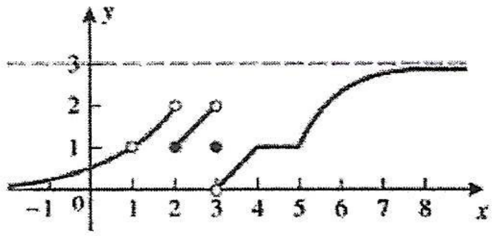
ESCOLA DE ENGENHARIA DE VOLTA REDONDA (EEIMVR-UFF)
Departamento de Ciências Exatas (VCE)

Primeira Avaliação (P1) - 2018/2

Disciplina:	**Cálculo I**	Data: **23/10/2018**	**NOTA**
Professor:	Yoisell Rodríguez Núñez		
Aluno(a):			

1. (2,25 pontos) Para a função $y = f(x)$ cujo gráfico está na figura ao lado, encontre o limite se ele existir:



0,35 a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

0,35 b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

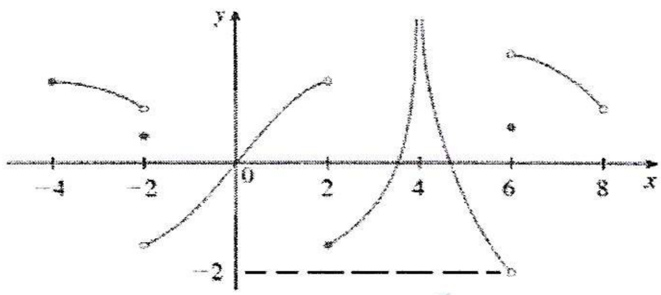
0,35 c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

0,35 d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,35 e) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

0,50 f) f é contínua em $x = 3$? derivável nesse ponto? **Justifique** sua resposta.

2. (2.50 pontos) O gráfico a seguir representa uma função $y = g(x)$. **Classifique** em Verdadeira (V) ou Falsa (F) cada uma das seguintes afirmações. **Justifique** sua resposta.



I) Dom $g = [-4, 8)$

II) $g(x) < 0, \quad \forall x \in (-2, 2)$

III) $g(6) = -1$

IV) $g(x)$ é contínua em $x = 4$

V) g é derivável em $x = -2$

VI) $\lim\limits_{x\to 4^-} g(x) = +\infty$

VII) $\lim\limits_{x\to 4^+} g(x) = -\infty$

VIII) $x = 4$ é uma assíntota horizontal

IX) g é estritamente crescente no intervalo $(2, 6)$

X) g é decrescente no intervalo $(4, 6) \cup (6, 8)$

Obs: Cada acerto vale 0,25 pontos.

3. (3.00 pontos) Dados os **limites**:

I) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{2x - \operatorname{sen}(x)}$ II) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2 - x + 1}{2x^3 - 5}$ III) $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + 32)^{\frac{1}{x}}$

0,75 a) **Identifique** as indeterminações geradas por cada limite acima. (0,25 cada)

2,25 b) **Calcule** os três limites. (0,75 cada)

4. (2.25 pontos) Determine as **derivadas** das funções:

0,75 I) $l(x) = (x^2+3)\,\text{sen}(5x) - 3xe^x$ II) $m(x) = \dfrac{x\tan(x^3)}{1+\cos(2x)}$ 0,75 0,75 III) $n(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3\ln(x^4)}$

5. (0.50 pontos [extra]) **Julgue** as afirmações abaixo e marque a **alternativa correta**:

I) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = +\infty.$ (F) II) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} e^{2006}\cdot(1+x)^{\frac{12}{x}} = e^{2018}.$ (V) III) $\displaystyle\lim_{x\to-2} \left(\frac{x^5+32}{x+2}\right) = 80.$ (V)

a) I, II e III são falsas.

b) Apenas as afirmações I e II são falsas.

c) I. II e III são verdadeiras.

d) Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.

e) Apenas as afirmações I e III são falsas.

Observação:

- Todas as respostas devem ser justificadas, isto é, acompanhadas dos argumentos e/ou cálculos usados para obtê-las.

Se não puder destacar-se pelo talento vença pelo esforço.

BOA PROVA!!!

Gabarito - Cálculo I
2018/2

Prof. Yoisell R. N.

1. a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b) $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$; pois $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 = \lim_{x \to 1^-} f(x)$

c) $\nexists \lim_{x \to 2} f(x)$, já que: $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1 \neq 2 = \lim_{x \to 2^-} f(x)$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

e) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$. Logo, $\nexists \lim_{x \to 3} f(x)$

f) A função $f(x)$ não é contínua em $x=3$, pois $\nexists \lim_{x \to 3} f(x)$ conforme mostrado no item anterior.

