Aula 8 – Sinais e Sistemas

Funções de Transferência

André Pinho

Funções de Transferência (tempo contínuo)

- Background: Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s)$$

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

- S é uma variável complexa

$$s = \sigma + j\omega$$

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t}dt$$

Transformada de Laplace

- Background: Transformada de Laplace
- Seja $x(t) = u(t)$

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} dt$$

$$X(s) = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{s}, \sigma > 0$$

Transformada de Laplace

- Background: Transformada de Laplace
- Seja $x(t) = e^{-at}u(t)$

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt$$

$$X(s) = \left[\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{s+a}, \sigma > -a$$

Transformada de Laplace

- Background: Transformada de Laplace

$$X(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}u(t)\right\}$$

$$X(s) = \int_{0}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt$$

$$X(s) = [e^{-st} f]_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} f(-se^{-st}) dt$$

$$X(s) = -f(0+) + s\int_{0}^{\infty} fe^{-st} dt = sF(s) - f(0+)$$

Transformada de Laplace

- Background: Transformada de Laplace

$$X(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n} u(t)\right\}$$

$$X(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$$

Transformada de Laplace

- Background: Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} \qquad\qquad g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

$$g'(t) = f(t)$$

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = SG(S) - g(0)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = SG(S) - g(0)$$

$$SG(S) = F(S) - g(0)$$

$$G(S) = \frac{F(S)}{S} - \frac{g(0)}{S}$$

$$G(S) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(S)}{S}$$

Transformada de Laplace

A – TABELA DAS PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE		
	$f(t)$	$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$
1	$a\,f(t) + b\,g(t)$	$a\,F(s) + b\,G(s)$
2	$e^{at} f(t)$	$F(s - a)$
3	$f(t - a)\,H(t - a)$, com $a \geq 0$	$e^{-as} F(s)$
4	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
5	$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
6	$\int_0^t f(u)\,du$	$\frac{F(s)}{s}$
7	$t^n\,f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F}{ds^n}(s)$
8	$f(t) = f(t + T),\ \forall\, t = 0$	$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t)dt}{1 - e^{-sT}}$
9	$\int_0^t f(u)\,g(t - u)\,du$	$F(s)\,.\,G(s)$
10	$e^{s_n t} \sum_{k=1}^{m} \frac{A_k\,t^{m-k}}{(m-k)!}$, onde: $A_k = \lim_{s \to s_n} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left\{(s - s_n)^m F(s)\right\}$	$\frac{P(s)}{Q(s)}$, com $P(s)$ e $Q(s)$ polinômios, grau $(P(s)) <$ grau $(Q(s))$. s_n raiz de $Q(s)$ de multiplicidade m.

B – TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE IMPORTANTES					
	$f(t)$	$F(s)$		$f(t)$	$F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$	6	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	7	senh at	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
3	t^n, n natural	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	8	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
4	e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	9	$H(t - a),\ a \geq 0$	$\frac{e^{-as}}{s}$
5	sen at	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	10	$\delta(t - a),\ a \geq 0$	e^{-as}

Transformada de Laplace

- Decomposição em Frações parciais

1) Raízes reais e diferentes: $\frac{s-1}{s^2+3s+2}$

2) Raízes reais e iguais: $\frac{1}{s(s^2+6s+9)}$

3) Raízes complexas: $\frac{1}{s^2+4s+5} = \frac{1}{(s+2+j)(s+2-j)}$

Solução

Solução

Transformada de Laplace

- Fórmula de Desenvolvimento de Heaniside

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Y(s)}{X(s)}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{Y(a_k)}{X'(a_k)} e^{a_k t} u(t)$$

a_k são as n raízes distintas de $X(s)$

1) $\frac{s-1}{s^2+3s+2}$

Transformada de Laplace

- Teorema do valor inicial

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}u(t)\right\} = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0+)$$

$$\lim_{S\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = \lim_{s\to\infty} \{sF(s) - f(0+)\}$$

$$f(0+) = \lim_{s\to\infty} \{sF(s)\}$$

Transformada de Laplace

- Teorema do Valor final

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}u(t)\right\} = \int_0^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}dt = sF(s) - f(0+)$$

$$\lim_{S\to 0}\int_0^\infty \frac{df}{dt}e^{-st}dt = \{\lim_{s\to 0} sF(s) - f(0+)\}$$

$$f(\infty) - f(0) = -f(0+) + \lim_{s\to 0}\{sF(s)\}$$

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

- Restrição: válido somente se $f(\infty)$ existir e se a parte real das raízes do denominador forem negativas

Transformada de Laplace

- Teorema do valor final (exemplo)
  - Em um circuito RL série, a corrente no domínio S é dada pela seguinte expressão:

$$I(s) = \frac{V}{S(R + SL)}$$

  - Determine a corrente em regime estacionário.

Funções de Transferência

- Modelagem em equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes.

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

$$y(0) = y_0 \, , y'(0) = {y_0}'$$

  - a, b e c => propriedades físicas do sistema (resistência, capacitância, indutância, massa, constante de elasticidade de mola, etc)
  - $f(t)$ => entrada do sistema
  - $y_0 \;\; e \;\; {y_0}'$ => estado inicial
  - $y(t)$ => solução no tempo t

Funções de Transferência

- Aplicando a Transformada de Laplace

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

Digite a equação aqui.

$$a[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + b[sY(s) - y(0)] + cY(s) = F(s)$$

$$Y(s)[as^2 + bs + c] - (as + b)y_0 - {y'}_0 = F(s)$$

$$Y(s) = \frac{(as + b)y_0 + {y'}_0}{as^2 + bs + c} + \frac{F(s)}{as^2 + bs + c} = \Phi(s) + \Psi(s)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(s)] + \mathcal{L}^{-1}[\Psi(s)\ ] = \phi(t) + \psi(t)$$

Funções de Transferência

- Continuando
  - Solução homogênea

$$y(t) = \phi(t)$$

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \qquad y(0) = y_0\,, y'(0) = y_0'$$

  - Solução não homogênea e sistema relaxado

$$y(t) = \psi(t)$$

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \qquad y(0) = 0\,, y'(0) = 0$$

Funções de Transferência

- Continuando

$$\Psi(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} F(s)$$

$$\Psi(s) = H(s)F(s)$$

- Função de Transferência

$$H(s) = \frac{\Psi(s)}{F(s)}$$

Funções de Transferência

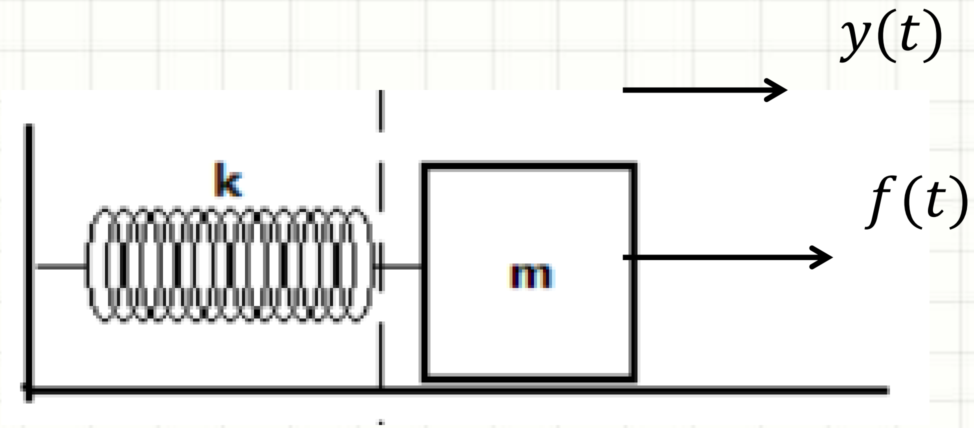
- Utilizando a propriedade da Transformada de Laplace :

$$\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)F(s)] = h(t) * f(t)$$

$$\psi(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

Funções de Transferência

- Exemplo: sistema massa mola



$$my''(t) + ky(t) = f(t),$$
$$y(0) = 0\,, y'(0) = 0$$

$$ms^2Y(s) + kY(s) = F(s)$$

$$Y(s) = \frac{F(s)}{ms^2 + k}$$

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + k} = \frac{1/m}{s^2 + k/m}$$

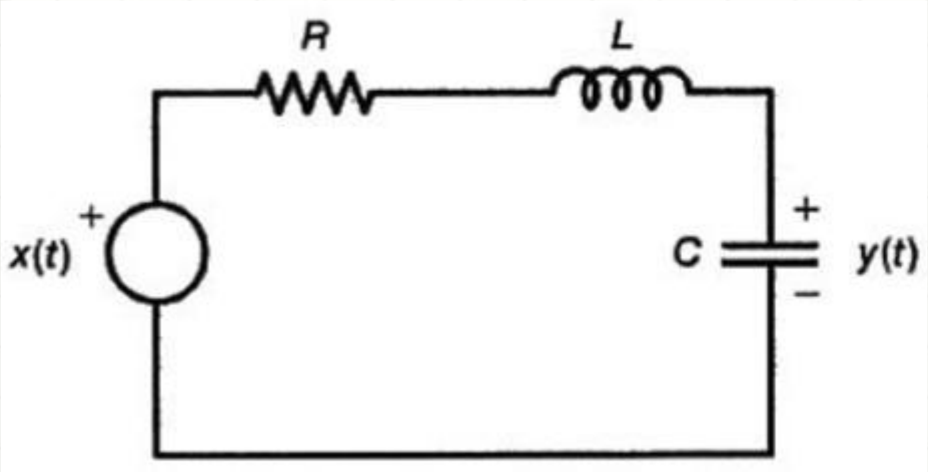
Funções de Transferência

- Exemplo: sistema massa mola

$$F(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{{}^{1}/_{m}}{s^2 + {}^{k}/_{m}}} \longrightarrow Y(s)$$

Funções de Transferência

- Determine a função de transferência do circuito abaixo:



Funções de Transferência

- Determine a função de transferência, conhecendo entrada e saída de um sistema LIT:

$$x(t) = e^{-3t}u(t)$$

$$y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$$

- Determine também a equação diferencial que governa o comportamento do sistema

Solução