UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

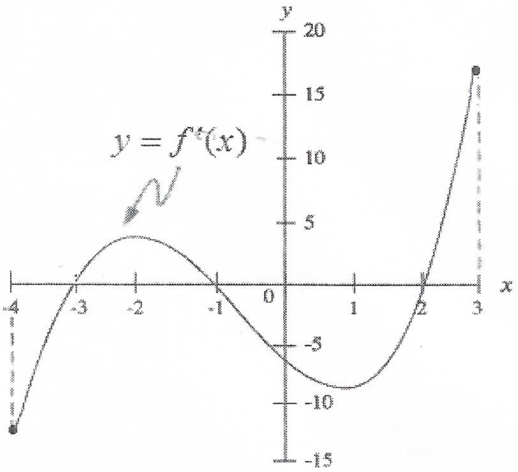
Cálculo I – P2 (2017/1)

04/07/2017

Prof. Yoisell Rodríguez Núñez

Nome: YOISELL RODRÍGUEZ NÚÑEZ **Nº. Matrícula:** —

1. [2,50 *pontos*] **Dado o gráfico** à direita, representando a **primeira derivada da função** $f(x)$ no intervalo $[-4,3]$. Faça um **esboço do gráfico da função** $y = f(x)$ no intervalo considerado.



2. [2,00 *pontos*] Flávia Gélida, jornalista que apresenta a previsão do tempo no Jornal "Hoje Gelado", alerta as pessoas que moram no município Muito Frio que tirem seus agasalhos do guarda-roupa, pois está chegando uma frente fria nesta quarta-feira. A temperatura T (em °C) t horas após a meia-noite é dada pela função:

$$T(t) = 0{,}1 \cdot (80 - 60t + 10t^2), \quad 0 \le t \le 12.$$

a. Em que **instante**, após meia-noite, é atingida a **temperatura mínima**? Qual o **valor** dessa temperatura?

3. [1,00 *ponto*] **Verifique** as **condições** do **Teorema do Valor Médio** para a função $g(x) = x^4 - 8x^2$, no intervalo $[-1,1]$ e determine o(s) valor(es) de x_0 correspondente(s) à conclusão do Teorema.

4. [3,00 *pontos*] Calcule as seguintes **integrais**:

1,00 pto $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$ 1,00 $\displaystyle\int e^x \cos(e^x)\,dx$ 1,00 $\displaystyle\int (x+1)e^{-x}\,dx$

5. [1,50 *pontos*] Encontre a **área da região** do plano **limitada pelas curvas**: $y = x + 4$ e $y = \dfrac{x^2}{2}$.

6. [1,00 *ponto*] (ponto extra) **Esboce** o gráfico de uma função $y = h(x)$ que satisfaz as seguintes condições:

a. $h'(x) > 0, \quad \forall\, x \ne 2.$

b. Tem uma assíntota vertical em $x = 2$.

c. $h''(x) > 0$, se $x < 2$ ou $x > 4$.

d. $h''(x) < 0$, se $2 < x < 4$.

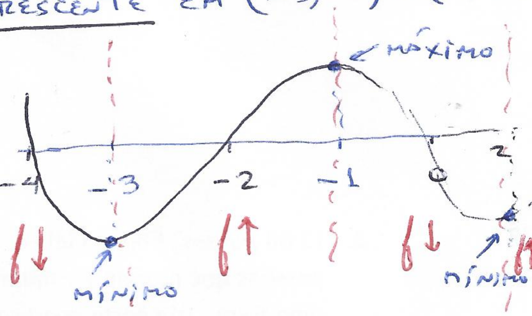
Assim como problemas surgem, as soluções aparecem... **BOA PROVA!!!**

P2 - Cálculo I
2017/1
Prof. Yoisell R. N.
GABARITO

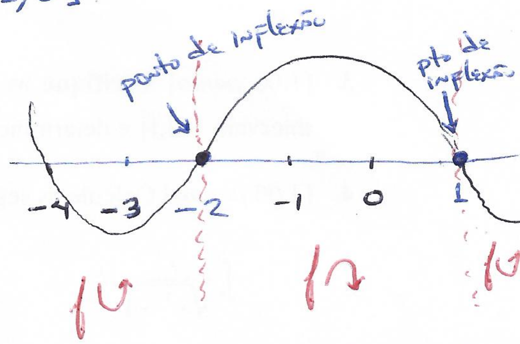
1) Do gráfico da derivada de $f(x)$, observamos que:

- $\boxed{f'(x) < 0}$ em $[-4,-3) \cup (-1,2) \Longrightarrow$ f é decrescente em $[-4,-3) \cup (-1,2)$
- $\boxed{f'(x) > 0}$ em $(-3,-1) \cup (2,3] \Longrightarrow$ f é crescente em $(-3,-1) \cup (2,3]$

Logo, $x_0 = -3$ e $x_0 = 2$ são pontos de mínimo de f
e $x_0 = -1$ é ponto de máximo de f.



