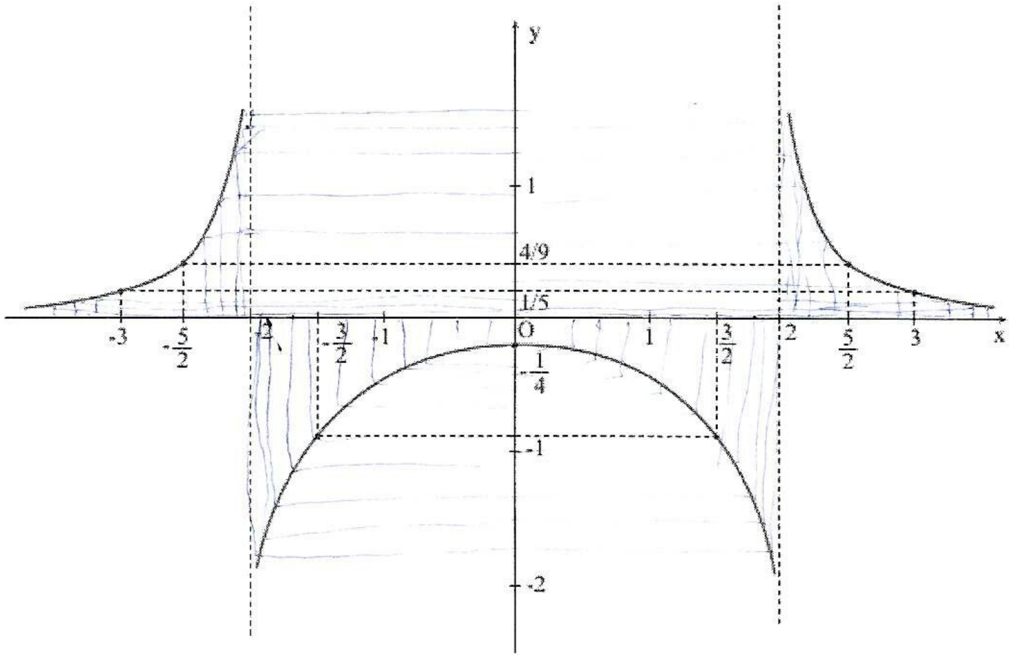
ESCOLA DE ENGENHARIA DE VOLTA REDONDA (EEIMVR-UFF)
Departamento de Ciências Exatas (VCE)

Primeira Avaliação (P1) - 2017/2

Disciplina:	**Cálculo I** | Data: **17/10/2017**	**NOTA**
Professor:	Yoisell Rodríguez Núñez	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen(10x)}{x}$
Aluno(a):	—	

1. (2,5 pontos) O gráfico a seguir representa uma função $y = f(x)$. **Identifique** o elemento na primeira coluna abaixo, com sua correspondente interpretação na segunda coluna. **Justifique** sua resposta.



I) Dom f	<u>IV</u> assíntota horizontal
II) $f(0)$	<u>VI</u> 0
III) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$	<u>II</u> $-\frac{1}{4}$
IV) $y = 0$	<u>III</u> $+\infty$
V) f é	<u>IX</u> $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
VI) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$	<u>X</u> $\frac{8}{9}$
VII) f não é	<u>VIII</u> assíntota vertical
VIII) $x = -2$	<u>VII</u> derivável em $x = 2$
IX) Im f	<u>I</u> $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$
X) $f(-\frac{5}{2}) + f(\frac{5}{2})$	<u>V</u> descontínua em $x = -2$

<u>Obs</u>: Nesta questão, cada acerto vale 0,25 pontos.

2. (1,5 pontos) Seja $g(x) = \begin{cases} -x-2, & \text{se } x \leq -2 \\ \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{se } -2 < x \leq 6 \\ 2018, & \text{se } x > 6 \end{cases}$

Podemos afirmar que g é contínua:

0,5 a) Em $x = -2$?

0,5 b) Em $x = 6$?

0,5 c) Em $x = 2017$?

Justifique sua resposta.

3. (3,0 pontos) Dados os limites:

I) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4\lambda x^5 - 3x^2 + 2}{x^3 + 5x - \lambda}$ II) $\lim_{x \to 0^+} \ln(x)(sen(\lambda x))$ III) $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\lambda \ln x}}$

0,6 a) **Identifique** as indeterminações geradas por cada limite acima.

