FENÔMENOS DE TRANSPORTE

RESOLUÇÃO DA LISTA DE EXERCÍCIOS PARA TRABALHO

1)
2)
3)
4)
5)
6)
7)
8)
9)
10)
11)
12)
13)
14)
15)
16)
17)
18)

19)

Vol = 1,5 m³ ; m = 3.000 kg ; $\mu = 2.10^{-4}$ kg/m.s

ρ = ? ; ν = ?

ρ = m/Vol = 3000/1,5 = **2.000 kg/m³**

$\nu = \mu/\rho = 2.10^{-4}/2000 =$ **$1{,}0.10^{-7}$ m²/s**

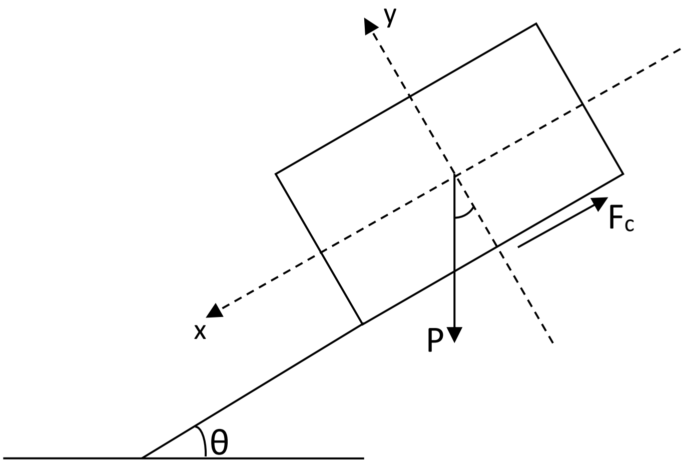
20)

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

μ = 0,15 milipoise = $0{,}15.10^{-3}$ poise = $0{,}15.10^{-3}.10^{-1}$ = $0{,}15.10^{-4}$ kg/sm

$Re = \frac{964 \cdot 0{,}6 \cdot (6 \cdot 0{,}0254)}{0{,}15 \cdot 10^{-4}}$ = 5.876.544 >>> 2.000 → **Regime turbulento**

21)



$\Sigma F = m.a$; $a = 0$ $\rightarrow$ $\Sigma F = 0$

Em x: $F_c = P.\text{sen}\theta$

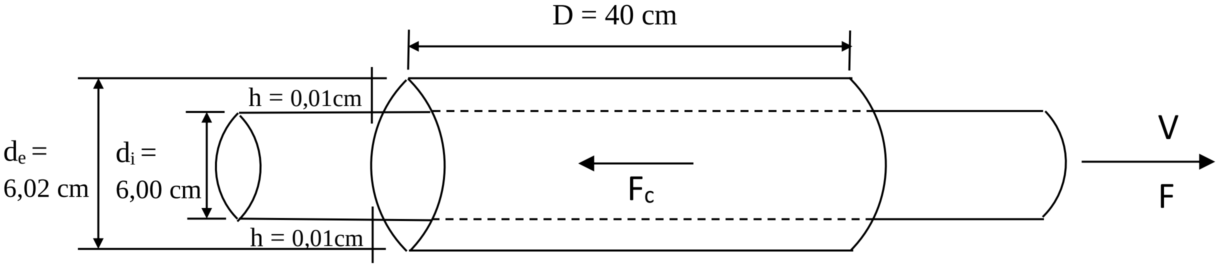
Como a força F_c é decorrente da tensão viscosa na área da base do bloco:

$F_c = \tau.A$

Considerando uma distribuição linear da velocidades do fluido entre o bloco e o plano: $\tau = \mu \frac{V}{h}$

$\rightarrow$ $\mu V/h \times A = P.\text{sen}\theta$ $\rightarrow$ $V = \frac{hP\,\text{sen}\,\theta}{A\mu}$

22)



$\Sigma F = m.a$

$F = F_c$

$dF_c = \tau.dA$ → $F_c = \int_S \tau.dA$; integrando ao longo da superfície do eixo (r_i) em contato com o fluido:

$F_c = \tau.A$; onde $A = 2\pi\, r_i \times L$

Considerando uma distribuição linear de velocidade no fluido entre o eixo e o mancal: $\tau = \mu \frac{V}{h}$

→ $F = (\mu \frac{V}{h}) \times (2\pi\, r_i\, L) = \frac{2\pi\, \mu\, V\, r_i\, L}{h}$

dados do problema: ν e d

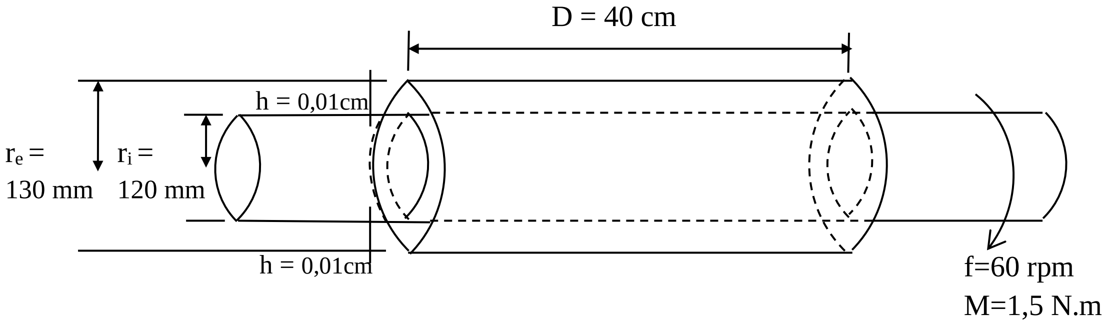
$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ → $\mu = \rho.\nu$

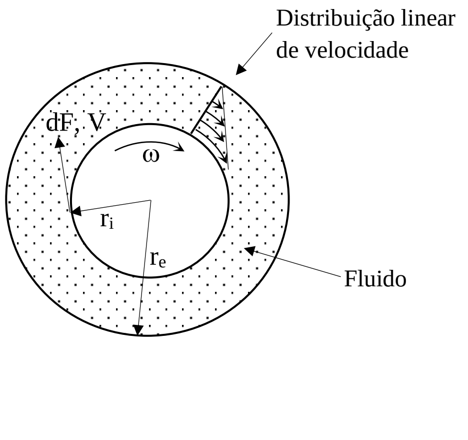
$d = \frac{\rho}{\rho_{água}}$ → $\rho = d.\rho_{água}$