Assim, podemos concluir que $f(x)$ não é derivável em $x=3$ já que a função é descontínua nesse ponto.

(2) I) Do gráfico, note que: $4 \notin Dom(g)$.

De fato: $Dom(g) = [-4,4) \cup (4,8) \neq [-4,8)$

Assim, a afirmação é <u>FALSA</u> (F).

II) Observe que: $g(x) < 0 \quad \forall x \in (-2,0)$ e $g(x) > 0 \quad \forall x \in (0,2)$ $\rightarrow$ Portanto, a afirmação é <u>FALSA</u> (F).

III) $g(6) > 0$, conforme podemos ver no gráfico. Logo, a afirmação é <u>FALSA</u> (F)

IV) $g(x)$ é <u>descontínua</u> em $x=4$ já que:

$$\lim_{x\to 4^+} g(x) = \lim_{x\to 4^-} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to 4} g(x) = +\infty$$

mas $g(x)$ não está definida em $x=4$, ou seja, $4 \notin Dom(g)$

$\therefore$ A afirmação é <u>FALSA</u> (F)

V) $g(x)$ <u>não</u> é derivável em $x=-2$, pois é descontínua nesse ponto, já que:

$$\lim_{x\to -2^+} g(x) \neq \lim_{x\to -2^-} g(x), \text{ ou seja, } \nexists \lim_{x\to -2} g(x).$$

Assim, a afirmação é <u>FALSA</u> (F).

Questão (2). Continuação...

VI) Do gráfico, observa-se que na medida em que x "se aproxima" de 4 pela esquerda, a função g(x) "tende" a $+\infty$; ou seja:

$$\lim_{x \to 4^-} g(x) = +\infty$$

Logo, a afirmação é VERDADEIRA (V).

VII) Pelo mesmo argumento do item anterior, temos:

$$\lim_{x \to 4^+} g(x) = +\infty.$$

Assim, a afirmação é FALSA (F).

VIII) A reta $x=4$ representa uma assíntota vertical da função $y=g(x)$. De fato: $\lim_{x \to 4^+} g(x) = \lim_{x \to 4^-} g(x) = +\infty$.

$\therefore$ a afirmação é FALSA (F).

IX) $g(x)$ é crescente (estritamente) em $(2,4)$ e decrescente (estritamente) no intervalo $(4,6)$.

Logo, a afirmação é FALSA (F).

X) Notemos, do gráfico, que:

$$g(x_1) \leq g(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in (4,6) \cup (6,8)$$

ou seja, $g(x)$ é decrescente em $(4,6) \cup (6,8)$.

Desta forma, a afirmação é VERDADEIRA (V).

③ a)

I) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{2x - \operatorname{sen}(x)} \rightsquigarrow \frac{e^0 - 1 - 0}{2\cdot(0) - \operatorname{sen}(0)} \rightsquigarrow \boxed{\frac{0}{0}}$

II) $\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2 - x + 1}{2x^3 - 5} \rightsquigarrow \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

III) $\lim_{x\to +\infty} (e^x + 32)^{\frac{1}{x}} \rightsquigarrow (e^{+\infty} + 32)^{\frac{1}{+\infty}} \rightsquigarrow \boxed{\infty^0}$

---

b)

I) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{2x - \operatorname{sen}(x)} \rightsquigarrow \frac{0}{0}$

$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2 - \cos(x)} = \frac{e^0 - 1}{2 - \cos(0)} = \frac{1-1}{2-1} = \frac{0}{1} = 0$

II) $\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2 - x + 1}{2x^3 - 5} \rightsquigarrow \frac{\infty}{\infty}$

$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{8x - 1}{6x^2} \rightsquigarrow \frac{\infty}{\infty}$

$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{12}_{3} x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{3x} \text{ “}=\text{” } \frac{2}{3(-\infty)} = 0$

(2ª via):

$\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2 - x + 1}{2x^3 - 5} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\cancel{4}^{2}\cancel{x^2}}{\cancel{2}_{1}x^{\cancel{3}}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x} \text{ “}=\text{” } \frac{2}{(-\infty)} = 0$

(3ª via)

$\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2 - x + 1}{2x^3 - 5} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\cancel{x^2}(4 - \overset{\to 0}{\frac{1}{x}} + \overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}})}{x^{\cancel{3}}(2 - \underset{\to 0}{\frac{5}{x^3}})} \text{ “}=\text{” } \lim_{x\to -\infty} \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}_{1}x} \text{ “}=\text{” } \frac{2}{(-\infty)} = 0$

(3) b)

III) $\lim_{x \to +\infty} (e^x+32)^{\frac{1}{x}} \to \infty^0$

Metodologia (apresentado em sala de aula).