2,4 b) **Calcule** os três limites.

Observação: Use a constante λ como sendo o primeiro número (diferente de zero) da sua matrícula.

↪ $\lambda = 1$ ou 2.

4. (3.0 pontos) Analise as afirmações abaixo e marque V para o(s) resultado(s) verdadeiro(s) e F para o(s) resultado(s) falso(s). **Justifique** sua resposta.

1,0 I) V Se $h(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{4}{e^x}$ então $h'(x) = 3x^2 - 6x - \frac{4}{e^x}$

1,0 II) F Se $m(x) = \frac{5\ cos(x)}{sen(2x)+3}$ então $m'(x) = \frac{-5\ sen(x)}{cos(2x)}$

1,0 III) F Se $n(x) = \ln(x^{2017} - 10)$ então $n'(x) = \frac{1}{x^{2017}-10}$

Se não puder destacar-se pelo talento, vença pelo esforço.

BOA PROVA!!!

Gabarito - Cálculo I - 2017/2

Prof. Yoisell R. N.

1

I) Observa-se do gráfico que $x=2$ e $x=-2$ são os únicos valores reais que não pertencem ao domínio de definição da função.

Logo, $\boxed{\text{Dom } f = (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)}$

II) Vemos no gráfico que a imagem de 0 é igual a $-\frac{1}{4}$. (Intersegão da função $y=f(x)$ com o eixo dos y).

Assim, $\boxed{f(0) = -\frac{1}{4}}$

III) $\boxed{\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty}$ ← imediato (do gráfico). Na medida em que o x "se aproxima" de -2 pela esquerda, a função cresce indefinidamente

IV) Observe que $\boxed{y=0 \text{ é uma assíntota horizontal}}$ para $y=f(x)$.

De fato: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$.

V) $\boxed{f \text{ é descontínua em } x=-2}$. Efetivamente, $\nexists \lim_{x\to -2} f(x)$ pois:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty \neq -\infty = \lim_{x\to -2^+} f(x)$$

ou seja, temos limites laterais distintos.

VI) $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0}$ ← imediato (do gráfico)
De fato, conforme já vimos, a reta $y=0$ representa uma assíntota horizontal para $f(x)$.

VII) $\boxed{f \text{ não é derivável em } x=2}$

Observe que: $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ e

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

Assim, a função $f(x)$ é descontínua em $x=2$ e, portanto, não é derivável nesse ponto.

Questão (1) ... Continuação ...

VIII) $\boxed{x=-2 \text{ é uma assíntota vertical}}$ de $f(x)$, já que: $\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$

e

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$

IX) $\boxed{Im f = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ ← Do gráfico, podemos observar que o único valor real que não pertence à imagem da função $f(x)$ é $y=0$.

X) $\boxed{f\left(-\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{4+4}{9} = \frac{8}{9}}$

(2) $g(x) = \begin{cases} -x-2, & \text{se } x \leq -2 \\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{se } -2 < x \leq 6 \\ 2018, & \text{se } x > 6 \end{cases}$

a) g contínua em $x=-2$?

(i) $-2 \in Dom\, g$. De fato, $g(-2) = -(-2)-2 = 2-2 = 0$

(ii) $\exists \lim_{x\to -2} g(x)$? Precisamos estudar os limites laterais:

$$\lim_{x\to -2^-} g(x) = \lim_{x\to -2} (-x-2) = -(-2)-2 = 2-2 = 0$$

$$\lim_{x\to -2^+} g(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to -2} (x+2) = -2+2 = 0$$

ou $= \frac{(-2)^2-4}{-2-2} = \frac{4-4}{-4} = \frac{0}{-4} = 0$

Assim, $\exists \lim_{x\to -2} g(x) = 0$ (pois existem os limites laterais e eles são iguais)

(iii) Finalmente, note que: $\lim_{x\to -2} g(x) = 0 = g(-2)$.

Portanto, g é contínua em $x=-2$.

b) Continuidade em $x=6$?