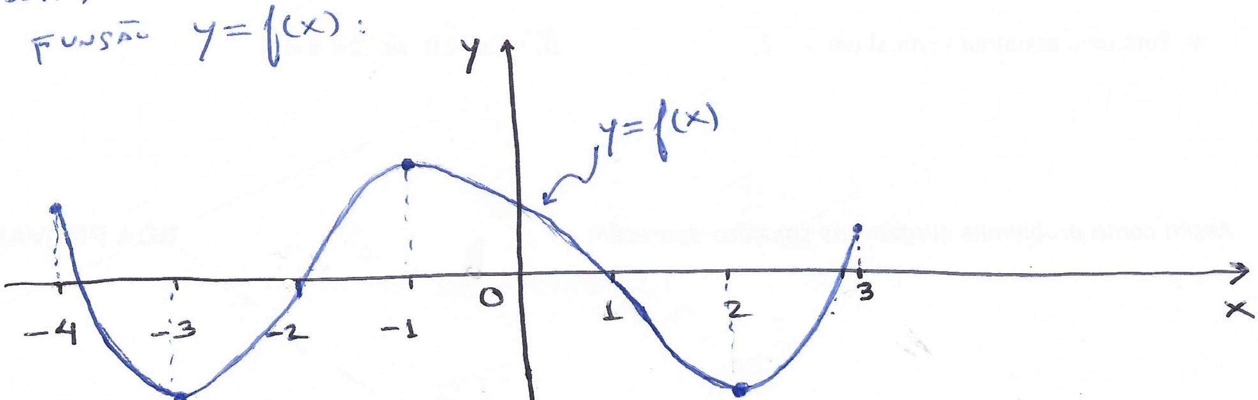
- $f'(x)$ é crescente em $[-4,-2) \cup (1,3]$
  $\Longrightarrow (f')'(x) = \boxed{f''(x) > 0}$ em $[-4,-2) \cup (1,3]$
  $\Longrightarrow$ f é côncava para cima em $[-4,-2) \cup (1,3]$



- $f'(x)$ é decrescente em $(-2,1)$
  $\Longrightarrow (f')'(x) = \boxed{f''(x) < 0}$ em $(-2,1)$
  $\Longrightarrow$ f é côncava para baixo em $(-2,1)$

Portanto, $x_0 = -2$ e $x_0 = 1$ são as abcissas de dois pontos de inflexão da função $f(x)$.

Assim, com as informações acima, podemos fazer um esboço do gráfico da função $y = f(x)$:



Problema de Otimização:

2) $T(t) = 0{,}1 \cdot (80 - 60t + 10t^2)$, $0 \leq t \leq 12$.

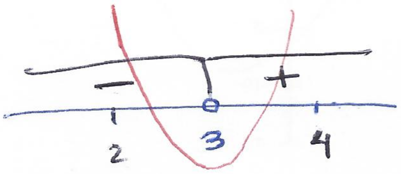
$\Longrightarrow \boxed{T(t) = 8 - 6t + t^2}$ ← Função objetivo (Temperatura em função do tempo)

a) Assim, para determinar a temperatura mínima e o instante no qual ela é atingida, precisamos encontrar o(s) mínimo(s) da função $T(t)$:

Pontos críticos ⟶ $T'(t) = -6 + 2t = 0$

$\Longrightarrow 2t = 6 \Longrightarrow t = \frac{6}{2}$

$\Longrightarrow \boxed{t = 3}$



$T'(t) = -6 + 2t$

Note que: $\boxed{T'(t) < 0}$ em $(0,3) \Longrightarrow$ $T(t)$ é decrescente em $(0,3)$

e $\boxed{T'(t) > 0}$ em $(3,12) \Longrightarrow$ $T(t)$ é crescente em $(3,12)$

Logo, $t_0 = 3$ é ponto de mínimo de $T(t)$.

Por outro lado, temos: $T(3) = 8 - 6 \cdot (3) + (3)^2$

$= 8 - 18 + 9$

$= -1\ °C$ ← temperatura mínima

Portanto, podemos concluir que 3 horas após meia-noite (ou seja, às 3:00hs da manhã) será atingida a temperatura mínima de $-1\,°C$ no município "Muito Frio".

