Aula 7 – Sinais e Sistemas

Solução de Sistemas LIT Causais

André Pinho

Propriedades dos sistemas LIT

- Comutativa
  - Tempo discreto

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

  - Tempo contínuo

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

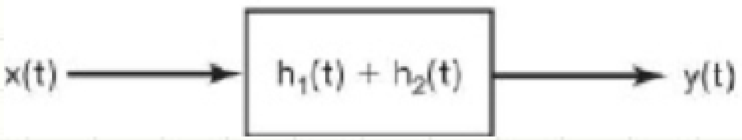
Propriedades dos sistemas LIT

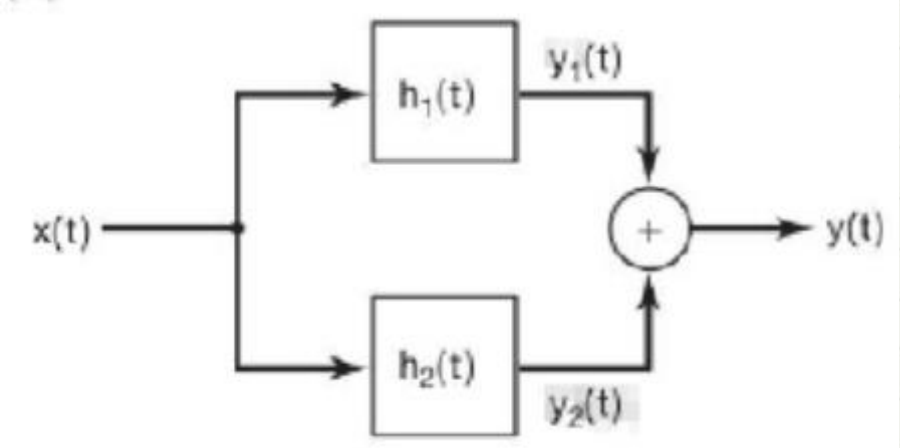
- Distributiva
  - Tempo discreto

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

  - Tempo contínuo

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$





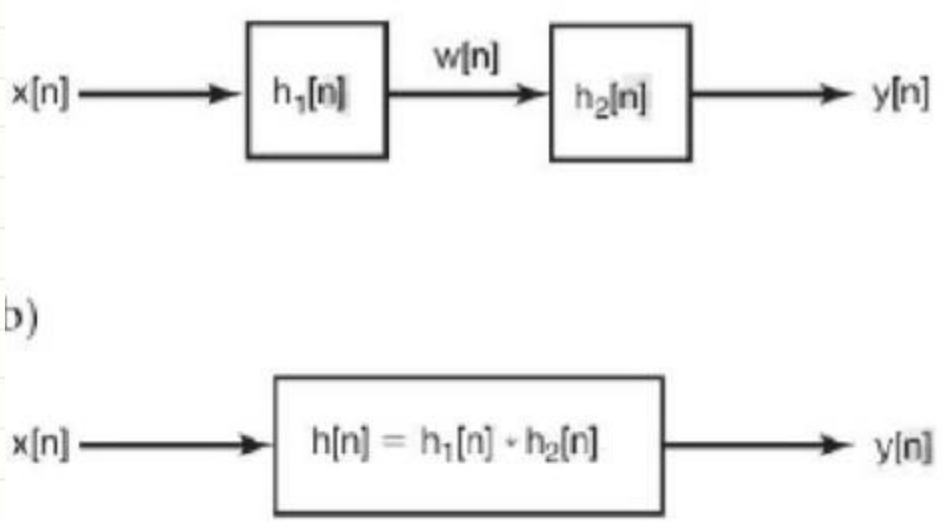
Propriedades dos sistemas LIT

- Associativa
  - Tempo discreto

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

  - Tempo contínuo

$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$



Propriedades dos sistemas LIT

- Sistemas LIT invertíveis

  i. $y_1(t) = x(t) * h_1(t)$

  ii. $x(t) = y_1(t) * h_2(t)$

  iii. $y_1(t) = y_1(t) * h_2(t) * h_1(t)$

$$h_2(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

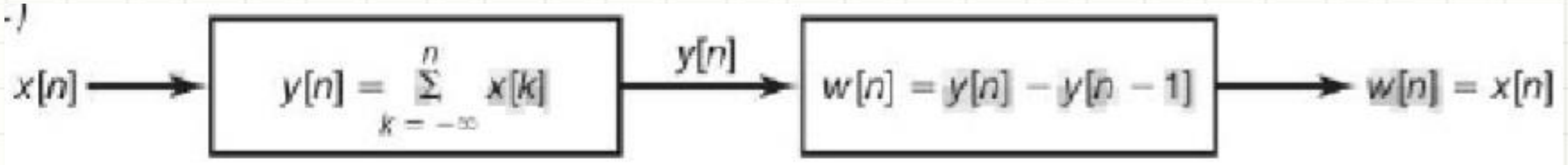
Propriedades dos sistemas LIT

- Sistemas LIT invertíveis: exemplo

$$h[n] = u[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]u[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$



$h[n]$ $h_1[n]$

Propriedades dos sistemas LIT

- Sistemas LIT invertíveis: exemplo

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

i. $h[n] * h_1[n] = u[n] * \{\delta[n] - \delta[n-1]\}$

ii. $h[n] * h_1[n] = u[n] * \delta[n] - u[n] * \delta[n-1]$

iii. $h[n] * h_1[n] = u[n] - u[n-1]$

iv. $h[n] * h_1[n] = \delta[n]$

Propriedades dos sistemas LIT

- Causalidade em sistemas LIT

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

  - O sistema não pode ser antecipativo, ou seja não deve depender de $x[k]$, para $k > n$
  - Para isso, $h[n-k]$ deve ser nulo para todo $k > n$
  - Fazendo $k = 0$
  - $h[n] = 0, n < 0$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Propriedades dos sistemas LIT