1° passo: Calcular: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot \ln(e^x+32)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x+32)}{x} \to \frac{\infty}{\infty}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{e^x+32} \cdot (e^x+32)'}{1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x+32} \to \frac{\infty}{\infty}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1$$

$$= 1 = L$$

2° passo: Conclua que:

$$\lim_{x \to +\infty} (e^x+32)^{\frac{1}{x}} = e^L = e^1 = e$$

4

I) $l(x) = (x^2+3)\,\mathrm{sen}(5x) - 3xe^x$

$$\Longrightarrow l'(x) = \left[(x^2+3)\,\mathrm{sen}(5x)\right]' - (3xe^x)'$$

$$= (x^2+3)'\cdot \mathrm{sen}(5x) + (x^2+3)(\mathrm{sen}(5x))' - \left[(3x)'e^x + (3x)(e^x)'\right]$$

$$= 2x\,\mathrm{sen}(5x) + (x^2+3)\cdot 5\cdot \cos(5x) - \left[3e^x + 3xe^x\right]$$

$$= 2x\,\mathrm{sen}(5x) + 5(x^2+3)\cos(5x) - 3e^x - 3xe^x$$

II) $m(x) = \dfrac{x\cdot \tan(x^3)}{1+\cos(2x)}$

$$\Longrightarrow m'(x) = \frac{\left[x\tan(x^3)\right]'\cdot\left(1+\cos(2x)\right] - x\tan(x^3)\cdot(1+\cos(2x))'}{\left(1+\cos(2x)\right)^2}$$

$$= \frac{\left[x'\cdot\tan(x^3) + x\cdot(\tan(x^3))'\right]\left[1+\cos(2x)\right] + 2x\tan(x^3)\cdot \mathrm{sen}(2x)}{\left(1+\cos(2x)\right)^2}$$

$$= \frac{\left[\tan(x^3) + x\cdot \sec^2(x^3)\cdot 3x^2\right]\left[1+\cos(2x)\right] + 2x\tan(x^3)\cdot\mathrm{sen}(2x)}{\left(1+\cos(2x)\right)^2}$$

$$= \frac{\left[\tan(x^3) + 3x^3\sec^2(x^3)\right]\left[1+\cos(2x)\right] + 2x\tan(x^3)\cdot\mathrm{sen}(2x)}{\left(1+\cos(2x)\right)^2}$$

III) $n(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3\ln(x^4)} = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{3\ln(x^4)}$

$$\Longrightarrow n'(x) = \frac{(x^{\frac{1}{2}})'\cdot 3\ln(x^4) - x^{\frac{1}{2}}\cdot\left[3\ln(x^4)\right]'}{(3\ln(x^4))^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}\cdot 3\ln(x^4) - x^{\frac{1}{2}}\cdot 3\cdot\frac{1}{x^4}\cdot(x^4)'}{9\ln^2(x^4)} = \frac{\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}\ln(x^4) - 12x^{-\frac{1}{2}}}{9\ln^2(x^4)}$$

5) I) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} \text{"="} \frac{1}{(-\infty)^2} \text{"="} \frac{1}{+\infty} = 0 \Rightarrow$ AFIRMAÇÃO **FALSA (F)**.

II) $\lim_{x \to 0^+} e^{2006} \cdot (1+x)^{\frac{12}{x}} = \left(\lim_{x \to 0^+} e^{2006}\right) \cdot \left(\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{12}{x}}\right)$

Limite do prod = produto dos Limites

$= e^{2006} \cdot \left[\underbrace{\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}}_{=e}\right]^{12} = e^{2006} \cdot e^{12},$

Limite de uma constante = constante

e (Limite fundamental)

Obs: Também pode ser calculado via L'Hôpital (feito em sala).

$= e^{2006+12} = e^{2018}$ → AFIRMAÇÃO **VERDADEIRA (V)**

III) $\lim_{x \to -2} \frac{x^5+32}{x+2} \text{"="} \frac{(-2)^5+32}{(-2)+2} \rightsquigarrow \frac{0}{0}$

$\overset{L'H}{=} \lim_{x \to -2} \frac{5x^4}{1} = \lim_{x \to -2} 5 \cdot x^4 = 5 \cdot (-2)^4$

$= 5 \cdot (16)$

$= 80$

→ AFIRMAÇÃO **VERDADEIRA (V)**.

Portanto, podemos concluir que:

Apenas as afirmações II e III são **VERDADEIRAS (V)**

Resposta: Letra d).