Aula 5 – Sinais e Sistemas

André Pinho

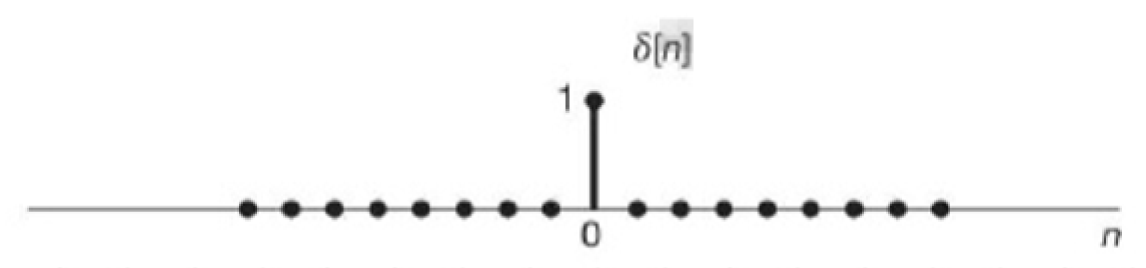
Funções impulso e degrau unitários

Propriedades de sistemas

Funções impulso e degrau unitário (tempo discreto)

- Impulso unitário

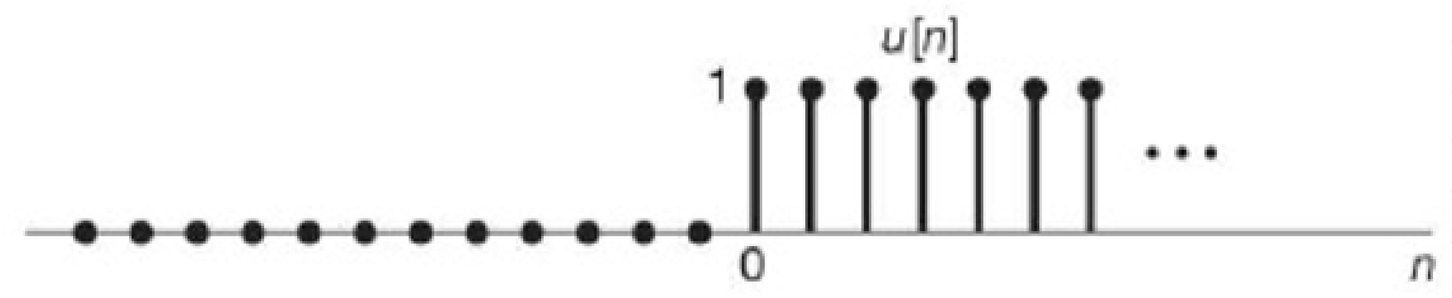
$$\delta[n] = \begin{cases} 0, n \neq 0 \\ 1, n = 0 \end{cases}$$



Funções impulso e degrau unitário (tempo discreto)

- Degrau unitário (soma cumulativa da amostra unitária)

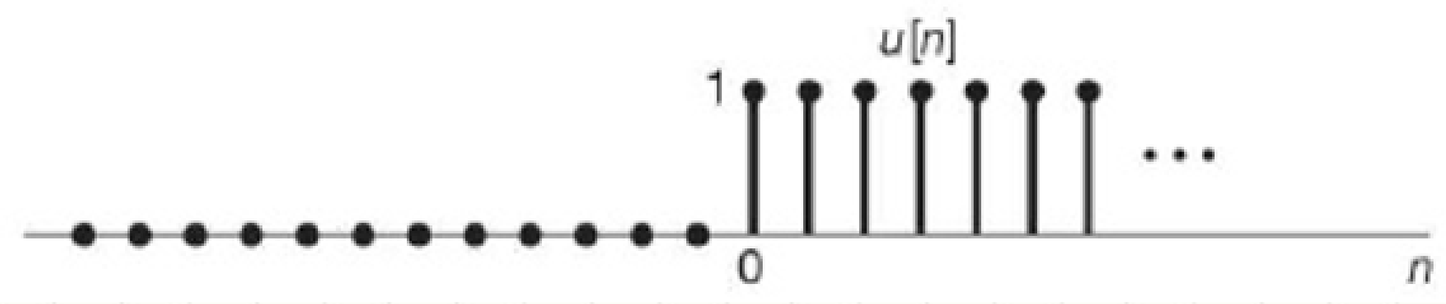
$$u[n] = \begin{cases} 0, n < 0 \\ 1, n \geq 0 \end{cases}$$