- De modo equivalente, a integral de convolução de um sistema LIT causal é dada por:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- A causalidade de um sistema LIT é equivalente à sua resposta ao impulso ser um sinal causal
- Apesar de ser uma propriedade de sistema, tal terminologia é comum para se referir a sinais, sendo causais, se nulos para $t < 0$ (ou $n < 0$)

Propriedades dos sistemas LIT

- Estabilidade: para toda entrada limitada, o sistema produz uma saída limitada
- $|x[n]| < B$, para todo n

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right|$$

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]|$$

$$|x[n-k]| < B$$

$$|y[n]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

Propriedades dos sistemas LIT

- Estabilidade: para toda entrada limitada, o sistema produz uma saída limitada

$$|y[n]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

- Da equação acima, conclui-se se a resposta ao impulso é absolutamente somável, ou seja:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty,$$

- $y[n]$é limitado e o sistema é estável

Propriedades dos sistemas LIT

- De modo equivalente, um sistema de tempo contínuo é estável se sua resposta ao impulso é absolutamente integrável:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

Propriedades dos sistemas LIT

- Estabilidade: exemplo 1

$$y[n] = x[n - n_0],$$

$$h[n] = ?$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = ?$$

Resposta ao degrau unitário

$$s[n] = u[n] * h[n]$$

$$s[n] = h[n] * u[n]$$

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k]$$

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

$$(soma\ cumulativa\ da\ resposta\ ao\ impulso$$

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

(diferença de primeira ordem da resposta ao degrau)

Resposta ao degrau unitário

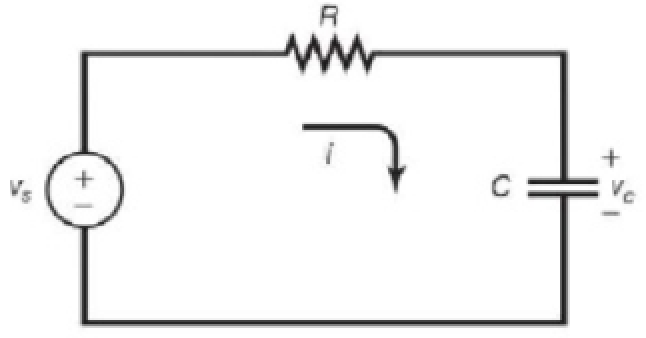
- Em tempo contínuo:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau$$

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Sistemas LIT causais descritos por equações diferencias e de diferenças

Contínuo



$$i(t) = \frac{v_S(t) - v_C(t)}{R}$$

$$i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_C(t) = \frac{1}{RC}v_S(t)$$