→ $\mu = d.\rho_{água}.\nu$; considerando $\rho_{água} = 1.000\ kg/m^3$:

$$F = \frac{2\pi\, d\, \rho_{água}\, \nu\, V\, r_i\, L}{h} = \frac{2\pi \times 0{,}88 \times 1000 \times 0{,}003 \times 0{,}4 \times 0{,}03 \times 0{,}4}{0{,}01 \times 10^{-2}} \cong \mathbf{796{,}2\ N}$$

23)





$dM = dF.r_i = \tau.dA.r_i$ → $M = \int_S \tau.r_i.dA$; integrando ao longo de toda a superfície do eixo em contato com o fluido:

$M = \tau .\, r_i \,.\, A\,;$ onde $A = 2\pi\, r_i \times L$

Considerando uma distribuição linear de velocidade no fluido entre o eixo e o mancal:

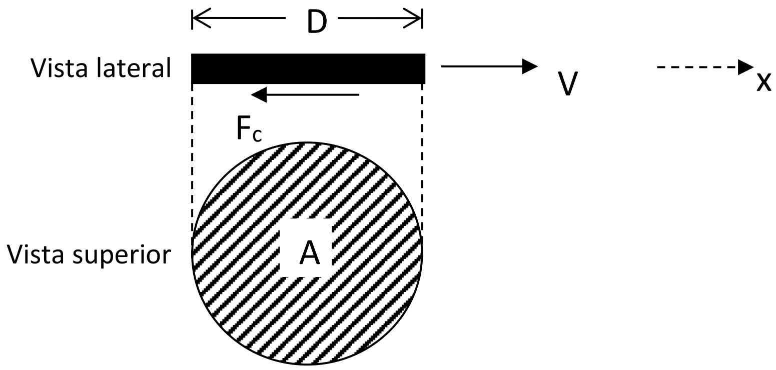
$\tau = \mu \frac{V}{h}$

→ $M = \frac{2\,\pi\,\mu\,V\,r_i^2\,L}{h}$; onde $V = \omega . r_i = 2.\pi.f.\, r_i$:

→ $M = \frac{4\,\pi^2\,\mu\,f\,r_i^3\,L}{h} \rightarrow \mu = \frac{Mh}{4\,\pi^2\,f\,r_i^3\,L}$

$$\mu = \frac{Mh}{4\,\pi^2\,f\,r_i^3\,L} = \frac{1{,}5\cdot(0{,}130-0{,}120)}{4\cdot\pi^2\cdot\frac{60}{60}\cdot(0{,}12)^3\cdot 0{,}4} \cong \frac{5}{\pi^2}$$ (Letra B)

24)



$\Sigma F = m.a$ → $- F_c = m.a$

$F_c = \tau.A$

Considerando uma distribuição linear de velocidade no fluido entre o disco e a mesa:

$\tau = \mu \frac{V}{h}$

→ $- (\mu \frac{V}{h}) \times (\frac{\pi D^2}{4}) = m.a$ → $- \frac{\mu\pi D^2}{4h} V = m.\frac{dV}{dt}$

→ $- V = \frac{4hm}{\mu\pi D^2}\frac{dV}{dt}$ → $dt = - \frac{4hm}{\mu\pi D^2}\frac{dV}{V}$

→ $dt = - k \frac{dV}{V}$ → $\Delta t = - k. \int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V}$

→ $\Delta t = - k.(\ln|V| - \ln|V_0|)$ → $\Delta t = - k.\ln|V/V_0|$, *como* $V>0$

→ $\Delta t = - k.\ln (V/V_0)$, *considerando* $t_0 = 0$ → $t = - k.\ln (V/V_0)$

$k = \frac{4hm}{\mu\pi D^2} = \frac{4\times 0{,}12\times 10^{-3}\times 0{,}050}{1{,}8\times 10^{-5}\times\pi\times 0{,}09^2} \cong 52.4 \quad \rightarrow \quad t = -52{,}4\ ln(\ V/10\ )$

$V_0 = 10\ m/s$

a) $t = -52.4\ ln(\ 1/10\ ) \cong$ 120 s = **2 min**

b) $\lim_{V\to 0} t(V) = -52{,}4 \times \lim_{V\to 0} \ln\left(\frac{V}{10}\right) \rightarrow \infty$, ou seja, **nunca irá parar.**

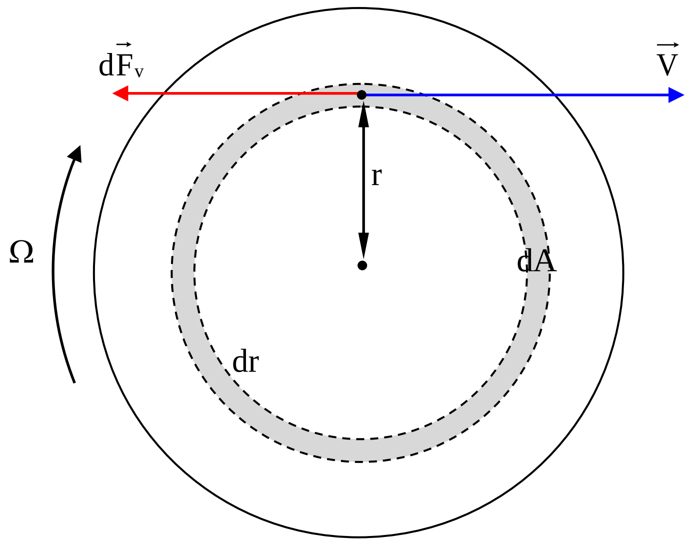
c) $t = -\ k.ln\ (V/V_0) \rightarrow V = V_0\ e^{\frac{-t}{k}}$

$\Delta S = \int_{t_0}^{t} V dt = V_0 \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{t}{k}} dt = V_0\ .\ (-k)\ .\ (e^{-\frac{t}{k}})_{t_0}^{t} = -\ V_0\ k\ (e^{-\frac{t}{k}} - 1)$

$= -10 \times 52{,}4 \times (e^{-\frac{120}{52{,}4}} - 1) \cong$ **471 m**

25)

Isolando-se uma faixa na superfície do disco a uma distância “r” do centro e com espessura “dr” obtém-se:



$$d\vec{M} = 2\,r \times d\vec{F} \rightarrow\ dM = 2\,r\ dF \rightarrow\ dM = 2\,r\ (\tau\ dA)$$