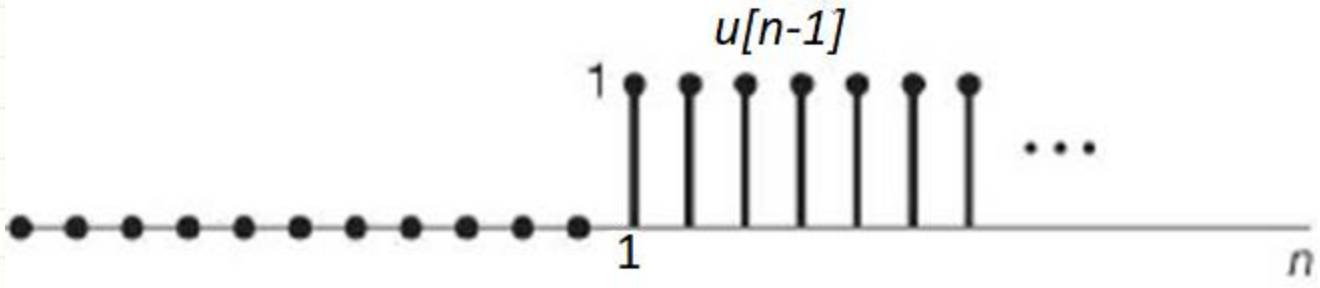


Funções impulso e degrau unitário (tempo discreto)

- Relação entre impulso e degrau unitário

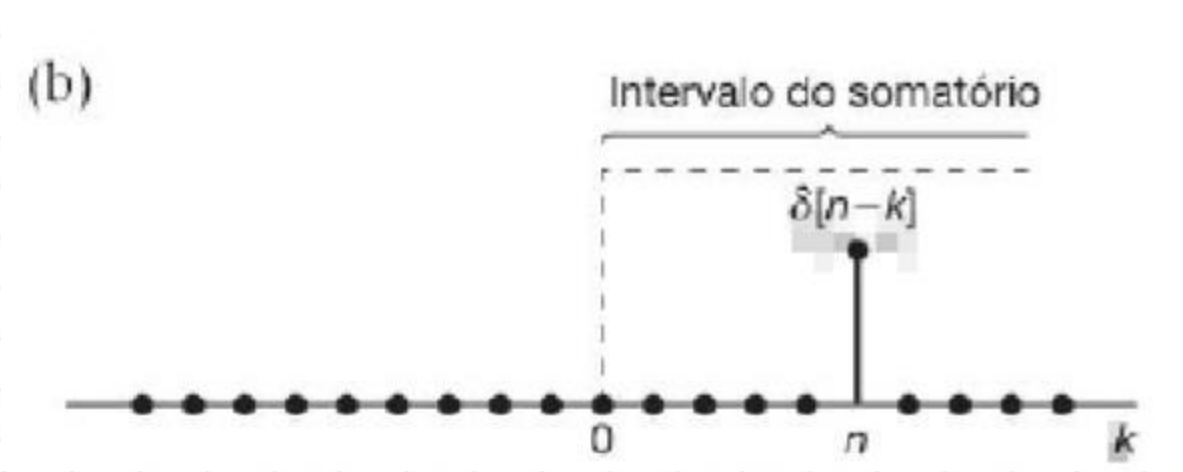
$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$





Funções impulso e degrau unitário (tempo discreto)

$$S = u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$



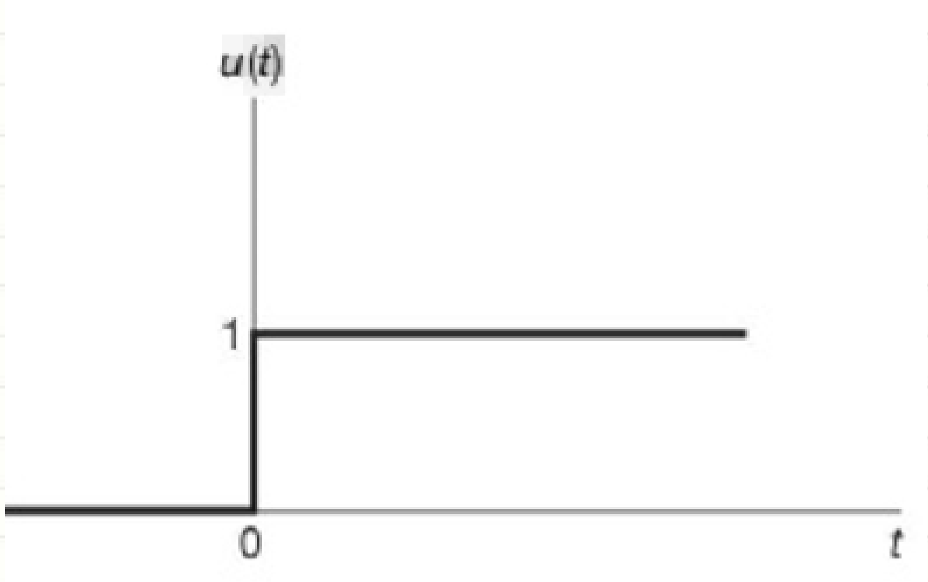
- Amostragem:

$$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k]$$

Funções impulso e degrau unitário (tempo contínuo)