Discreto

$$t = n\Delta \quad (\Delta, intervalo\ discreto)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} \rightarrow \frac{v(n\Delta) - v((n-1)\Delta)}{\Delta}$$

$$v[n] = v(n\Delta)$$

$$v_C[n] - \frac{RC}{R+\Delta}v_C[n-1] = \frac{\Delta}{RC+\Delta}v_S[n]$$

Sistemas LIT causais descritos por equações diferencias e de diferenças

- Equação diferencial linear com coeficientes constantes

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

  - A equação acima descreve uma relação IMPLÍCITA entre entrada e saída
  - Para se alcançar a relação EXPLÍCITA (solução), é preciso especificar condições auxiliares
  - Diferentes condições auxiliares levam a diferentes relações entre entrada e saída

Sistemas LIT causais descritos por equações diferencias e de diferenças

- Sistemas LIT causais tem estabelecidas condições auxiliares de REPOUSO

- Método de solução:
  - Obter uma resposta natural: solução homogênea
  - Obter uma resposta forçada: solução particular
  - A solução completa é a superposição (soma) das duas respostas:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Sistemas LIT causais descritos por equações diferencias e de diferenças

- Considerando a entrada $x(t) = Ke^{3t}u(t)$ para o exemplo anterior:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

- Resposta forçada: solução particular com a “cara” da entrada $y_p(t) = Y\, e^{3t}$

$$3Ye^{3t} + 2Ye^{3t} = Ke^{3t}$$

$$Y = \frac{K}{5} \Rightarrow y_p(t) = \frac{K}{5}e^{3t}, t > 0$$

Sistemas LIT causais descritos por equações diferencias e de diferenças

- Solução homogênea: $x(t) = 0$

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$y_h(t) = Ae^{st}$$

$$sAe^{st} + 2Ae^{st} = 0 \Rightarrow Ae^{st}(\mathrm{s} + 2) = 0$$

$$S = -2, \forall A$$

- Solução completa (dependente de A):

$$y(t) = Ae^{-2t} + \frac{K}{5}e^{3t}, t > 0$$

Sistemas LIT causais descritos por equações diferencias e de diferenças

- Sistema LIT causal => condição de repouso:

$$Se\ x(t) = 0, t < t_0 \Rightarrow y(t) = 0, t < t_0$$

$$x(t) = Ke^{3t}u(t)$$
$$x(t) = 0, t < 0$$

- No instante 0, o sistema está em repouso (relaxado)

$$y(0) = A + \frac{K}{5} = 0 \Rightarrow A = -\frac{K}{5}$$
$$y(t) = \frac{K}{5}(e^{3t} - e^{-2t})u(t)$$

Sistemas LIT causais descritos por equações diferencias e de diferenças

- Equações diferenciais de ordem superior

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- Para $N = 0$ ($y(t)$ é uma função EXPLÍCITA de $x(t)$)

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- Para $N \geq 1$, solução forçada e homogênea, além das condições auxiliares serão necessárias

Sistemas LIT causais descritos por equações diferencias e de diferenças

- Equação de diferenças lineares com coeficientes constantes

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- A solução dessa equação pode ser obtida utilizando-se a mesma abordagem utilizada para equações diferencias

Sistemas LIT causais descritos por equações diferencias e de diferenças

- Caminho alternativo (equação recursiva)

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\}$$

- Para calcular $y[n]$ é preciso saber:

$$y[n-1] \ldots y[n-N]$$

- Daí as condições auxiliares necessárias:

$$y[-N], y[-N+1], \ldots, y[-1]$$

Sistemas LIT causais descritos por equações diferencias e de diferenças

- Quando $N = 0$ (equação não recursiva)

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k]$$

- A equação acima é uma função EXPLÍCITA dos valores presentes e prévios da entrada.
  - Como esse sistema pode ser caracterizado?
  - Qual a sua resposta ao impulso?

