ESCOLA DE ENGENHARIA DE VOLTA REDONDA (EEIMVR-UFF)
Departamento de Ciências Exatas (VCE)

Primeira Avaliação (P1) - 2018/2

Disciplina:	**Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)** | Data: **26/10/2018**	**NOTA**
Professor:	Yoisell Rodríguez Núñez	
Aluno(a):	—	

1. (1,00 ponto) **Identifique** o elemento na primeira coluna abaixo, com sua correspondente interpretação na segunda coluna:

I) EDO exata	C Sistema fundamental de soluções
A) $(y^2 \cos x)dx + (4 + 5y \operatorname{sen} x)dy = 0$	O $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$
S) Equação de Ricatti	N EDO de variáveis separáveis
R) $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t} - 8e^t \cos(2t)$	Q Problema de Valor Inicial (PVI)
T) EDO de Bernoulli	U $y' + \frac{2}{x}y = x^3$
C) $\{e^{4t}, e^{-t}\}$	I $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$
U) EDO de 1^a ordem linear	S $\frac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2$
Q) $\begin{cases} xy^2 \frac{dy}{dx} = y^3 - x^3, \\ y(1) = 2 \end{cases}$	T $\frac{dy}{dx} + y = y^2$; $w = y^{-1}$
O) Equação característica	A $\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}$
N) $\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1 + 2y^2}$	R $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

2. (2,50 pontos) Determine a solução geral da EDO: $(y^2 \cos x)dx + (4 + 5y \operatorname{sen} x)dy = 0$

3. (2,00 pontos)* Resolva o PVI: $\begin{cases} xy^2 \frac{dy}{dx} = y^3 - x^3, \\ y(1) = 2 \end{cases}$

4. (2,00 pontos)* Encontre a solução da EDO:

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2,$$

sabendo que $y_1(x) = -e^x$ é uma solução particular desta equação.

5. (2,50 pontos) Calcule a solução geral da EDO:

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t} - 8e^{t}\cos(2t)$$

6. (2,00 pontos) Assinale com a letra **V** para VERDADEIRA ou a letra **F** para FALSA, as afirmações abaixo, justificando cada resposta dada:

0,50 a) V A função $y(x) = \dfrac{1}{1 + Ce^{x}}$ é a solução geral da EDO de Bernoulli $y' + y - y^2 = 0$.

0,50 b) V $\{e^{t}, e^{-t}\}$ representa um conjunto fundamental de soluções da EDO: $y'' - y = 0$.

0,50 c) V A EDO $(3x^2y^2 - 2018\ln x)dx + (e^{3y}\tan y + 2x^3y)dy = 0$ é exata.

0,50 d) F $\mu(x) = x^3$ é um fator integrante da EDO de 1^a ordem linear $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x}y = x^3$.

Observações:

- ***Escolha** a questão **3 ou 4** para resolver. As **demais questões** são de **resolução obrigatória**.
- Todas **as respostas devem ser justificadas**, isto é, acompanhadas dos argumentos e/ou cálculos usados para obtê-las.

As conquistas humanas compõem-se de 1% de inspiração e 99% de transpiração
Thomas Edison

BOA PROVA!!!

Gabarito - EDO
2018/2
Prof. Yoisell R. N.

(1) Feita na folha da prova. Cada acerto vale 0,10 pontos.

(2) $\underbrace{(y^2\cos x)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(4+5y\,\mathrm{sen}\,x)}_{N(x,y)}dy = 0 \quad (I)$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y\cos x$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 5y\cos x$

$\neq$s Logo, a EDO (I) não é exata.

Assim, precisamos procurar um fator integrante:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy} = e^{\int \frac{5y\cos x - 2y\cos x}{y^2\cos x} dy}$$

$$= e^{\int \frac{3\cancel{y\cos x}}{y^{\cancel{2}}\cancel{\cos x}} dy} = e^{\int \frac{3}{y} dy} = e^{3\ln y} = e^{\ln y^3} = y^3$$

$\Longrightarrow \mu(y) = y^3$

Multiplicando a EDO (I) pelo fator integrante $\mu(y)$, temos:

$$y^3(y^2\cos x)\,dx + y^3(4+5y\,\mathrm{sen}\,x)\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(y^5\cos x)}_{\tilde{M}(x,y)}dx + \underbrace{(4y^3+5y^4\,\mathrm{sen}\,x)}_{\tilde{N}(x,y)}dy = 0 \quad (I)'$$

$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 5y^4\cos x = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} \sim \therefore$ a EDO (I)' é exata.

Questão ② . Continuação ...