(multiplicado por 2 para representar ambas as forças que atuam por cima e por baixo do disco)

, mas, considerando uma distribuição linear de velocidade: $\tau = \mu \frac{V}{h}$

, $V = \Omega\, r$

e $dA = 2\pi\, r\, dr$

logo, $$dM = 2\,r\,\mu \frac{\Omega\, r}{h}\, 2\pi\, r\, dr = \frac{4\pi\mu\Omega}{h}\ r^3 dr$$

$$\rightarrow\ M = \frac{4\pi\mu\Omega}{h}\int_0^R r^3 dr = \frac{4\pi\mu\Omega}{h}\frac{\mathrm{R}^4}{4} = \frac{\pi\mu\Omega\mathrm{R}^4}{h}$$

26)

$$\mathbf{V} = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + w\,\mathbf{k}$$

Onde:

- **V** é o campo de velocidades;
- u, v e w são as componentes em x, y e z, respectivamente, do vetor velocidade, em função da posição (x,y,z) e do tempo t;
- **i**, **j** e **k** são os vetores unitários nas direções x, y, e z, respectivamente.

Se **V** = Kxt **i** – Kyt **j** + 0 **k**, então: $u = Kxt$ e $v = -Kyt$

$$\text{Para as linhas de corrente: } \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

$$\frac{dx}{Kxt} = \frac{dy}{-Kyt}$$

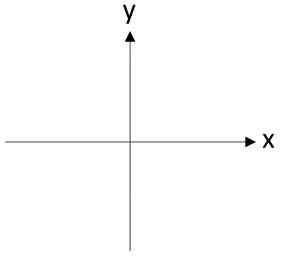
$$\text{para } K\ e\ t \neq 0 \ \rightarrow\ \frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}$$

$$\text{, integrando: } \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dy}{y}$$

$\rightarrow$ ln |y| = -ln |y| + C $\rightarrow$ ln |x.y| = C

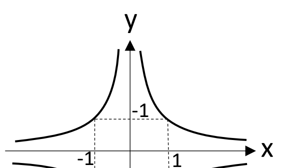
$\rightarrow$ |x.y| = e^C , substituindo a constante $\mathbf{e^C}$ pela constante **c**: |x.y| = c

Para c = 0:

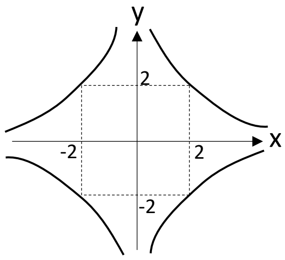


(gráfico coincidente com os eixos)

Para c = 1:



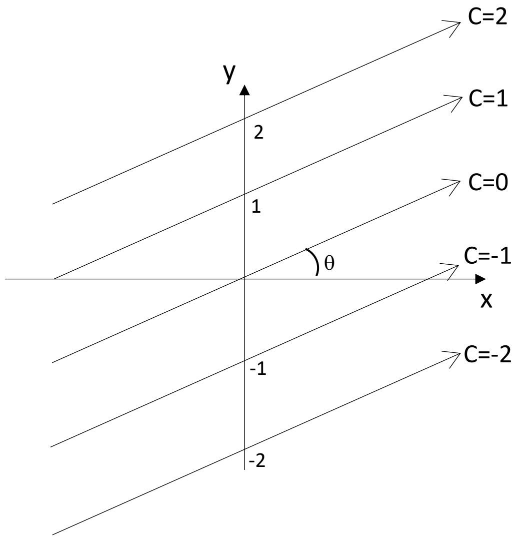
Para c = 4:



27)

$$\text{Para as linhas de corrente: } \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

$$\frac{dx}{V cos\theta} = \frac{dy}{V sen\theta} \quad , \quad como\ V \neq 0 \rightarrow \ \frac{dy}{dx} = tg\ \theta \rightarrow \ \ y(x) = x\ tg\theta + C$$



28) Pela fórmula do coeficiente adimensional de arrasto têm-se:

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \cdot \rho \cdot U^2 \cdot A$$

Para escoamentos turbulentos, têm-se que o coeficiente de arrasto de uma esfera lisa é aproximadamente 0,5. Logo:

$$F_D = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 1000 \cdot 10^2 \cdot (\pi \cdot 0{,}1^2) = 785{,}4\text{N} \cong 7{,}8 \cdot 10^2\text{N} > 3{,}16 \cdot 10^2\text{N}$$

Resp.: 10^3

29) Vazão

$$Q = \int (\vec{V} \cdot \vec{n})\, dA$$

$$A = \pi r^2 \quad \rightarrow \quad dA = 2\pi r dr$$

$$Q = \int_0^R C(R^2 - r^2)\, 2\pi r\, dr = 2\pi C \int_0^R (R^2 - r^2)\, r\, dr = 2\pi C \left(R^2 \int_0^R r\, dr - \int_0^R r^3\, dr \right)$$

$$= 2\pi C \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \pi C \frac{R^4}{2}$$

Velocidade média

$$Q = V_m A \quad \rightarrow \quad V_m = \frac{Q}{A} = \frac{\pi C \frac{R^4}{2}}{\pi R^2} = \frac{C R^2}{2}$$

30)

Para - regime permanente
- entradas e saídas unidimensionais

, a equação do princípio da continuidade é:

$$\sum \dot{m}_s - \sum \dot{m}_e = 0$$

, sendo:

$$\dot{m}_i = \rho_i V_{nri} A_i = \rho_i Q_i$$

Assumindo que a vazão em 3 seja de saída (caso seja de entrada o resultado será negativo):

$$\dot{m}_2 + \dot{m}_3 - \dot{m}_1 = 0$$
$$\rho_2 V_2 A_2 + \rho_3 Q_3 - \rho_1 Q_1 = 0$$

para água à temperatura constante ρ é constante, logo:

$$V_2 A_2 + Q_3 - Q_1 = 0 \;\rightarrow\; Q_3 = Q_1 - V_2 A_2 = Q_1 - V_2 \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{100}{3600} - 8 \frac{\pi (0{,}05)^2}{4} = 0{,}01207 \frac{m^3}{s}$$

$$Q_3 = 0{,}01207 \frac{m^3}{s} = 0{,}01207 \times 3600 \frac{m^3}{h} = 43{,}45 \frac{m^3}{h}$$

$$V_3A_3 = Q_3 \;\rightarrow\; V_3 = \frac{Q_3}{A_3} = \frac{Q_3}{\frac{\pi D_3^2}{4}} = \frac{4Q_3}{\pi D_3^2} = \frac{4 \cdot 0{,}01207}{\pi \cdot (0{,}04)^4} = 9{,}6\, m/s$$