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0}, 0 \leq n \leq M \\ 0, \qquad\qquad\quad cc \end{cases}$$

Sistemas LIT causais descritos por equações diferencias e de diferenças

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0}, 0 \leq n \leq M \\ 0, \qquad\qquad cc \end{cases}$$

- Importante observar: a resposta ao impulso tem duração finita, ou seja, diferente de 0 apenas para um intervalo específico de *n*

- É comumente chamado de Sistema com Resposta ao Impulso de Duração Finita (FIR)

Sistemas LIT causais descritos por equações diferencias e de diferenças

- Exemplo:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

- Considerando uma condição de repouso inicial e $x[n] = K\delta[n]$
- Neste caso $x[n] = 0 \, para \, n \leq -1$, portanto $y[n] = 0 \, para \, n \leq -1$
- Condição inicial: $y[-1] = 0$

Sistemas LIT causais descritos por equações diferencias e de diferenças

- Aplicando a condição inicial ($y[-1] = 0$)

$$y[0] = x[0] + \frac{1}{2}y[-1] = K$$

$$y[1] = x[1] + \frac{1}{2}y[0] = \frac{1}{2}K$$

$$y[2] = x[2] + \frac{1}{2}y[1] = (\frac{1}{2})^2 K$$

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = (\frac{1}{2})^n K$$

Sistemas LIT causais descritos por equações diferencias e de diferenças

- Para todo $x[n] = K\delta[n]$

$$y[n] = (\frac{1}{2})^n K$$

- Qual a resposta ao impulso desse sistema?

$$h[n] = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, n \geq 0 \\ 0, \qquad cc \end{cases}$$

- Equação recursiva, resposta ao impulso com duração infinita (IIR)

Representação em diagramas de blocos de sistemas de primeira ordem

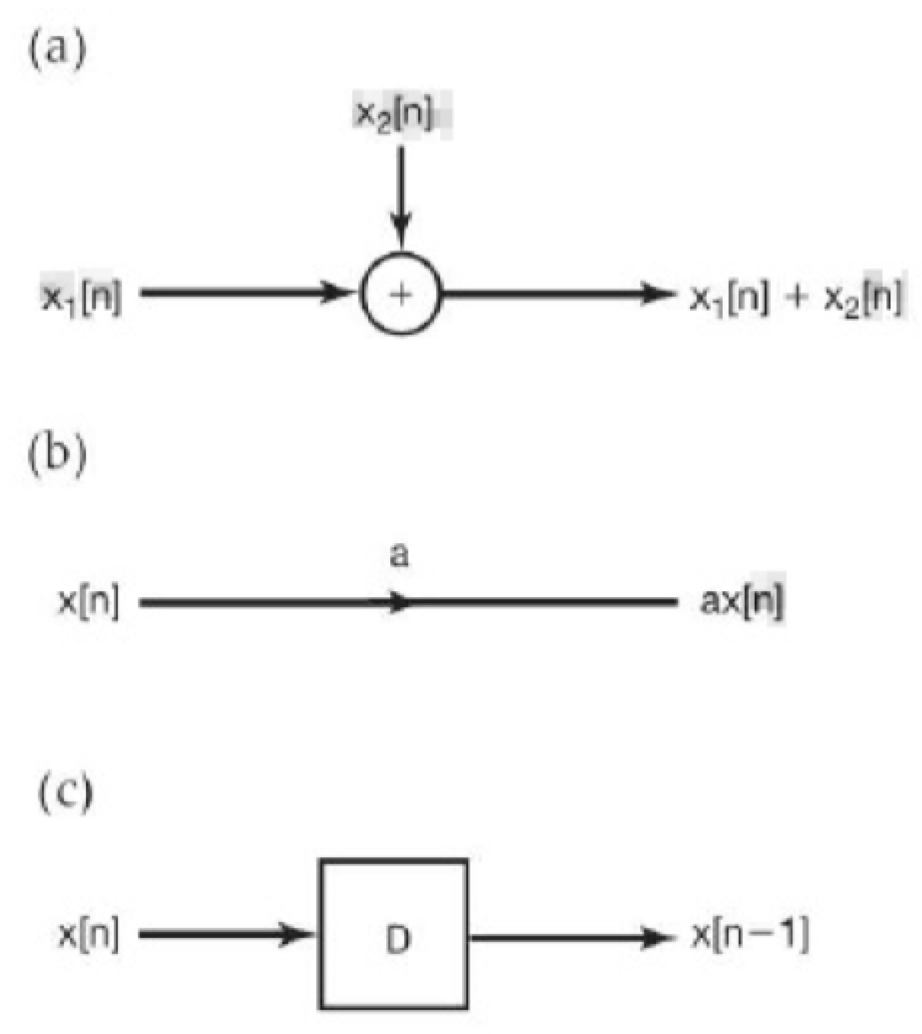
- Representação gráfica auxilia na compreensão das propriedades dos sistemas