Portanto, $\exists\, \phi = \phi(x,y)$ (função potencial) tal que:

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial x} = \tilde{M}(x,y) = y^5 \cos x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \tilde{N}(x,y) = 4y^3 + 5y^4 \operatorname{sen} x$$

Integrando em relação a x:

$$\phi(x,y) = \int y^5 \cos x \, dx + C(y)$$
$$= y^5 \operatorname{sen} x + C(y)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \cancel{5y^4 \operatorname{sen} x} + C'(y) \overset{!}{=} 4y^3 + \cancel{5y^4 \operatorname{sen} x}$$

$$\Longrightarrow C'(y) = 4y^3 \Longrightarrow C(y) = y^4$$

Assim, a solução geral da EDO é dada por:

$$\boxed{y^5 \operatorname{sen} x + y^4 = C_1}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

③* PVI: $\begin{cases} xy^2 \dfrac{dy}{dx} = y^3 - x^3 \\ y(1) = 2. \end{cases}$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 - x^3}{xy^2}} \quad (\text{II}) \quad ; \forall x, y \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^{\cancel{3}}}{x\cancel{y^2}} - \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x}y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \left(\frac{x}{y}\right)^2 \quad (\text{II})'$$

$M(x,y) = y^3 - x^3$

$\Rightarrow M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y)^3 - (\lambda x)^3$

$= \lambda^3 y^3 - \lambda^3 x^3$

$= \lambda^3 (y^3 - x^3)$

$= \lambda^3 M(x,y)$

$N(x,y) = xy^2$

$\Rightarrow N(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x) \cdot (\lambda y)^2$

$= \lambda^3 (xy^2)$

$= \lambda^3 N(x,y)$

Logo, a EDO (II) é homogênea.

Considerando a substituição: $y = zx$,

temos: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} \cdot x + z \cdot \dfrac{dx}{dx} = x\dfrac{dz}{dx} + z$

$\xRightarrow{\text{subst em (II)'}} x\dfrac{dz}{dx} \cancel{+z} = \cancel{z} - \dfrac{1}{z^2}$

$\Rightarrow x\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{z^2} \xRightarrow[\text{variáveis}]{\text{Separando}} z^2\, dz = -\dfrac{1}{x}\, dx$

Integrando:

$\int z^2\, dz = -\int \frac{1}{x}\, dx \Rightarrow \frac{z^3}{3} = -\ln x + C$

$\xRightarrow{\text{pois } z = \frac{y}{x}} \dfrac{\left(\frac{y}{x}\right)^3}{3} = -\ln x + C \Rightarrow \boxed{\dfrac{y^3}{3x^3} + \ln x = C} \quad (\text{II})''$

Questão (3). Continuação...

Substituindo a condição inicial $y(1)=2$ na EDO (II)'', temos:

$$\frac{(y(1))^3}{3(1)^3} + \cancel{\ln(1)}^{\,0} = C \implies \frac{2^3}{3\cdot(1)} = C$$

$$\implies \boxed{C = \frac{8}{3}}$$

Assim, a solução do PVI é dada por:

$$\boxed{\frac{y^3}{3x^3} + \ln x = \frac{8}{3}} \longmapsto y^3 = 3x^3\left(\frac{8}{3} - \ln x\right)$$
$$= x^3(8 - 3\ln x)$$

ou, equivalentemente:

$$\boxed{y = x\sqrt[3]{8 - 3\ln x}}$$

---

(4)* $$\boxed{\frac{dy}{dx} = e^{2x} + (1+2e^x)y + y^2} \quad \text{(III)} \quad ; \quad y_1(x) = -e^x$$
(solução particular)

Observe que a EDO (III) é uma Eq. de Ricatti.

Portanto, fazendo a substituição:

$$(*) \quad \boxed{y(x) = \underbrace{-e^x}_{} + \underbrace{u(x)}_{}} \implies \frac{dy}{dx} = -e^x + \frac{du}{dx}$$

soluções de (III)

teremos: (subst em (III)):

$$\underbrace{-e^x + \frac{du}{dx}}_{\overset{\shortparallel}{\frac{dy}{dx}}} = \underbrace{e^{2x} + (1+2e^x)\cdot(-e^x+u) + (-e^x+u)^2}_{\overset{\shortparallel}{e^{2x}+(1+2e^x)\cdot y + y^2}}$$

Questão (4). Continuação ...

$$\Rightarrow \cancel{-e^x} + \frac{du}{dx} = e^{2x} \cancel{-e^x} + u - 2e^{2x} + \cancel{2ue^x} + e^{2x} - \cancel{2ue^x} + u^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{du}{dx} = u + u^2} \quad \text{(EDO de Bernoulli)} \quad n=2$$