- Degrau unitário

$$u(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}$$



Funções impulso e degrau unitário (tempo contínuo)

- Relação entre degrau e impulso

$$u(t) = \int_{t=0}^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau$$

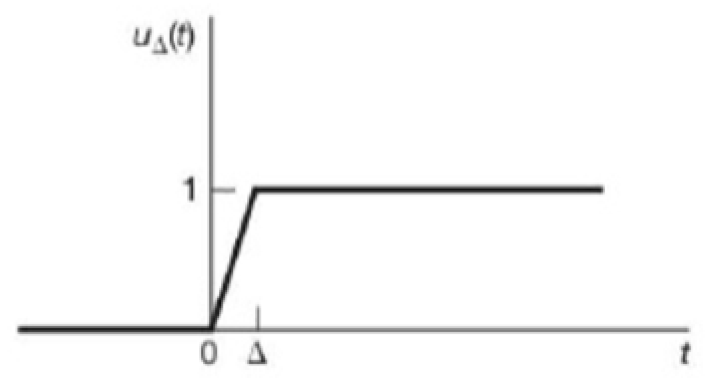
$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}, t = 0$$

Como $u(t)$ é descontínuo em 0, a rigor, não é diferenciável neste ponto.

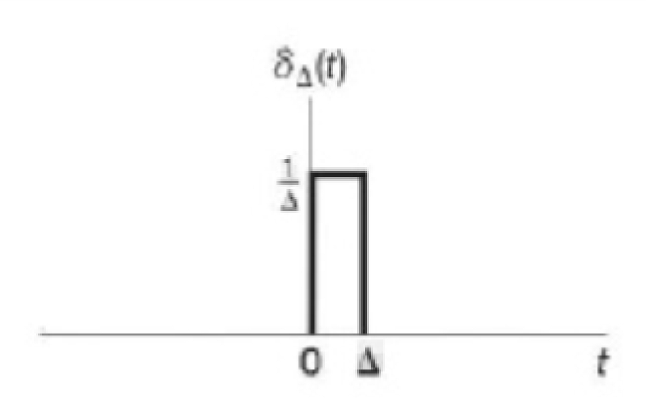
Funções impulso e degrau unitário (tempo contínuo)