31)

Analogamente à questão anterior: $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = 40\frac{kg}{s}$

$$\rho\, V_1A_1 = \dot{m}_1 \quad\rightarrow\quad V_1 = \frac{\dot{m}_1}{\rho\, A_1} = \frac{\dot{m}_1}{\rho\, \frac{\pi D_1^2}{4}} = \frac{40}{998\, \frac{\pi(0{,}18)^2}{4}} = 1{,}57\, m/s$$

$$\rho\, V_2A_2 = \dot{m}_2 \quad\rightarrow\quad V_2 = \frac{\dot{m}_2}{\rho\, A_2} = \frac{\dot{m}_1}{\rho\, \frac{\pi D_2^2}{4}} = \frac{40}{998\, \frac{\pi(0{,}05)^2}{4}} = 20{,}4\, m/s$$

32)

Pelo princípio da continuidade para entradas e saídas unidimensionais em regime permanente:

$$\sum \dot{m}_s = \sum \dot{m}_e$$

$$\dot{m}_2 + \dot{m}_3 + \dot{m}_4 = \dot{m}_1 \qquad \rightarrow \qquad \rho_2V_2A_2 + \rho_3V_3A_3 + \rho_4V_4A_4 = \rho_1V_1A_1$$

Como $VA = Q$ e o fluido é imcompressível $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4$:

$$V_2A_2 + V_3A_3 + Q_4 = V_1A_1$$

$$V_2 = \frac{V_1A_1 - V_3A_3 - Q_4}{A_2} = \frac{5.0{,}2 - 12.0{,}15 - 0{,}1}{0{,}2} = -4{,}5\, m/s\ ou\ 4{,}5\, m/s\ para\ dentro\ da\ junção$$

33)

Pelo princípio da continuidade para entradas e saídas unidimensionais:

$$\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\, d\forall + \sum \dot{m}_s - \sum \dot{m}_e = 0$$

, onde

$$\dot{m}_i = \rho_i V_{nri} A_i = \rho_i Q_i$$

e para o referido reservatório:

$$d\forall = \frac{\pi d^2}{4} dh$$

Então:

$$\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\, \frac{\pi d^2}{4} dh + \rho Q_2 - \rho Q_1 - \rho Q_3 = 0$$

$$\rightarrow\ \frac{d}{dt}\left(\rho\ \frac{\pi d^2}{4}h\right)+\rho Q_2-\rho Q_1-\rho Q_3=0\ \ \rightarrow\ \ \rho\ \frac{\pi d^2}{4}\frac{dh}{dt}+\rho Q_2-\rho Q_1-\rho Q_3=0$$

$$\rightarrow\ \ \frac{dh}{dt}=\frac{4(Q_1-Q_2+Q_3)}{\pi d^2}$$

34)

Pelo princípio da quantidade de movimento em regime permanente e para entradas e saídas unidimensionais:

$$\sum \vec{F}=\sum(\dot{m}V)_s-\sum(\dot{m}V)_e$$

Assumindo-se que após incidir na placa o jato se divida em duas partes iguais, pelo princípio da continuidade temos:

$$\dot{m}_1=\dot{m}_2=\frac{\dot{m}_j}{2}$$

e

$$\dot{m}_j=\rho\ V_j\ A_j=\rho\ V_j\ \frac{\pi\ D_j^2}{4}$$

Então, aplicando-se a primeira equação no eixo y:

$$F_y=0$$

e em x:

$$F_x=-\dot{m}_jV_j=-\rho\ V_j^2\ \frac{\pi\ D_j^2}{4}=-998\times 8^2\times\frac{\pi(0{,}1)^2}{4}=-501{,}6\ N\ \ ou\ 501{,}6\ N\ para\ a\ esquerda$$

35)

Trata-se de um problema unidimensional (vertical), portanto, pode ser adotada a equação da qtd. de mov. linear com entradas e saídas unidimensionais aplicada apenas ao eixo z:

$$\sum \mathrm{F}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{\mathrm{VC}}\mathrm{w}\rho\mathrm{d}\forall+\sum(\dot{\mathrm{m}}\mathrm{w})_{\mathrm{s}}-\sum(\dot{\mathrm{m}}\mathrm{w})_{\mathrm{e}}$$

Definindo o volume de controle como o foguete e aplicando a equação acima com referencial no foguete, que terá então velocidade nula e força inercial (referencial não inercial), teremos:

$$-\mathrm{m}\frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dt}}-\mathrm{mg}=0+\dot{\mathrm{m}}(-w_j)-0$$

, onde w_j é a velocidade do jato que sai do foguete. Explicitando-se a aceleração:

$$a=\frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dt}}=\frac{\dot{m}w_j}{m}-\mathrm{g}\quad (\mathrm{i})$$

Integrando ambos os lados da equação acima ao longo do tempo:

$$\int_0^V dw = \dot{m}w_j \int_0^t \frac{dt}{m} - g\int_0^t dt$$

A massa m do foguete em qualquer instante pode ser dada por $m(t) = m_0 - \dot{m}t$

$$V(t) = -w_j \ln\left(1 - \frac{\dot{m}t}{m_0}\right) - gt \quad \text{(ii)}$$

a) Utilizando a equação (i) tem-se: $a = 5 \cdot 3500/400 - 9{,}81 = 33{,}94\ m/s^2$

b) Utilizando a equação (ii) para t=10 s, tem-se: $V = -3500 \cdot \ln(1 - 5 \cdot 10/400) - 9{,}81 \cdot 10 = 369{,}3\ m/s$

36)

Pelo princípio da quantidade de movimento em regime permanente e para entradas e saídas unidimensionais:

$$\sum \vec{F} = \sum (\dot{m}V)_s - \sum (\dot{m}V)_e$$

Pelo princípio da continuidade, para regime permanente e entradas e saídas unidimensionais:

$$\sum \dot{m}_s = \sum \dot{m}_e \quad \rightarrow \quad \dot{m}_s = \dot{m}_0 = \rho_0\, V_0\, A_0$$

Aplicando em x:

$$F_x = \dot{m}_0(-V_0) - \dot{m}_0\, V_0 = -2\,\dot{m}_0\, V_0 = -2\,\rho_0\, V_0^2\, A_0$$

Em módulo:

$$F_0 = 2\,\rho_0\, V_0^2\, A_0 = 2\,\rho_0\, V_0^2 \frac{\pi D_0^2}{4} = \rightarrow V_0 = \frac{1}{D_0}\sqrt{\frac{2\,F_0}{\rho_0\,\pi}}$$

37)

No instante representado, a concha se move para direita com velocidade V = ΩR. Se considerarmos o referencial na concha, a velocidade do jato será V_j - ΩR e então o problema será semelhante ao anterior:

$$F = 2\,\rho\,(V_j - \Omega R)^2\, A_j$$

$$Potência = P = FV = 2\,\rho\,(V_j - \Omega R)^2\, A_j\, \Omega R = 2\,\rho\, A_j (V_j - \Omega R)^2\, \Omega R$$

Para Pot máxima temos:

$$\frac{dP}{d\Omega} = 0 \;\; e \;\; \frac{d^2P}{d\Omega^2} < 0 \quad \rightarrow \quad \Omega = \frac{V_j}{3R}$$

38)

Pelo princípio da continuidade, para regime permanente e entradas e saídas unidimensionais:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \;\rightarrow\; \rho\, V_1\, A_1 = \rho\, V_2\, A_2 \quad \rightarrow \quad V_1 = \frac{V_2 D_2^2}{D_1^2} = \frac{17 \times 6^2}{12^2} = 4{,}25\ m/s$$

Pelo princípio da quantidade de movimento em regime permanente e para entradas e saídas unidimensionais:

$$\sum \vec{F} = \sum (\dot{m}V)_s - \sum (\dot{m}V)_e$$

$$F_{pressão} - F_{parafuso} = \dot{m}_2\, V_2 - \dot{m}_1\, V_1 = \frac{\rho\pi}{4}[(V_2 D_2)^2 - (V_1 D_1)^2]$$

Para cálculo da força de pressão sobre a superfície, pode ser considerada a pressão manométrica, resultando então na pressão (262-103,4)kPa sobre a superfície 1 e zero para o restante. Logo:

$$F_{pressão} = p_1\, A_1 = 158.600 \times \frac{\pi(12 \times 0{,}0254)^2}{4} = 11{,}57\ kN$$

$$\rightarrow\ F_{parafuso} = 7{,}62\ kN$$

39)

Pelo princípio da continuidade, para regime permanente e entradas e saídas unidimensionais:

$$\sum \dot{m}_s = \sum \dot{m}_e \quad \rightarrow \quad \dot{m}_2 = \dot{m}_1 + \dot{m}_{comb} \ = \ \dot{m}_1 + \frac{\dot{m}_1}{30} \ = \ \frac{31}{30}\dot{m}_1$$

Pelo princípio da quantidade de movimento em regime permanente e para entradas e saídas unidimensionais:

$$\sum \vec{F} = \sum (\dot{m}V)_s - \sum (\dot{m}V)_e$$

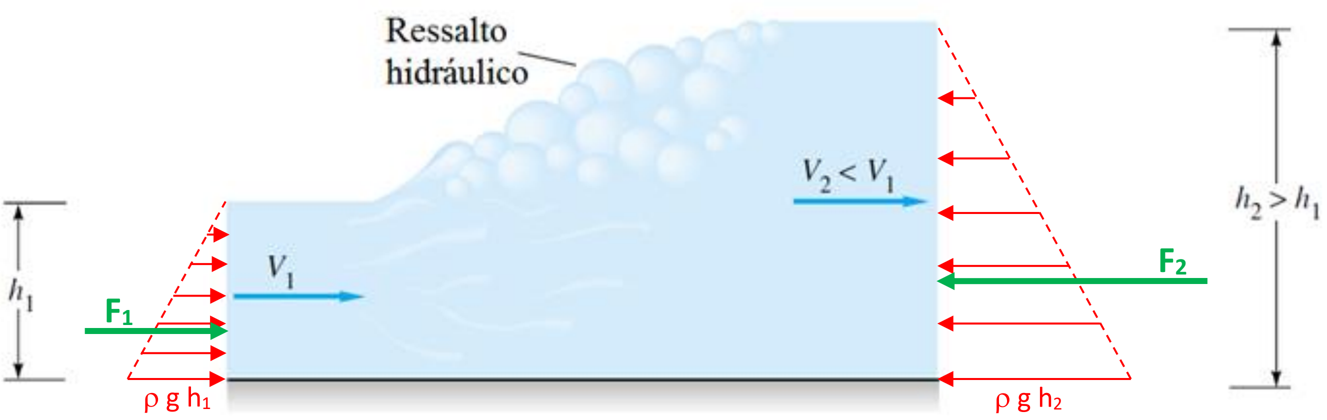
em x:

$$F = \dot{m}_2\, V_2 - \dot{m}_1\, V_1 = \dot{m}_1\left(\frac{31}{30}V_2 - V_1\right) = \rho_1\, V_1\, A_1\left(\frac{31}{30}V_2 - V_1\right)$$

ρ_1 é a massa específica do ar à 20°C e 1 atm que é 1,2 kg/m³

$$F = \rho_1\, V_1\, A_1\left(\frac{31}{30}V_2 - V_1\right) = 1{,}2 \times 250 \times 0{,}5 \times \left(\frac{31}{30}900 - 250\right) = 102\ kN$$

40)



Das pressões hidrostáticas aplicadas das fronteiras 1 e 2 obtém-se as forças resultantes

$$F_1 = \rho g \frac{h_1^2}{2} L \;\; e \;\; F_2 = \rho g \frac{h_2^2}{2} L \;\; (i)$$

, sendo L a largura do canal.

Tratando-se de um escoamento permanente e com entradas e saídas unidimensionais, a equação integral da continuidade é

$$\sum \dot{m}_s = \sum \dot{m}_e \;\; , ou\ seja, \;\; \dot{m}_s = \dot{m}_e \rightarrow \;\; \rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2 \rightarrow \;\; V_1 h_1 L = V_2 h_2 L \;\; \rightarrow \;\; V_1 h_1 = V_2 h_2 \;\; (ii)$$

e da quantidade de movimento linear é:

$$\sum \vec{F} = \sum (\dot{m} V)_s - \sum (\dot{m} V)_e \;\; , ou\ seja, \;\; F_1 - F_2 = \dot{m}_2 V_2 - \dot{m}_1 V_1 = \dot{m}_1 (V_2 - V_1)$$

$$\rightarrow \;\; F_1 - F_2 = \rho V_1 h_1 L (V_2 - V_1) \;\;\; (iii)$$

Substituindo (i) e (ii) em (iii):

$$\frac{\rho g L}{2}(h_1^2 - h_2^2) \;= \rho V_1 h_1 L (V_2 - V_1) \rightarrow \;\; \frac{g}{2}(h_1^2 - h_2^2) \;= V_1 (V_2 h_1 - V_1 h_1)$$

$$\xrightarrow{(ii)} \frac{g}{2}(h_1^2 - h_2^2) \;= V_1 (V_2 h_1 - V_2 h_2) = V_1 V_2 (h_1 - h_2)$$

$$\rightarrow \frac{g}{2}(h_1 + h_2)(h_1 - h_2) \;= V_1 V_2 (h_1 - h_2)$$

$$\rightarrow \frac{g}{2}(h_1 + h_2) = V_1 V_2 \rightarrow V_2 = \frac{g}{2V_1}(h_1 + h_2) \;\; (iv)$$

Substituindo (iv) em (ii):

$$V_1 h_1 = \left[\frac{g}{2V_1}(h_1 + h_2)\right] h_2 \rightarrow \frac{1}{h_1} h_2^2 + h_2 - \frac{2V_1^2}{g} = 0$$

, que é uma equação de 2° grau, em relação à incógnita h_2. Aplicando Bhaskara:

$$h_2 = h_1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8V_1^2}{g h_1}} \right)$$

Para obter V_2, basta substituir em (ii):

$$V_2 = V_1 \frac{h_1}{h_2} = V_1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{8V_1^2}{gh_1}} \right)^{-1}$$

41) A nuclear power plant on a river must eliminate 55 MW of waste heat to the river. The river conditions upstream are Q_i = 2,5 m³/s and T_i = 18 °C. The river is 45 m wide and 2,7 m deep. If heat losses to the atmosphere and ground are negligible, estimate the downstream river conditions (Q_0, T_0).

Por aplicação da 1ª Lei da termodinâmica:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \right) + \frac{\hat{u}_2 - \hat{u}_1 - q}{g} - h_{bomba} + h_{turbina} + h_{atrito}$$

Não havendo bombas, turbinas nem perda por atrito e considerando-se a mesma cota e mesma pressão (atmosférica), a expressão acima se reduz a:

$$\frac{V_1^2}{2g} = \left(\frac{V_1^2}{2g} \right) + \frac{\hat{u}_2 - \hat{u}_1 - q}{g}$$

Pelo princípio da continuidade, para regime permanente e entradas e saídas unidimensionais:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \;\; \rightarrow \;\; \rho_1 V_1 \, A_1 = \rho_2 \, V_2 \, A_2$$

Supondo-se por hipótese que a variação da temperatura é relativamente pequena e conseqüentemente causará uma variação de massa específica desprezível: $V_1 = V_2$

Então, chegamos a relação final para energia: $\Delta \hat{u} = q$

Logo, todo calor recebido será transmitido para energia interna do fluido, que é função da temperatura:
$Q = mc\Delta T \;\; \rightarrow \;\; \dot{Q} = \dot{m}c\Delta T$

$$\rightarrow \;\; \Delta T = \frac{\dot{Q}}{\dot{m}c} = \frac{\dot{Q}}{\rho \, Q \, c} = \frac{55 \cdot 10^6}{998 \cdot 2{,}5 \cdot 4180} = 5{,}3 \;\; \rightarrow \;\; T_0 = 18 + 5{,}3 = 23{,}3 °C$$

42)

Para o caso permanente com entradas e saídas unidimensionais, tem-se a equação da energia (1ª Lei da Termodinâmica):

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 \right) = \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \right) + \frac{\hat{u}_2 - \hat{u}_1 - q}{g} - h_{bomba} + h_{turbina} + h_{atrito}$$

Como não é considerada troca de calor e não há turbina, esta se reduz a:

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 \right) = \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \right) - h_{bomba} + h_{atrito} \;\; (i)$$

Escolhendo-se como ponto 1, a entrada da tubulação (1,8 m de profundidade) e como ponto 2 a saída do bico:

$$p_1 = \gamma \cdot h = 1{,}8 \cdot \gamma$$
$$p_2 = 0$$

Pelo princípio da continuidade:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow \ \rho V_1 A_1 = \rho V_2 A_2 \rightarrow \ V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1} = V_2 \frac{D_2^2}{D_1^2} = 36\left(\frac{2}{6}\right)^2 = 4\ m/s$$

Aplicando em (i), com referencial de z na superfície d'água:

$$\left(\frac{1{,}8 \cdot \gamma}{\gamma} + \frac{4^2}{2 \cdot 9{,}8} - 1{,}8\right) = \left(0 + \frac{36^2}{2 \cdot 9{,}8} + 3\right) - h_{bomba} + 2$$

$$\rightarrow \ h_{bomba} \cong 69\ m$$

$$\eta = \frac{Pot_H}{Pot_T}$$

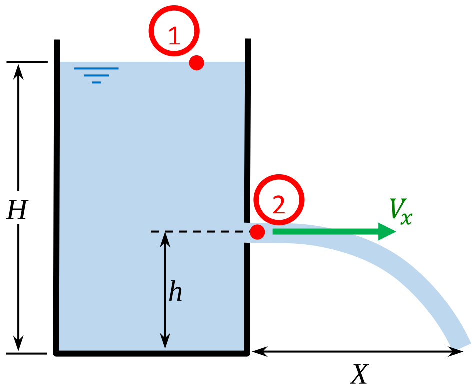
$$\rightarrow \ Pot_T = \frac{Pot_H}{\eta} = \frac{\frac{dE}{dt}}{\eta} = \frac{\frac{dm\ g\ h}{dt}}{\eta} = \frac{\dot{m}gh}{\eta} = \frac{\rho VAgh}{\eta} = \frac{998 \cdot 4 \cdot \frac{\pi(6 \cdot 0{,}0254)^2}{4} 9{,}8 \cdot 69}{0{,}75} \cong 67{,}5\ kW$$

43)

De acordo com o enunciado, o escoamento reúne as condições necessárias para que a equação de Bernoulli seja válida.

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

O próximo passo, é escolher onde estarão os pontos 1 e 2. Para isso, recomenda-se locais onde se tem informações e onde se deseja calcular algum resultado. Sendo assim, são definidos os pontos indicados na figura abaixo.