Substituição:

$$w = u^{1-2} = u^{-1} \Rightarrow \frac{dw}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -u^2\frac{dw}{dx}$$

$$\Downarrow$$

$$-u^2\frac{dw}{dx} = u + u^2$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{dx} = \frac{u+u^2}{-u^2} = -\frac{\cancel{u}}{u^{\cancel{2}}} - \frac{\cancel{u^2}}{\cancel{u^2}} = -\frac{1}{u} - 1$$

$$= -w - 1$$

pois: $w = u^{-1} = \frac{1}{u}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dw}{dx} = -w - 1} \quad \text{(EDO de variáveis separáveis)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dw}{w+1} = -dx \underset{\text{Integrando}}{\Longrightarrow} \int \frac{dw}{w+1} = -\int dx + C$$

$$\Rightarrow \ln(w+1) = -x + C \Rightarrow w + 1 = e^{-x+C} = e^{-x} \cdot e^C$$

$$\Rightarrow w = c_1 \cdot e^{-x} - 1 \quad ; \text{ com } c_1 = e^C \in \mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u} = c_1 e^{-x} - 1 \Rightarrow u(x) = \frac{1}{c_1 e^{-x} - 1}$$

Finalmente, substituindo em (*), obtemos a solução geral da EDO (III):

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{c_1 e^{-x} - 1} - e^x} \quad ; \; c_1 \in \mathbb{R}_+$$

5 [Exemplo 71 (adaptado) → Apostila EDO IME-UERJ Pág 120-121.]

$$\boxed{y'' - 3y' - 4y = \underbrace{3e^{2t}}_{y_{p_1}(t)} - \underbrace{8e^{t}\cos(2t)}_{y_{p_2}(t)}} \quad (\text{IV})$$

Primeiramente, lembremos que a solução geral da EDO (IV) pode ser escrita na forma:

$$y(t) = \underbrace{y_H(t)}_{\substack{\text{Solução}\\ \text{geral da}\\ \text{EDO homogênea}}} + \underbrace{y_p(t)}_{\substack{\text{Solução particular}\\ \text{de (IV)}}}$$

Considerando a EDO homogênea associada à EDO (IV):

$$\boxed{y'' - 3y' - 4y = 0,} \quad (\text{V})$$

temos a equação característica na forma:

$$\boxed{\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0}$$

$$\begin{array}{cc} \lambda & -4 \\ \lambda & 1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{-4\lambda + \lambda = -3\lambda} \end{array}$$

$$\Longrightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda + 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = 4 \quad \text{ou} \quad \lambda_2 = -1 \longrightarrow$$

raízes reais ≠s

Sistema fundamental de soluções

$$\{e^{4t}, e^{-t}\}$$

∴ a solução geral da EDO (V) pode ser escrita na forma:

$$\boxed{y_H(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t}} \;, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Questão (5). Continuação ...

Note que uma solução particular de (IV) pode ser escrita como segue:

$$Y_p(t) = Y_{p_1}(t) + Y_{p_2}(t)$$

onde $Y_{p_1}(t)$ é uma solução particular da EDO: $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$

e $Y_{p_2}(t)$ representa uma solução particular da EDO: $y'' - 3y' - 4y = -8e^t \cos(2t)$.

Achemos $Y_{p_1}(t)$ e $Y_{p_2}(t)$ via método dos coeficientes indeterminados:

→ Considere a EDO: $\boxed{y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}}$ (VI)

Podemos tentar uma solução particular da forma: $Y_{p_1}(t) = Ae^{2t}$, pois as derivadas de uma função deste tipo seriam múltiplos de e^{2t}.

$$Y_{p_1}'(t) = 2Ae^{2t} \quad \text{e} \quad Y_{p_1}''(t) = 4Ae^{2t}$$

Logo, substituindo em (VI):

$$\cancel{4Ae^{2t}} - 3(2Ae^{2t}) - \cancel{4(Ae^{2t})} = 3e^{2t}$$

$$\Rightarrow -\underset{2}{\cancel{6}}A\cancel{e^{2t}} = \underset{1}{\cancel{3}}\cancel{e^{2t}} \Rightarrow -2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_{p_1}(t) = -\frac{e^{2t}}{2}}$$

→ Analogamente, para a EDO: $\boxed{y'' - 3y' - 4y = -8e^t \cos(2t)}$ (VII)

podemos tentar uma solução particular da forma:

$$Y_{p_2}(t) = Be^t \cdot \cos(2t) + De^t \operatorname{sen}(2t)$$

já que combinações lineares das derivadas de uma função deste tipo podem resultar em um múltiplo de $e^t \cos(2t)$

Questão (5). Continuação...