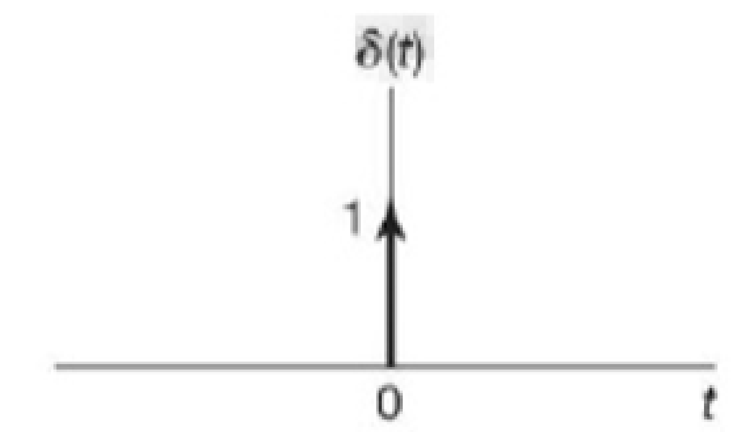
- Relação entre degrau e impulso

$$\delta_\Delta(t) = \frac{du_\Delta(t)}{dt}$$



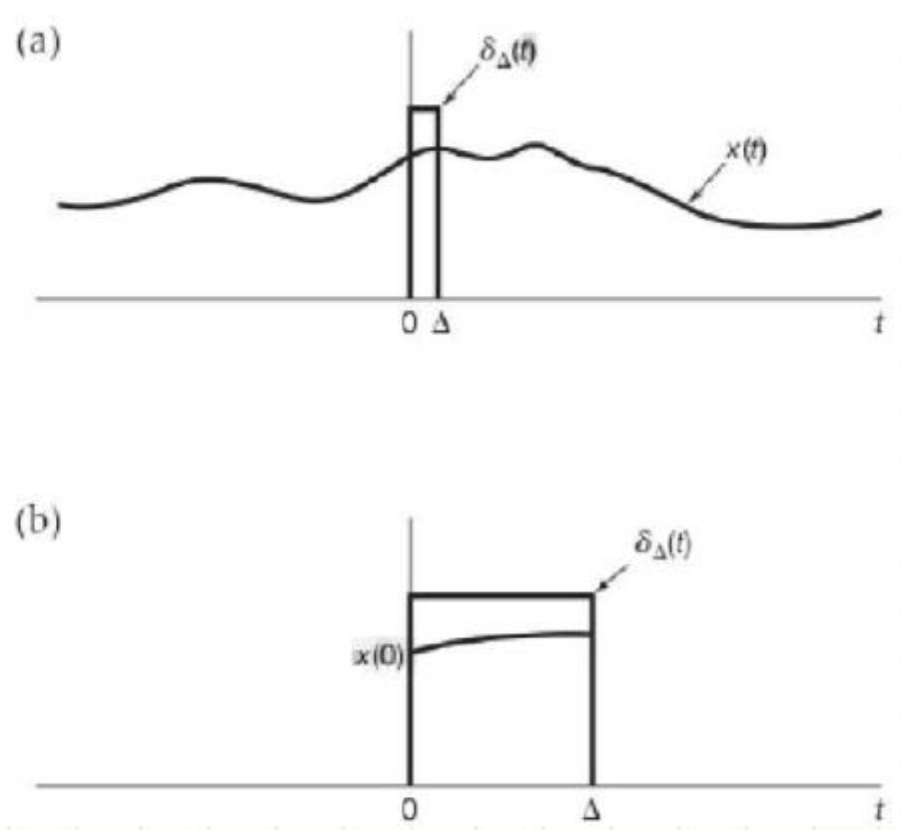
$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$





Amostragem com a função impulso em tempo contínuo

$$x(t) = x(t)\delta_\Delta(t)$$



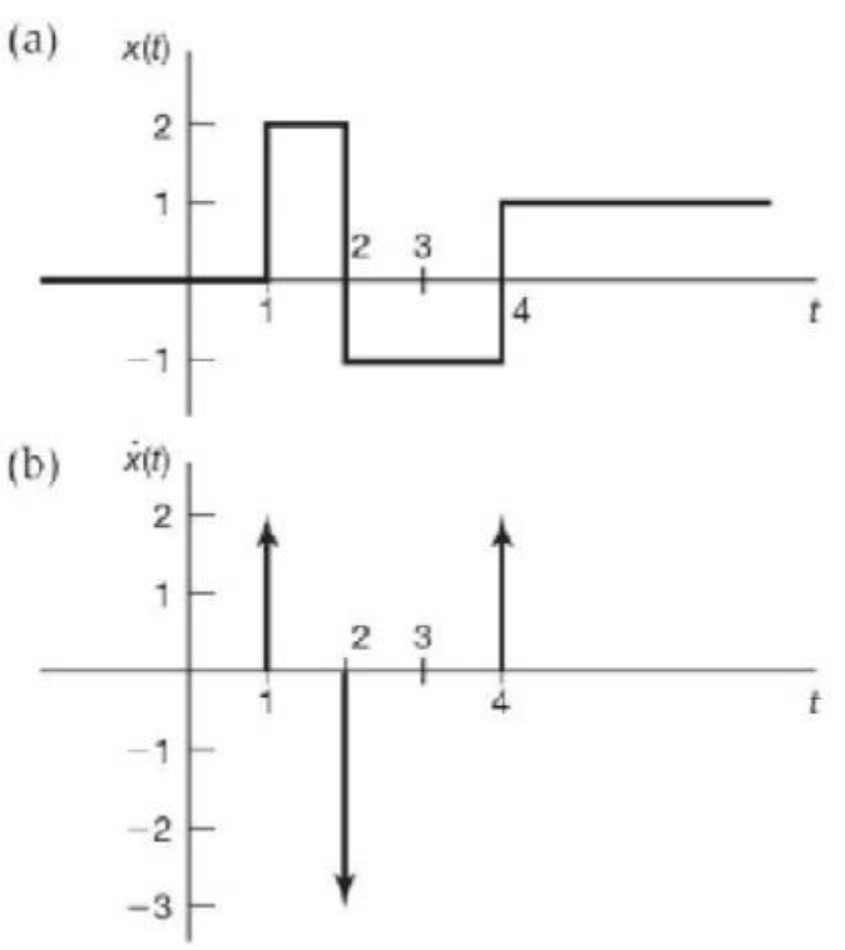
$$x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t)$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)$$