(i) $6 \in Dom\, g$ já que: $g(6) = \frac{6^2-4}{6-2} = \frac{36-4}{4} = \frac{32}{4} = 8$

(ii) $\exists \lim_{x\to 6} g(x)$? Limites laterais: $\lim_{x\to 6^-} g(x) = \lim_{x\to 6} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{6^2-4}{6-2} = \frac{36-4}{4} = \frac{32}{4} = 8$

Questão (2) b). Continuação...

$$\lim_{x\to 6^+} g(x) = \lim_{x\to 6} 2018 = 2018 \neq 8 = \lim_{x\to 6^-} g(x)$$

Limites laterais distintos $\Longrightarrow \nexists \lim_{x\to 6} g(x)$.

Logo, <u>g é descontínua em $x=6$.</u>

c) g é contínua em $x=2017$? Sim!, pois temos:

$g(2017)=2018$ (já que: $2017>6$)

e

$$\lim_{x\to 2017^+} g(x) = \lim_{x\to 2017^-} g(x) = 2018$$

Portanto, podemos concluir que a <u>função $y=g(x)$ é contínua em $x=2017$.</u>
De fato, a função é constante ($=2018$) $\forall x>6$, que é uma função contínua em todo seu domínio, em particular em $x=2017$.

(3) a) Identificando as <u>indeterminações</u>:

I) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{4\lambda x^5 - 3x^2+2}{x^3+5x-\lambda}$ $\to$ $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$ (numerador $\to -\infty$, denominador $\to -\infty$)

II) $\lim_{x\to 0^+} \underbrace{h(x)}_{\to -\infty}\cdot \underbrace{\text{sen}(\lambda x)}_{\to 0}$ $\to$ $\boxed{\infty \times 0}$

III) $\lim_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{\to 0}^{\overbrace{\frac{1}{\lambda \ln x}}^{\to 0}}$ $\to$ $\boxed{0^0}$

b) Cálculo dos Limites:

I) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{4\lambda x^5-3x^2+2}{x^3+5x-\lambda} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{20\lambda x^4-6x}{3x^2+5} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{80\lambda x^3-6}{6x}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{\cancel{240}^{40}\lambda x^2}{\cancel{6}_1} = 40\lambda\cdot(+\infty) = +\infty$$ (independentemente do $\lambda>0$) $\lambda \in \{1,2\}$

Questão (3) b) Continuação ...

(2ª via)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4\lambda x^5 - 3x^2+2}{x^3+5x-\lambda} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4\lambda x^{\cancel{5}\,2}}{\cancel{x^3}} = \lim_{x\to-\infty} 4\lambda x^2$$

$$= 4\lambda\cdot(+\infty) = +\infty \quad \forall \lambda \in \{1,2\}$$

(3ª via)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4\lambda x^5-3x^2+2}{x^3+5x-\lambda} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overset{\nearrow +\infty}{x^{\cancel{5}\,2}}\left[4\lambda - \overset{\nearrow 0}{\cancel{\frac{3}{x^3}}} + \overset{\nearrow 0}{\cancel{\frac{2}{x^5}}}\right]}{\cancel{x^3}\left[1 + \underset{\searrow 0}{\cancel{\frac{5}{x^2}}} - \underset{\searrow 0}{\cancel{\frac{\lambda}{x^3}}}\right]} = 4\lambda(+\infty)$$

$$= +\infty$$

$$\forall \lambda \in \{1,2\}$$

Conclusão:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{4\lambda x^5-3x^2+2}{x^3+5x-\lambda} = +\infty}$$

II) $\lim_{x\to 0^+} \ln(x)\cdot \operatorname{sen}(\lambda x)$ ↳ $\infty\times 0$ $= \lim_{x\to0^+} \dfrac{\overset{\nearrow -\infty}{\ln x}}{\underset{\searrow +\infty}{\cancel{\dfrac{1}{\underset{\searrow 0}{\operatorname{sen}(\lambda x)}}}}} \to \dfrac{\infty}{\infty}$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\lambda\cos(\lambda x)}{\operatorname{sen}^2(\lambda x)}}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2(\lambda x)}{-\lambda\cos(\lambda x)}\right) \to \frac{0}{0}$$

$$= -\lim_{x\to0^+} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda x}}_{\to 1\ (1^{\circ}\text{ Limite Fundamental})}\cdot \frac{\overset{\nearrow 0}{\operatorname{sen}(\lambda x)}}{\underset{\searrow 1}{\cos(\lambda x)}} = 0$$

