polinômio de grau $n-1$ tem n raízes. Isso só é possível se os coeficientes g_j forem iguais a zero. Provamos, então, que a matriz M é inversível. Assim, podemos escrever a equação matricial pedida no enunciado.

$$\begin{aligned} M\gamma &= \pi_X \\ \gamma &= M^{-1}\pi_X \end{aligned}$$

Questão 7

Podemos utilizar a definição de produto interno para decompor $I(g) = \langle (g_j), v \rangle = (g_j)^T \cdot v$:

$$\begin{bmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

A multiplicação dessas duas matrizes resulta no somatório:

$$g_0 v_0 + g_1 v_1 + \cdots + g_{n-1} v_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} g_j v_j$$

Como visto na questão 2:

$$I(g) = \sum_{j=0}^{n-1} g_j \frac{1 - (-1)^{j+1}}{j+1}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} g_j \frac{1 - (-1)^{j+1}}{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} g_j v_j$$

Conseguimos, então, uma definição para cada elemento v_j do vetor $v = (v_j)$.

$$v_j = \frac{1 - (-1)^{j+1}}{j+1}$$

Questão 8

Vamos conduzir a prova supondo que $I(g)$ é de fato o que foi sugerido no enunciado. Com isso, vamos decompor $I(g)$, obtendo um fórmula que já foi demonstrada na questão anterior. Pela comutatividade do produto interno:

$$\begin{aligned} I(g) &= \left\langle \pi_X(f), (M^{-1})^T v \right\rangle \\ &= \left\langle (M^{-1})^T v, \pi_X(f) \right\rangle \end{aligned}$$

Aplicando a definição e propriedades da matriz transposta:

$$\begin{aligned} I(g) &= ((M^{-1})^T v)^T \cdot \pi_X(f) \\ &= v^T M^{-1} \pi_X(f) \end{aligned}$$

Sabemos que $\gamma = M^{-1}\pi_X(f) = (g_j)$, então:

$$\begin{aligned} I(g) &= v^T \cdot (g_j) \\ &= \langle v, (g_j) \rangle \\ &= \langle (g_j), v \rangle \end{aligned}$$

Chegamos no mesmo resultado obtido na questão 7. Assim, concluímos nossa demonstração, utilizando, novamente, a definição de produto interno e sua propriedade comutativa.

Questão 9

A partir da solução da questão 3, podemos escrever:

$$I_x(f) = I(L_x(f))$$

Como g é o polinômio interpolador de Lagrange de f, $L_x(f) = g$. Além disso, podemos usar o resultado da questão 8 para afirmar que:

$$\begin{aligned} &I_x(f) = I(g) \\ &I_x(f) = \left\langle \pi_X(f), (M^{-1})^T v \right\rangle \end{aligned}$$

Suponha que $w = (M^{-1})^T v$, então pela definição do produto interno $\langle \pi_X(f), w \rangle$:

$$\begin{bmatrix} f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_{n-1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix}$$

Sabemos, pela questão 5, que $I_x(f) = \sum w_i f(x_i)$ para w_i reais. Aplicando a multiplicação de matrizes acima, obtemos justamente este somatório; o que conclui a demonstração.

$$\sum w_i f(x_i) = f(x_0)w_0 + f(x_1)w_1 + \cdots + f(x_{n-1})w_{n-1}$$

Questão 10

Com a resolução de todas as questões, conseguimos um forma de integrar utilizando álgebra linear.

Na primeira questão, definimos uma aplicação que corresponde a uma integral definida de uma função f. Em seguida, substituímos a f pelo seu polinômio interpolador de Lagrange e desenvolvemos uma fórmula que utiliza apenas operações e aplicações lineares:

$$I(g) = \langle \pi_X(f), w \rangle$$

Entretanto, esta fórmula foi feita utilizando a integral de $[-1, 1]$ como base. Mudar o intervalo de integração, não afeta a $\pi_X(f)$, mas afeta o vetor w. Isso porque $w = (M^{-1})^T v$, ou seja, depende do vetor v que, por sua vez, depende da definição da integral. O valor deste vetor foi obtido na questão 7, com base nos resultados da questão 2. Por isso, vamos refazer a segunda questão, agora com base em um intervalo de integração mais geral, e montaremos novamente a fórmula de v.

Vamos definir uma aplicação $I'(f) = \int_a^b f(t)\,dt$, pelas mesmas razões expostas na questão 1, esta aplicação é linear. Agora, é preciso calcular $I'(g)$.

$$I'(g) = \int_a^b (\sum_{j=0}^{n-1} g_j z^j) dz$$

$$I'(g) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^b g_j z^j\,dz$$

$$I'(g) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} g_j \frac{z^{j+1}}{j+1} \right) \Bigg|_a^b$$

$$I'(g) = \sum_{j=0}^{n-1} g_j \left(\frac{(b)^{j+1}}{j+1} - \frac{(a)^{j+1}}{j+1} \right)$$

$$I'(g) = \sum_{j=0}^{n-1} g_j \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j+1}$$

De forma análoga ao que foi demonstrado na questão 7, $v = (v_j)$, em que cada elemento v_j é dado por: $\frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j+1}$. Os passos seguintes são os mesmos e a conclusão final é que: $I'(g) = \langle \pi_X(f), w \rangle$. Agora, w tem uma nova definição baseada no novo valor de v. Isso fecha nosso processo de generalização.

Em suma, para calcular a integral de uma função por este método, precisaremos das seguintes entradas:

1. Os pontos de interpolação, que são utilizados para compor a matriz de interpolação M.

2. Os valores da função nos pontos de interpolação, que são utilizados para montar o vetor retornado pela aplicação π_x.

3. Os limites de integração, que são utilizados para montar o vetor v segundo sua nova definição.