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

Funções impulso e degrau unitário (tempo contínuo)

- Com relação ao sinal $x(t)$ e respectiva derivada $\dot{x}(t)$, verifique:



$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau$$

Funções impulso e degrau unitário

- Relação entre as funções impulso e degrau unitário
  - Tempo discreto:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

  - Tempo contínuo:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Funções impulso e degrau unitário (tempo discreto)

- Considere um sinal periódico definido abaixo

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ -2, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

Com período $T = 2$

A derivada desse sinal está relacionada ao trem de impulsos

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k)\,, T = 2$$

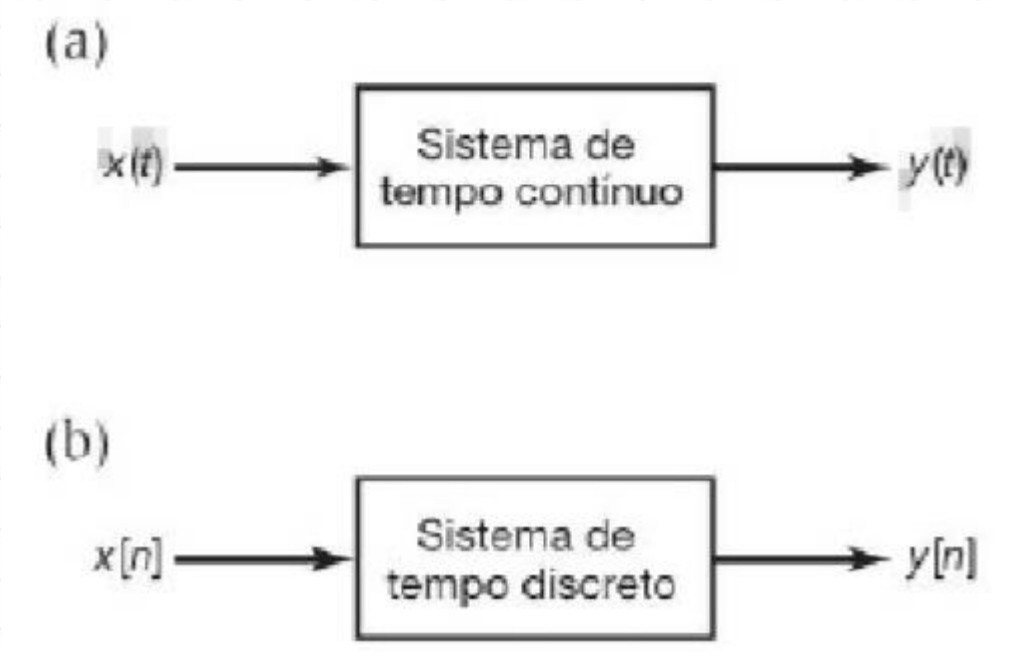
Considerando

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_1 g(t - t_1) + A_2 g(t - t_2)$$

Determine A_1, A_2, t_1 e t_2

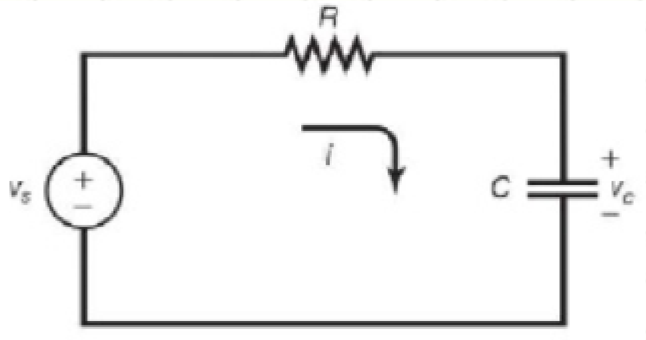
Solução

Sistemas em tempo contínuo e discreto



Sistemas em tempo contínuo e discreto

Contínuo



$$i(t) = \frac{v_S(t) - v_C(t)}{R}$$

$$i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_C(t) = \frac{1}{RC}v_S(t)$$