(2ª via)

ou

$$\underset{L'H}{=} -\lim_{x\to0^+} \frac{2\lambda\operatorname{sen}(\lambda x)\cdot\cos(\lambda x)}{\lambda\cos(\lambda x) - \lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}$$

$$= -\lim_{x\to0^+} \frac{2\cancel{\lambda}\,\overset{\nearrow 0}{\operatorname{sen}(\lambda x)}\cdot\overset{\nearrow 1}{\cos(\lambda x)}}{\cancel{\lambda}\left[\underset{\searrow 1}{\cos(\lambda x)} - \underset{\searrow 0}{x\operatorname{sen}(\lambda x)}\right]} = 0 \quad \forall \lambda\in\{1,2\}$$

$\therefore$ $\boxed{\lim_{x\to0^+} \ln(x)\cdot\operatorname{sen}(\lambda x) = 0}$ ← independentemente de $\lambda \in \{1,2\}$.

Obs.:

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\lambda x)}\right)' = \frac{0 - \lambda\cos(\lambda x)}{\operatorname{sen}^2(\lambda x)} = -\frac{\lambda\cos(\lambda x)}{\operatorname{sen}^2(\lambda x)}$$

ou

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\lambda x)}\right)' = \left(\operatorname{csc}(\lambda x)\right)'$$

$$= -\lambda\csc(\lambda x)\cdot\cot(\lambda x).$$

Questão (3) b) Continuação ...

III) $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\lambda \ln x}} \sim 0^0$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x \\ g(x) = \dfrac{1}{\lambda \ln x} \end{array}\right] \Rightarrow f(x)^{g(x)} = x^{\frac{1}{\lambda \ln x}}$$

Metodologia para calcular Limites que geram indeterminações do tipo 0^0:

1º passo: Considerar: $\lim_{x\to 0^+} g(x) \cdot \ln f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\lambda \cancel{\ln x}} \cdot \cancel{\ln x} = \dfrac{1}{\lambda} = L$ $\quad \dfrac{\infty}{\infty}$

(2ª via) ou $\stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{\lambda}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\cancel{x}} \cdot \dfrac{\cancel{x}}{\lambda}$

(3ª via) ou $\stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\lambda} = 1$

2º passo: Conclua que:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\lambda \ln x}} = e^L = e^{\frac{1}{\lambda}}$$

Portanto, $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\lambda \ln x}} = e^{\frac{1}{\lambda}} = \begin{cases} e, & \text{se } \lambda = 1 \\ \sqrt{e}, & \text{se } \lambda = 2. \end{cases}$

---

(4) I) $h(x) = x^3 - 3x^2 + \dfrac{4}{e^x} = x^3 - 3x^2 + 4e^{-x}$

$\Rightarrow h'(x) = (x^3 - 3x^2 + 4e^{-x})' = 3x^2 - 6x + 4e^{-x} \cdot (-1)$

derivada da soma e Regra da cadeia

$= 3x^2 - 6x - 4e^{-x}$

$= 3x^2 - 6x - \dfrac{4}{e^{-x}}$

Logo, a afirmação é <u>VERDADEIRA</u> (V).

II) $m(x) = \dfrac{5\cos(x)}{\operatorname{sen}(2x)+3} \Rightarrow m'(x) = \dfrac{(-5\operatorname{sen} x)[\operatorname{sen}(2x)+3] - (5\cos x)(2\cos(2x))}{[\operatorname{sen}(2x)+3]^2}$

derivada do quociente e Regra da cadeia

$= \dfrac{(-5\operatorname{sen} x)\cdot[\operatorname{sen}(2x)+3] - 10(\cos x)(\cos(2x))}{[\operatorname{sen}(2x)+3]^2}$

$\neq \dfrac{-5\operatorname{sen} x}{\cos(2x)}$ Assim, a afirmação é <u>FALSA</u> (F).

Questão (4) Continuação...

III) $n(x) = \ln(x^{2017} - 10)$

$\Downarrow$ Derivada do logaritmo e Regra da cadeia

$$n'(x) = \frac{1}{x^{2017}-10} \cdot (x^{2017} - 10)'$$

$$= \frac{1}{x^{2017}-10} \cdot 2017 \cdot x^{2016}$$

$$= \frac{2017 \cdot x^{2016}}{x^{2017}-10}$$

Portanto, podemos concluir que a afirmação é FALSA (F).