- Representam uma forma natural de portabilidade entre sistemas de simulação

- Sugerem formas simples e eficazes para a implementação de equações de diferenças em hardware digital

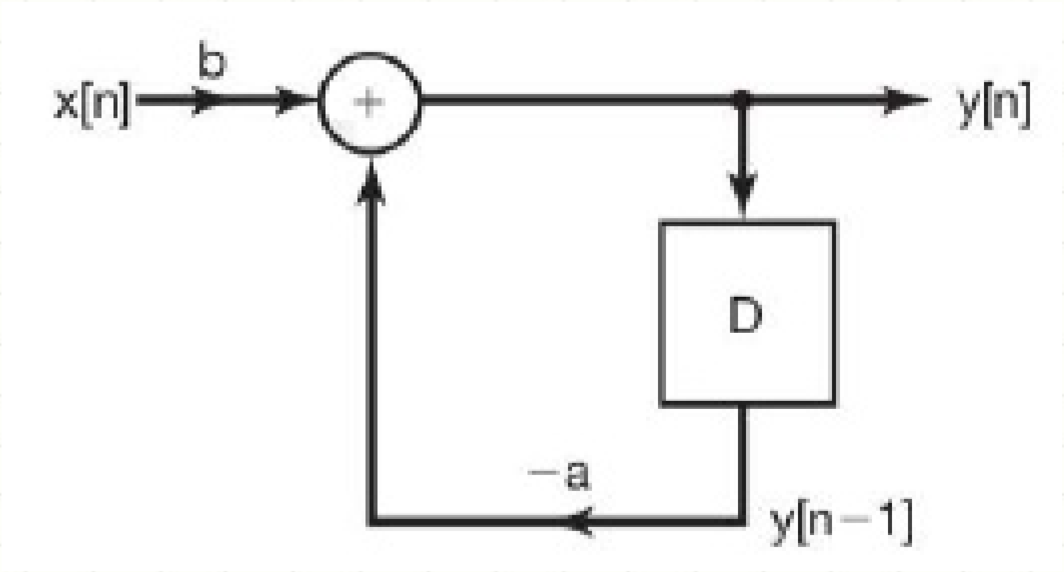
Representação em diagramas de blocos de sistemas de primeira ordem

- Elementos básicos (tempo discreto)



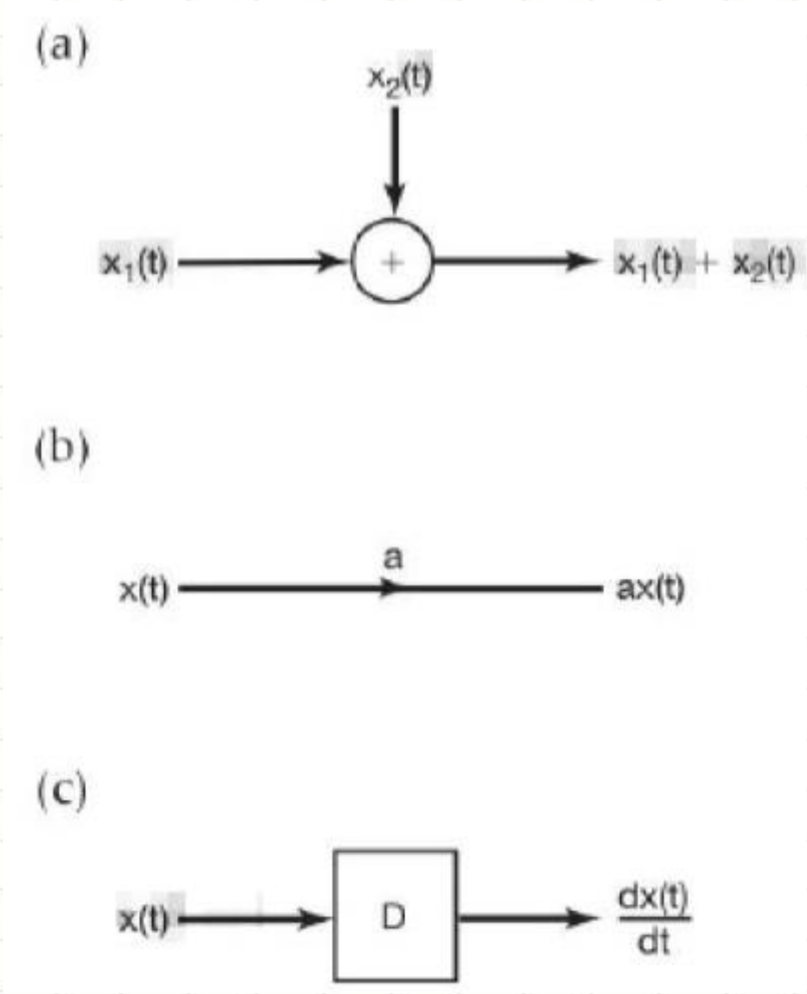
Representação em diagramas de blocos de sistemas de primeira ordem