Derivando:

$$y'_{p_2}(t) = (B+2D)e^{t}\cos(2t) + (D-2B)e^{t}\operatorname{sen}(2t)$$

$$y''_{p_2}(t) = (B+2D+2D-4B)e^{x}\cos(2t) +$$
$$+ (D-2B-2B-4D)e^{t}\operatorname{sen}(2t)$$
$$= (-3B+4D)e^{t}\cos(2t) + (-3D-4B)e^{t}\operatorname{sen}(2t)$$

Assim, para que $y_{p_2}(t)$ seja solução de (VIII), devemos ter:

$$y''_{p_2} - 3y'_{p_2} - 4y_{p_2}$$
$$= (-10B-2D)e^{t}\cos(2t) + (2B-10D)e^{t}\operatorname{sen}(2t)$$
$$= -8e^{t}\cos(2t)$$

Logo: $\begin{cases} -10B-2D = -8 \\ 2B-10D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10B+2D=8 & (5) \\ 2B-10D=0 & + \end{cases}$

$$\sim \begin{cases} 10B+2D=8 \\ 52B \quad = 40 \end{cases} \Rightarrow B = \frac{\cancel{40}^{10}}{\cancel{52}_{13}} \Rightarrow B = \frac{10}{13}$$

$$\Rightarrow 10\left(\frac{10}{13}\right) + 2D = 8 \Rightarrow 2D = 8 - \frac{100}{13} = \frac{104-100}{13} = \frac{4}{13}$$

$$\Rightarrow D = \frac{\cancel{4}^{2}}{13}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow D = \frac{2}{13}$$

Portanto, $\boxed{y_{p_2}(t) = \frac{10}{13}e^{t}\cos(2t) + \frac{2}{13}e^{t}\operatorname{sen}(2t)}$

$$\therefore \boxed{y(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t} - \frac{e^{2t}}{2} + \frac{10}{13}e^{t}\cos(2t) + \frac{2}{13}e^{t}\operatorname{sen}(2t)}$$

6) a) $y(x) = \dfrac{1}{1+Ce^x}$ é a solução geral da

EDO de Bernoulli: $\boxed{y' + y - y^2 = 0}$? (VIII)

Primeiramente $y(x)$ é uma função derivável. Assim, para que seja solução deve satisfazer a EDO:

$$y'(x) = \frac{\cancelto{0}{(1)'} \cdot (1+Ce^x) - (1)\cdot(1+Ce^x)'}{(1+Ce^x)^2} = \frac{-Ce^x}{(1+Ce^x)^2}$$

$$\Longrightarrow y' + y - y^2 = -\frac{Ce^x}{(1+Ce^x)^2} + \frac{1}{1+Ce^x} - \left(\frac{1}{1+Ce^x}\right)^2$$

$$= -\frac{Ce^x}{(1+Ce^x)^2} + \frac{1}{1+Ce^x} - \frac{1}{(1+Ce^x)^2}$$

$$= \frac{\cancel{-Ce^x} + (\cancel{1} + \cancel{Ce^x}) \cancel{-1}}{(1+Ce^x)^2} = 0$$

Assim, $y(x) = \dfrac{1}{1+Ce^x}$ representa a solução geral de (VIII)

$\therefore$ a afirmação é <u>VERDADEIRA</u> (V).

---

b) $\boxed{y'' - y = 0}$ (IX) $\Longrightarrow \lambda^2 - 1 = 0$ Equação característica

$\Longrightarrow \lambda^2 = 1$

$\Longrightarrow \lambda_1 = 1$ ou $\lambda_2 = -1$

Raízes reais distintas

Logo, $\{e^t, e^{-t}\}$ é um conjunto fundamental de soluções da EDO (IX).

Assim, a afirmação é <u>VERDADEIRA</u> (V)

Questão 6. Continuação... X

6 c) $\underbrace{(3x^2y^2 - 2018\ln x)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(e^{3y}\tan y + 2x^3y)}_{N(x,y)}dy = 0$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= 6x^2y \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 6x^2y\end{aligned}\right] = \rightsquigarrow$$ Logo, a EDO é exata.

Desta forma, podemos concluir que a afirmação é **VERDADEIRA (V)**.

---

d) $\boxed{\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{2}{x}\right)y = x^3}$ (EDO de 1ª ordem Linear)

Fator integrante $\rightarrow$ $\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x}$

$= e^{\ln x^2}$

$\Longrightarrow \boxed{\mu(x) = x^2} \neq x^3 \quad \forall x \neq 0$

$\therefore$ A afirmação é **FALSA (F)**.