3) Condições do TEOREMA DO VALOR MÉDIO:

$\boxed{g(x) = x^4 - 8x^2}$ (FUNÇÃO polinomial de grau 4).

↳ FUNÇÃO CONTÍNUA EM $\mathbb{R}$. Em particular, contínua em $[-1,1]$.

↳ FUNÇÃO DERIVÁVEL EM $\mathbb{R}$. Em particular, derivável em $(-1,1)$

Assim, pelo TEOREMA DO VALOR MÉDIO, podemos concluir que existe (pelo menos um) $x_0 \in (-1,1)$ tal que:

$$g'(x_0) = \frac{g(1) - g(-1)}{1 - (-1)}$$

ou seja,

$$\boxed{g'(x_0)} = \frac{[(1)^4 - 8.(1)^2] - [(-1)^4 - 8(-1)^2]}{1+1}$$

$$= 4x_0^3 - 16x_0$$

$$= \frac{\cancel{(1-8)} - \cancel{(1-8)}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$\Longrightarrow 4x_0^3 - 16x_0 = 0$

$\Longrightarrow 4x_0(x_0^2 - 4) = 0$

$\Longrightarrow x_0(x_0 - 2)(x_0 + 2) = 0$

$\Longrightarrow x_0 = 0$ ou $\cancel{x_0 = 2}$ ou $\cancel{x_0 = -2}$

$\in (-1,1)$

valores descartados pois não pertencem ao intervalo $(-1,1)$

Resposta: $\boxed{x_0 = 0}$

IV

4) $$\int_0^1 \frac{\overbrace{x^3 \, dx}^{=\frac{du}{4}}}{\underbrace{\sqrt{x^4+1}}_{\sqrt{u}}} \underset{\uparrow}{=} \int_1^2 \frac{du}{4\sqrt{u}} = \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} \doteq \frac{1}{4}\int_1^2 u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

→ Substituição:

$u = x^4+1$

$du = 4x^3\,dx$

→ Limites de integração:

$0 \le x \le 1$

$\Downarrow$

$\underbrace{0^4+1}_{1} \le u = x^4+1 \le \underbrace{1^4+1}_{2}$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_{u=1}^{u=2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_{u=1}^{u=2} = \frac{1}{\cancel{4}_2}\cdot\cancel{2}^{1}\cdot\sqrt{u}\,\Bigg|_{u=1}^{u=2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)$$

Logo, $$\boxed{\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,dx = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

$$\int \overbrace{e^x \underbrace{\cos(e^x)}_{\cos u} dx}^{=du} \underset{\uparrow}{=} \int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$= \operatorname{sen}(e^x) + C.$$

→ Substituição

$u = e^x$

$\Rightarrow du = e^x\,dx$

Verificando:

$F(x) = \operatorname{sen}(e^x) + C \Longrightarrow F'(x) = \left(\operatorname{sen}(e^x) + C\right)'$

primitiva

$= \cos(e^x)\cdot e^x + \cancel{C'}^{\,0}$

$= e^x \cos(e^x) = f(x)$ ✓ ok

Função integrando.

Assim,

$$\boxed{\int e^x \cos(e^x)\,dx = \operatorname{sen}(e^x) + C,}$$

$C \in \mathbb{R}$

Questão 4) Continuação ...

$$\underbrace{\int (x+1)e^{-x}\,dx}_{\int u\,dv} = \overbrace{-(x+1)e^{-x}}^{u\cdot v} - \overbrace{\int (-e^{-x})\,dx}^{\int v\,du}$$

→ Integrando x partes

$u = x+1$ $\quad du = dx$

$dv = e^{-x}dx$ $\quad v = -e^{-x}$

$$= -(x+1)e^{-x} + \int e^{-x}\,dx$$

$$= -(x+1)e^{-x} - e^{-x} + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$= -x - e^{-x} - e^{-x} + C$$

$$= -x - 2e^{-x} + C$$

$$= -(x+2)e^{-x} + C.$$

Verificando:

$F(x) = -(x+2)e^{-x} + C$ (primitiva).