- Exemplo: $y[n] = -ay[n-1] + bx[n]$



Representação em diagramas de blocos de sistemas de primeira ordem

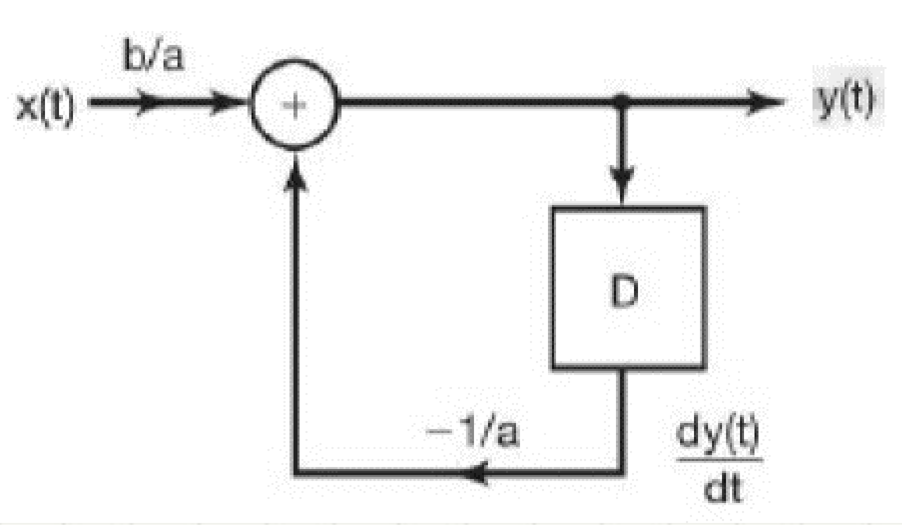
- Elementos básicos (tempo contínuo)



Representação em diagramas de blocos de sistemas de primeira ordem

- Exemplo 2:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$



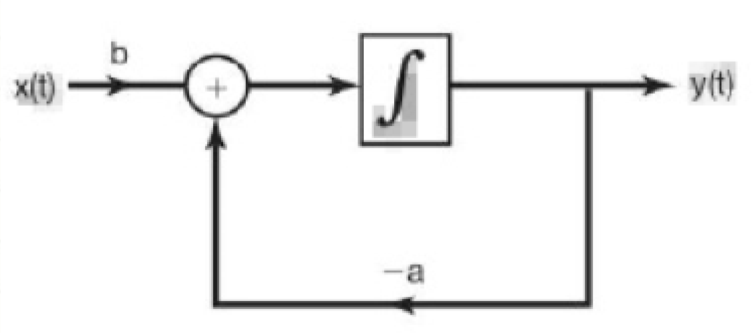
$$y(t) = -\frac{1}{a}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{b}{a}x(t)$$

Representação em diagramas de blocos de sistemas de primeira ordem

- Apesar de válida, a implementação de diferenciadores é difícil e extremamente sensível a ruído:

$$\frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - ay(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} [bx(\tau) - ay(\tau)]d\tau$$



$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} [bx(\tau) - ay(\tau)]d\tau$$