ESCOLA DE ENGENHARIA DE VOLTA REDONDA (EEIMVR-UFF)
Departamento de Ciências Exatas (VCE)

Segunda Avaliação (P2) - 2018/2

Disciplina:	**Equações Diferenciais Ordinárias**	Data: **07/12/2018**	**NOTA**
Professor:	Yoisell Rodríguez Núñez		
Aluno(a):			

1. (1,5 pontos) **Identifique** o elemento na primeira coluna abaixo, com sua correspondente interpretação na segunda coluna:

I) $\dfrac{6s^2 - 2s^4 + 24}{s^4(s^2+4)}$	____ $det\,(A - \lambda I) = 0$
F) Polinômio característico	____ $\dfrac{2 \cdot \omega(s+a)}{\left[(s+a)^2 + \omega^2\right]^2}$
S) $\dfrac{e^{-(2\pi)s}s}{s^2+4}$	____ $(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$
A) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{s^2+4s+8}\right\}$	____ $\dfrac{6}{s^4} - \dfrac{2}{s^2+4}$
R) $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$	____ $e^{-2t}\cos(2t) + e^{-2t}\,\mathrm{sen}(2t)$
E) $\mathcal{L}\left\{te^{-at}\,\mathrm{sen}(\omega t)\right\}$	____ $\mathcal{L}\left\{u_{2\pi}(t)\cos(2(t-2\pi))\right\}$

2. (3,0 pontos) Calcule a **transformada inversa de Laplace** da função:

a) $\dfrac{1 - e^{-\pi s}}{s^2+25}$ b) $(s+5)^{-2}$ c) $\dfrac{6s^2 - 2s^4 + 24}{s^4(s^2+4)}$

3. (2,5 pontos) Utilize a **transformada de Laplace** para resolver o problema de valor inicial (**PVI**):

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t}\cos(2t) \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Dica:

$$\frac{s^3 + 4s^2 + 13s + 14}{(s^2+2s+5)^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{(s+1)^2+4} + \frac{2 \cdot 2(s+1)}{\left[(s+1)^2+4\right]^2}$$

4. (3,0 pontos) Encontre a **solução geral** para o seguinte **sistema de EDOs** homogêneo, utilizando o **método matricial**:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = -x_1 + 2x_2, \\ x_3' = -x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

Observação

- Todas as respostas devem estar justificadas, isto é, acompanhadas dos argumentos e/ou cálculos usados para obtê-las.

Assim como problemas surgem, as soluções aparecem... **BOA PROVA!!!**

Laplace transforms – Table			
$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)$	$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)$
$a \quad t \geq 0$	$\frac{a}{s} \quad s > 0$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$at \quad t \geq 0$	$\frac{a}{s^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\sin(\omega t+\theta)$	$\frac{s\sin\theta+\omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\cos(\omega t+\theta)$	$\frac{s\cos\theta-\omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$
$\frac{1}{2}t^2e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$t\sin\omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad s > a$	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2} \quad s > \lvert\omega\rvert$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2} \quad s > \lvert\omega\rvert$
$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\frac{1}{a^2}[1-e^{-at}(1+at)]$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad n = 1,2,3..$	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
t^ne^{at}	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad s > a$	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
t^ne^{-at}	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}} \quad s > a$	$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$	$\frac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}} \quad s > 0$	$f(t-t_1)$	$e^{-t_1 s}F(s)$
$g(t)\cdot p(t)$	$G(s)\cdot P(s)$	$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(s) \pm F_2(s)$
$\int f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{-1}(0)}{s}$	$\delta(t)$ *unit impulse*	$1 \quad$ *all s*
$\frac{df}{dt}$	$sF(s)-f(0)$	$\frac{d^2f}{df^2}$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$\frac{d^nf}{dt^n}$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-s^{n-3}f''(0)-\cdots-f^{n-1}(0)$		

GABARITO EDO (P2) - 2018/2

1. (1,5 pontos) **Identifique** o elemento na primeira coluna abaixo, com sua correspondente interpretação na segunda coluna:

I) $\dfrac{6s^2 - 2s^4 + 24}{s^4(s^2+4)}$ — F $\;det\,(A - \lambda I) = 0$ $\quad 6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2$

F) Polinômio característico — E $\;\dfrac{2 \cdot \omega(s+a)}{[(s+a)^2+\omega^2]^2}$ $\quad 6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2$

S) $\dfrac{e^{-(2\pi)s}s}{s^2+4}$ — R $\;(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$ $\quad -6\lambda + 3\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3$

A) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{s^2+4s+8}\right\}$ — I $\;\dfrac{6}{s^4} - \dfrac{2}{s^2+4}$ $\quad -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$

R) $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$ — A $\;e^{-2t}\cos(2t) + e^{-2t}\,\text{sen}(2t)$

E) $\mathcal{L}\{te^{-at}\,\text{sen}(\omega t)\}$ — S $\;\mathcal{L}\{u_{2\pi}(t)\cos(2(t-2\pi))\}$

1-

→ $\mathcal{L}\{te^{-at}\,\text{sen}\,\omega t\} = \dfrac{2 \cdot \omega(s+a)}{[(s+a)^2+\omega^2]^2}$

Única resposta possível já que $\mathcal{L}\{\text{sen}\,\omega t\} = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

→

$(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$

$6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2\,(1-\lambda) = 6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 6\lambda + 3\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3$

$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$ //

→

$\det(A - \lambda I) = 0$

Polinômio caratrístico → Usados para encontrar autovetores e autovalores de um sistema.

→ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{s^2+4s+8}\right\} = e^{-2t}\cos(2t) + e^{-2t}\,\text{sen}\,(2t)$

Única resposta possível entre as disponíveis, já que a solução de uma transformada inversa de Laplace sempre é uma $f(t)$.

→ $\mathcal{L}\{u_{2\pi}(t)\cos(2(t-2\pi))\} = \dfrac{e^{-(2\pi)s}s}{s^2+4}$; pois $\mathcal{L}\{f(t-t_1)\} = e^{-t_1 s}F(s)$

→ $\dfrac{6s^2 - 2s^4 + 24}{s^4(s^2+4)} = \dfrac{6}{s^4} - \dfrac{2}{s^2+4}$; Única solução disponível

2 -

a) $\frac{1-e^{-\pi s}}{s^2+5^2} = \frac{1}{s^2+5^2} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2+5^2}$ → teorema do deslocamento

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{s^2+5^2} - \frac{e^{-\pi s}}{5} \cdot \frac{5}{s^2+5^2}$

Aplicando a inversa

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-\pi s}}{s^2+25}\right\} = \boxed{\frac{1}{5}\left[\operatorname{sen} 5t - \operatorname{sen} 5(t-\pi)\right]}$

b) $\mathcal{L}^{-1}\{(s+5)^{-2}\} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} = \left\{\frac{1}{(s+5)^2}\right\}$

Explicação: Teorema do deslocamento

- s está deslocado de 5 unidades
- sabe-se também que a transformada de laplace de t^n é $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

Portanto, tem-se que

$\mathcal{L}\{(s+5)^{-2}\} = \boxed{te^{-5t}}$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s^2-2s^4+24}{s^4(s^2+4)}\right\}$: Da questão 1, temos que essa divisão de polinômio pode ser reescrita como

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^2+4}\right\}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^4}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}$

GRÁFICA UNIVERSITÁRIA

continua →

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^{3+1}}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s^2-2s^4+24}{s^4(s^2+4)}\right\} = \boxed{t^3 - \operatorname{sen} 2t}$

Questão 3. Por transformada de Laplace:

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t}\cos(2t)$$

$$y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0$$

$* \ \mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - s\cancel{y(0)}^{1} - \cancel{y'(0)}^{0} = s\mathcal{L}\{y\} - 1$

$\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - s\cancel{y(0)}^{1} = s\mathcal{L}\{y\} - 1$

$t e^{-at} = \frac{1}{(s+a)^2} = \frac{1}{(s+1)^2}$, $a = -1$

$*$ Substituindo na EDO:

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - s + 2[s\mathcal{L}\{y\} - 1] + 5\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\, 4e^{-t}\cos(2t)$$

$$(s^2 + 2s + 5)\mathcal{L}\{y\} - s - 2 = \frac{1}{(s+1)^2+4}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\frac{1}{(s+1)^2} + (s+2)}{(s^2+2s+5)}$$