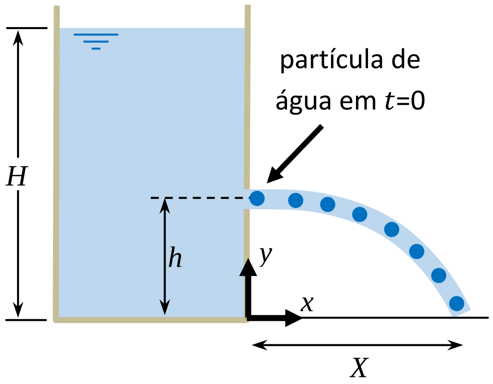


A velocidade do ponto 1 (velocidade com que o nível d'água desce) pode ser desprezada, considerando-se que a área da abertura superior é muito maior que a do orifício:

$$\frac{p_{atm}}{\gamma} + 0 + H = \frac{p_{atm}}{\gamma} + \frac{V_x^2}{2g} + h$$

$$\rightarrow \ V_x = \sqrt{2g(H - h)} \quad (i)$$

A partir o orifício, as partículas de água passam a se mover sob ação apenas da gravidade, o que corresponde a situação de um lançamento livre, estudada na Física. A maneira mais comum de se resolver esse tipo de problema é decompondo o movimento na direção x (horizontal) e y (vertical):



Observe que, neste momento, passamos a adotar uma abordagem lagrangiana, ou seja, as equações acompanham a partícula de água.

- Na direção x, desprezando-se o ar, não há ação de forças externas, portanto trata-se de um movimento uniforme (sem aceleração):

$$x = V_x t \ \ (ii)$$

- Na direção y, há a aceleração da gravidade, correspondendo a um movimento uniformemente acelerado (aceleração constante e igual a g):

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2 \ \ \ (iii)$$

Quando a partícula tocar no chão, teremos, pela equação (iii)

$$y = 0 \ \rightarrow \ \ \ t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

e, pela equação (ii)

$$X = x(t_f)$$

$$\rightarrow \ X = V_x \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Substituindo V_x, conforme a equação (i):

$$X = \sqrt{2g(H-h)} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{h(H-h)}$$

Na sequência, é conveniente reescrever a expressão obtida na questão anterior em função do parâmetro destacado pelo anunciado desta questão (h/H):

$$X = 2\sqrt{h(H-h)} = 2\sqrt{hH\left(1-\frac{h}{H}\right)} = 2\sqrt{\frac{hH^2}{H}\left(1-\frac{h}{H}\right)} = 2H\sqrt{\frac{h}{H}\left(1-\frac{h}{H}\right)}$$

Para simplificar, vamos substituir $h/H = \xi$:

$$X = 2H\sqrt{\xi(1-\xi)}$$

Como H é constante, pois apenas a posição do furo é variada, observa-se que a distância alcançada é função apenas de ξ, ou seja, $X = f(\xi)$.

Para facilitar, podemos reescrever a função como

$$f(\xi) = 2H\sqrt{\xi - \xi^2} = 2H\sqrt{g(\xi)}$$

onde

$$g(\xi) = \xi - \xi^2$$

Desta forma, observa-se que $f(\xi)$ será máximo quando $g(\xi)$ for máximo. Conforme abordado em Cálculo, o valor de uma função é obtido quando a primeira derivada

$$g'(\xi) = 1 - 2\xi$$

é nula. Então

$$g'(\xi) = 0 \quad \rightarrow \quad \xi = \frac{1}{2}$$

ou seja

$$\frac{h}{H} = \frac{1}{2}$$

o que significa que o furo deve ser feito à meia altura.

44)

Sendo um escoamento permanente de entrada e saída unidimensional e desprezando-se as perdas de energia, a equação de Bernoulli pode ser aplicada para o ponto de estrangulamento do escoamento (ponto 1) e o ponto de saída para atmosfera (ponto 2) :

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

Considerando-se a mesma cota z (eixo do escoamento) e a pressão manométrica (p_{atm}=0):

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + 0 = 0 + \frac{V_2^2}{2g} + 0$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{p_1}{\gamma} \quad \rightarrow \quad V_1^2 = V_2^2 - \frac{2p_1}{\rho} \quad (i)$$

Pela equação da continuidade (permanente, unidimensional, incompressível):

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad \rightarrow \quad V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2} = V_1 \frac{D_1^2}{D_2^2} \quad (ii)$$

$$(i)\ e\ (ii){:}\ \ V_1^2 = V_1^2 \frac{D_1^4}{D_2^4} - \frac{2p_1}{\rho} \rightarrow V_1^2\left(1 - \frac{D_1^4}{D_2^4}\right) = -\frac{2p_1}{\rho} \quad (iii)$$

Em uma situação estática, a pressão em 1 pode ser calculada por:

$$p_a = p_1 + \gamma h$$

Sendo a pressão manométrica da atmosfera igual a 0 e a condição para que o fluido na coluna de altura h suba, tem-se:

$$p_1 < -\gamma h \rightarrow -p_1 > \gamma h$$

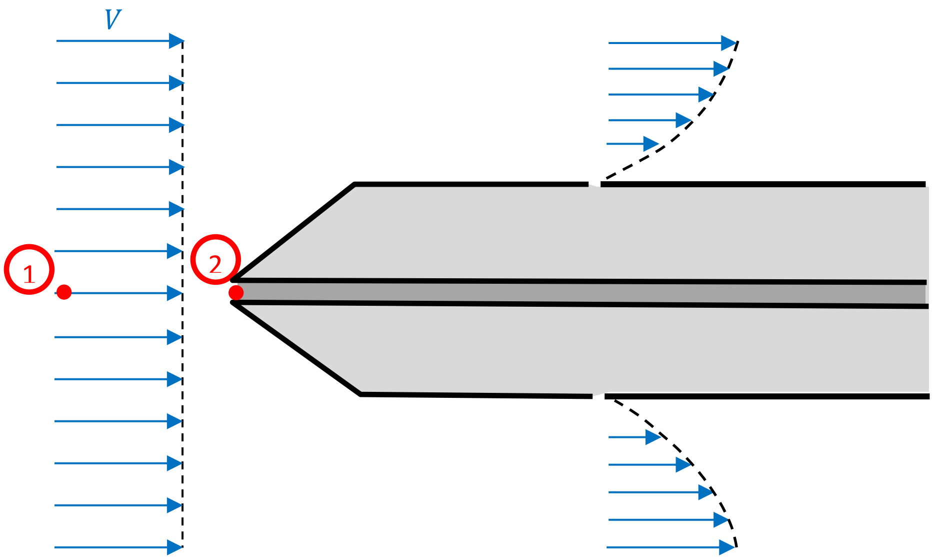
$$\xrightarrow{com\ (iii)} V_1^2\left(1-\frac{D_1^4}{D_2^4}\right) = \frac{2(-p_1)}{\rho} > \frac{2(\gamma h)}{\rho} = 2gh$$

$$\rightarrow V_1^2\left(1-\frac{D_1^4}{D_2^4}\right) > 2gh \rightarrow V_1^2 > \frac{2ghD_2^4}{D_2^4 - D_1^4}$$

$$\rightarrow V_1 > D_2^2\sqrt{\frac{2gh}{D_2^4 - D_1^4}}$$

45)