Discreto

$$t = n\Delta \quad (\Delta, intervalo\ discreto)$$

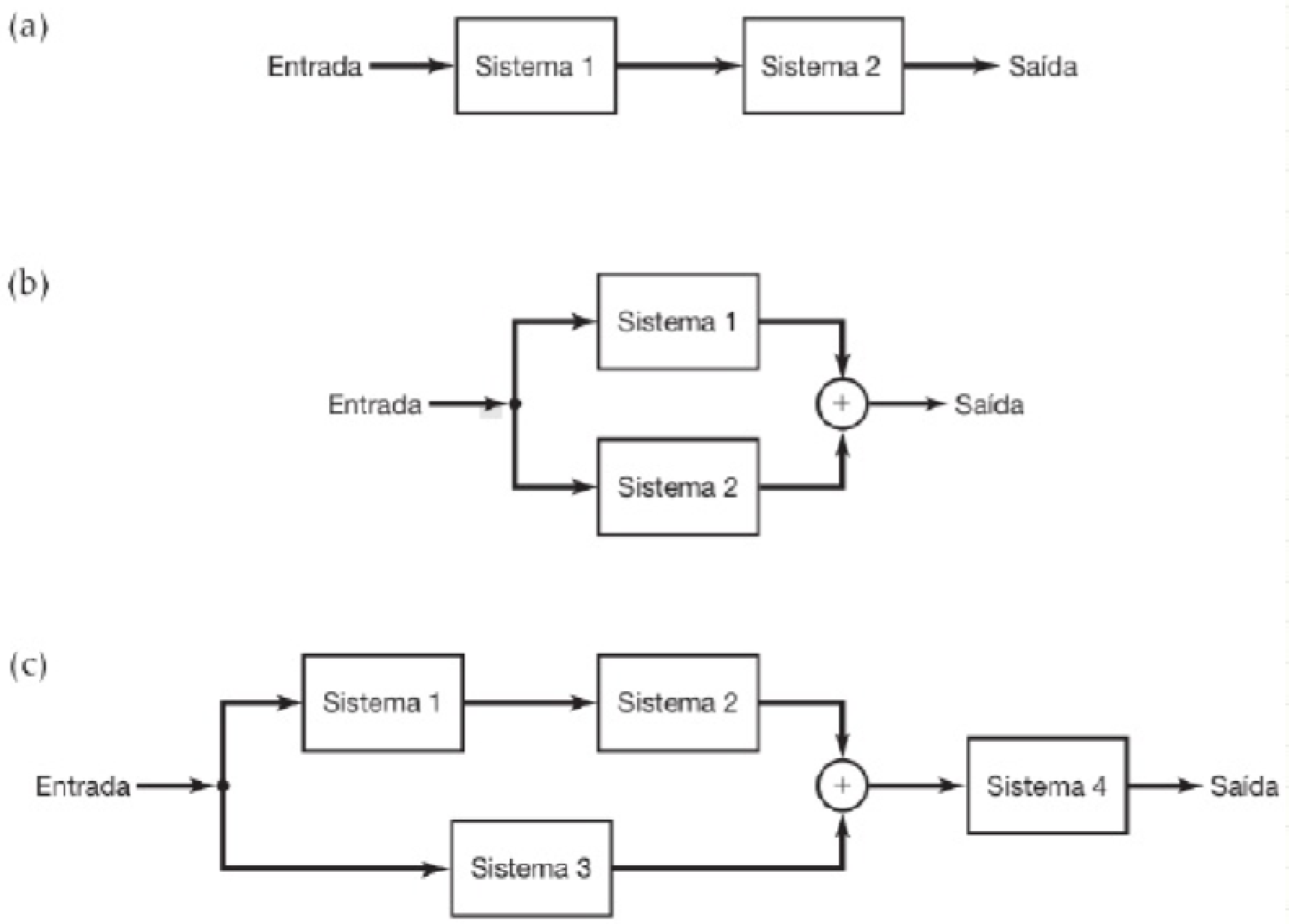
$$\frac{dv(t)}{dt} \to \frac{v(n\Delta) - v((n-1)\Delta)}{\Delta}$$