1° teorema deslocamento

$e^{at} \to (s-a)$

$a = -1$

$\mathcal{L}\cos(2t) = \frac{1}{s^2+4}$

$\frac{1}{(s+1)^2+4}$

$\frac{1}{(s+1)^2}$

$$\mathcal{L}\{y\} = \left[\frac{1}{(s+1)^2+4} + (s+2)\right]\frac{1}{(s^2+2s+5)}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{s^3 + 4s^2 + 13s + 14}{(s^2+2s+5)^2}$$

$(s^2+2s+1)(s+2s+5)$

$s^3 + 2s^3 + 5s^2 + 2s^2 + 4s^2 + 10 + s$

$+2s+5$

$\to s^3 + 4s^2 + 13s + 14$

$$= \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{2(s+1)^2+4} + \frac{2\cdot 2(s+1)}{[(s+1)^2+4]^2}$$

$(s^2+2s+1)+4 \cdot (s+2s+5)$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\frac{2}{2(s+1)^2+4} + \mathcal{L}^{-1}\frac{2\cdot 2(s+1)}{[(s+1)^2+4]^2}$$

$a=1$, $w=2$: $e^{-at}\cos wt$; $a=1$, $w=2$: $e^{-at}\sin wt$; $a=1$, $w=2$: $te^{-at}\text{sen}\, wt$ — tabela

$$e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\text{sen}\,2t + te^{-t}\text{sen}\,2t$$

(Continuação questão 3)

$$= \boxed{e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\text{sen}\,2t + te^{-t}\text{sen}\,2t}$$

4) $\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = -x_1 + 2x_2 \\ x_3' = -x_2 + 3x_3 \end{cases}$

forma matricial: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Eq característica: $\det(A - \lambda I) = 0$

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 3$

• Para $\lambda_1 = 1$

$(A - \lambda I)\vec{\varepsilon} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-1 & 0 \\ 0 & -1 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(1)} \\ \varepsilon_1^{(2)} \\ \varepsilon_1^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} -\varepsilon_1^{(1)} + \varepsilon_1^{(2)} = 0 \\ -\varepsilon_1^{(2)} + 2\varepsilon_1^{(3)} = 0 \end{cases}$ $\rightarrow \varepsilon_1^{(1)} = \varepsilon_1^{(2)}$ $\rightarrow \varepsilon_1^{(2)} = 2\varepsilon_1^{(3)}$

se $\varepsilon_1^{(3)} = 1$, então, $\varepsilon_1^{(2)} = \varepsilon_1^{(1)} = 2$

$\vec{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$

• Para $\lambda_2 = 2$

$(A - \lambda I)\vec{\varepsilon} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ -1 & 2-2 & 0 \\ 0 & -1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_2^{(1)} \\ \varepsilon_2^{(2)} \\ \varepsilon_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} -\varepsilon_2^{(1)} = 0 \\ -\varepsilon_2^{(1)} = 0 \\ -\varepsilon_2^{(2)} + \varepsilon_2^{(3)} = 0 \end{cases}$ $\varepsilon_2^{(1)} = 0$ $\rightarrow \varepsilon_2^{(2)} = \varepsilon_2^{(3)}$

se $\varepsilon_2^{(2)} = 1$, então $\varepsilon_2^{(3)} = 1$

$\vec{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{X}^{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

· Para $\lambda = 3$

$$(A - \lambda I)\vec{\varepsilon} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 0 & 0 \\ -1 & 2-3 & 0 \\ 0 & -1 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_3^{(1)} \\ \varepsilon_3^{(2)} \\ \varepsilon_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2\varepsilon_3^{(1)} = 0 \\ -\varepsilon_3^{(1)} - \varepsilon_3^{(2)} = 0 \\ -\varepsilon_3^{(2)} = 0 \end{cases} \qquad \varepsilon_3^{(1)} = \varepsilon_3^{(2)} = 0 \qquad \text{Si } \varepsilon_3^{(3)} = 1,\ \vec{\varepsilon}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$