A distribuição de velocidades médias na frente e lateral do tubo de Pitot é representada na figura abaixo.



Observa-se que a velocidade das partículas imediatamente antes da entrada frontal (ponto 1) é igual à velocidade V do fluido, ocorrendo estagnação (velocidade nula) no ponto 2. Portanto, considerando escoamento invíscido, a equação de Bernoulli pode ser aplicada entre 1 e 2, onde o fluido é ar:

$$\frac{p_1}{\gamma_{ar}} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma_{ar}} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

$$\frac{p_{atm}}{\gamma_{ar}} + \frac{V^2}{2g} + z_1 = \frac{p_{frontal}}{\gamma_{ar}} + 0 + \overbrace{z_2}^{=z_1}$$

$$\rightarrow \frac{p_{frontal}}{\gamma_{ar}} = \frac{p_{atm}}{\gamma_{ar}} + \frac{V^2}{2g}$$

$$p_{frontal} = p_{atm} + \frac{\rho_{ar} V^2}{2}$$

Já nos orifícios laterais, devido a distribuição de velocidades na camada limite, a velocidade é nula e a pressão é atmosférica ($p_{lateral} = p_{atm}$).

A diferença de pressão entre a entrada frontal e lateral será

$$\Delta p = p_{frontal} - p_{lateral} = \frac{\rho_{ar} V^2}{2} \quad (i)$$

Essa diferença de pressão (entre bocais do tubo de Pitot) é a mesma que causa a diferença de altura Δh no manômetro em "U", onde o fluido é água. Portanto

$$\Delta p = \rho_{água}\, g\, \Delta h \quad (ii)$$

Unindo as equações (i) e (ii):

$$\frac{\rho_{ar} V^2}{2} = \rho_{água}\, g\, \Delta h$$

e a velocidade pode ser calculada por

$$V = \sqrt{\frac{2\rho_{água}\, g\, \Delta h}{\rho_{ar}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}15}{1{,}2}} \cong 49\, m/s$$

46) Equação diferencial da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho \vec{V}\right) = 0$$

Para um escoamento permanente e incompressível pode ser simplificada para:

$$0 + \rho \nabla \vec{V} = 0 \rightarrow \nabla \vec{V} = 0$$

Então:

$$\frac{\partial(3x)}{\partial x} + \frac{\partial(Cy)}{\partial y} + \frac{\partial(2x)}{\partial z} = 0 \rightarrow \quad C = -3$$

47)

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{x} + v\frac{\partial u}{y} + w\frac{\partial u}{z}\right)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{x} + v\frac{\partial v}{y} + w\frac{\partial v}{z}\right)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{x} + v\frac{\partial w}{y} + w\frac{\partial w}{z}\right)$$

i ii iii iv v

- i- Forças de campo (gravidade)
- ii- Forças de contato (pressão)
- iii- Forças de contato (viscosidade)
- iv- Aceleração local
- v- Aceleração convectiva
- iv + v - Aceleração total

48)

Por ser tratar de um problema unidimensional, pois as grandezas só dependem da posição x, apenas a equação de Navier-Stokes referente a este eixo é necessária. Portanto:

$$\rho g - \frac{dp}{dz} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Não há gradientes de pressão aplicados: dp/dz.
O escoamento é permanente: $\partial w/\partial t = 0$.
O escoamento é unidirecional: $u = v = 0$
O escoamento é unidimensional: $\partial^2 w/\partial y^2 = \partial^2 w/\partial z^2 = 0$

Logo, a equação se reduz a

$$\rho g + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$
$$\rightarrow \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\rho g}{\mu}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\rho g}{\mu}x + C_1 \quad \rightarrow \quad w(x) = -\frac{\rho g}{2\mu}x^2 + C_1 x + C_2$$

Aplicando as condições de contorno $w(h) = w(-h) = 0$, tem-se:

$$w(x) = \frac{\rho g}{2\mu}(h^2 - x^2)$$

49)

a)

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} = 500$$

➔ Regime laminar

b)

Trata-se de um problema unidimensional e permanente, pois o escoamento é laminar, só há variação da velocidade na direção vertical (perpendicular às placas) e a velocidade V da placa, que causa o movimento do fluido, é constante.

Portanto, considerando o eixo x como coincidente com a velocidade V da placa e o eixo z vertical, das equações de *Navier-Stokes*, a que apresenta termos não nulos é:

$$\rho g_x - \frac{dp}{dx} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Não há gradientes de pressão aplicados: $dp/dx =$.0
O escoamento é permanente: $\partial u/\partial t = 0$.
O escoamento é unidirecional: $v = w = 0$
O escoamento é unidimensional: $\partial^2 u/\partial x = \partial^2 u/\partial y^2 = 0$
Não há gravidade na direção do escoamento: $g_x = 0$

Logo, a equação se reduz a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \rightarrow w(x) = C_1 x + C_2$$

Aplicando as condições de contorno w(0) = 0 e w (h) = V (velocidade das partículas em contato com a placa é igual a velocidade da placa):

$$w(x) = \frac{V}{h} x$$

Conclui-se que o escoamento laminar entre duas placas planas horizontais tem uma distribuição de velocidades linear.

c)

Conforme deduzido pelo item anterior, a distribuição de velocidade entre as placas é linear, consequentemente, a tensão cisalhante pode ser calculada pela equação simplificada:

$$\tau = \mu \frac{V}{h}$$

$$\rightarrow F = \tau A = \mu \frac{V}{h} A = 10^{-3} \cdot \frac{1}{10^{-3}} \cdot 1 = 1\ N$$