$$v[n] = v(n\Delta)$$

$$v_C[n] - \frac{RC}{RC + \Delta}v_C[n-1] = \frac{\Delta}{RC + \Delta}v_S[n]$$

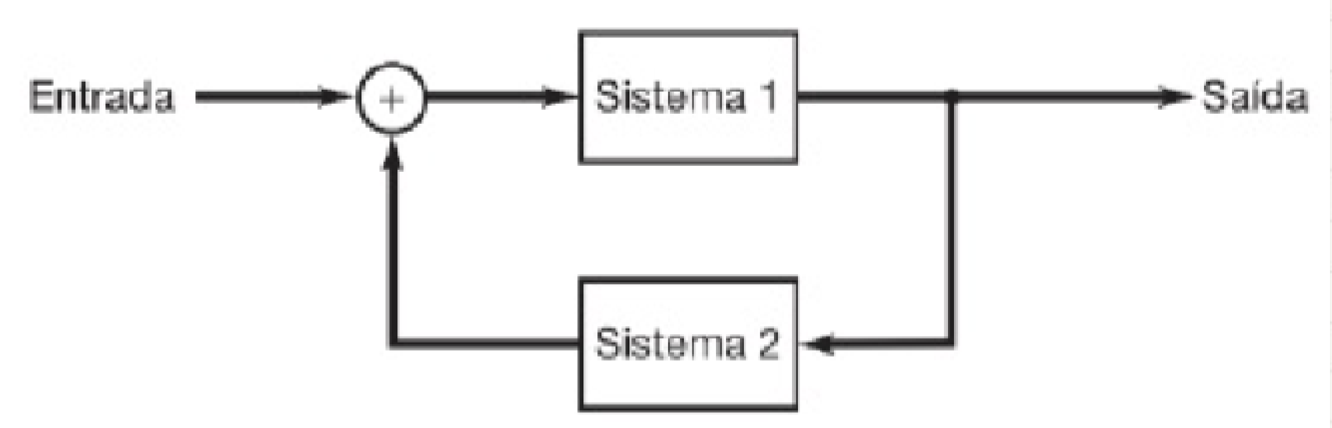
Desenvolvimento

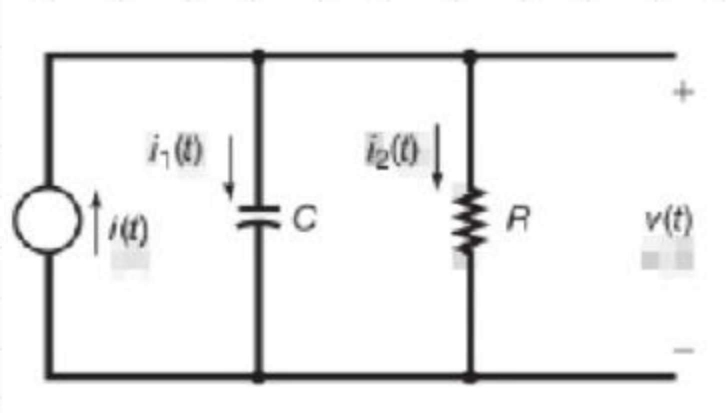
Interconexão de sistemas

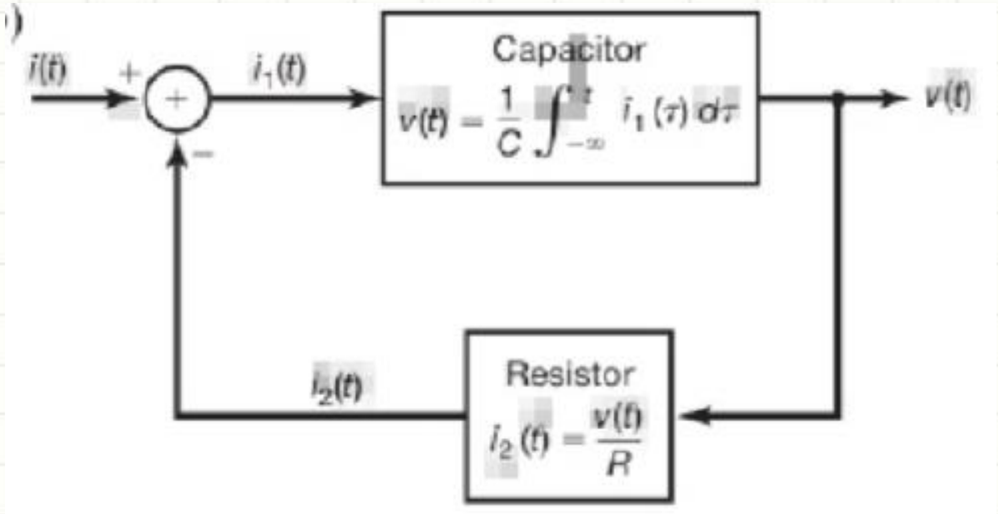


Interconexão de sistemas

- Interconexão com realimentação







Propriedades básicas de sistemas

- Memória
  - Um sistema é classificado como sem memória se a saída em um determinado instante depende apenas de entradas naquele mesmo instante
  - Avalie:

a) $y[n] = (2x[n] - x^2[n])^2$

b) $y(t) = x(t)$

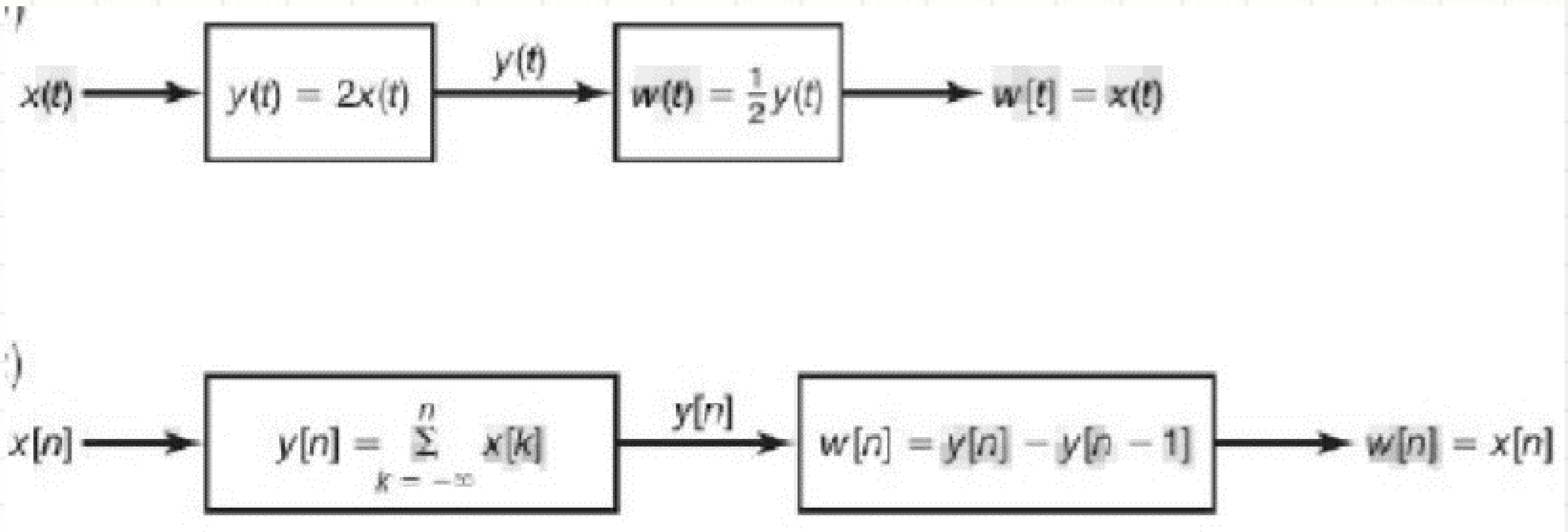
c) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

d) $y[n] = x[n-1]$

e) $y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

Propriedades básicas de sistemas

- Invertibilidade
  - Um sistema é classificado como invertível se entradas distintas levam a saídas distintas



  - Avalie:

a) $y[n] = 0$

b) $y(t) = x^2(t)$

Propriedades básicas de sistemas

- Causalidade
  - Um sistema é causal se a saída, não antecipa qualquer valor futuro da entrada
  - Exemplos de sinais não causais:

$$y[n] = x[n] + x[n+1]$$

$$y(t) = x(t+1)$$

  - Sistemas sem memória são causais
  - Avalie

a) $y[n] = x[-n]$

b) $y(t) = x(t)\cos(t+1)$

Propriedades básicas de sistemas

- Estabilidade
  - Um sistema é classificado estável se para uma entrada limitada o mesmo produz uma saída limitada
  - Avalie:

a) $y(t) = tx(t)$

b) $y(t) = e^{x(t)}$

Propriedades básicas de sistemas

- Invariância no tempo
  - Um sistema é classificado como invariante no tempo se o deslocamento no tempo do sinal de entrada resulta em um deslocamento no tempo idêntico no sinal de saída:

$$Se\ x[n] \rightarrow y[n] \Rightarrow x[n-k] \rightarrow y[n-k]$$

  - Avalie:

a) $y(t) = \sin[x(t)]$

b) $y[n] = nx[n]$

c) $y(t) = x(2t)$

Solução

Propriedades básicas de sistemas

- Linearidade
  - Um sistema é classificado como linear se a entrada composta pela soma ponderada de diversos sinais, resultar em uma saída que é a soma ponderada das respostas do sistema a cada um desses sinais. (Propriedade da Superposição)

$y_1(t)\ resposta$ à $x_1(t)$ e $y_2(t)\ resposta\ a\ x_2(t)$

– O sistema é linear se:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

ou

$$ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n]$$

Propriedades básicas de sistemas

- Linearidade
  - Avalie:

a) $y(t) = tx(t)$

b) $y(t) = x^2(t)$

c) $y[n] = \mathcal{R}e\{x[n]\}$

d) $y[n] = 2x[n] + 3$

Solução