$$\Rightarrow F'(x) = \left[-(x+2)e^{-x} + C\right]' = \left[-(x+2)e^{-x}\right]' + \cancel{C'}^{\,0}$$

$$= \left[(-1)e^{-x} - (x+2)\cdot(-e^{-x})\right]$$

$$= -e^{-x} + xe^{-x} + 2e^{-x}$$

$$= xe^{-x} + e^{-x}$$

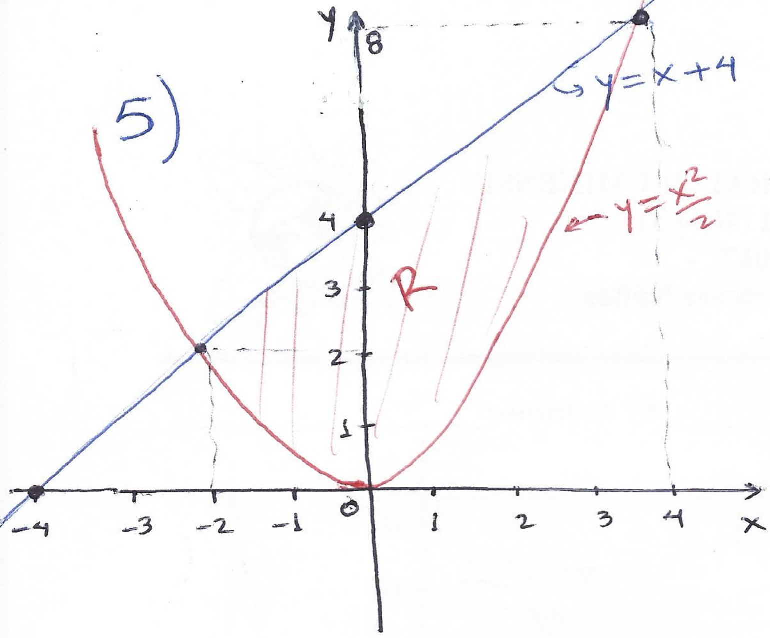
$$= \underbrace{(x+1)e^{-x}}_{\text{Função Integrando}} \quad \checkmark \text{ ok}$$

Portanto, podemos concluir que:

$$\boxed{\int (x+1)e^{-x}\,dx = -(x+2)e^{-x} + C}$$

$C \in \mathbb{R}$

5)



$y = x + 4$

Intersesão com:

Eixo x ($y=0$)

$0 = x + 4$

$\Rightarrow x = -4$

$(-4, 0)$

Eixo y ($x=0$)

$y = 0 + 4$

$\Rightarrow y = 4$

$(0, 4)$

Intersesão entre $y = x+4$ e $y = \frac{x^2}{2}$:

$$x + 4 = \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow 2(x+4) = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = -2$$

Limites de integração.

$$\begin{array}{cc} x & -4 \\ x & 2 \end{array}$$

$-4x + 2x = -2x$

Pontos de intersesão: $(4, 8)$ $(-2, 2)$

Logo:

$$\underbrace{A(R)}_{\text{Área da região } R,\text{ onde:}} = \int_{-2}^{4} \Big[\underbrace{(x+4)}_{\text{Função que fica por cima}} - \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\text{Função que está por baixo.}}\Big]\,dx = \int_{-2}^{4} \left(x + 4 - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x \leq 4$
$\frac{x^2}{2} \leq y \leq x+4\}$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-2}^{4}$$

$$= \left[\frac{4^2}{2} + 4(4) - \frac{4^3}{6}\right] - \left[\frac{(-2)^2}{2} + 4(-2) - \frac{(-2)^3}{6}\right]$$

$$= \left(\frac{16}{2} + 16 - \frac{64}{6}\right) - \left(\frac{4}{2} - 8 + \frac{8}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{48 + 96 - 64}{6}\right) - \left(\frac{12 - 48 + 8}{6}\right) = \left(\frac{80}{6}\right) - \left(-\frac{28}{6}\right)$$

$$= \frac{80}{6} + \frac{28}{6} = \frac{80+28}{6} = \frac{108}{6} = 18.$$

Resposta: $A(R) = 18$ unidades de área.

6) a) $h'(x) > 0, \ \forall x \neq 2$

$\Rightarrow h(x)$ é crescente em $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

b) $x = 2$ assíntota vertical de $h(x)$

$\Rightarrow \lim_{x \to 2^+} h(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)

e/ou

$\lim_{x \to 2^-} h(x) = +\infty$ (ou $-\infty$).

c) $h''(x) > 0$, se $x < 2$ ou $x > 4$

$\Rightarrow h(x)$ é côncava para cima em $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

d) $h''(x) < 0$, se $2 < x < 4$

$\Rightarrow h(x)$ é côncava para baixo em $(2, 4)$.

Assim, a partir das informações acima, podemos esboçar o gráfico da função $y = h(x)$: