Universidade Federal Fluminense
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Elétrica

Circuitos Elétricos de Corrente Contínua - 1º/2024

3ª Parte da Disciplina
Conteúdo: Circuitos de 1ª e 2ª ordens
Livro-texto: Sadiku, capítulos 6, 7, 8 e 16

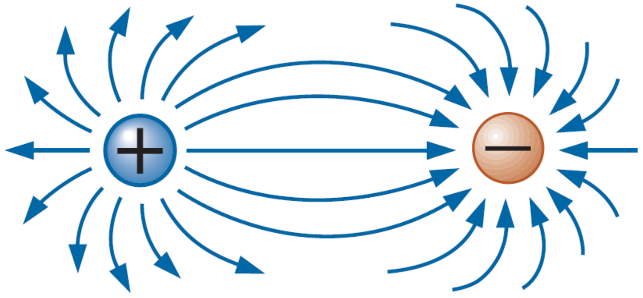
Tiago Pires Abud
tpabud@id.uff.br

Niterói, 2024

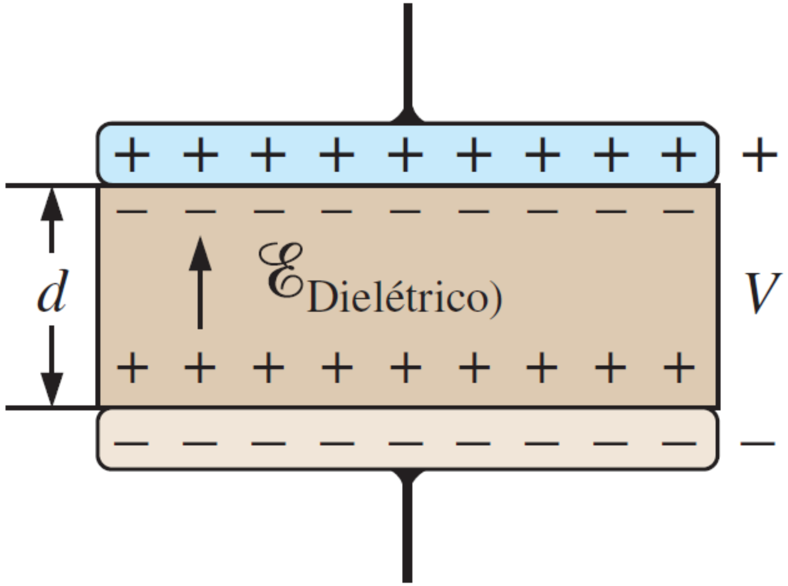
Sumário

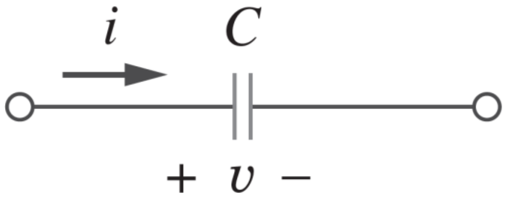
1. Capacitores

- **Capacitor**
  - Elemento passivo projetado para **armazenar energia em seu campo elétrico**
  - Formado por duas placas condutoras separadas por um isolante (ou dielétrico)
  - A tensão no capacitor não pode mudar abruptamente
  - Em regime permanente ($t \to \infty$), o capacitor se comporta como um **circuito aberto**

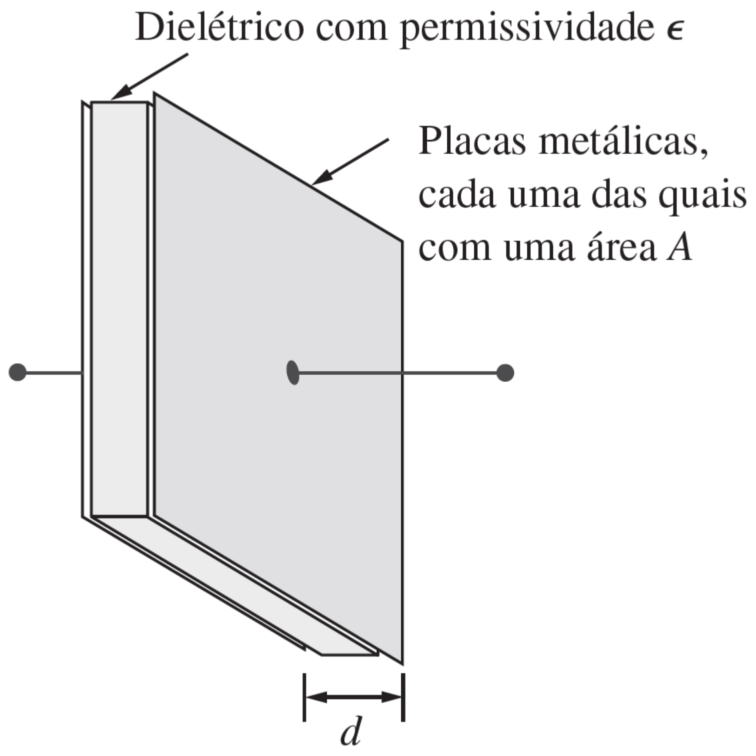


As linhas de campo elétrico saem das cargas positivas para as negativas





- **Capacitância**
  - Medida da **quantidade de carga** que o capacitor pode armazenar em suas placas
  - A **permissividade** representa o quão facilmente um material “permite” o estabelecimento de um campo elétrico em seu meio



$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

C é a capacitância, em farad [F]

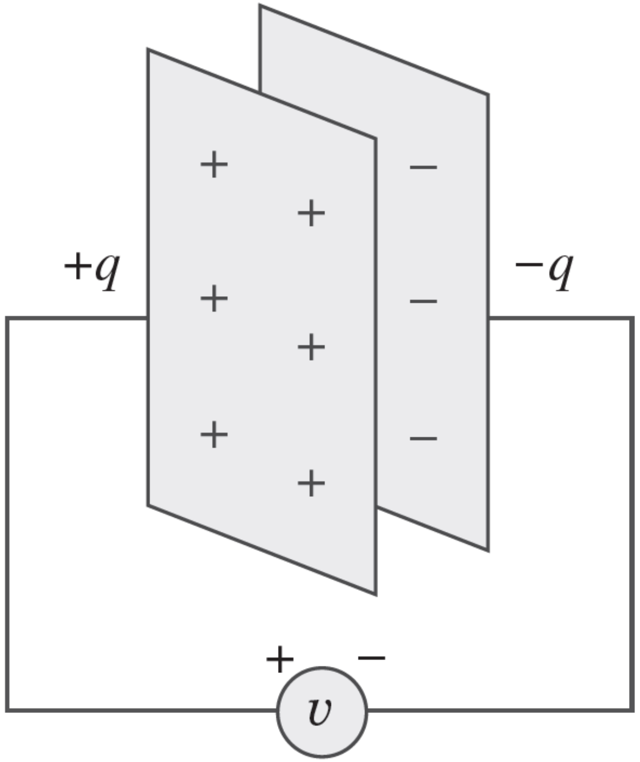
ϵ é a permissividade do material, em [F/m]

A é a área, em $[m^2]$

d é a distância entre as placas, em $[m]$

1. Capacitores

- **Capacitância**
  - Medida da **quantidade de carga** que o capacitor pode armazenar em suas placas
  - A **permissividade** representa o quão facilmente um material “permite” o estabelecimento de um campo elétrico em seu meio



- Razão entre a **carga** depositada em uma placa de um capacitor e a **diferença de potencial** entre as duas placas, medida em farads [F]

$$C = \frac{q}{v}$$

1. Capacitores

- **Equações Importantes:**

- $C = \frac{\epsilon A}{d}$
- $q = vC$
- $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt}$
- Para um capacitor inicialmente descarregado, $v(-\infty) = 0$:

$$w = \int_{-\infty}^{t} p(T)dT = C\int_{-\infty}^{t} v\frac{dv}{dT}dT = C\int_{0}^{v(t)} vdv = \frac{1}{2}Cv^2$$

1. Capacitores

- **Equações Importantes (resumindo):**

- $C = \frac{\epsilon A}{d}$

- $q = vC$

- $i = C\frac{dv}{dt}$

- $w = \frac{1}{2}Cv^2$ ou $w = \frac{q^2}{2C}$

1. Capacitores

- SADIKU, problema 6.1:

Se a tensão em um capacitor de $7{,}5\ F$ for $2te^{-3t}\ V$, determine a corrente e a potência.

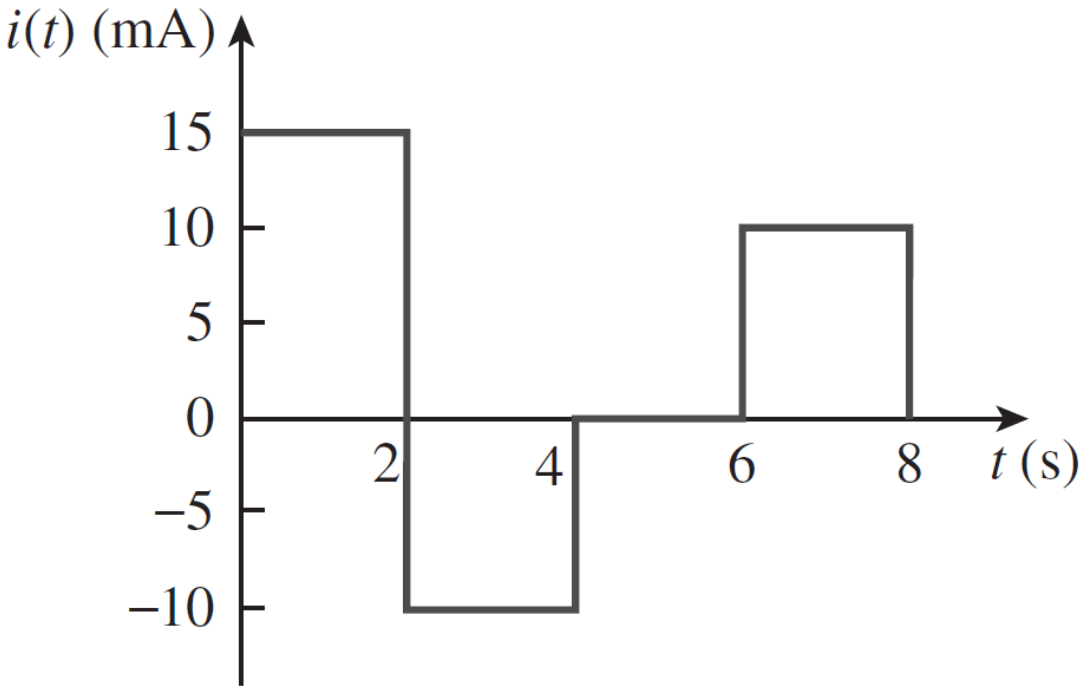
➢ Solução:

- $i = c\dfrac{dv}{dt} = (7{,}5)[2e^{-3t} + (2t)(-3)(e^{-3t})] = (15)(1-3t)(e^{-3t})\ A$

- $p = vi = [2te^{-3t}][(15)(e^{-3t})(1-3t)] = (30t)(1-3t)(\mathrm{e}^{-6t})\ \mathrm{W}$

- SADIKU, problema 6.11:

Um capacitor de 4 mF tem a forma de onda para corrente apresentada na figura a seguir. Supondo que v(0) = 10 V, esboce a forma de onda da tensão v(t).



1. Capacitores

- SADIKU, problema 6.11:

➢ Solução:

- $0 < t < 2$:

$$v(t) = \left[\frac{10^{-3}}{4 \times 10^{-3}} \int_0^t 15\, dT\right] + 10 = 3{,}75t + 10$$

$$\therefore v(0) = 10\, V$$

$$v(2) = 17{,}5\, V$$

- $2 < t < 4$:

$$v(t) = \left[\frac{10^{-3}}{4 \times 10^{-3}} \int_2^t (-10)\, dT\right] + 17{,}5 = (-2{,}5)(t-2) + 17{,}5$$

$$\therefore v(2) = 17{,}5\, V$$

$$v(4) = 12{,}5\, V$$

1. Capacitores

- SADIKU, problema 6.11:

➢ Solução:

- $4 < t < 6$:

$$v(t) = \left[\frac{10^{-3}}{4 \times 10^{-3}} \int_{4}^{t} 0 \; dT\right] + 12{,}5 = 12{,}5 \; V$$

$$\therefore v(4) = 12{,}5 \; V$$

$$v(6) = 12{,}5 \; V$$

- $6 < t < 8$:

$$v(t) = \left[\frac{10^{-3}}{4 \times 10^{-3}} \int_{6}^{t} 10 \; dT\right] + 17{,}5 = (2{,}5)(t - 6) + 12{,}5$$

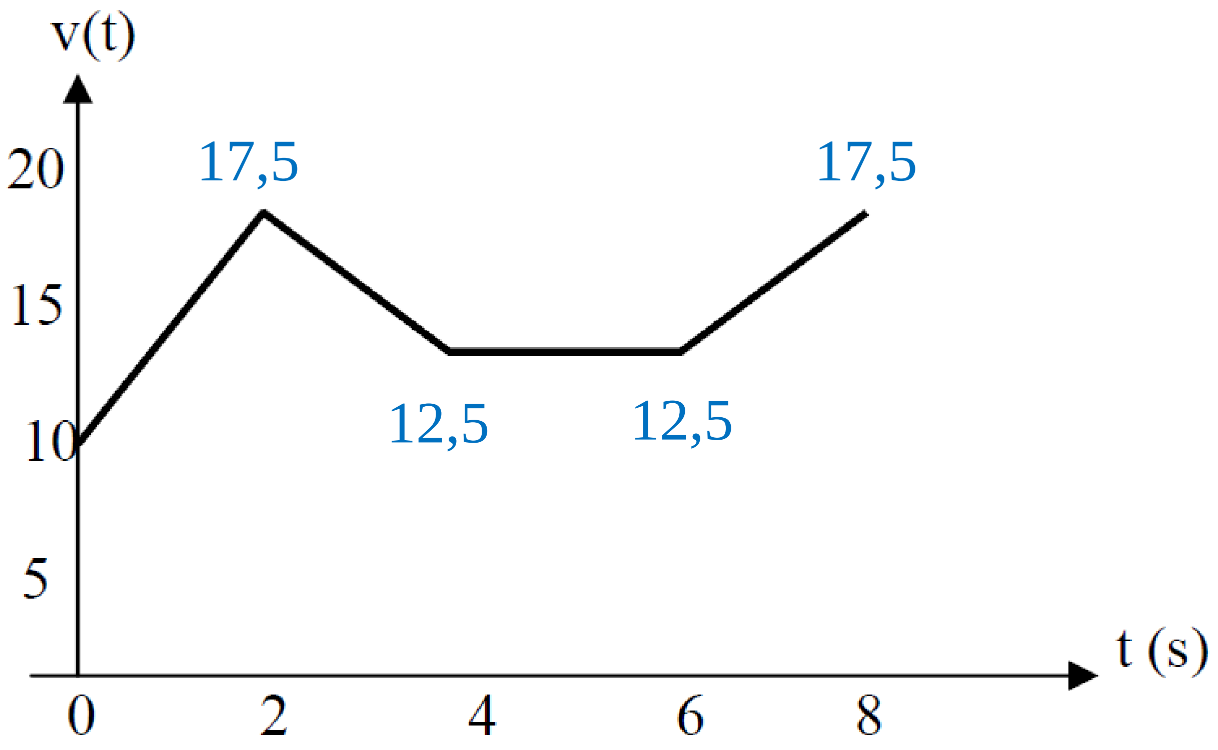
$$\therefore v(6) = 12{,}5 \; V$$

$$v(8) = 17{,}5 \; V$$

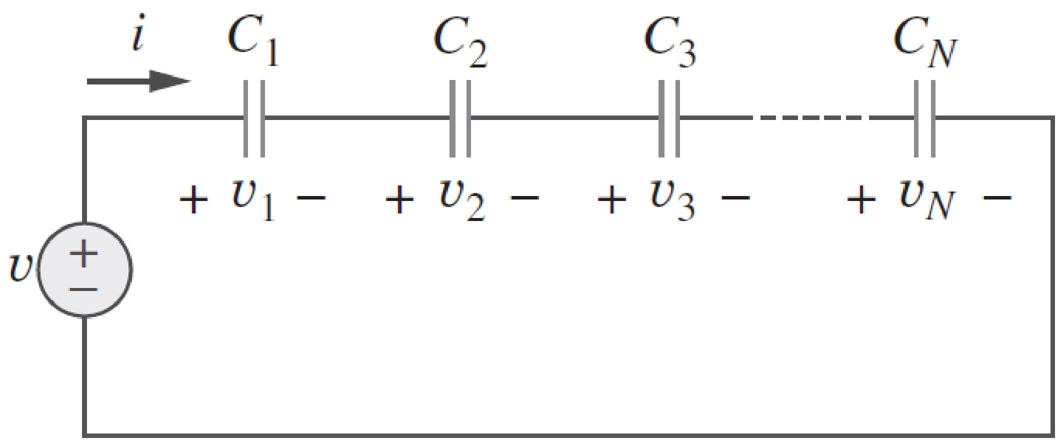
1. Capacitores

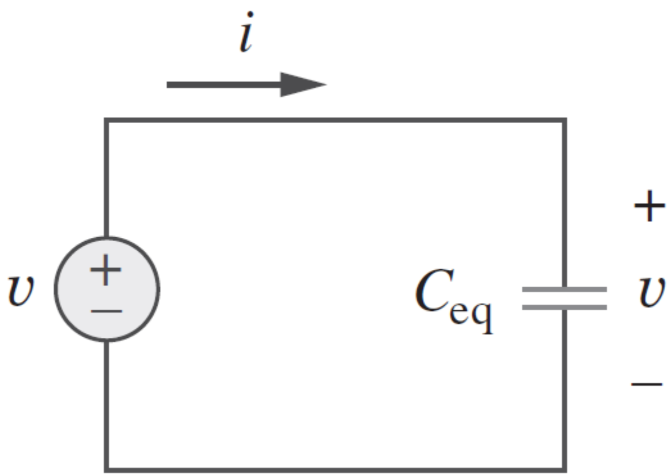
- SADIKU, problema 6.11:

➢ Solução:



- Associação em **série** de capacitores





$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_N =$$

$$= \frac{1}{C_1}\int i\,dt + \frac{1}{C_2}\int i\,dt + \cdots + \frac{1}{C_N}\int i\,dt =$$

$$= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N}\right)\int i\,dt$$

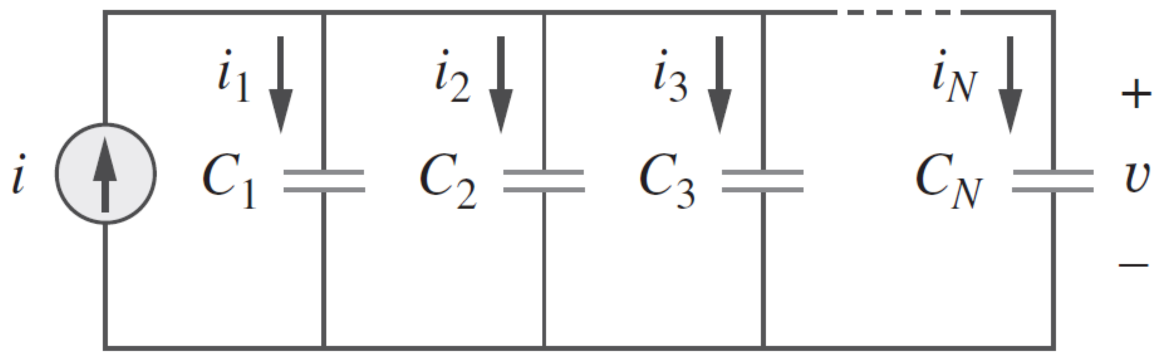
$$\therefore v = \frac{1}{C_{eq}}\int i\,dt$$

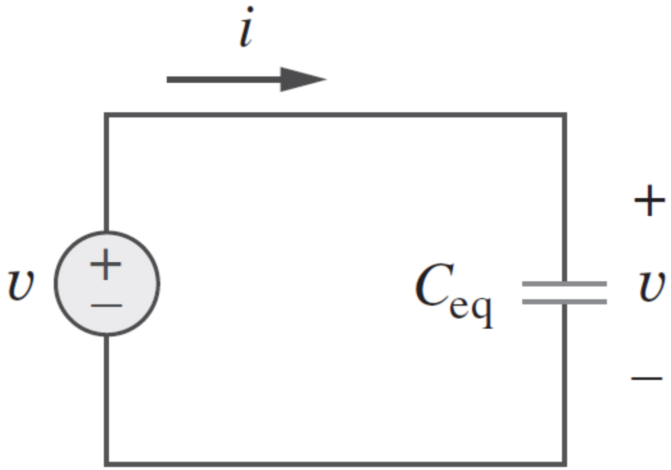
onde:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N}$$

1. Capacitores

- Associação em **paralelo** de capacitores





$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_N =$$

$$= C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + \cdots + C_N \frac{dv}{dt} =$$

$$= (C_1 + C_2 + \cdots + C_N) \frac{dv}{dt}$$

$$\therefore v = C_{eq} \frac{dv}{dt}$$

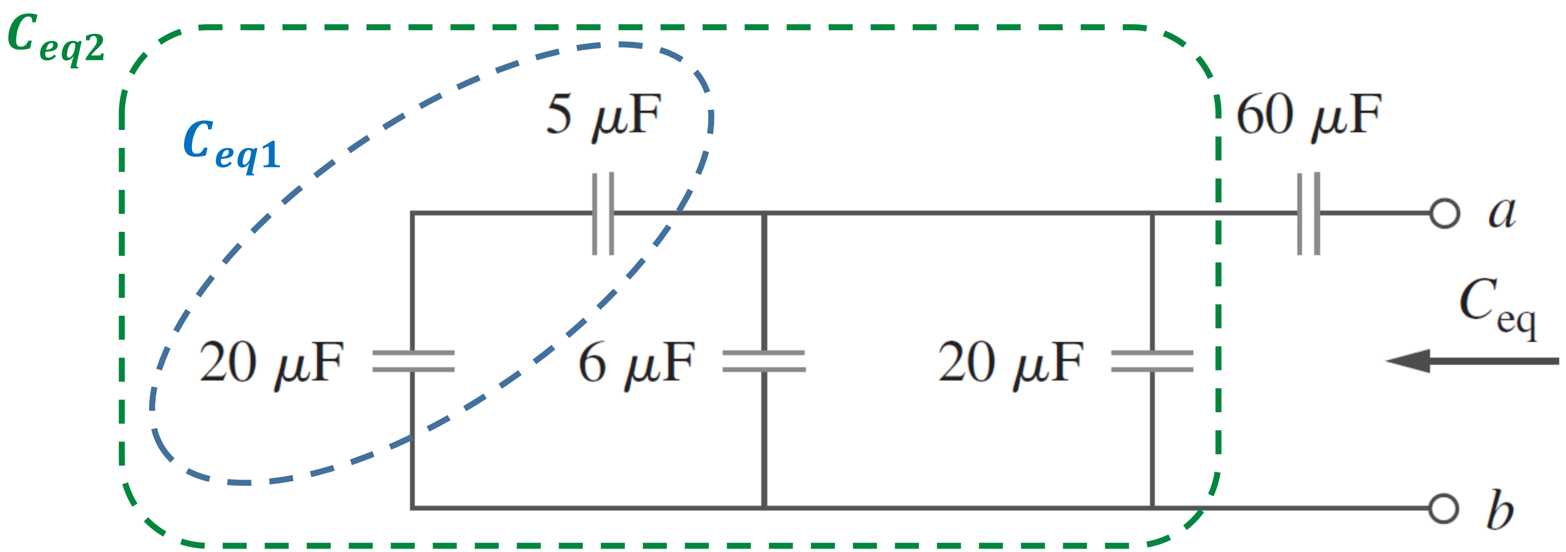
onde:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N$$

1. Capacitores

- SADIKU, exemplo 6.6:

Determine a capacitância equivalente vista entre os terminais a-b:



➢ Solução:

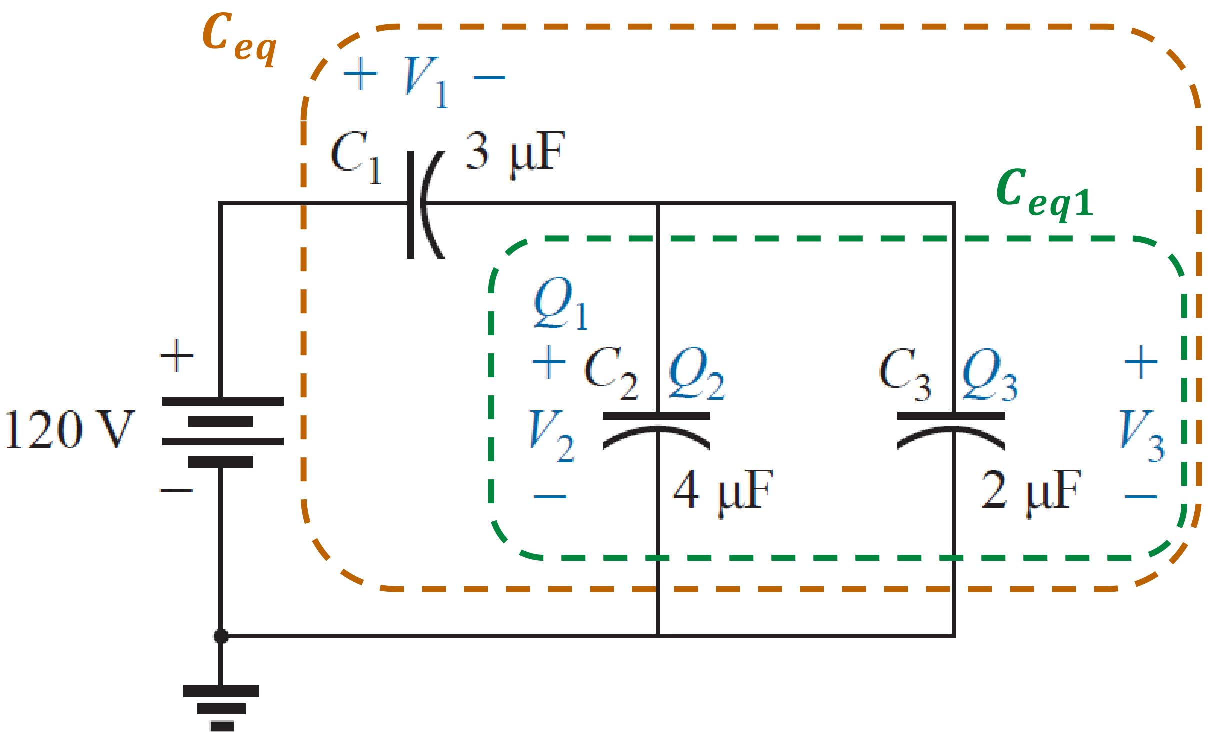
$C_{eq1} = (20\mu)(5\mu)/(20\mu + 5\mu) = 4\ \mu F$

$C_{eq2} = 4 + 6 + 20 = 30\ \mu F$

$\therefore C_{eq} = (30\mu)(60\mu)/(30\mu + 60\mu) = 20\ \mu F$

- BOYLESTAD, exemplo 10.17:

Determine a tensão entre os terminais e a carga de cada capacitor:



➢ Solução:

$$C_{eq1} = 4 + 2 = 6\ \mu F$$

$$C_{eq} = (3\mu)(6\mu)/(3\mu + 6\mu) = 2\ \mu F$$

$$Q_{total} = Q_1 = V\ C_{eq} = (120)(2\mu) = 240\ \mu C$$

$$V_1 = Q_1/C_1 = 240/3 = 80\ V$$

$$V_2 = V_3 = 120 - 80 = 40V$$

ou

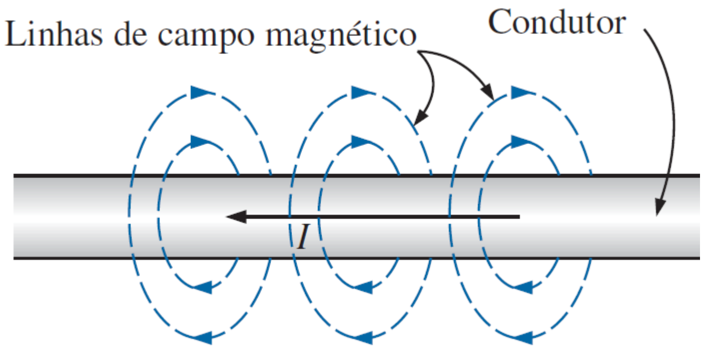
$$Q_1 = Q_2 + Q_3 = V_2 C_2 + V_3 C_3$$

$$\therefore V_2 = V_3 = \mathrm{Q}_1/(\mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3) = 240/6 = 40V$$

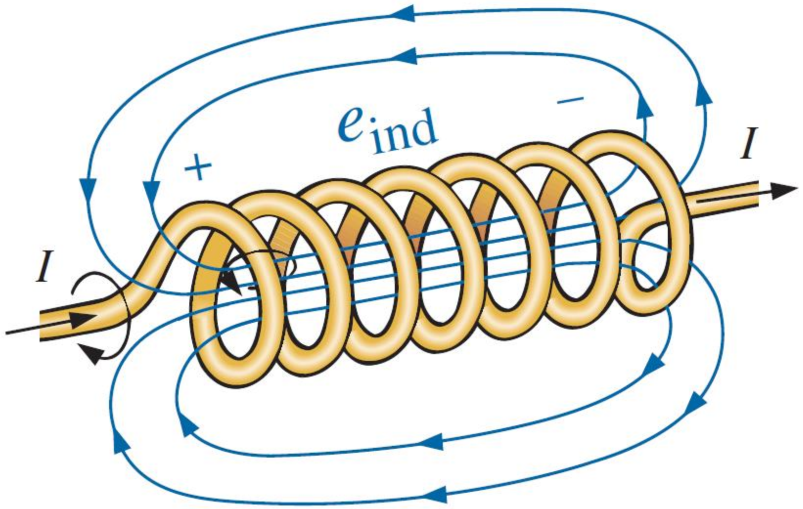
$$Q_2 = V_2\ C_2 = (40)(4\mu) = 160\ \mu\mathrm{C}$$

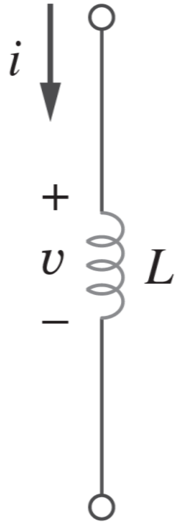
$$Q_3 = V_3\ C_3 = (40)(2\mu) = 80\ \mu\mathrm{C}$$

- **Indutor**
  - Elemento passivo projetado para **armazenar energia em seu campo magnético**
  - Consiste em uma bobina de fio condutor
  - A corrente no indutor não pode mudar abruptamente
  - Em regime permanente ($t \to \infty$), o indutor se comporta como um **curto-circuito**



Linhas de campo magnético devido à aplicação de corrente em um condutor

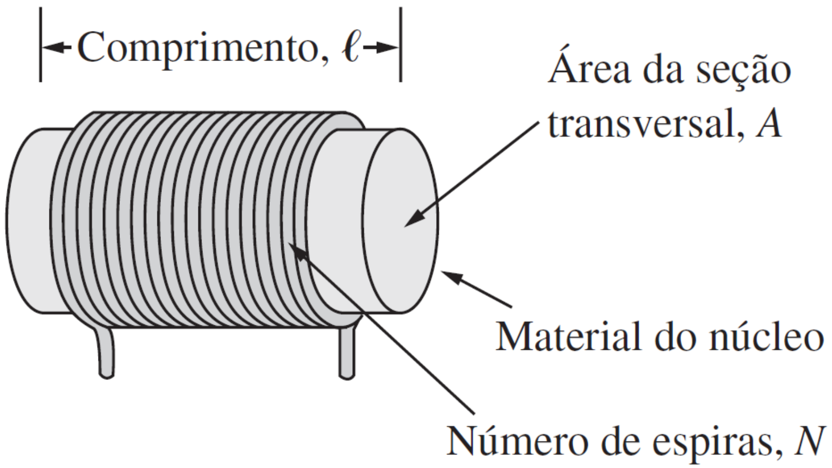




2. Indutores

- **Indutância**
  - Indutância é a propriedade segundo a qual um indutor se opõe à mudança do fluxo de corrente através dele, medida em henrys (H)
  - A **permeabilidade** é uma medida da "facilidade" com que linhas de fluxo magnético podem ser estabelecidas no material

➢ Ex.: Solenóide:



➢ Indutância de um solenóide:

$$L = \frac{N^2 \mu A}{\ell}$$

L é a indutância, em henry [H]

N é o número de espiras

μ é a permeabilidade do núcleo de ferro, em $[Wb/A \cdot m]$

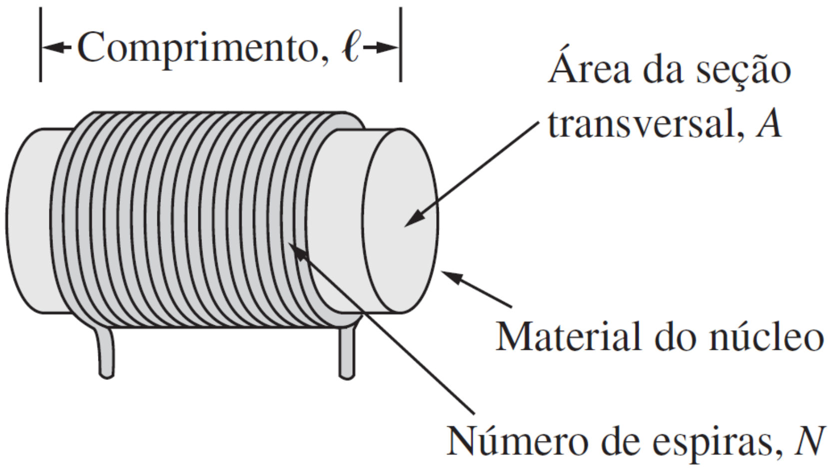
A é a área, em $[m^2]$

ℓ é o comprimento do solenóide, em $[m]$

2. Indutores

- **Indutância**
  - Indutância é a propriedade segundo a qual um indutor se opõe à mudança do fluxo de corrente através dele, medida em henrys (H)
  - A **permeabilidade** é uma medida da "facilidade" com que linhas de fluxo magnético podem ser estabelecidas no material

➢ Ex.: Solenóide:



- Medida da variação do **fluxo magnético** na bobina em razão de uma variação na **corrente *i*** que percorre a bobina

$$L = N\frac{d\Phi}{di}$$

Φ é o fluxo magnético, em weber (Wb)

N é o número de espiras

i é a corrente, em [A]

- **Equações Importantes:**

- $L = \dfrac{N^2 \mu A}{\ell}$ (no solenóide)
- $L = N\dfrac{d\Phi}{di}$
- $v = L\dfrac{di}{dt}$
- Para um indutor sem energia armazenada, $i(-\infty) = 0$:

$$w = \int_{-\infty}^{t} p(T)dT = L\int_{-\infty}^{t} i\frac{di}{dT}dT = L\int_{0}^{i(t)} idi = \frac{1}{2}Li^2$$

2. Indutores

- **Equações Importantes (resumindo):**

- $L = \dfrac{N^2 \mu A}{\ell}$ (no solenóide)

- $L = N \dfrac{d\Phi}{di}$

- $v = L \dfrac{di}{dt}$

- $w = \dfrac{1}{2} L i^2$

- SADIKU, problema prático 6.8:

Se a corrente através de um indutor de $1\,mH$ for $i(t) = 60\cos 100t\;mA$, determine a tensão entre os terminais e a energia armazenada

➢ Solução:

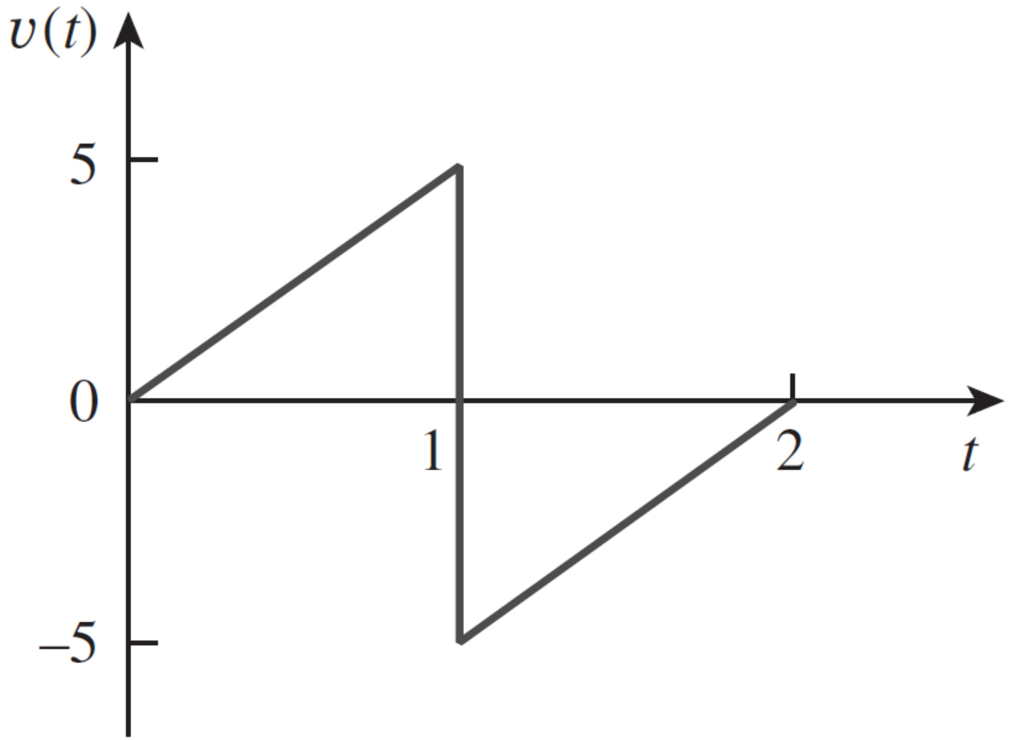
- $$v = L\frac{di}{dt} = (10^{-3})\frac{d(60 \times 10^{-3} cos100t)}{dt} = -6\;sen100t\;mV$$

- $$w = \frac{1}{2}Li^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(10^{-3})(60 \times 10^{-3} cos100t)^2 = 1{,}8\cos^2 100t\;\;\mu J$$

2. Indutores

- SADIKU, problema 6.45:

Se a forma de onda da tensão for aplicada a um indutor de $10\ mH$, determine a corrente $i(t)$. Suponha $i(0) = 0$.



- SADIKU, problema 6.45:

➢ Solução:

- $0 < t < 1$:

$$i(t) = 100\int_0^t 5T\,dT = 250t^2\text{ A}$$

$$\therefore i(0) = 0A$$

$$i(1) = 250\ A$$

- $1 < t < 2$:

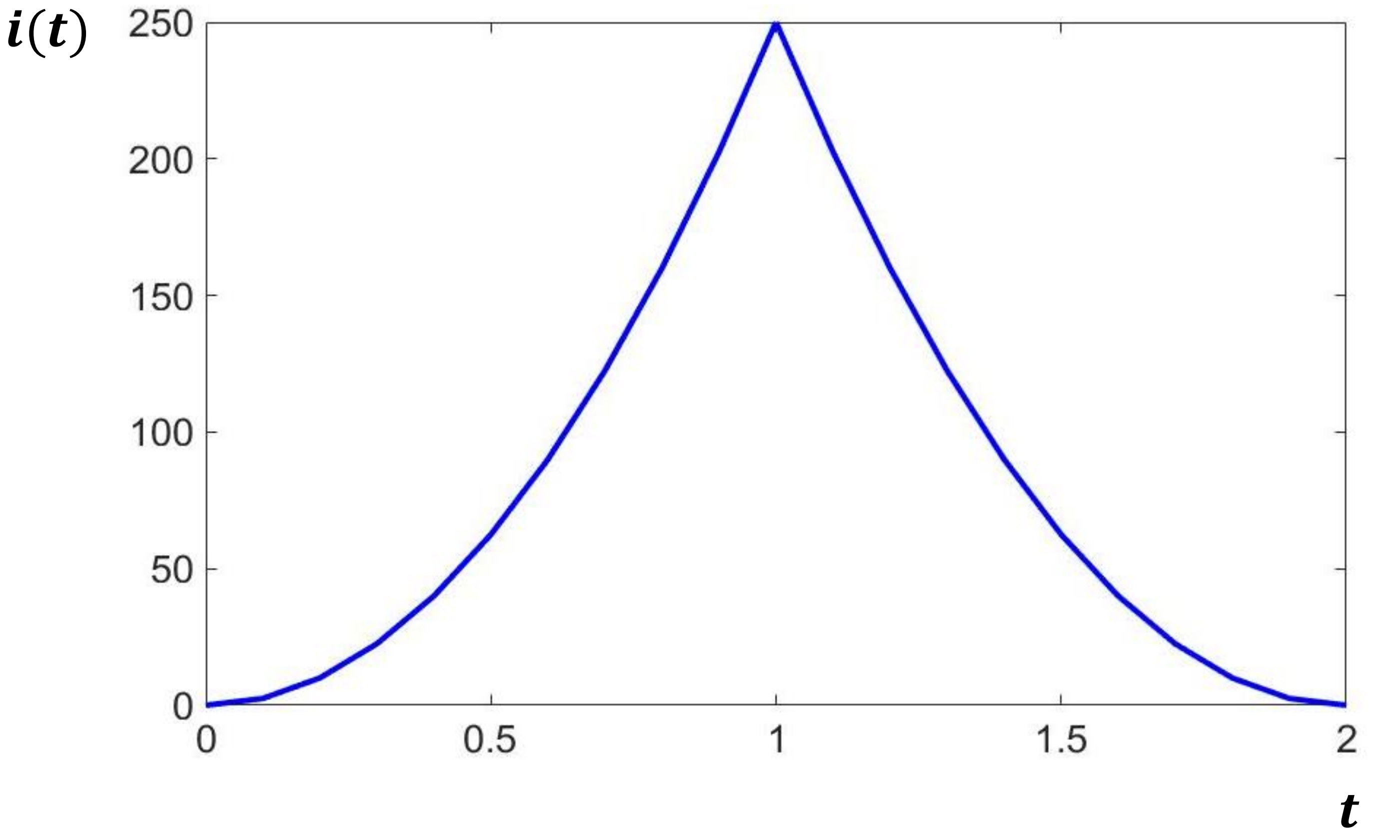
$$i(t) = \left[100\int_1^t (5T-10)\,dT\right] + 250 = (0{,}25t^2 - t + 1)\ kA$$

$$\therefore i(1) = 250\ A$$

$$i(2) = 0\ A$$

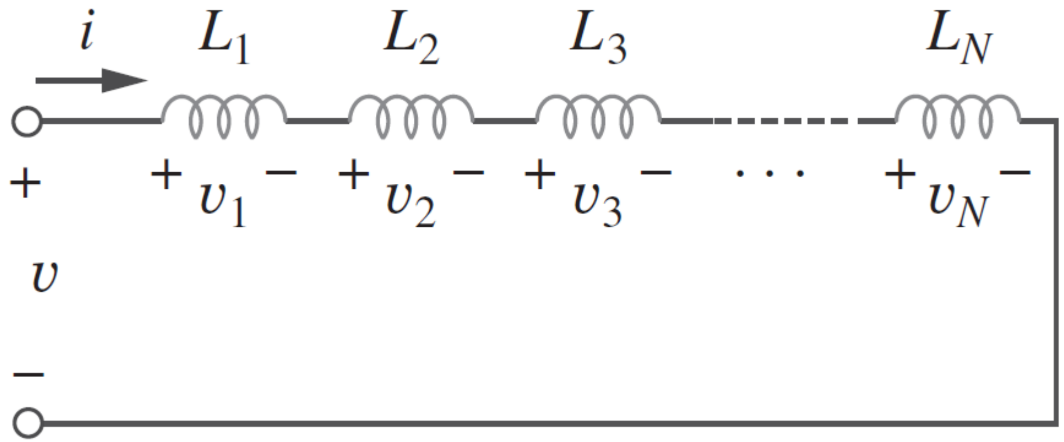
- SADIKU, problema 6.45:

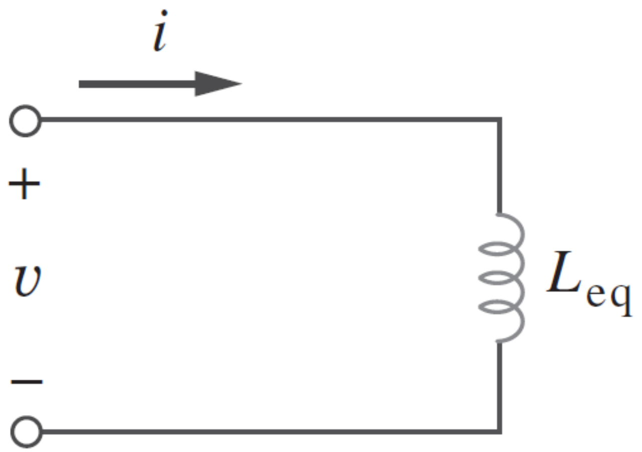
  - Solução:



2. Indutores

- Associação em **série** de indutores





$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_N =$$

$$= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \cdots + L_N \frac{di}{dt} =$$

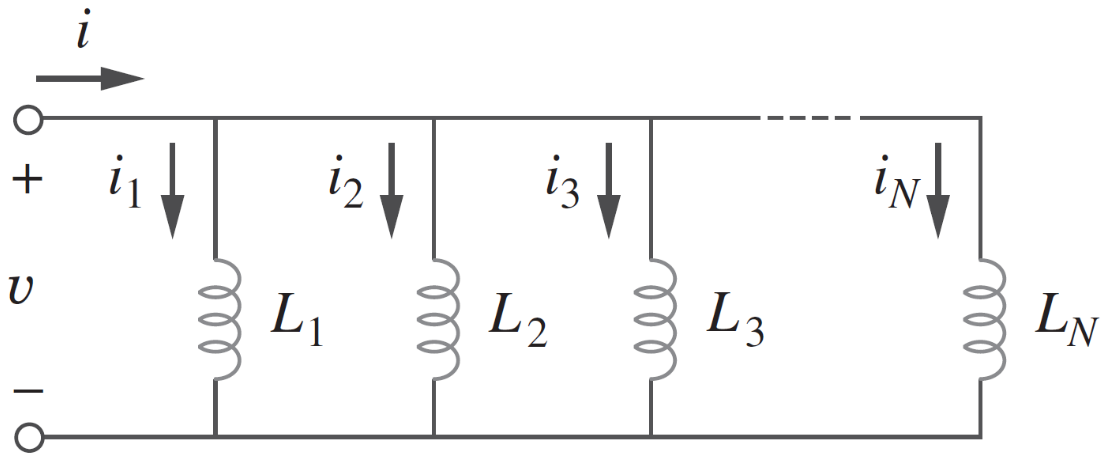
$$= (L_1 + L_2 + \cdots + L_N) \frac{di}{dt}$$

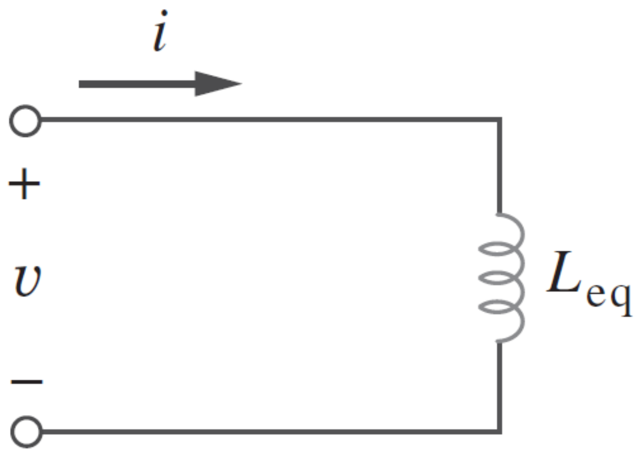
$$\therefore v = L_{eq} \frac{di}{dt}$$

onde:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_N$$

- Associação em **paralelo** de indutores





$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_N =$$

$$= \frac{1}{L_1}\int v\,dt + \frac{1}{L_2}\int v\,dt + \cdots + \frac{1}{L_N}\int v\,dt$$

$$= \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_N}\right)\int v\,dt$$

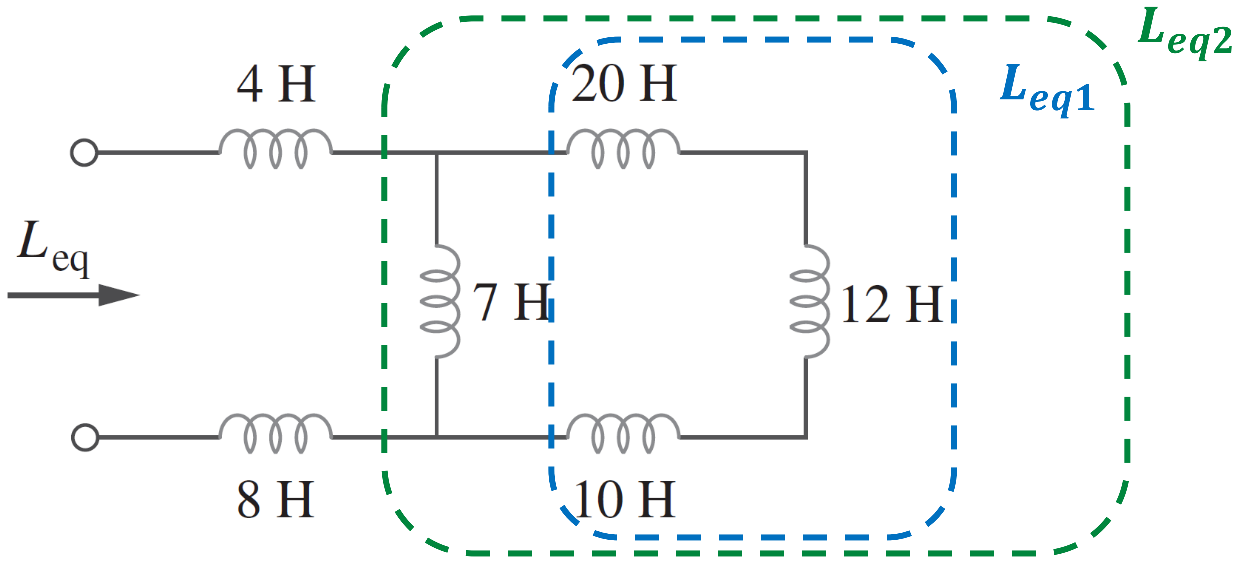
$$\therefore i = \frac{1}{L_{eq}}\int v\,dt$$

onde:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_N}$$

- SADIKU, exemplo 6.11:

Determine a indutância equivalente L_{eq} do circuito a seguir:



➢ Solução:

$$L_{eq1} = 20 + 12 + 10 = 42\ H$$

$$L_{eq2} = (42)(7)/(42+7) = 6\ H$$

$$\therefore L_{eq} = 4 + 6 + 8 = 18\ \text{H}$$

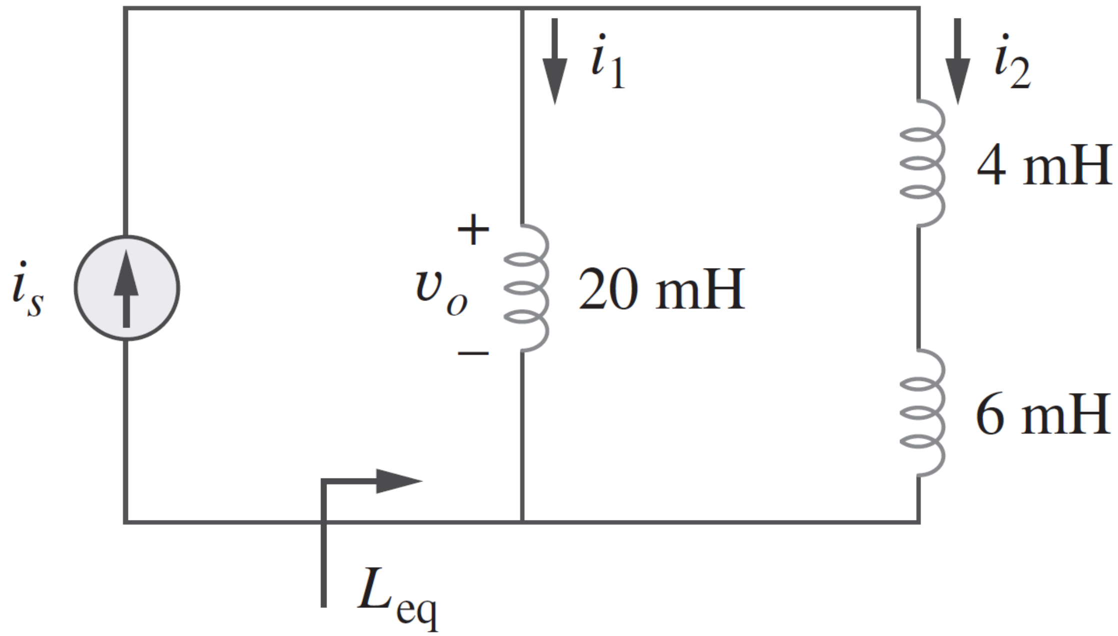
- SADIKU, exemplo 6.61:

Para o circuito a seguir, determine:

a) L_{eq}, $i_1(t)$ e $i_2(t)$, se $i_s = 3e^{-t}$ mA;

b) $v_o(t)$;

c) a energia armazenada no indutor de 20 mH em t = 1 s.



- SADIKU, exemplo 6.61:

➢ Solução:

a) $$L_{eq} = \frac{(20)(10)}{20+10} = \frac{20}{3} = 6{,}67\ mH$$

$$i_1 = \frac{L_{eq}}{L_1} i_s = \frac{(20/3)}{20}(3e^{-t}) = e^{-t}\ mA$$

$$i_2 = \frac{L_{eq}}{L_2} i_s = \frac{(20/3)}{10}(3e^{-t}) = 2e^{-t}\ mA$$

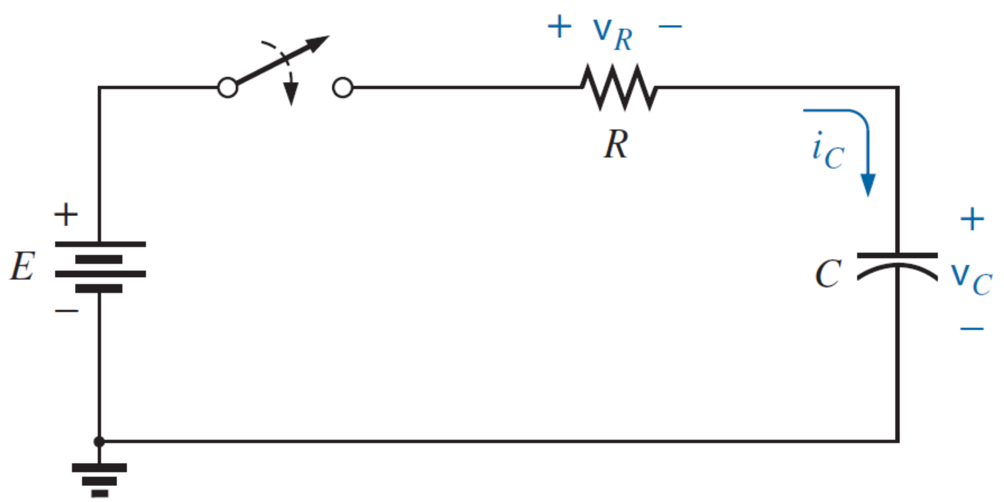
b) $$v_0 = (20 \times 10^{-3})\frac{d(e^{-t} \times 10^{-3})}{dt} = -20e^{-t}\ \mu V$$

c) $$w = \frac{1}{2}Li^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(20 \times 10^{-3})(e^{-1} \times 10^{-3})^2 = 10^{-8} \times e^{-2} = 1{,}35\ nJ$$

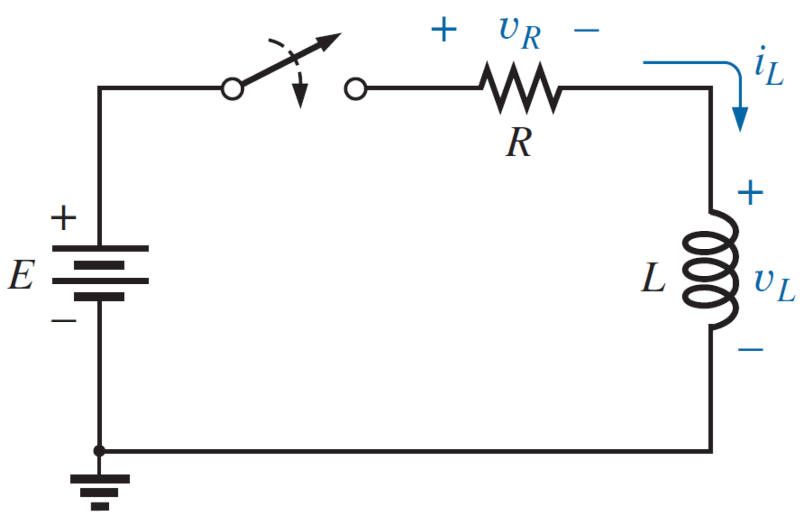
3. Circuitos de 1ª Ordem

- Um circuito de 1ª ordem é caracterizado por uma **equação diferencial de 1ª ordem**
- **Circuito RC**: formado por um resistor e um capacitor
- **Circuito RL**: formado por um resistor e um indutor
- A aplicação das Leis de Kirchhoff em circuitos RC e RL produzem equações diferenciais

Ex.: Circuito RC série



Ex.: Circuito RL série

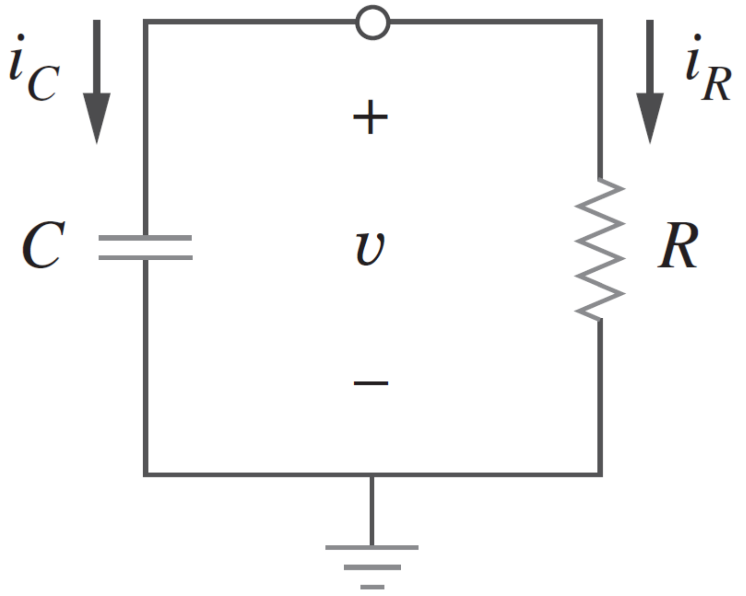


3. Circuitos de 1ª Ordem

- Características importantes dos elementos básicos

Relação	Resistor (*R*)	Capacitador (*C*)	Indutor (*L*)
v-i:	$v = iR$	$v = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v(t_0)$	$v = L\frac{di}{dt}$
i-v:	$i = v/R$	$i = C\frac{dv}{dt}$	$i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + i(t_0)$
p ou w:	$p = i^2R = \frac{v^2}{R}$	$w = \frac{1}{2}Cv^2$	$w = \frac{1}{2}Li^2$
Série:	$R_{eq} = R_1 + R_2$	$C_{eq} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$	$L_{eq} = L_1 + L_2$
Paralelo:	$R_{eq} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$	$C_{eq} = C_1 + C_2$	$L_{eq} = \frac{L_1L_2}{L_1 + L_2}$
Em CC:	Idem	Circuito aberto	Curto-circuito
Variável do cicuito que não pode mudar abruptamente:	Não se aplica	v	i

- **Circuito RC sem fonte**
  - A equação diferencial descreve a **descarga do capacitor** (resposta natural do circuito)
  - A **constante de tempo** ($\tau = RC$) representa o tempo de descarga do capacitor



$$i_c + i_R = 0$$

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dt}{RC}$$

$$\ln v = -\frac{t}{RC} + k$$

$$v = e^{-\frac{t}{RC}+k}$$

$$v = (e^{-\frac{t}{RC}})(e^{k})$$

$$v = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

Mas $v(0) = V_0$, então:

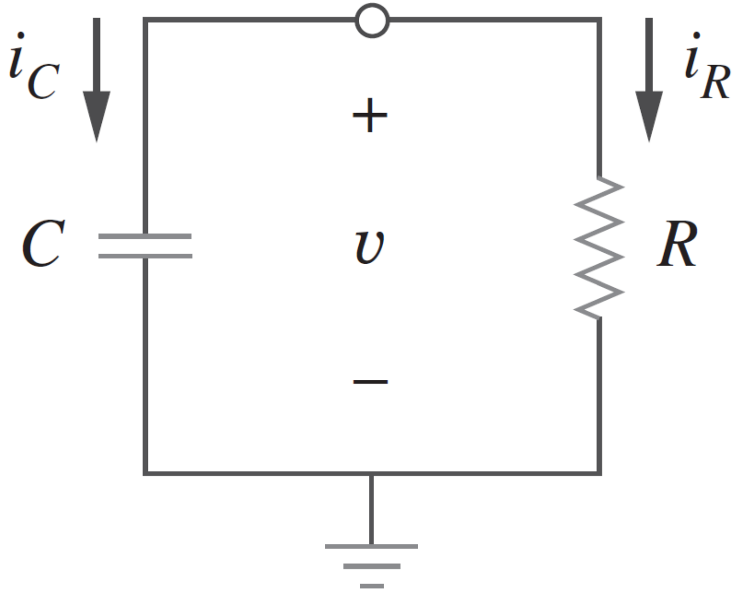
$$v(0) = V_0 =$$
$$= Ke^{-\frac{0}{RC}} = K$$

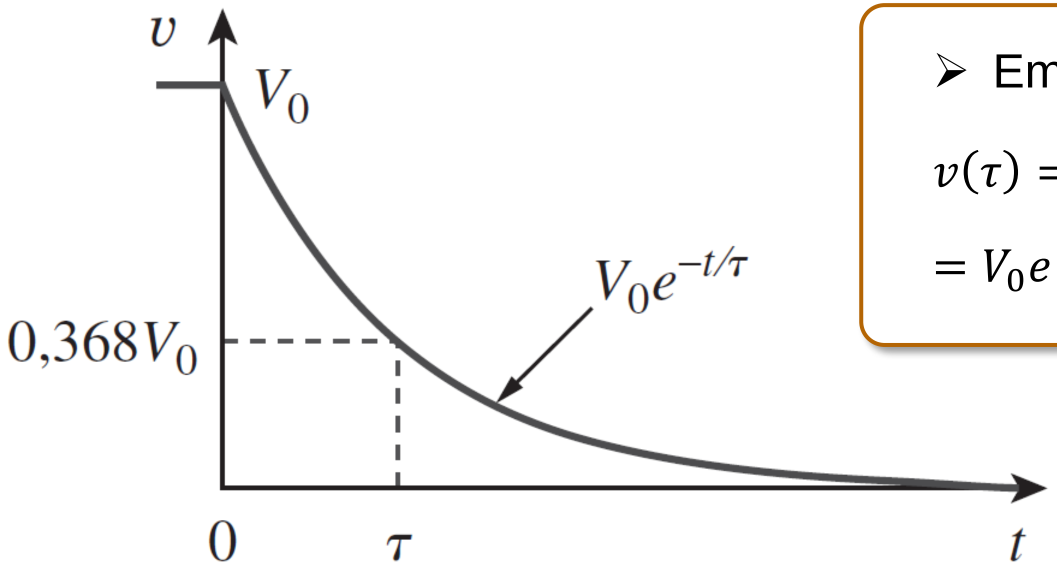
$$\therefore v = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

ou

$$v = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- **Circuito RC sem fonte**
  - A equação diferencial descreve a **descarga do capacitor** (<u>resposta natural</u> do circuito)
  - A **constante de tempo** $(\tau = RC)$ representa o tempo de descarga do capacitor
  - Em $t = \tau$, a tensão do capacitor descarrega para 37% do valor inicial V_0



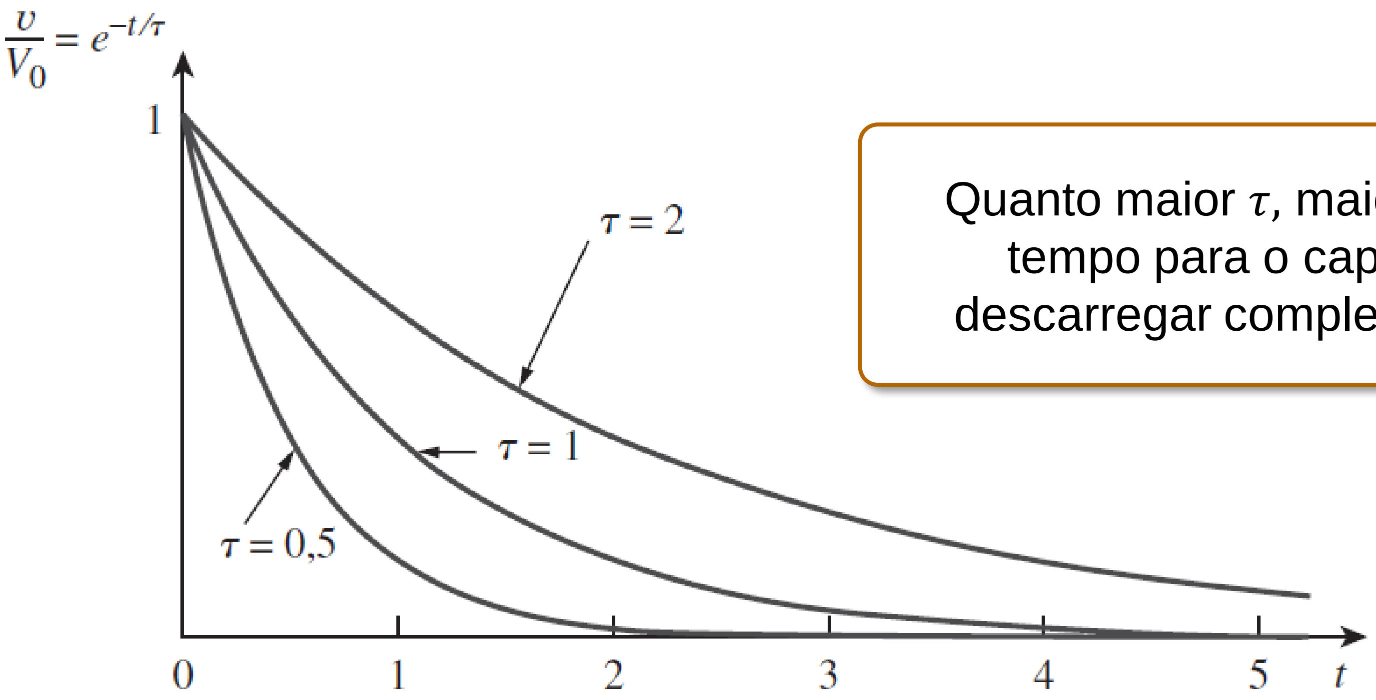


➢ Em t = τ:

$$v(\tau) = V_0 e^{-\frac{\tau}{\tau}} =$$

$$= V_0 e^{-1} = 0{,}368V_0$$

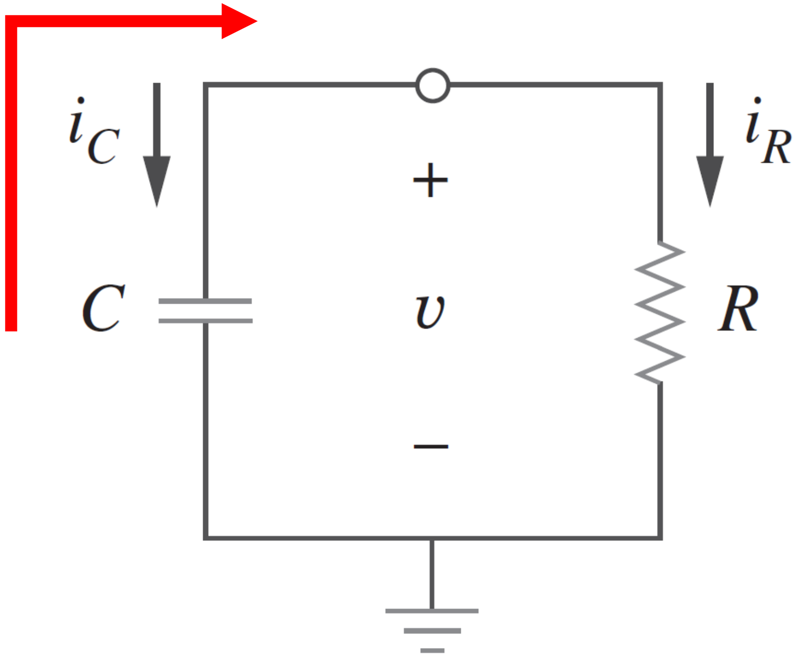
- **Circuito RC sem fonte**
  - A equação diferencial descreve a **descarga do capacitor** (resposta natural do circuito)
  - A **constante de tempo** $(\tau = RC)$ representa o tempo de descarga do capacitor
  - Em $t = \tau$, a tensão do capacitor descarrega para 37% do valor inicial V_0



Quanto maior τ, maior será o tempo para o capacitor descarregar completamente

- **Circuito RC sem fonte**
  - A equação diferencial descreve a **descarga do capacitor** (resposta natural do circuito)
  - A **constante de tempo** $(\tau = RC)$ representa o tempo de descarga do capacitor
  - A corrente no capacitor **muda de sentido**

Sentido real da corrente



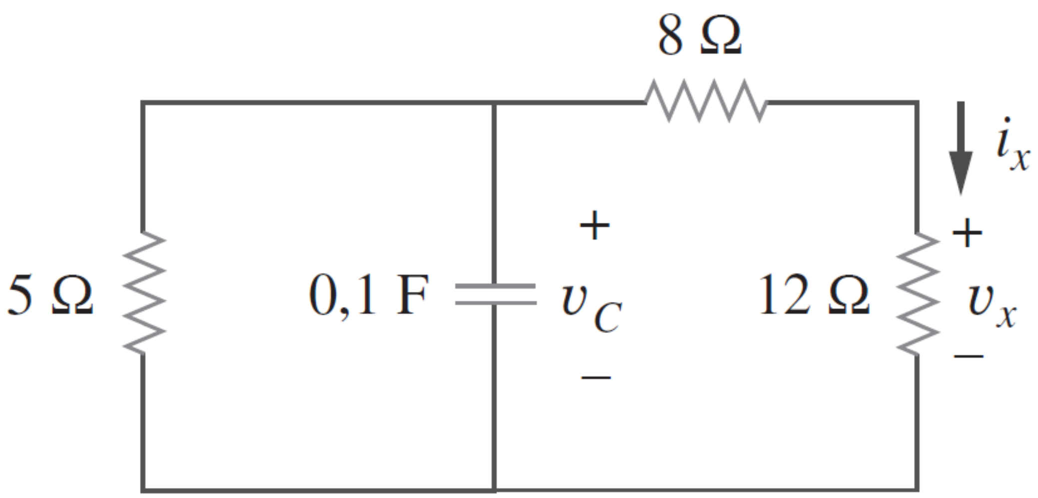
- $$i_c = C\frac{dV}{dt} = C\frac{d\left(\mathrm{V_0 e^{-\frac{t}{RC}}}\right)}{\mathrm{dt}} = (\mathrm{C})\left(-\frac{1}{\mathrm{RC}}\right)(\mathrm{V_0})(\mathrm{e^{-\frac{t}{RC}}})$$

$$\therefore i_c = -\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{ou} \quad i_c = -\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- $$P = Ri^2 = R\left(\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 = \frac{V_0^2}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}$$

- SADIKU, exemplo 7.1:

  Considerando-se $v_C(0) = 15\ V$, determine v_c, v_x e i_x para $t > 0$



➢ Solução (**análise nodal**):

- $$0{,}1\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{5} + \frac{v_c}{20} = 0$$

$$\frac{dv_c}{dt} + 2{,}5\ v_c = 0$$

$$\therefore v_c = Ke^{-2{,}5t}$$

- Mas $v_c(0) = 15V$, então:

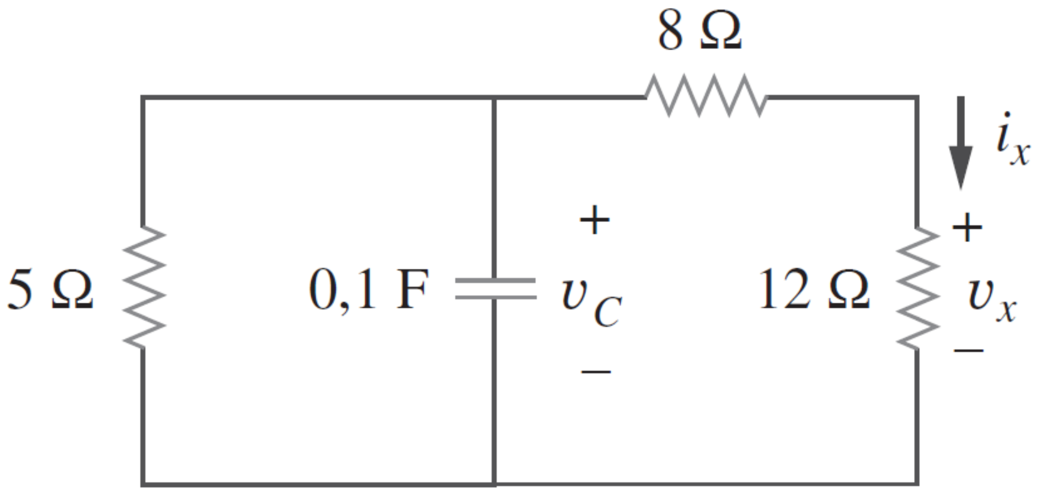
$$v_c(0) = 15 = Ke^0 = K$$

$$\therefore v_c(t) = 15e^{-2{,}5t}\ , t > 0$$

3. Circuitos de 1ª Ordem

- SADIKU, exemplo 7.1:

Considerando-se $v_C(0) = 15\,V$, determine v_c, v_x e i_x para $t > 0$



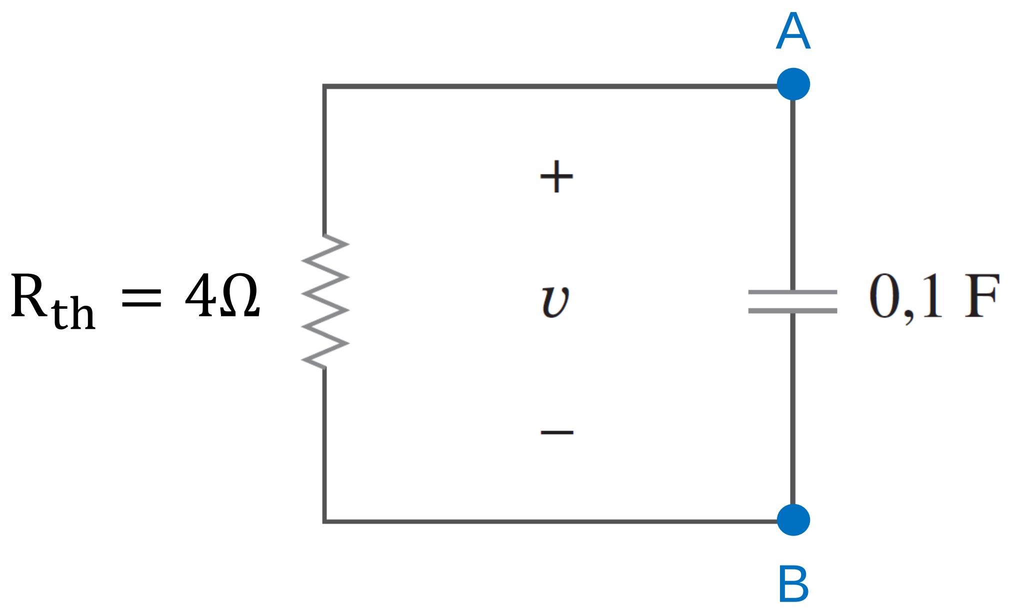
➢ Solução (**análise nodal**):

- $i_x = \dfrac{v_c}{20} = \dfrac{15}{20}e^{-2,5t} = 0,75e^{-2,5t}$

- $v_x = 12\,i_x = (12)(0,75)e^{-2,5t} = 9e^{-2,5t}$

- SADIKU, exemplo 7.1:

Considerando-se $v_C(0) = 15\,V$, determine v_c, v_x e i_x para $t > 0$



➢ Solução (**via Thévenin e usando τ**):

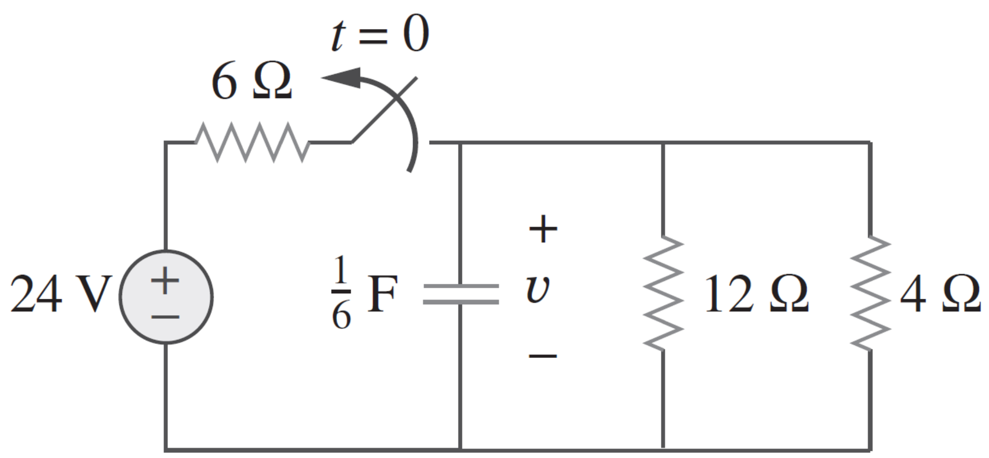
- $R_{th} = \dfrac{(5)(20)}{5+20} = 4\Omega$
- $V_{th} = 0V$
- A constante de tempo é calculada a partir de R_{th}:

$$\tau = R_{th}C = (4)(0{,}1) = 0{,}4\ s$$

- $v_c = V_0 e^{-t/\tau} = 15e^{-2{,}5t}\,, \qquad t > 0$

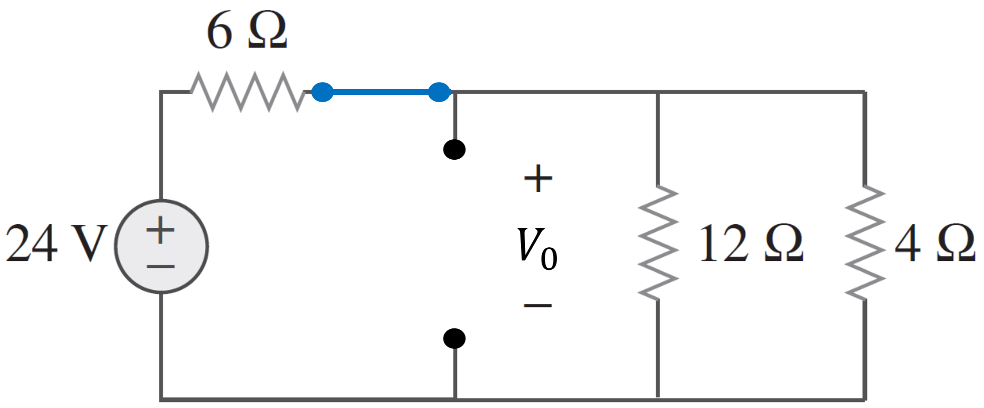
- SADIKU, exemplo prático 7.2:

No circuito a seguir, considere que a chave está fechada há bastante tempo. Se a chave abrir em $t = 0$, determine $v(t)$ para $t > 0$ e $w_C(0)$.



➢ Solução (**via Thévenin e usando τ**):

- Para $t = 0^-$:

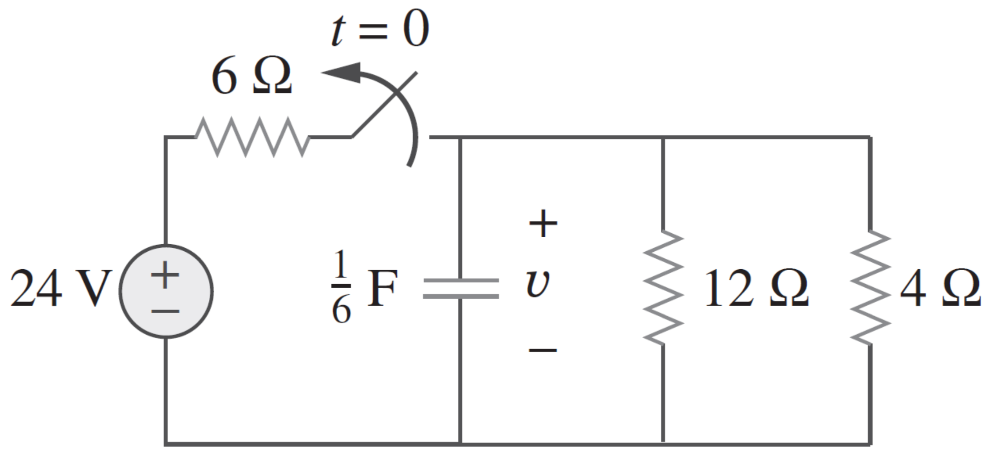


- $12||4 = \dfrac{(12)(4)}{12+4} = 3\Omega$

- $V_0 = \left(\dfrac{3}{3+6}\right)(24) = 8V$

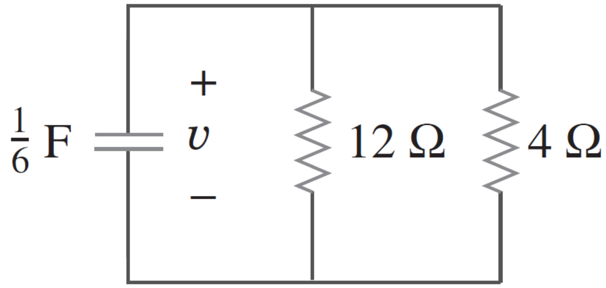
- SADIKU, exemplo prático 7.2:

No circuito a seguir, considere que a chave está fechada há bastante tempo. Se a chave abrir em $t = 0$, determine $v(t)$ para $t > 0$ e $w_C(0)$.



> Solução (**via Thévenin e usando τ**):

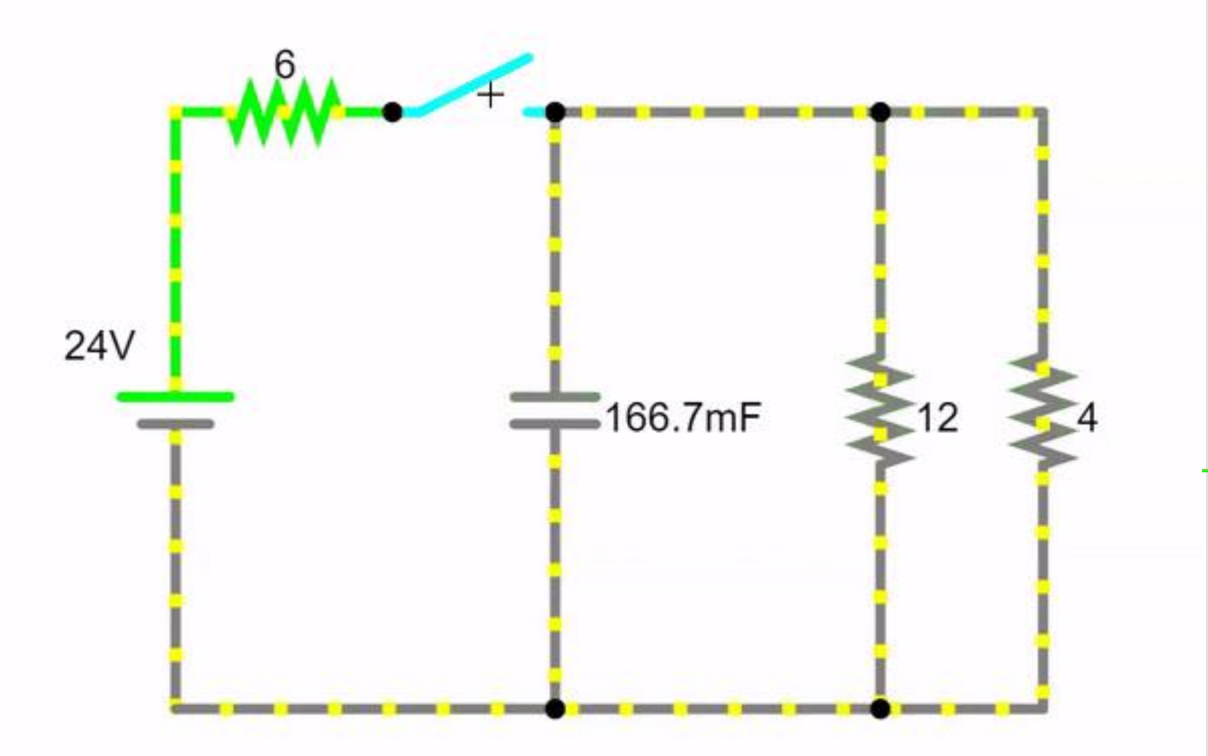
- Para $t > 0$:

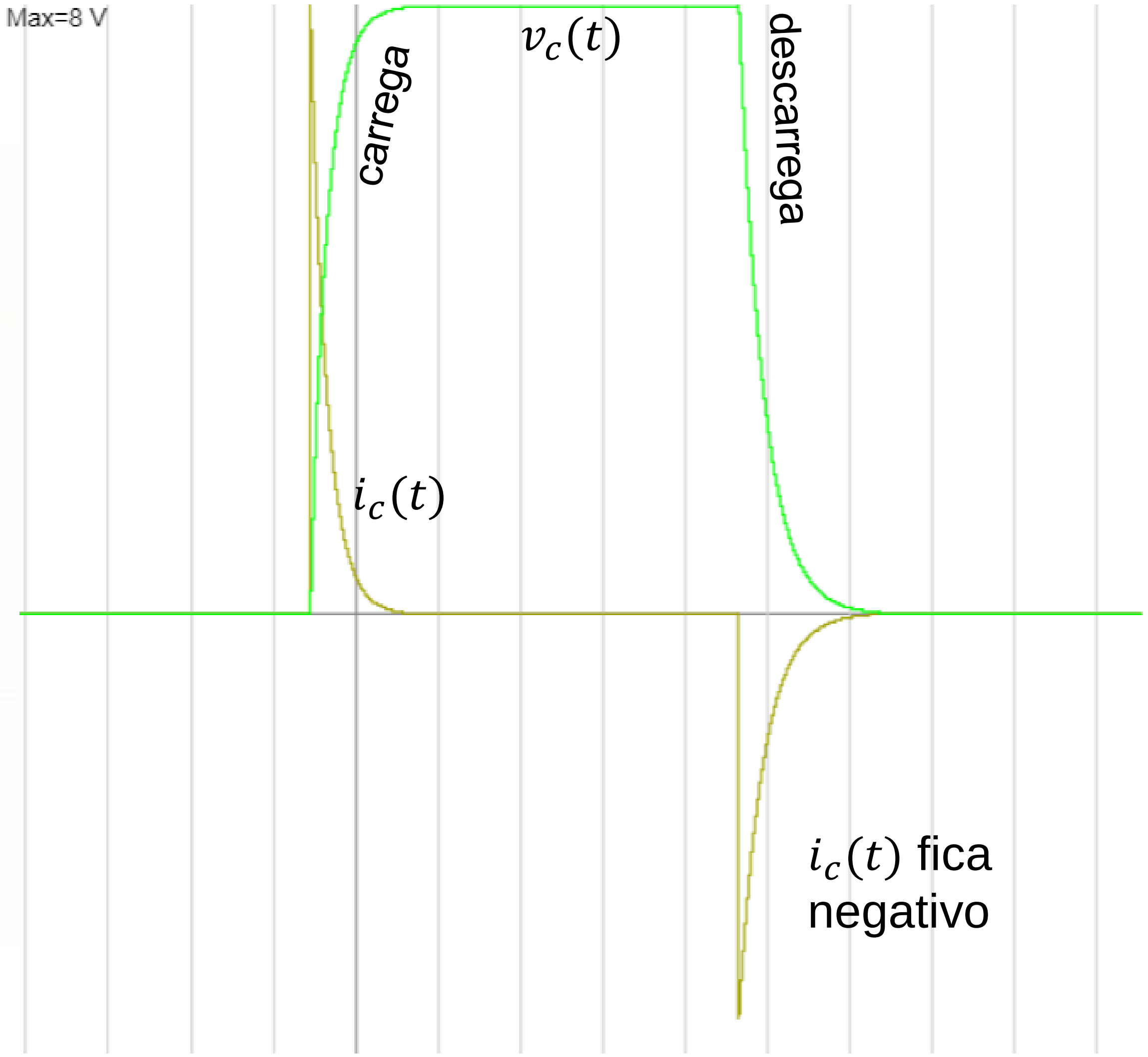


- $R_{th} = 12||4 = \dfrac{(12)(4)}{12+4} = 3\Omega$
- $\tau = R_{th}C = (3)\left(\dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{1}{2}\,s$
- $v_c(t) = V_0 e^{-t/\tau} = 8e^{-2t}\,V, \qquad t > 0$
- $w_c(0) = \dfrac{cv^2}{2} = \left(\dfrac{1}{6}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)(8e^0)^2 = 5{,}33\,J$

- SADIKU, exemplo prático 7.2:

Análise usando o **Falstad**:

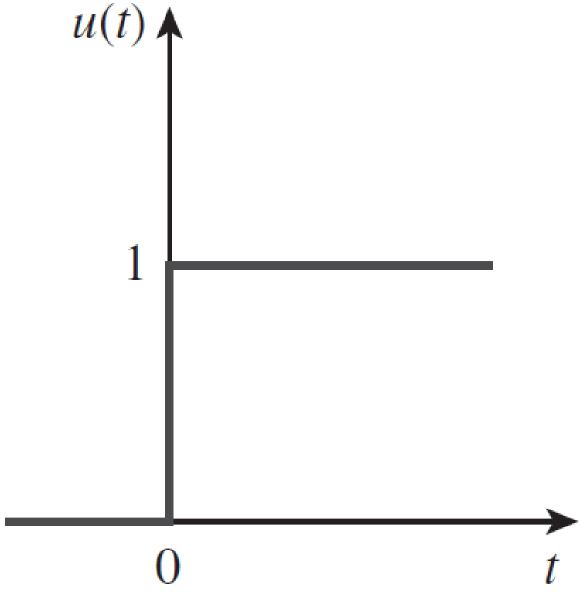


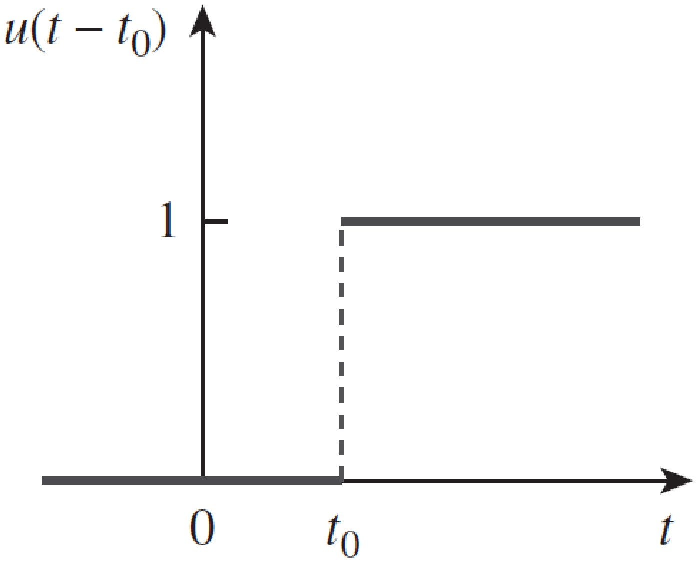


- **Resposta a um degrau de um circuito RC**
  - A resposta a um degrau de um circuito é seu comportamento quando a excitação for a função degrau, que pode ser uma **fonte de tensão ou de corrente**.
  - A função **degrau unitário** $u(t)$ é 0 para valores negativos de t e 1 para valores positivos de t.

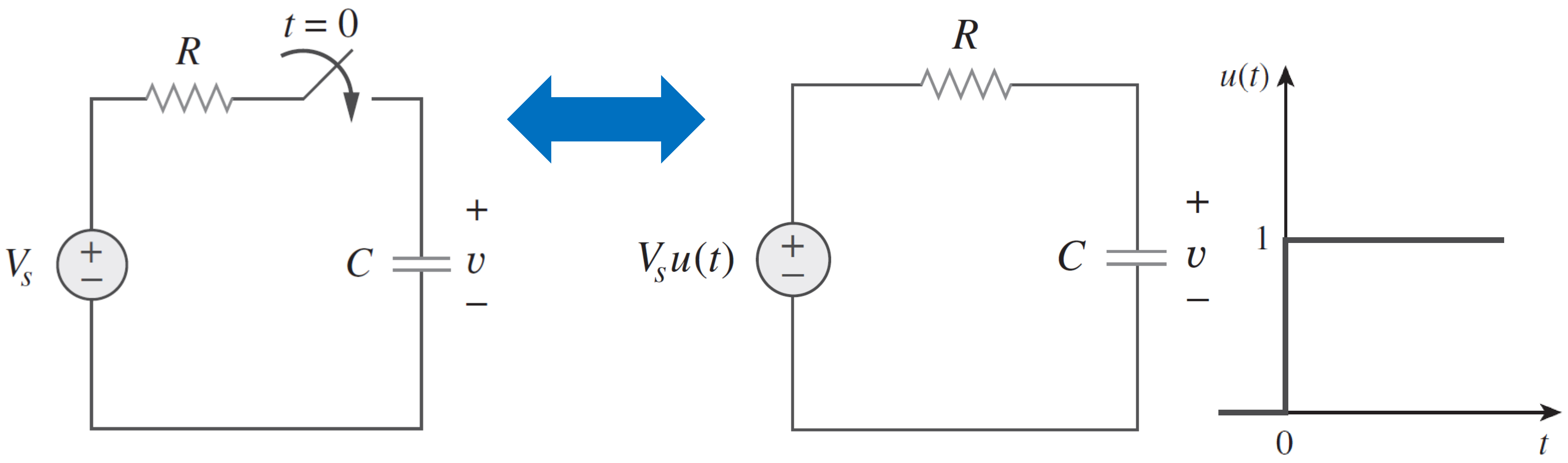
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases}$$

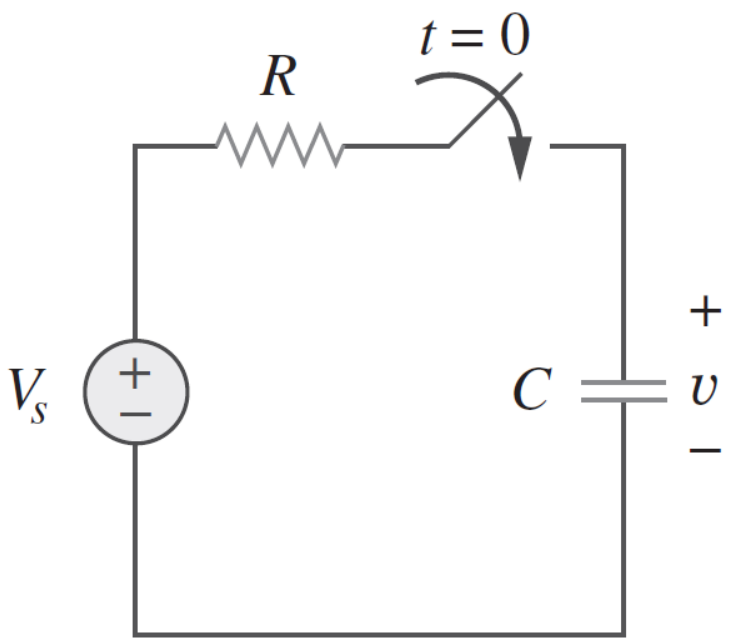




- **Resposta a um degrau de um circuito RC**
  - A resposta a um degrau de um circuito é seu comportamento quando a excitação for a função degrau, que pode ser uma **fonte de tensão ou de corrente**.
  - A função **degrau unitário** $u(t)$ é 0 para valores negativos de t e 1 para valores positivos de t.



- **Resposta a um degrau de um circuito RC**
  - A resposta a um degrau de um circuito é seu comportamento quando a excitação for a função degrau, que pode ser uma **fonte de tensão ou de corrente**.
  - A **constante de tempo** ($\tau = RC$) representa o tempo de **carregamento** do capacitor



$$i_c + i_R = 0$$

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v - V_s}{R} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{V_s}{RC}$$

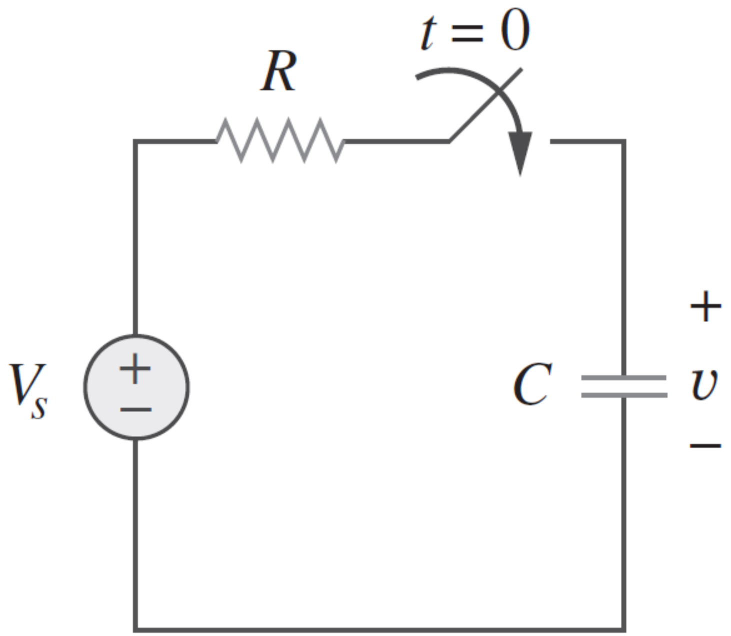
Resposta Natural
(solução complementar)

$$\frac{dv_n}{dt} + \frac{v_n}{RC} = 0$$

$$\therefore v_n = Ke^{-t/\tau}$$

3. Circuitos de 1ª Ordem

- **Resposta a um degrau de um circuito RC**
  - A resposta a um degrau de um circuito é seu comportamento quando a excitação for a função degrau, que pode ser uma **fonte de tensão ou de corrente**.
  - A **constante de tempo** $(\tau = RC)$ representa o tempo de **carregamento** do capacitor



$$i_c + i_R = 0$$

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v - V_s}{R} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{V_s}{RC}$$

Resposta Forçada
(solução particular)

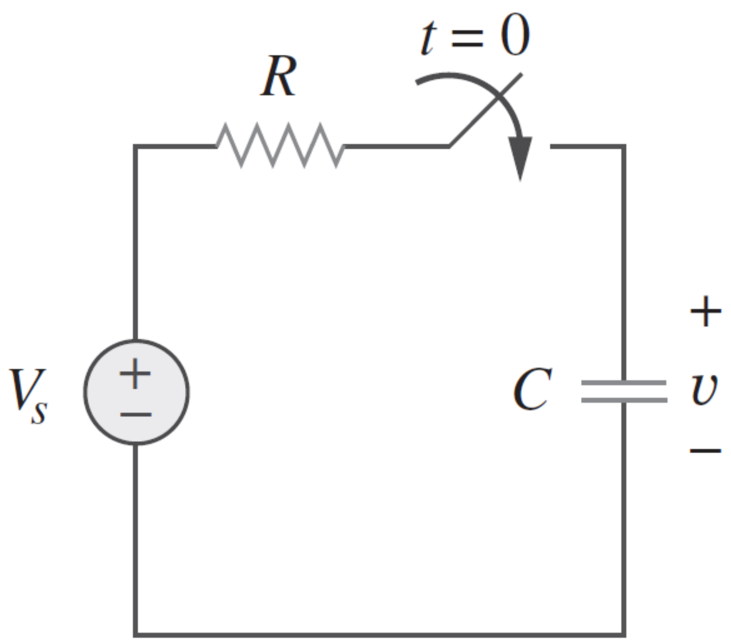
$$\frac{dv_f}{dt} + \frac{v_f}{RC} = \frac{V_s}{RC}$$

Para V_s/RC constante, assume-se que v_f tenha uma resposta constante:

$$0 + \frac{v_f}{RC} = \frac{V_s}{RC}$$

$$\therefore v_f = V_s$$

- **Resposta a um degrau de um circuito RC**
  - A resposta a um degrau de um circuito é seu comportamento quando a excitação for a função degrau, que pode ser uma **fonte de tensão ou de corrente**.
  - A **constante de tempo** $(\tau = RC)$ representa o tempo de **carregamento** do capacitor



Resposta Completa
(resposta natural + resposta forçada)

$$v(t) = v_n + v_f$$

$$v(t) = Ke^{-t/\tau} + V_s$$

Para $v(0)$ igual a uma tensão inicial V_0:

$$v(0) = V_0 = Ke^0 + V_s$$

$$\therefore K = \mathrm{V}_0 - \mathrm{V}_s$$

Portanto, para $t > 0$:

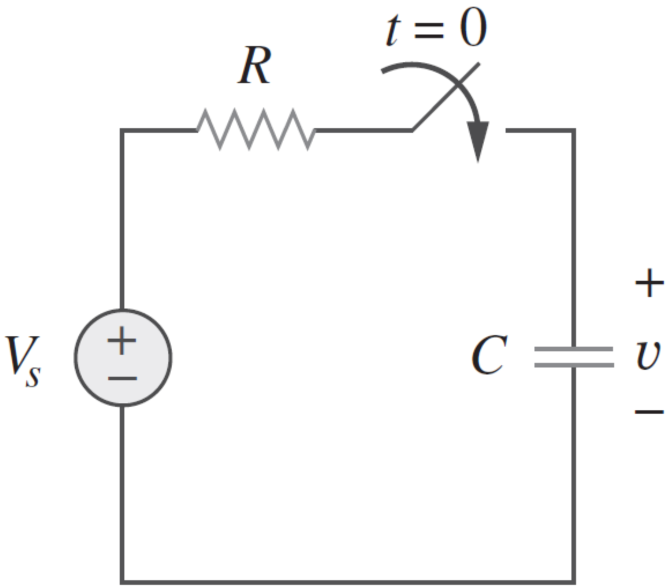
$$v(t) = (V_0 - V_s)e^{-t/\tau} + V_s$$

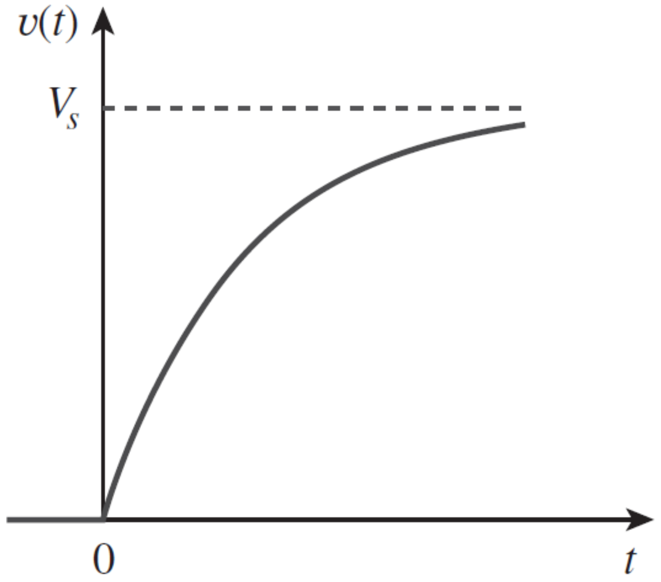
ou:

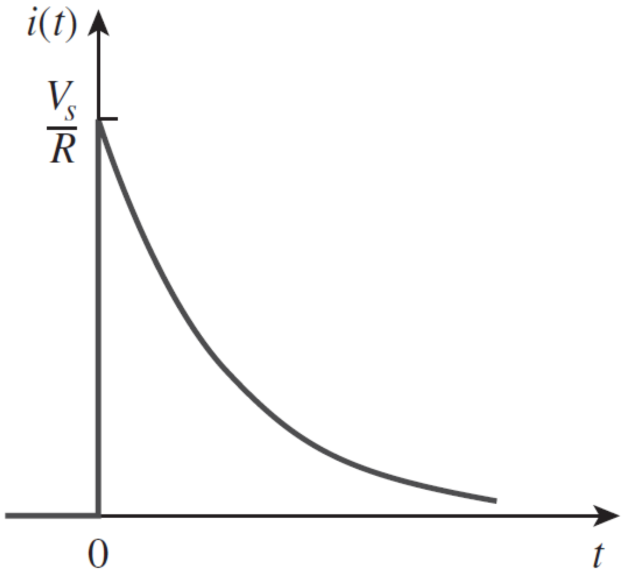
$$v(t) = [v(0) - v(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + v(\infty)$$

- **Resposta a um degrau de um circuito RC**
  - A resposta a um degrau de um circuito é seu comportamento quando a excitação for a função degrau, que pode ser uma **fonte de tensão ou de corrente**.
  - A **constante de tempo** $(\tau = RC)$ representa o tempo de **carregamento** do capacitor
  - Expressão da **resposta transitória** do capacitor:

$$\boxed{v(t) = [v(0) - v(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + v(\infty)}$$







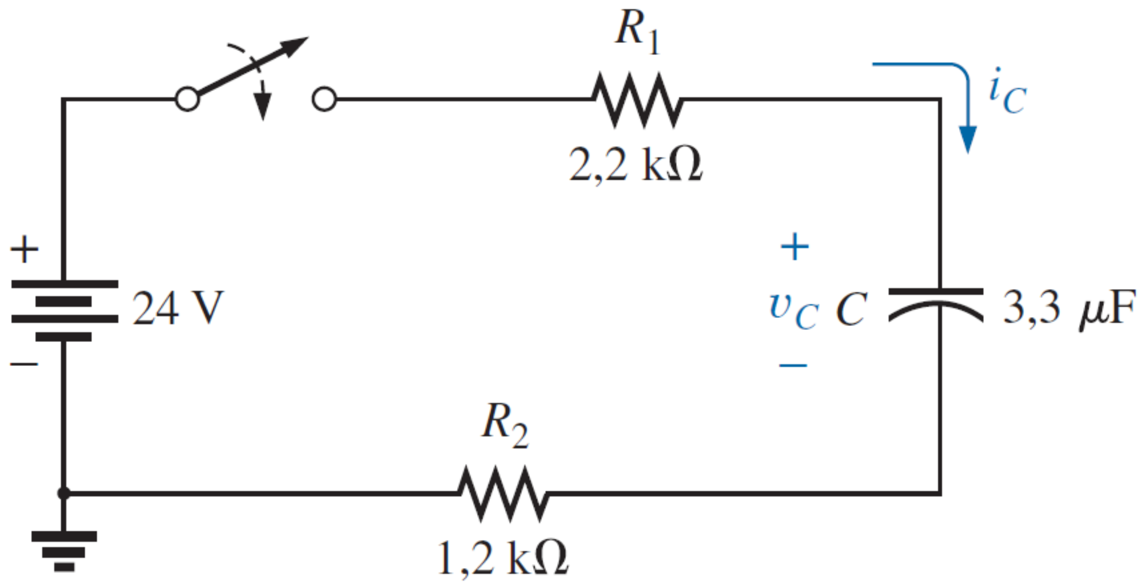
- BOYLESTAD, exemplo 10.10:

  No circuito a seguir, considere que o capacitor possui uma tensão inicial de 4V.

  a) Determine a expressão da tensão v_c após a chave ser fechada.

  b) Determine a expressão da corrente i_c após a chave ser fechada.

  c) Esboce das formas de onda de v_c e i_c.



➢ Solução:

a)

$$v(0) = 4V$$

$$v(\infty) = 24V$$

$$\tau = R_{th}C = (3{,}4 \times 10^3)(3{,}3 \times 10^{-6}) = 11{,}22\ ms$$

$$\therefore v_c(t) = [v(0) - v(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + v(\infty) =$$

$$= (4 - 24)e^{-t/0{,}01122} + 24 =$$

$$= 24 - 20\mathrm{e}^{-89{,}1\mathrm{t}}\ \mathrm{V}, \qquad \mathrm{t} > 0$$

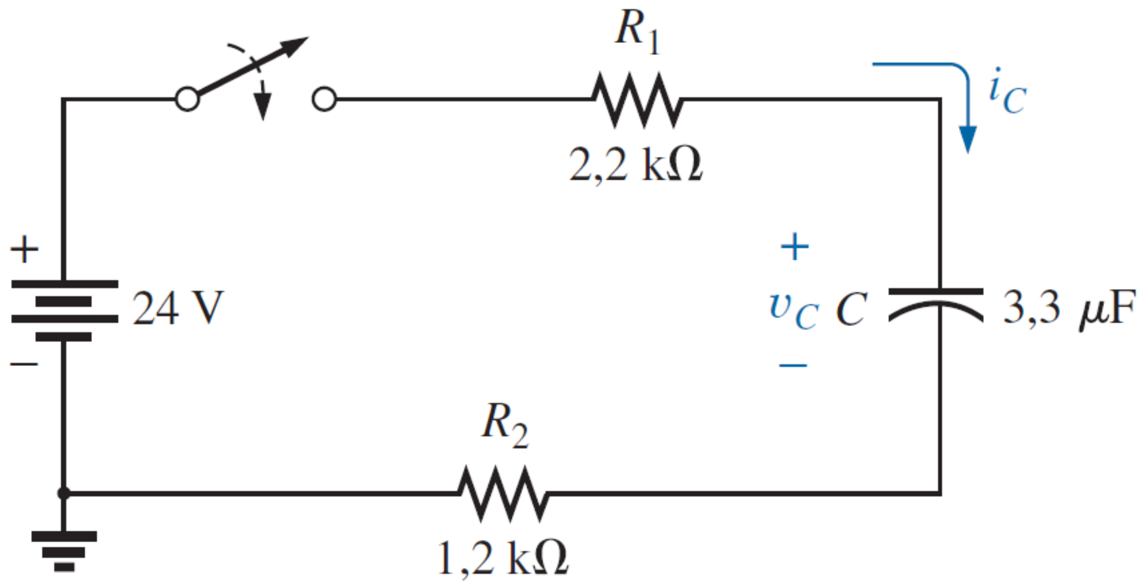
- BOYLESTAD, exemplo 10.10:

  No circuito a seguir, considere que o capacitor possui uma tensão inicial de 4V.

  a) Determine a expressão da tensão v_c após a chave ser fechada.

  b) Determine a expressão da corrente i_c após a chave ser fechada.

  c) Esboce das formas de onda de v_c e i_c.



➢ Solução:

b)

$$i_c(t) = C\frac{dv_c}{dt} = (3{,}3\times 10^{-6})\frac{d(24-20e^{-89{,}1t})}{dt} =$$

$$= (3{,}3\times 10^{-6})(-89{,}1)(-20)(e^{-89{,}1t}) =$$

$$= 5{,}88\, e^{-89{,}1t}\, mA, \qquad t > 0$$

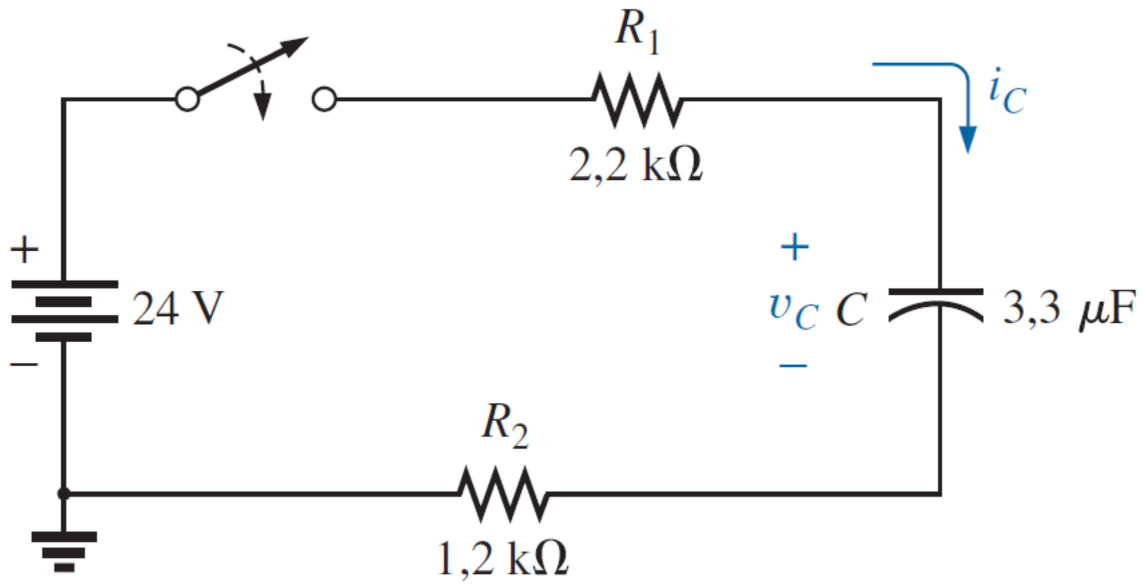
- BOYLESTAD, exemplo 10.10:

  No circuito a seguir, considere que o capacitor possui uma tensão inicial de 4V.

  a) Determine a expressão da tensão v_c após a chave ser fechada.

  b) Determine a expressão da corrente i_c após a chave ser fechada.

  c) Esboce das formas de onda de v_c e i_c.



➢ Solução:

b) (alternativamente...)

Em $t = 0^+, v_c(0^+) = 4V$. Portanto:

$$i_c(0^+) = \frac{24 - 4}{2{,}2k + 1{,}2k} = 5{,}88\ mA$$

A corrente vai decair para zero em $t \to \infty$:

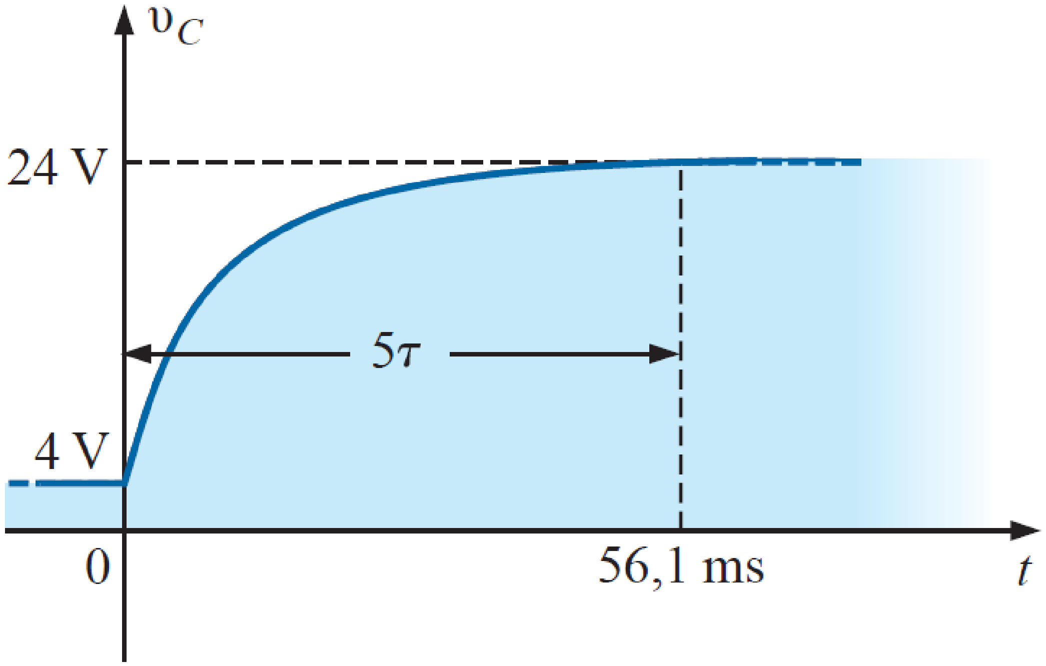
$$\therefore\ i_c\ (t) = 5{,}88\ e^{-89{,}1t}\ mA, \qquad t > 0$$

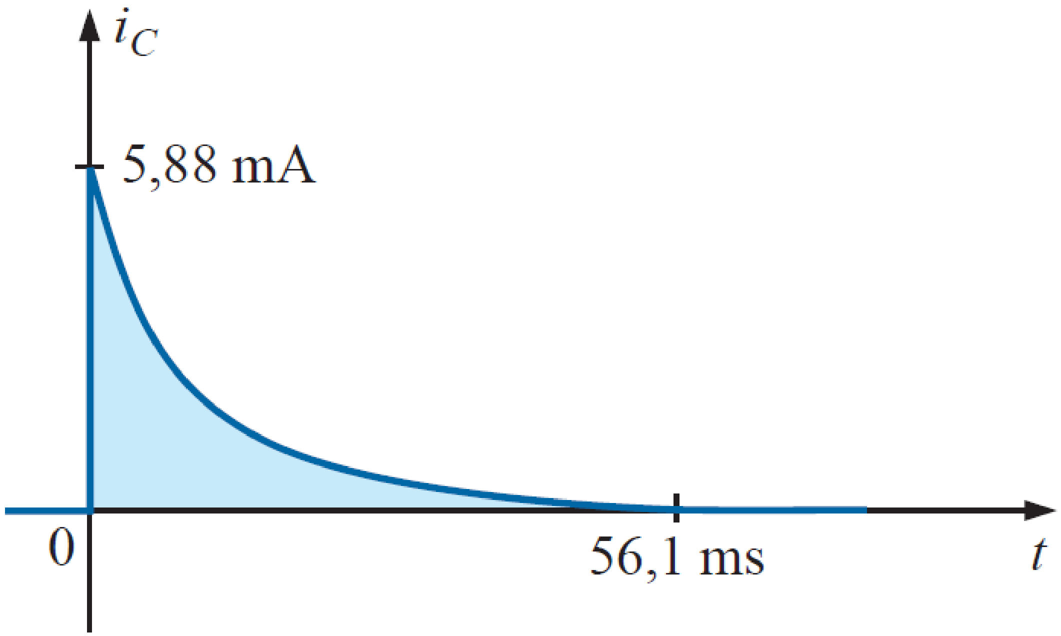
- BOYLESTAD, exemplo 10.10:

➢ Solução:

c) $$v_c(t) = \begin{cases} 4\ V, & t < 0 \\ 24 - 20e^{-89{,}1t}\ V, & t > 0 \end{cases}$$

$$i_c(t) = \begin{cases} 0\ A, & t < 0 \\ 5{,}88\ e^{-89{,}1t}\ mA, & t > 0 \end{cases}$$

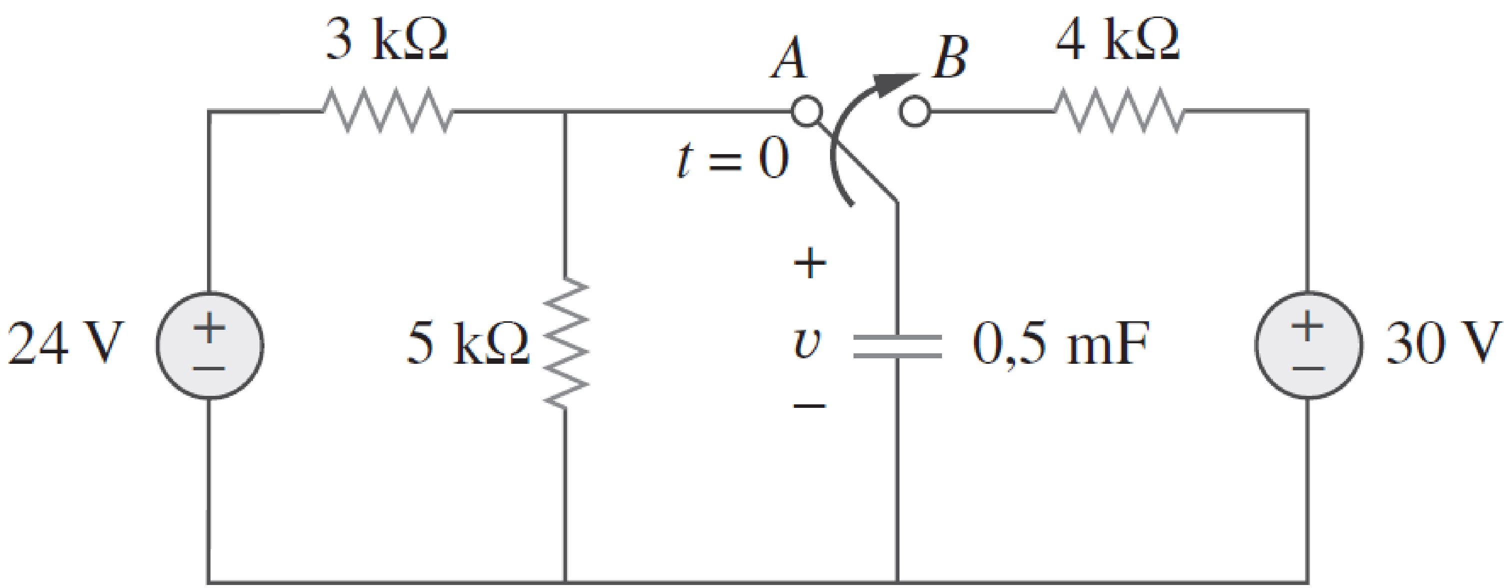




3. Circuitos de 1ª Ordem

- SADIKU, exemplo 7.10:

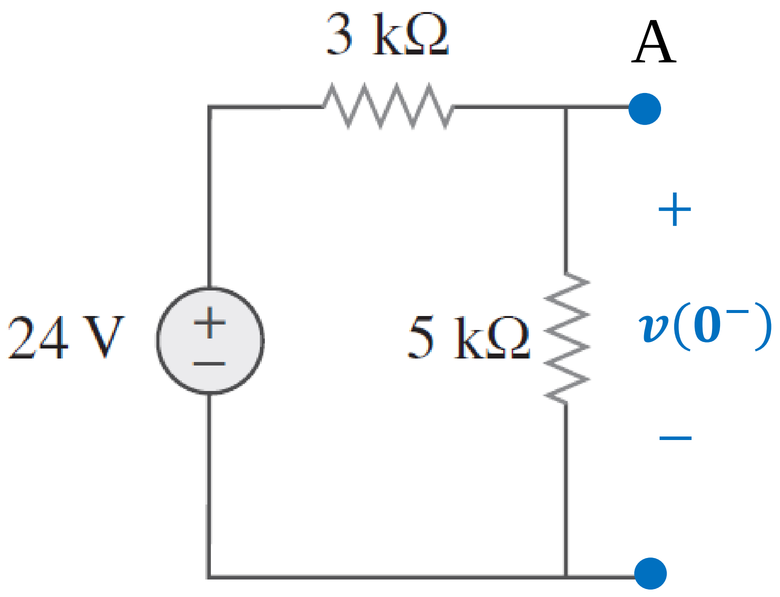
A chave da figura a seguir se encontra na posição A há um bom tempo. Em $t = 0$, a chave é mudada para a posição B. Determine $v(t)$ para $t > 0$ e calcule seu valor em $t = 1\,s$ e $4\,s$.



- SADIKU, exemplo 7.10:

➢ Solução:

- Para $t = 0^-$:



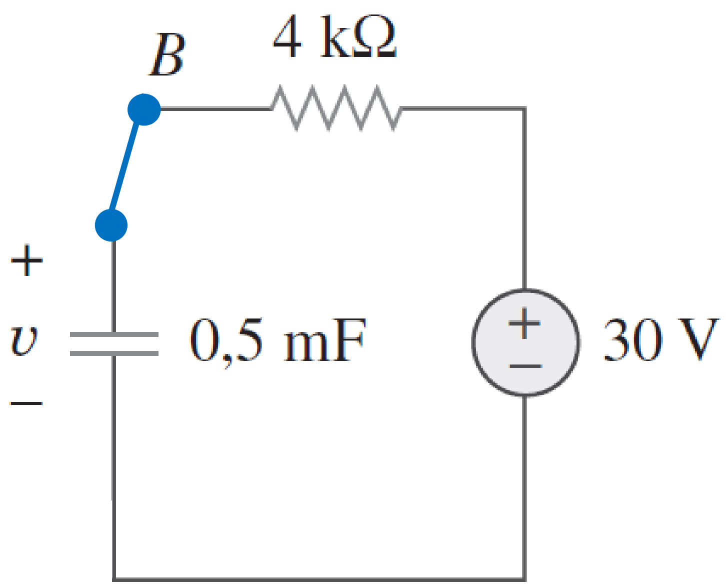
- Por divisor de tensão:

$$v(0^-) = \left(\frac{5}{5+3}\right)(24) = 15\ V$$

- SADIKU, exemplo 7.10:

➢ Solução:

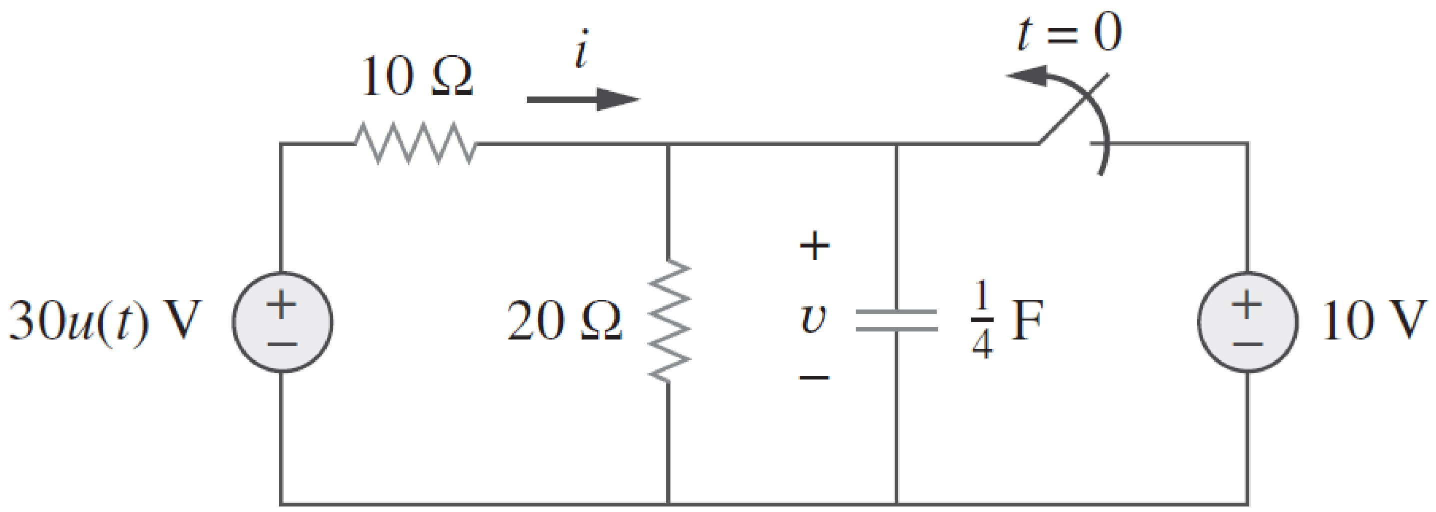
- Para $t > 0$:



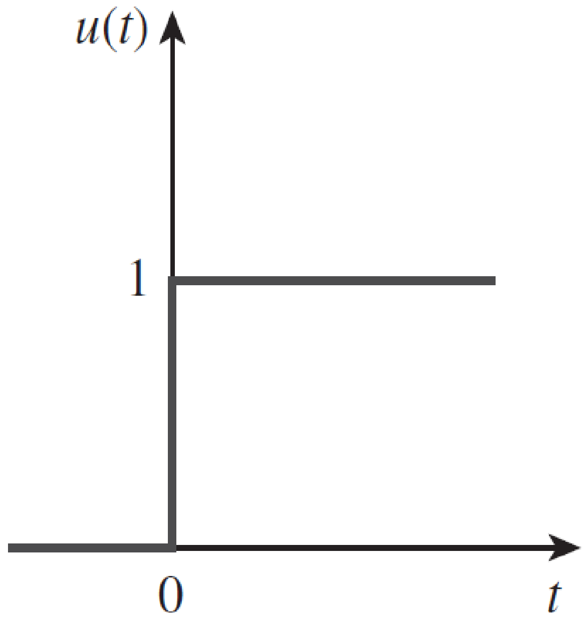
- $v(0) = 15V$
- $v(\infty) = 30V$
- $\tau = RC = (4 \times 10^3)(0,5 \times 10^{-3}) = 2s$
- $v(t) = [v(0) - v(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + v(\infty) =$
  $= (15 - 30)e^{-\frac{t}{2}} + 30 = 30 - 15e^{-\frac{t}{2}}\, V, \qquad t > 0$
- $v(1) = 30 - 15e^{-\frac{1}{2}} = 20{,}90\ V$
- $v(4) = 30 - 15e^{-\frac{4}{2}} = 27{,}97\ V$

- SADIKU, exemplo 7.11:

No circuito a seguir, a chave foi fechada há um longo tempo e é aberta em $t = 0$. Determine i e v durante todo o período.



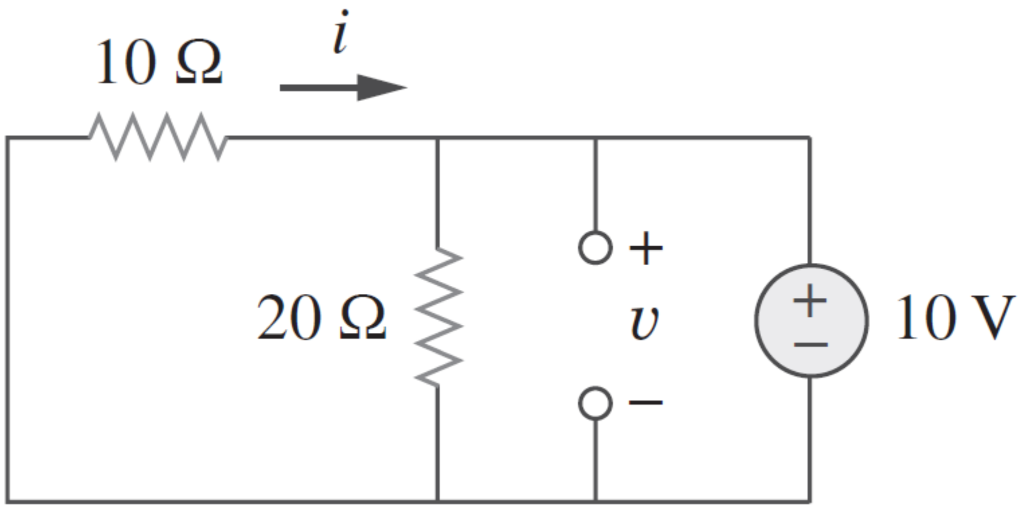
OBS.: $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$



- SADIKU, exemplo 7.11:

➢ Solução:

- Para $t = 0^-$:

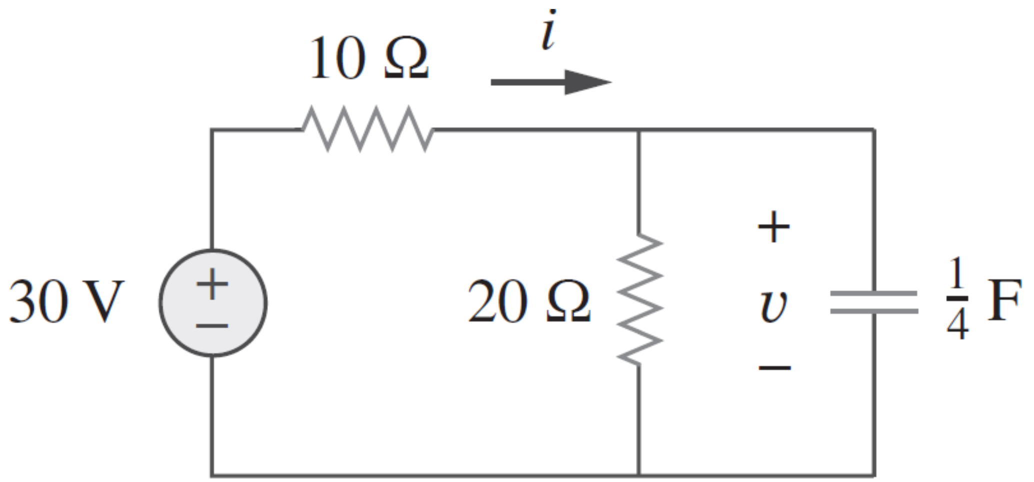


- $v(0^-) = 10\ V$
- $i(0^-) = -\dfrac{v(0^-)}{10} = -1A$

- SADIKU, exemplo 7.11:

➢ Solução:

- Para $t > 0$:



- $R_{th} = \frac{(10)(20)}{10+20} = \frac{20}{3}\,\Omega$
- $\tau = R_{th}C = \left(\frac{20}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{3}\,s$
- $v(\infty) = V_{th} = \left(\frac{20}{10+20}\right)(30) = 20V$
- $v(t) = [v(0) - v(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + v(\infty) =$
  $= (10-20)e^{-\frac{3}{5}t} + 20 = 20 - 10e^{-\frac{3}{5}t}\,V, \qquad t > 0$
- $i(t) = \frac{30 - v(t)}{10} = \frac{30 - \left(20 - 10e^{-\frac{3}{5}t}\right)}{10} =$
  $= 1 + e^{-\frac{3}{5}t}\,A, \qquad t > 0$

- SADIKU, problema 7.37:

Um circuito é descrito por: $$4\frac{dv}{dt} + v = 10$$

a) Qual é a constante de tempo do circuito?

b) Qual é o valor final de v?

c) Se $v(0) = 2$, determine $v(t)$ para $t > 0$

➢ Solução:

- Resposta Natural

$$\frac{dv_n}{dt} + \frac{v_n}{4} = 0$$

$$\therefore v_n = Ke^{-t/4}$$

a) $\tau = 4s$

- Resposta Forçada

$$\cancelto{0}{\frac{dv_f}{dt}} + \frac{v_f}{4} = \frac{10}{4}$$

$$\underbrace{\therefore v_f = 10V}$$

b) valor final de v

- Resposta Completa

$$v = v_n + v_f$$

$$v = Ke^{-t/4} + 10$$

Mas, $v(0) = 2$, então:

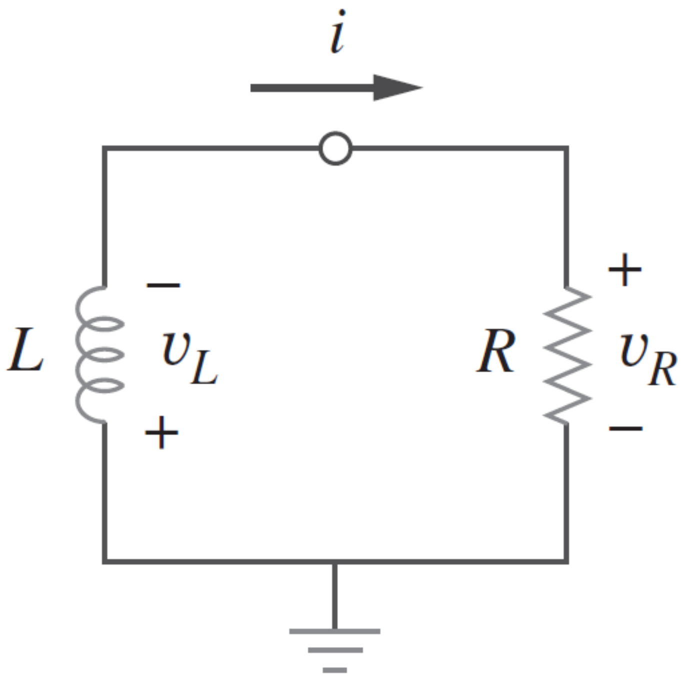
$$v(0) = 2 = K + 10$$

$$\therefore K = -8$$

c) $v(t) = 10 - 8e^{-\frac{t}{4}},\ t > 0$

3. Circuitos de 1ª Ordem

- **Circuito RL sem fonte**
  - A equação diferencial descreve a **“descarga” do indutor** (<u>resposta natural</u> do circuito)
  - A **constante de tempo** $(\tau = L/R)$ representa o tempo de “descarga” do indutor



$$v_L + v_R = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt$$

$$\int \frac{di}{i} = -\int \frac{R}{L}dt$$

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + k$$

$$i = e^{-\frac{R}{L}t+k}$$

$$i = \left(e^{-\frac{R}{L}t}\right)\left(e^{k}\right)$$

$$i = Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

Mas $i(0) = I_0$,
então:

$$i(0) = I_0 =$$

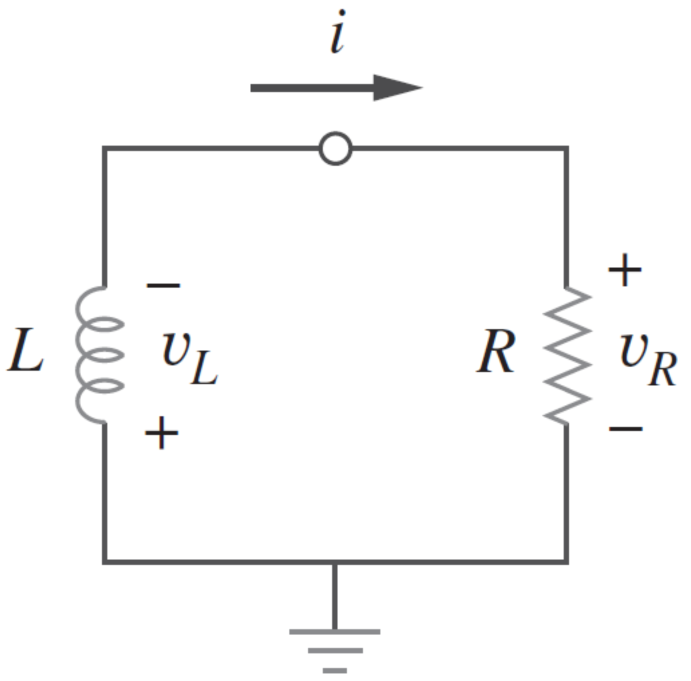
$$= Ke^{-\left(\frac{R}{L}\right)(0)} = K$$

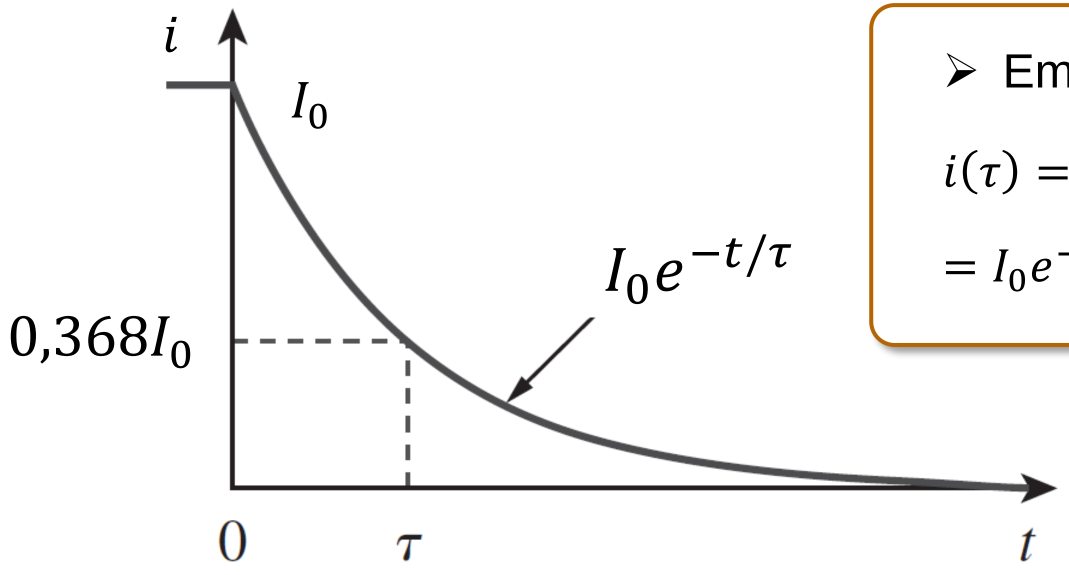
$$\therefore i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

ou

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- **Circuito RL sem fonte**
  - A equação diferencial descreve a **“descarga” do indutor** (resposta natural do circuito)
  - A **constante de tempo** $(\tau = L/R)$ representa o tempo de “descarga” do indutor
  - Em $t = \tau$, a corrente do indutor decai para 37% do valor inicial I_0

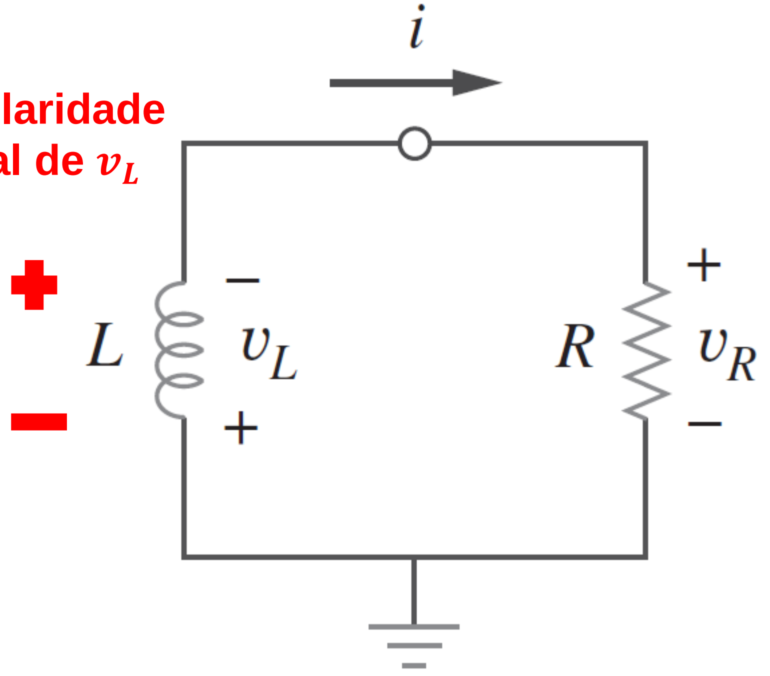




> Em $t = \tau$:
>
> $i(\tau) = I_0 e^{-\frac{\tau}{\tau}} =$
>
> $= I_0 e^{-1} = 0,368 I_0$

- **Circuito RL sem fonte**
  - A equação diferencial descreve a **“descarga” do indutor** (resposta natural do circuito)
  - A **constante de tempo** ($\tau = L/R$) representa o tempo de “descarga” do indutor
  - A tensão no indutor **muda de polaridade**

Polaridade real de v_L



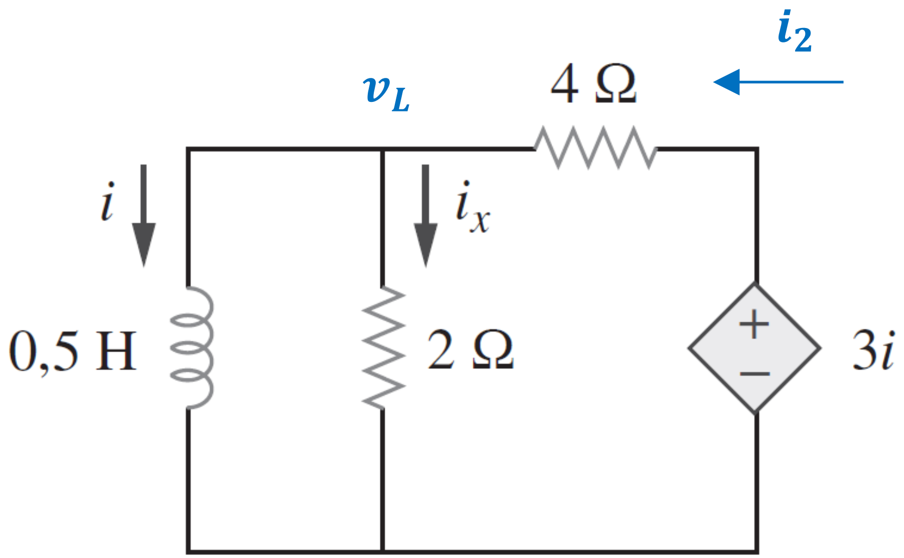
- $$v_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d\left(\mathrm{I_0 e}^{-\frac{R}{L}t}\right)}{\mathrm{dt}} = (L)\left(-\frac{R}{L}\right)(I_0)(\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t})$$

$$\therefore v_L = -I_0 R\, e^{-\frac{R}{L}t} \quad \text{ou} \quad v_L = -I_0 R\, e^{-t/\tau}$$

- $$P = Ri^2 = R\left(\mathrm{I_0 e}^{-\frac{R}{L}t}\right)^2 = R\, I_0^2\, e^{-\frac{2R}{L}t}$$

- SADIKU, exemplo 7.3:

Supondo que $i(0) = 10\ A$, calcule $i(t)$ e $i_x(t)$ no circuito a seguir



➢ Solução (**sem usar Thévenin**):

- LKT na malha 1:

$v_L = v_{R2}$

$$0{,}5\frac{di}{dt} = 2i_x \qquad \therefore\ i_x = \frac{1}{4}\frac{di}{dt} \qquad (1)$$

- $$i_2 = \frac{3i - v_L}{4} = \frac{3i - 0{,}5\frac{di}{dt}}{4} = \frac{3}{4}i - \frac{1}{8}\frac{di}{dt} \qquad (2)$$

- LKC no nó v_L:

$$i_2 = i + i_x \qquad (3)$$

- (1) e (2) em (3):

$$\frac{3}{4}i - \frac{1}{8}\frac{di}{dt} = i + \frac{1}{4}\frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{2}{3}i = 0$$

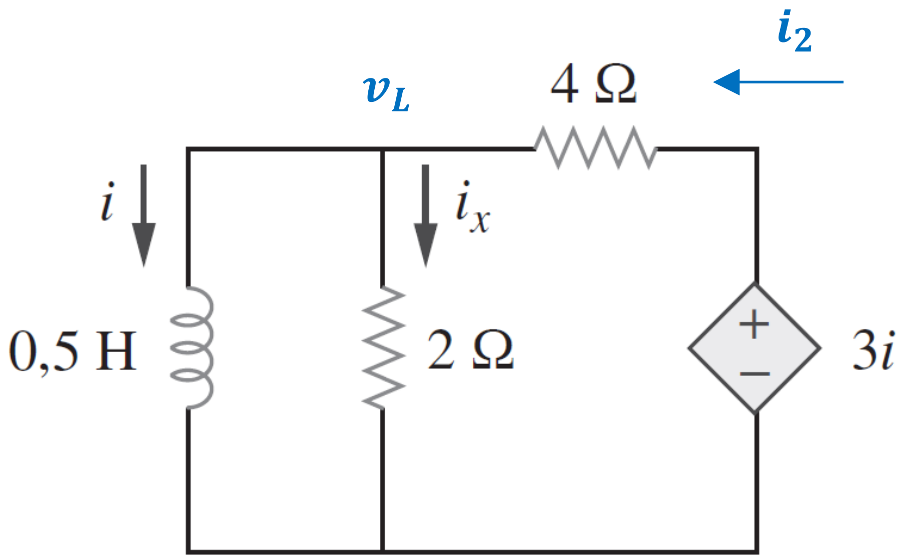
$$\therefore\ i = ke^{-\frac{2}{3}t}$$

Mas, $i(0) = 10 = ke^0 = k$

$$\therefore\ i(t) = 10e^{-\frac{2}{3}t}\ A, \qquad t > 0$$

- SADIKU, exemplo 7.3:

Supondo que $i(0) = 10\ A,$ calcule $i(t)$ e $i_x(t)$ no circuito a seguir



➢ Solução (**sem usar Thévenin**):

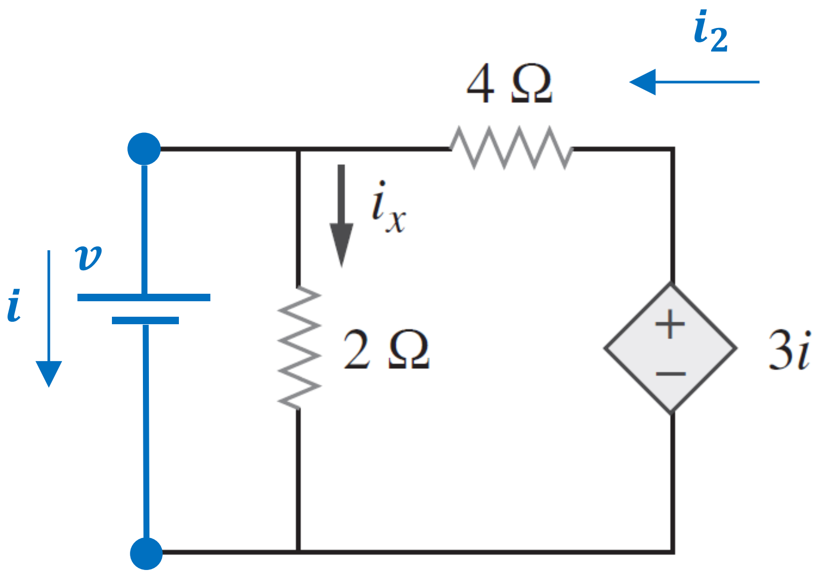
- Substituindo-se a expressão de $i(t)$ em (1):

$$i_x = \frac{1}{4}\frac{di}{dt} = \frac{1}{4}\frac{d\left(10e^{-\frac{2}{3}t}\right)}{dt} = \left(\frac{1}{4}\right)(10)\left(-\frac{2}{3}\right)e^{-\frac{2}{3}t}$$

$$\therefore\ i_x(t) = -\frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}t}\ A, \qquad t > 0$$

- SADIKU, exemplo 7.3:

Supondo que $i(0) = 10\ A,$ calcule $i(t)$ e $i_x(t)$ no circuito a seguir



➢ Solução (**usando Thévenin**):

- $R_{th} = -\dfrac{v}{i}$ (1)
- LKC no nó v:

  $i_2 = i + i_x$ (2)
- LKT na malha 1:

  $v = 2i_x$ (3)
- LKT na malha 2:

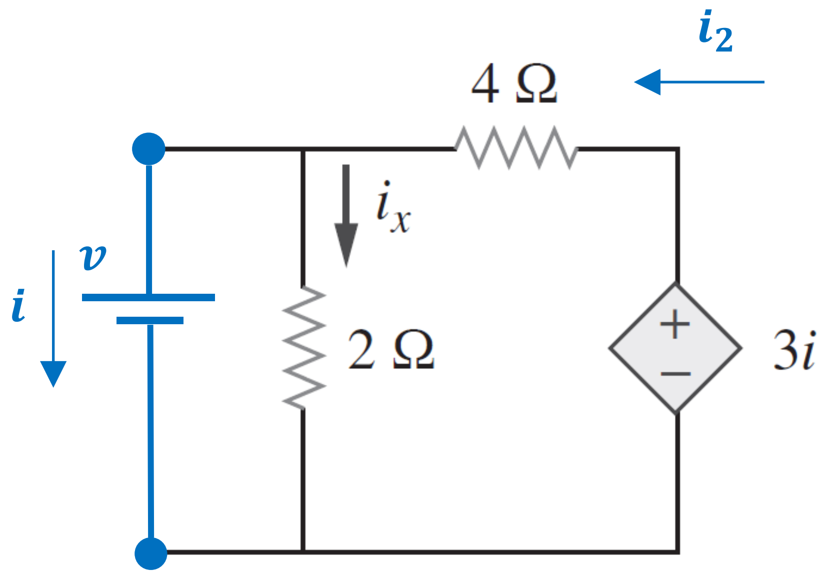
  $2i_x + 4i_2 - 3i = 0$ (4)
- (2) em (4):

  $2i_x + 4(i + i_x) - 3i = 0 \qquad \therefore\ i_x = -i/6$ (5)
- (3) e (5) em (1):

  $$R_{th} = \frac{-2(-i/6)}{i} = \frac{1}{3}\Omega$$

- SADIKU, exemplo 7.3:

Supondo que $i(0) = 10\ A$, calcule $i(t)$ e $i_x(t)$ no circuito a seguir

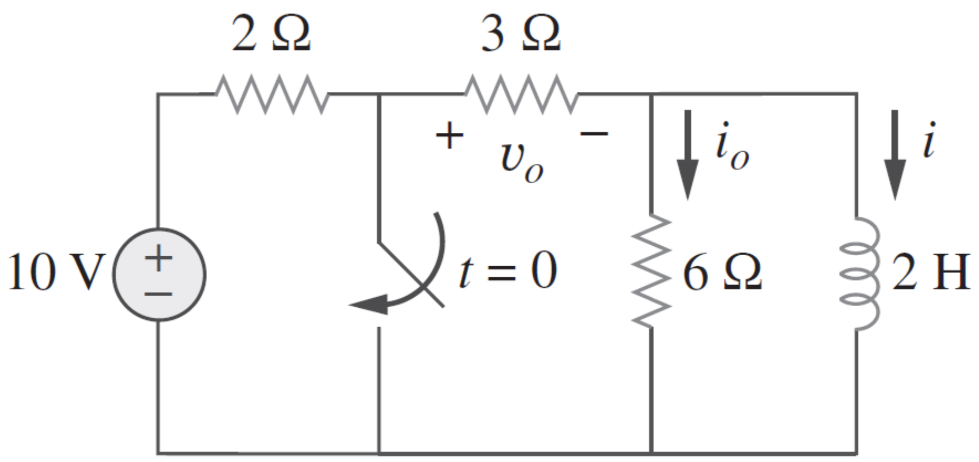


➢ Solução (**usando Thévenin**):

- $R_{th} = \frac{1}{3}\Omega$
- $\tau = \frac{L}{R_{th}} = \frac{0,5}{1/3} = \frac{3}{2}s$
- $i(t) = 10e^{-\frac{2}{3}t}\ A, \qquad t > 0$

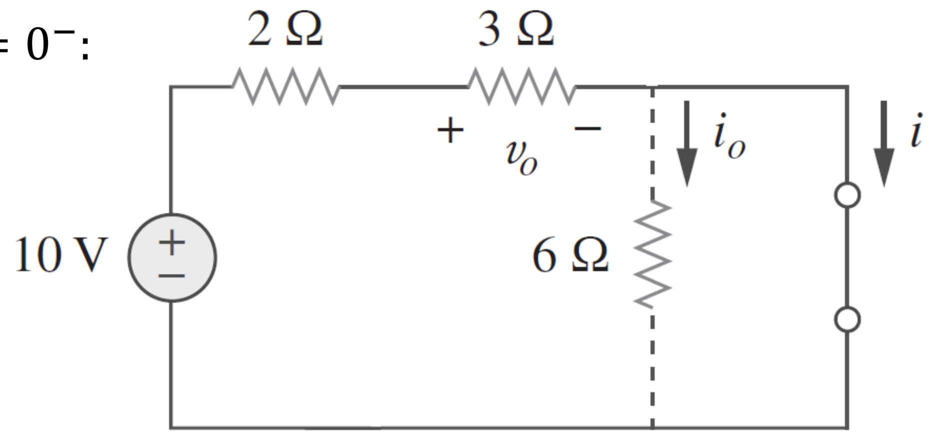
- SADIKU, exemplo 7.5:

Encontre i_0, v_0 e i durante todo o tempo, supondo que a chave fora aberta por um longo período.



➢ Solução (**usando Thévenin**):

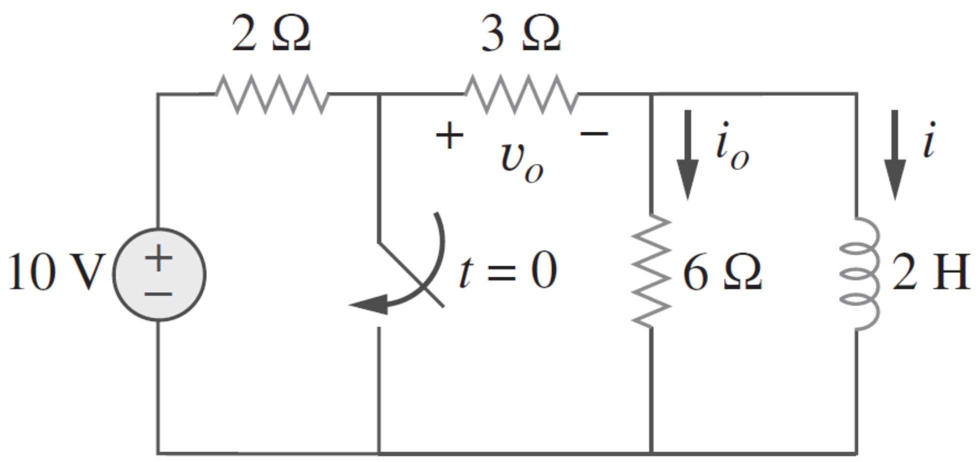
- $t = 0^-$:



- $i_0(0^-) = 0A$
- $i(0^-) = \dfrac{10}{2+3} = 2A$
- $v_0(0^-) = \left(\dfrac{3}{2+3}\right)(10) = 6V$

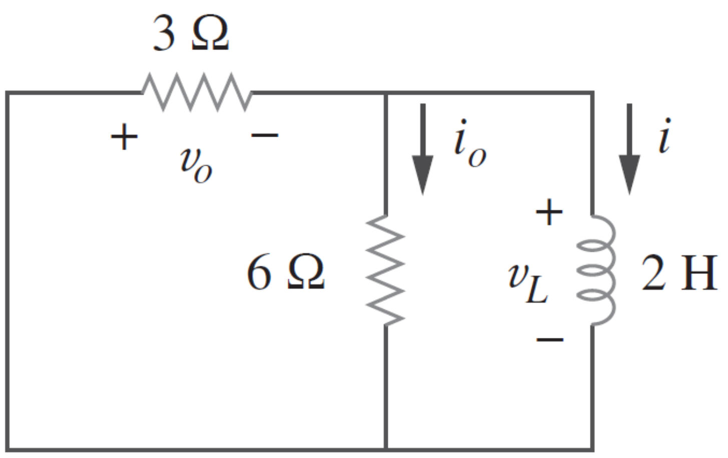
- SADIKU, exemplo 7.5:

Encontre i_0, v_0 e i durante todo o tempo, supondo que a chave fora aberta por um longo período.



➢ Solução (**usando Thévenin**):

- $t > 0$:



- $R_{th} = \dfrac{(3)(6)}{3+6} = 2\Omega$
- $\tau = L/R_{th} = \frac{2}{2} = 1s$
- $i(t) = 2e^{-t}\ A$

- $v_0 = -v_L = -2\dfrac{d(2e^{-t})}{dt}$

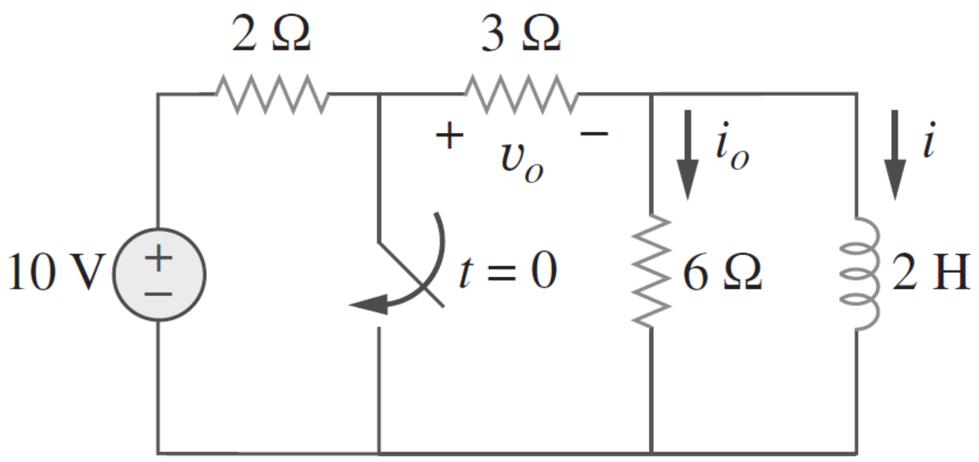
  $\therefore v_0 = 4e^{-t}\ V$

- $i_0 = \dfrac{v_L}{6} = -\dfrac{4}{6}e^{-t}$

  $\therefore i_0 = -\dfrac{2}{3}e^{-t}$

- SADIKU, exemplo 7.5:

Encontre i_0, v_0 e i durante todo o tempo, supondo que a chave fora aberta por um longo período.



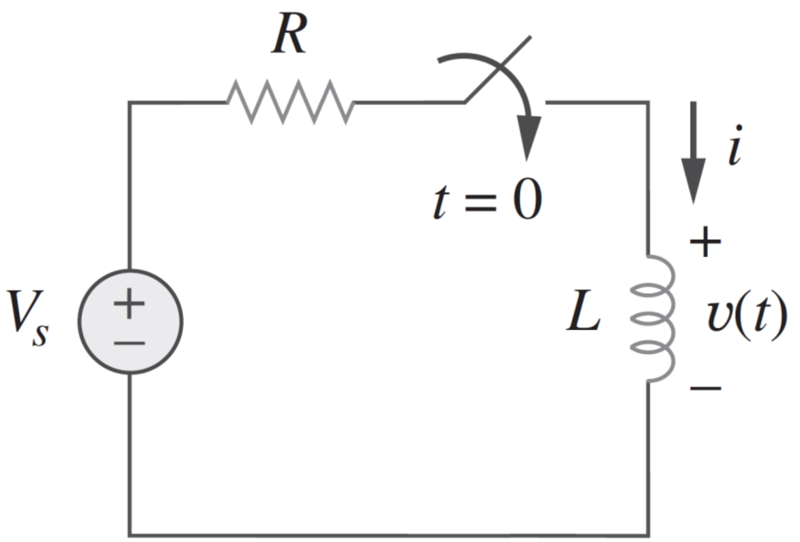
➢ Solução (**usando Thévenin**):

- $i_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -\dfrac{2}{3}e^{-t}\ A, & t > 0 \end{cases}$

- $v_0(t) = \begin{cases} 6V, & t < 0 \\ 4e^{-t}\ V, & t > 0 \end{cases}$

- $i(t) = \begin{cases} 2A, & t < 0 \\ 2e^{-t}\ A, & t > 0 \end{cases}$

- **Resposta a um degrau de um circuito RL**
  - A resposta a um degrau de um circuito é seu comportamento quando a excitação for a função degrau, que pode ser uma **fonte de tensão ou de corrente**.
  - A **constante de tempo** ($\tau = L/R$) representa o tempo de **"carregamento"** do indutor



$$v_L + v_R = V_s$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_s$$

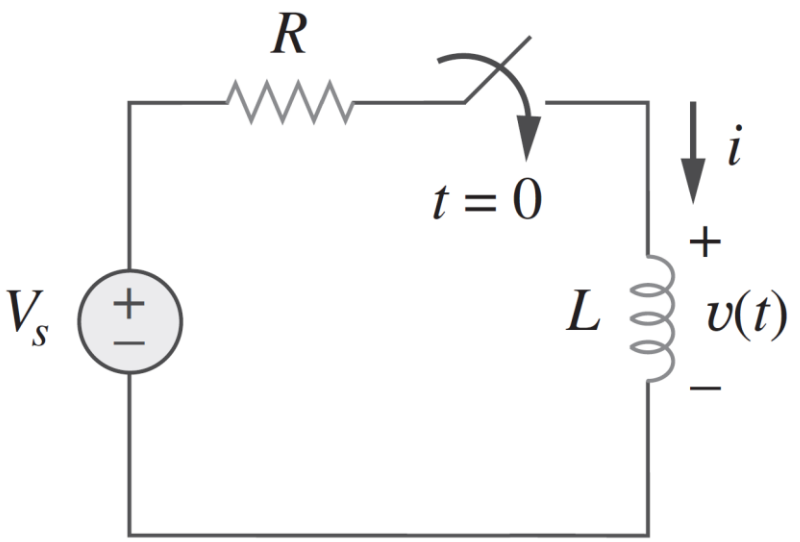
$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V_s}{L}$$

Resposta Natural
(solução complementar)

$$\frac{di_n}{dt} + \frac{R}{L}i_n = 0$$

$$\therefore\ i_n = Ke^{-t/\tau}$$

- **Resposta a um degrau de um circuito RL**
  - A resposta a um degrau de um circuito é seu comportamento quando a excitação for a função degrau, que pode ser uma **fonte de tensão ou de corrente**.
  - A **constante de tempo** $(\tau = L/R)$ representa o tempo de **"carregamento"** do indutor



$$v_L + v_R = V_s$$

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_s$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V_s}{L}$$

Resposta Forçada
(solução particular)

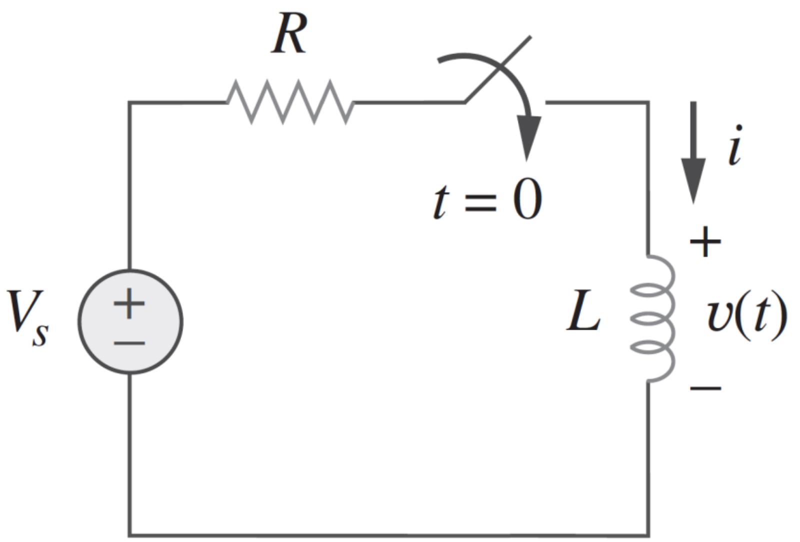
$$\frac{di_f}{dt} + \frac{R}{L}i_f = \frac{\mathrm{V_s}}{\mathrm{L}}$$

Para V_s/L constante, assume-se que i_f tenha uma resposta constante:

$$0 + \frac{R}{L}i_f = \frac{V_s}{L}$$

$$\therefore i_f = V_s/L$$

- **Resposta a um degrau de um circuito RL**
  - A resposta a um degrau de um circuito é seu comportamento quando a excitação for a função degrau, que pode ser uma **fonte de tensão ou de corrente**.
  - A **constante de tempo** ($\tau = L/R$) representa o tempo de **"carregamento"** do indutor



Resposta Completa
(resposta natural + resposta forçada)

$$i(t) = i_n + i_f$$

$$i(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{V_s}{R}$$

Para $i(0)$ igual a uma corrente inicial I_0:

$$i(0) = I_0 = Ke^0 + \frac{V_s}{R}$$

$$\therefore K = \mathrm{I}_0 - \frac{V_s}{R}$$

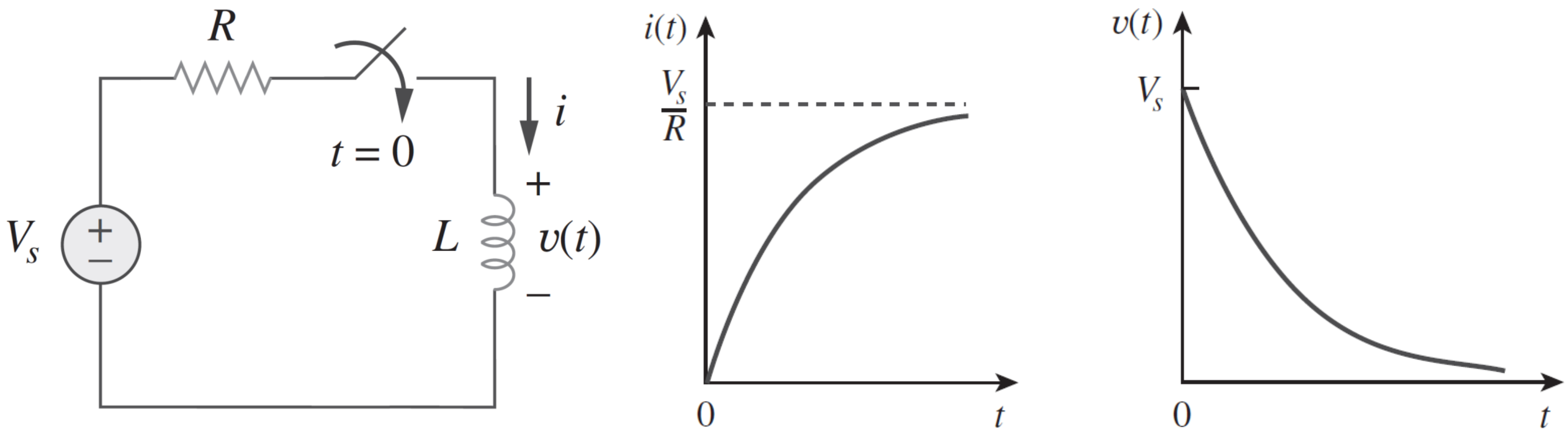
Portanto, para $t > 0$:

$$i(t) = \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right) e^{-t/\tau} + \frac{V_s}{R}$$

ou:

$$i(t) = [i(0) - i(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + i(\infty)$$

- **Resposta a um degrau de um circuito RL**
  - A resposta a um degrau de um circuito é seu comportamento quando a excitação for a função degrau, que pode ser uma **fonte de tensão ou de corrente**.
  - A **constante de tempo** $(\tau = L/R)$ representa o tempo de **"carregamento"** do indutor
  - Expressão da **resposta transitória** do indutor: $$i(t) = [i(0) - i(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + i(\infty)$$



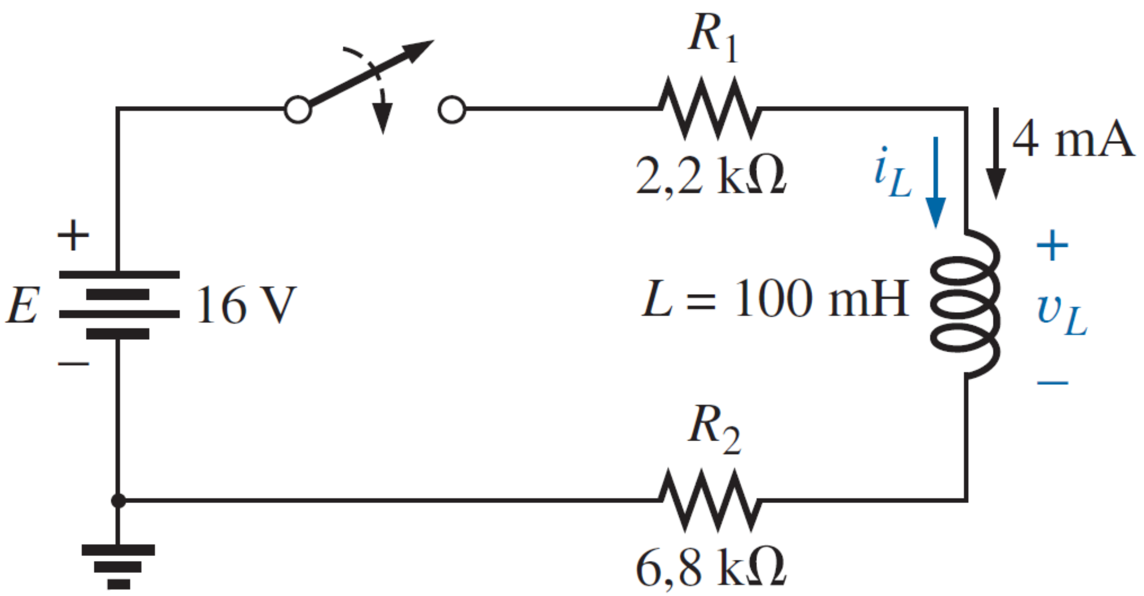
- BOYLESTAD, exemplo 11.4:

No circuito a seguir, considere que o indutor possui uma corrente inicial de $4\ mA$.

a) Determine a expressão da corrente i_L após a chave ser fechada.

b) Determine a expressão da tensão v_L após a chave ser fechada.

c) Esboce das formas de onda de i_L e v_L.



➢ Solução:

a) $i_L(0) = 4\ mA$

$$R_{th} = 2{,}2 + 6{,}8 = 9\ k\Omega$$

$$\tau = L/R_{th} = 100\text{mH}/9\text{k}\Omega = 11{,}11\ \mu\Omega$$

$$i_L(\infty) = 16V/9k\Omega = 1{,}78\ mA$$

$$\therefore i_L(t) = [i_L(0) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + i_L(\infty) =$$

$$= (4 - 1{,}78)e^{-t/(11{,}11\times10^{-6})} + 1{,}78 =$$

$$= \left[2{,}22\text{e}^{-90\times10^{3}\text{t}} + 1{,}78\right]\text{mA}, \qquad \text{t} > 0$$

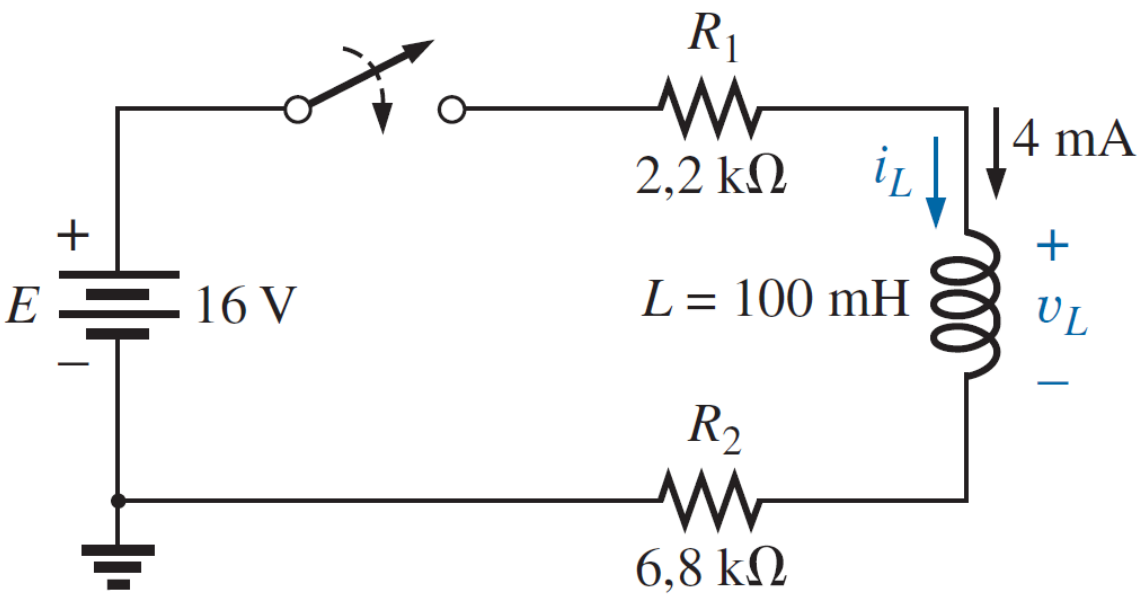
- BOYLESTAD, exemplo 11.4:

  No circuito a seguir, considere que o indutor possui uma corrente inicial de $4\ mA$.

  a) Determine a expressão da corrente i_L após a chave ser fechada.

  b) Determine a expressão da tensão v_L após a chave ser fechada.

  c) Esboce das formas de onda de i_L e v_L.



- Solução:

b)

$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} =$$

$$= (100 \times 10^{-3})\frac{d[(2{,}22e^{-90000t} + 1{,}78) \times 10^{-3}]}{dt} =$$

$$= -20e^{-90000t}\ V, \qquad t > 0$$

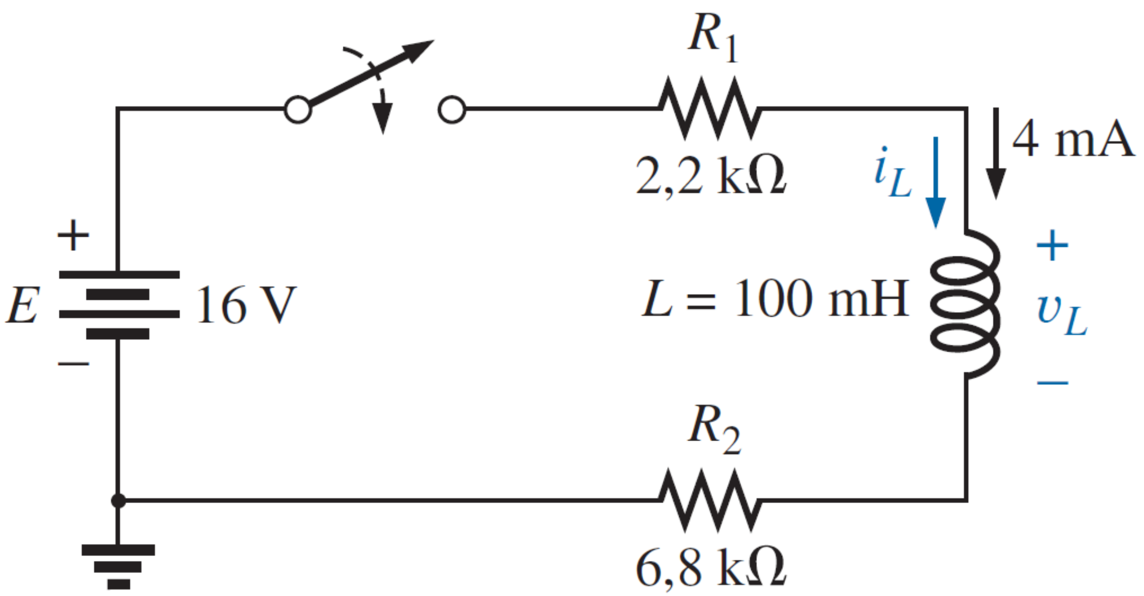
- BOYLESTAD, exemplo 11.4:

No circuito a seguir, considere que o indutor possui uma corrente inicial de $4\ mA$.

a) Determine a expressão da corrente i_L após a chave ser fechada.

b) Determine a expressão da tensão v_L após a chave ser fechada.

c) Esboce das formas de onda de i_L e v_L.



➢ Solução:

b) (alternativamente...)

Em $t = 0^+, i_L(0^+) = 4\ mA$. Portanto:

$$v_L(0^+) = 16V - (9k\Omega)(4mA) = -20V$$

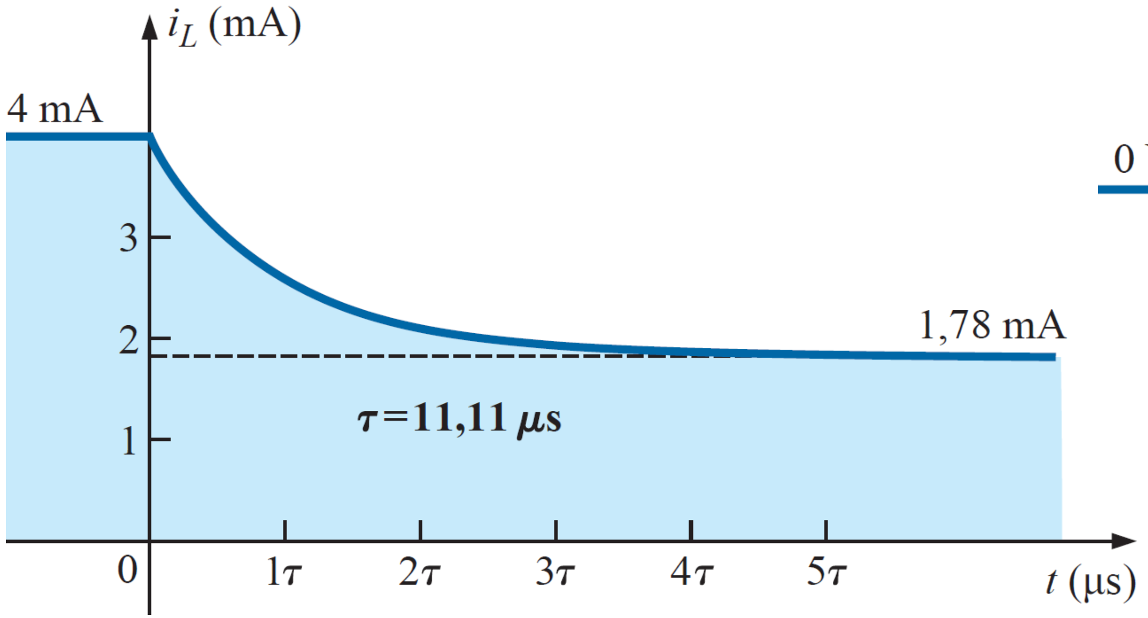
A tensão vai decair para zero em $t \to \infty$:

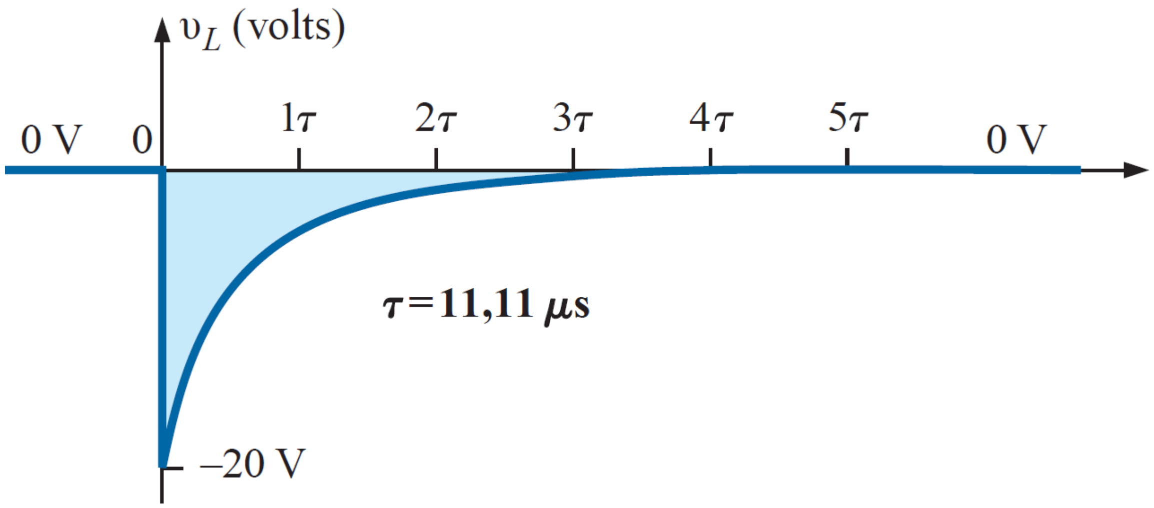
$$\therefore v_L(t) = -20e^{-90000t}\ V, \qquad t > 0$$

- BOYLESTAD, exemplo 11.4:

➢ Solução:

c) $i_L(t) = \begin{cases} 4\ mA, & t < 0 \\ [1{,}78 + 2{,}22e^{-90000t}]\ mA, & t > 0 \end{cases}$ $\quad v_L(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -20e^{-90000}\ V, & t > 0 \end{cases}$





3. Circuitos de 1ª Ordem

- SADIKU, problema 7.38:

Um circuito é descrito por: $$\frac{di}{dt} + 3i = 2u(t)$$

Determine $i(t)$ para t > 0, dado que $i(0) = 0$.

➢ Solução:

- Resposta Natural

$$\frac{di_n}{dt} + 3i_n = 0$$

$$\therefore i_n = Ke^{-3t}$$

- Resposta Forçada

$$\underbrace{\cancel{\frac{di_f}{dt}}}_{0} + 3i_f = 2u(t)$$

$$\therefore i_f = \frac{2}{3}\ A$$

- Resposta Completa

$$i = i_n + i_f$$

$$i = Ke^{-3t} + \frac{2}{3}$$

Mas, $i(0) = 0,$ então:

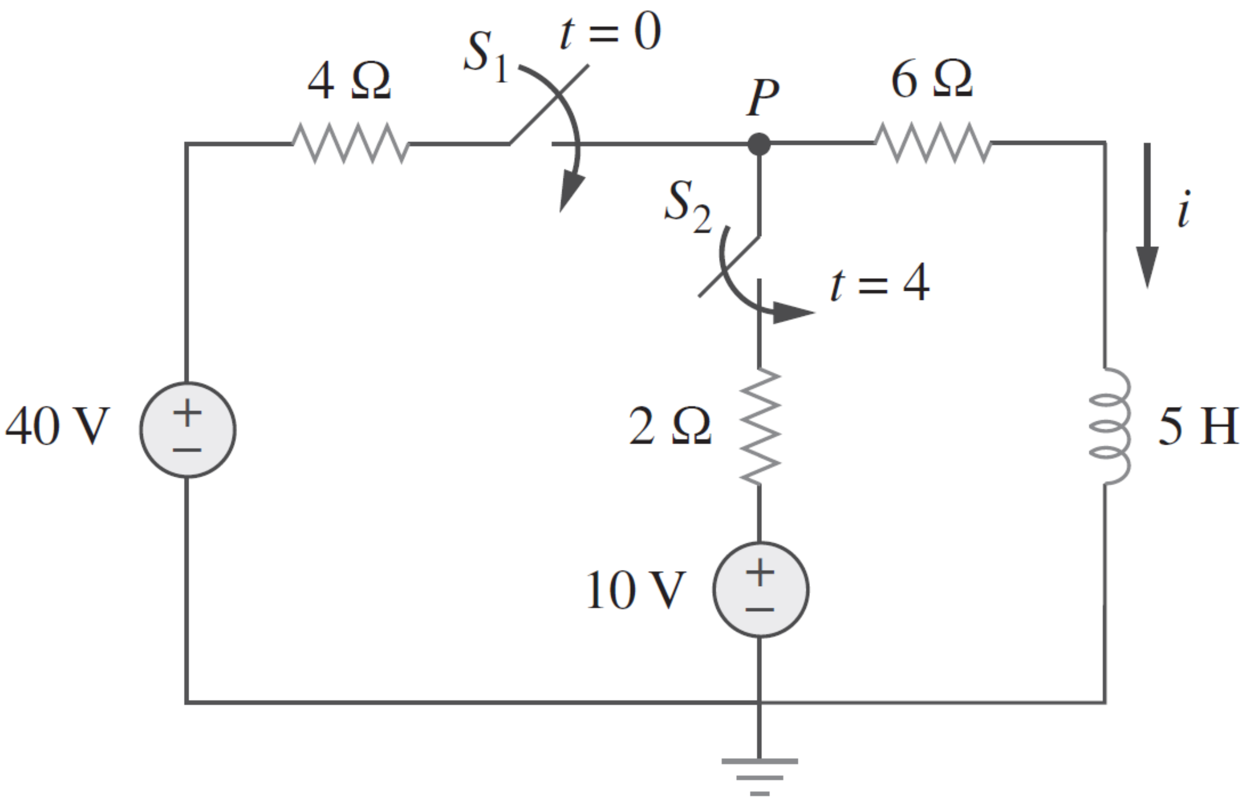
$$i(0) = 0 = K + 2/3$$

$$\therefore K = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore i(t) = \frac{2}{3}(1 - e^{-3t})\ A, \qquad t > 0$$

- SADIKU, exemplo 7.13:

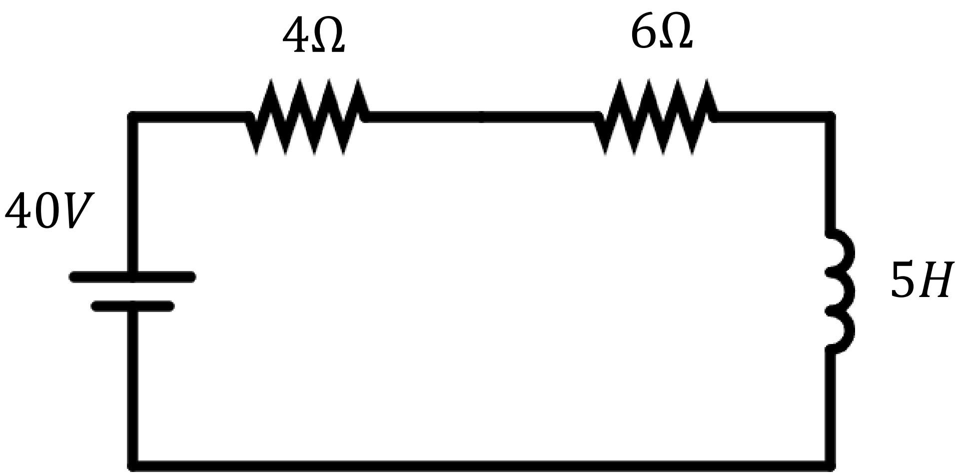
  Em $t = 0$, a chave 1 é fechada e a chave 2 é fechada 4 s depois. Determine $i(t)$ para $t > 0$. Calcule i para t = 2 s e t = 5 s.



- SADIKU, exemplo 7.13:

➢ Solução:

- Para $0 < t < 4$:

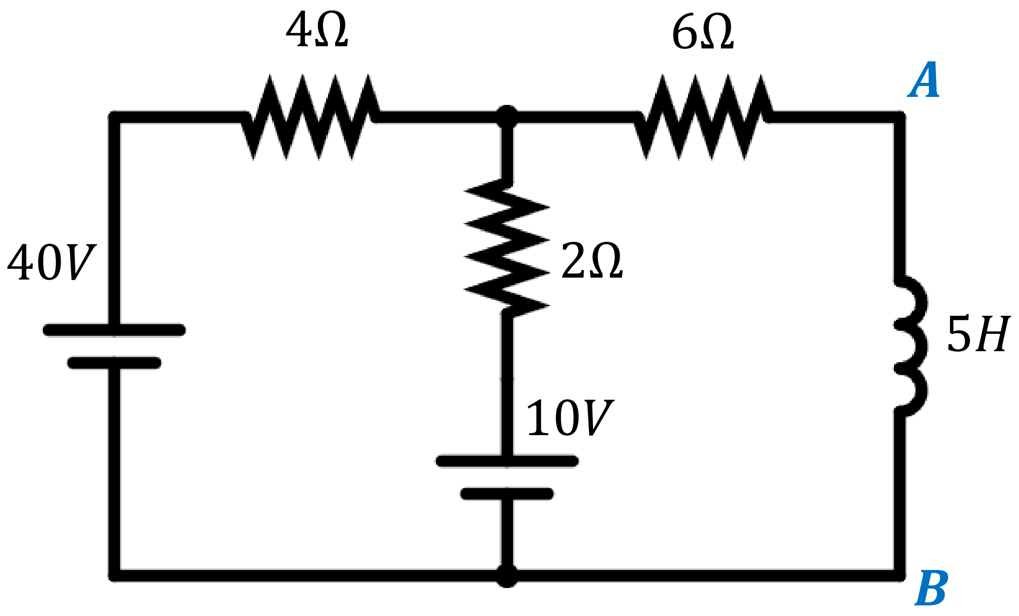


- $R_{th} = 4 + 6 = 10\Omega$
- $\tau = \frac{L}{R_{th}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}s$
- $i(0^-) = 0\ A$
- $i(\infty) = \frac{40}{10} = 4A$
- $$i(t) = [i(0) - i(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} + i(\infty) =$$
$$= [0 - 4]e^{-2t} + 4 =$$
$$= 4(1 - e^{-2t})A, \qquad 0 < t < 4$$

- SADIKU, exemplo 7.13:

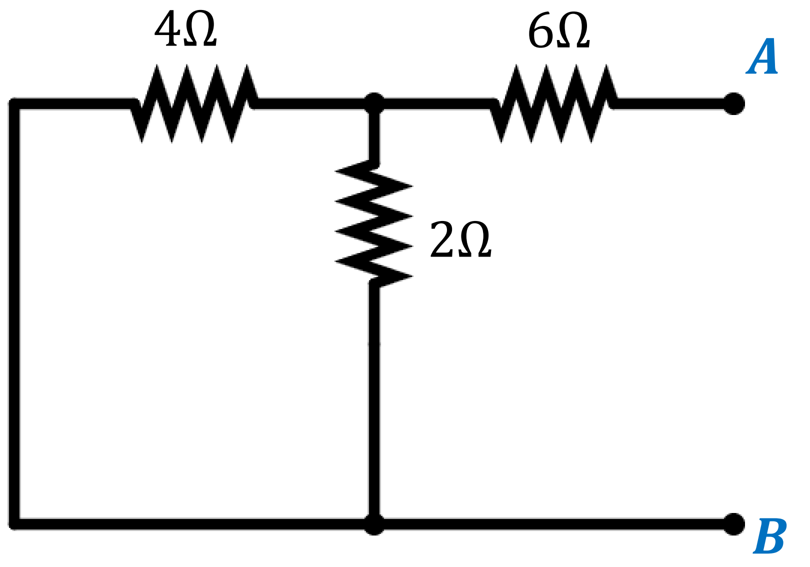
➢ Solução:

- Para $t > 4$:



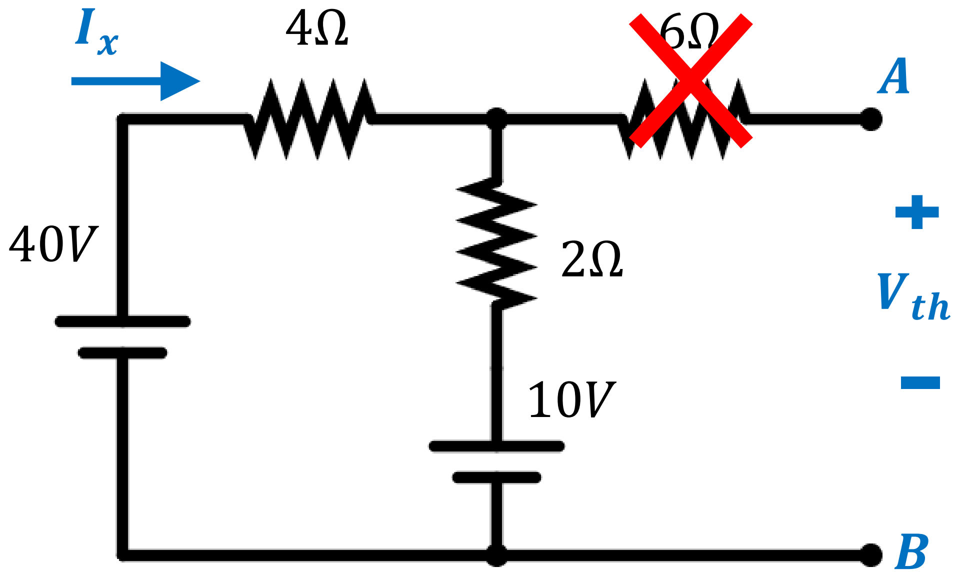
- $i(4) = 4\left(1 - e^{-2(4)}\right) = 4A$
- $R_{th} = 6 + \frac{(2)(4)}{2+4} = \frac{22}{3}\Omega$

➢ **Circuito "morto", para calcular R_{th}:**



- SADIKU, exemplo 7.13:

> ➢ Solução:
>
> - Para $t > 4$:
>
> ➢ **Circuito aberto, para calcular V_{th}:**



- $I_x = \dfrac{40 - 10}{4 + 2} = \dfrac{30}{6} = 5A$

- $V_{th} = (2)I_x + 10 = (2)(5) + 10 = 20V$

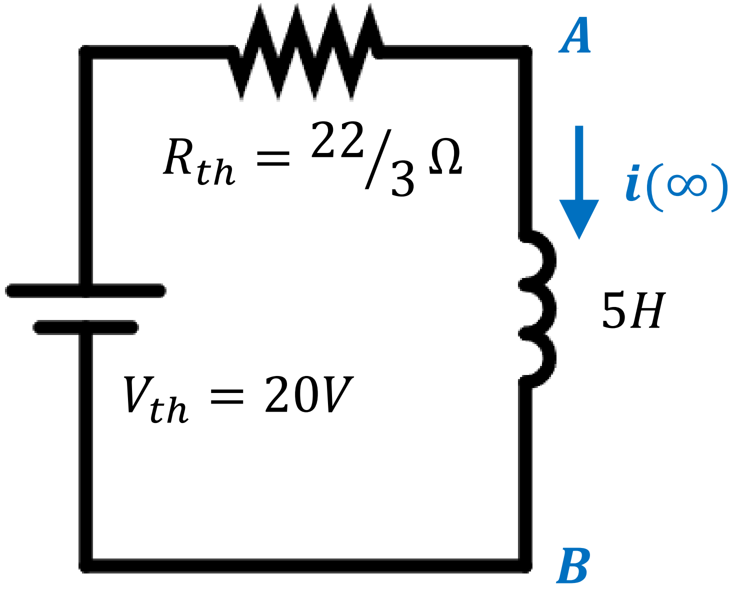
3. Circuitos de 1ª Ordem

- SADIKU, exemplo 7.13:

➢ Solução:

- Para $t > 4$:

➢ **Equivalente de Thévenin:**



- $\tau = \dfrac{L}{R_{th}} = \dfrac{5}{22/3} = \dfrac{15}{22}\ s$

- $i(\infty) = \dfrac{20}{22/3} = 2{,}73A$

- $$i(t) = [i(4) - i(\infty)]e^{-(t-4)/\tau} =$$
$$= [4 - 2{,}73]e^{-1{,}47(t-4)} + 2{,}73 =$$
$$= 2{,}73 + 1{,}27e^{-1{,}47(t-4)}\ A, \qquad t > 4$$

3. Circuitos de 1ª Ordem

- SADIKU, exemplo 7.13:

➢ Solução:

- $i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 4(1 - e^{-2t})\ A, & 0 < t < 4 \\ 2{,}73 + 1{,}27e^{-1{,}47(t-4)}\ A, & t > 4 \end{cases}$

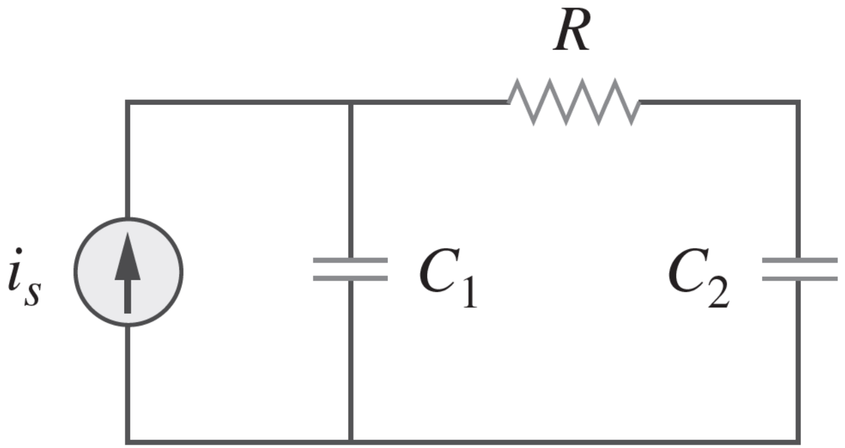
- $i(2) = 4\left(1 - \mathrm{e}^{-(2)(2)}\right) = 3{,}93\ \mathrm{A}$

- $i(5) = 2{,}73 + 1{,}27e^{-1{,}47(5-4)} = 3{,}02\ A$

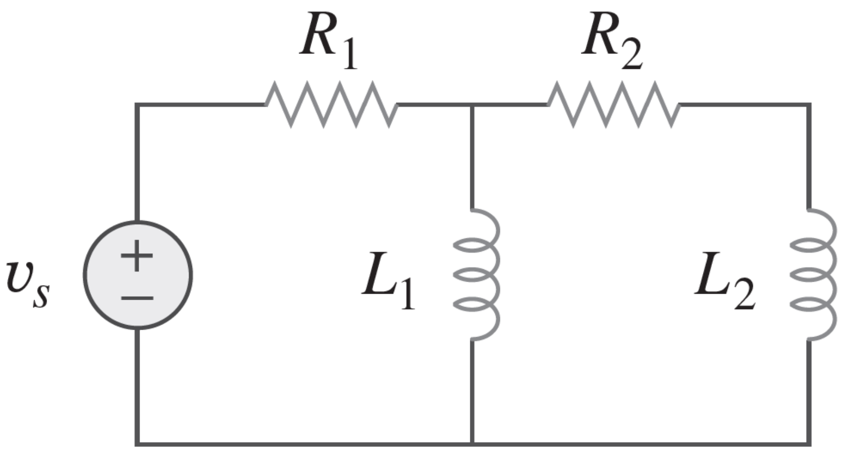
4. Circuitos de 2ª Ordem

- Um circuito de 2ª ordem é caracterizado por uma **equação diferencial de 2ª ordem**
- Formado por resistores e o equivalente de dois elementos de armazenamento (L e/ou C)
- A equação homogênea é resolvida através de uma **equação característica**
- São necessárias 2 soluções iniciais: ex.: $v(0)$ e $dv(0)/dt$

Ex.: Circuito RC de 2ª ordem



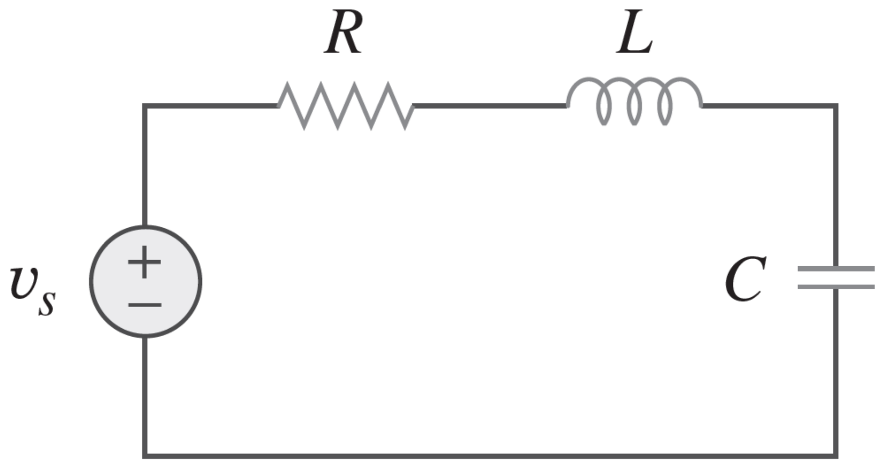
Ex.: Circuito RL de 2ª ordem



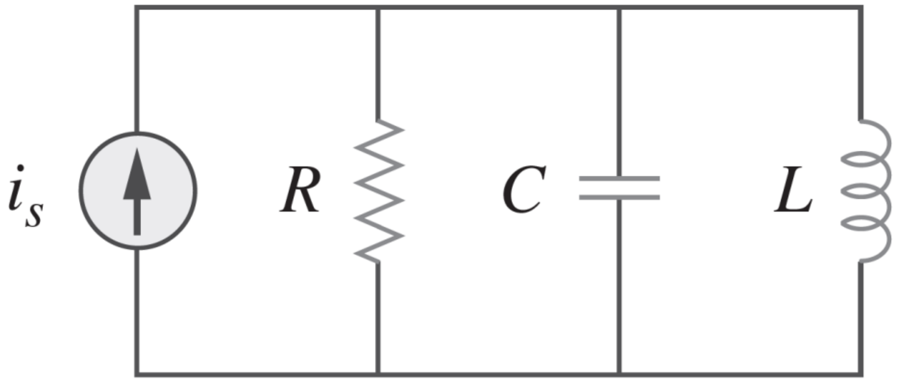
4. Circuitos de 2ª Ordem

- **Circuitos de 2ª ordem fundamentais:**
  - RLC série sem fonte
  - RLC paralelo sem fonte
  - Resposta ao degrau de um circuito RLC série
  - Resposta ao degrau de um circuito RLC paralelo

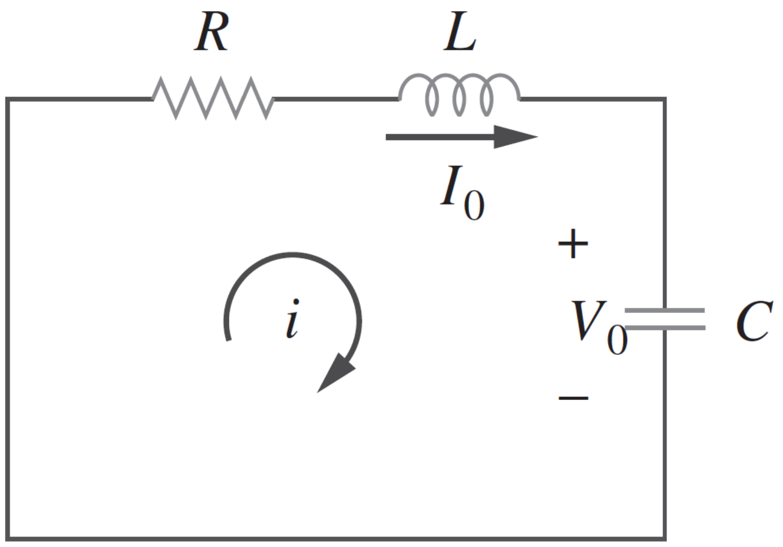
Ex.: Circuito **RLC série**



Ex.: Circuito **RLC paralelo**



- **RLC série sem fonte**
  - Equação diferencial de 2ª ordem homogênea
  - Passo 1: Obter a equação característica e analisar o amortecimento
  - Passo 2: Aplicar condições iniciais para calcular os coeficientes da resposta do circuito



$$v_R + v_L + v_C = 0$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\, dt = 0$$

$$R\frac{di}{dt} + L\left(\frac{di}{dt}\right)^2 + \frac{i}{C} = 0$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)^2 + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

Equação Característica:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$$

$$s = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Equação Característica:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

onde:

$\alpha = \dfrac{R}{2L}$ é o fator de amortecimento

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ é a frequência de ressonância

- Amortecimento supercrítico $(\alpha > \omega_0)$
  - Raízes reais, negativas e diferentes:

$$i(t) = A_1 e^{-s_1 t} + A_2 e^{-s_2 t}$$

- Amortecimento crítico $(\alpha = \omega_0)$
  - Raízes reais e iguais:

$$i(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t}$$

- Subamortecimento $(\alpha < \omega_0)$
  - Raízes complexas conjugadas:

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

Parte imaginária de s

$$i(t) = e^{-\alpha t}(B_1 cos\omega_d t + B_2 sen\omega_d t)$$

Equação Característica:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

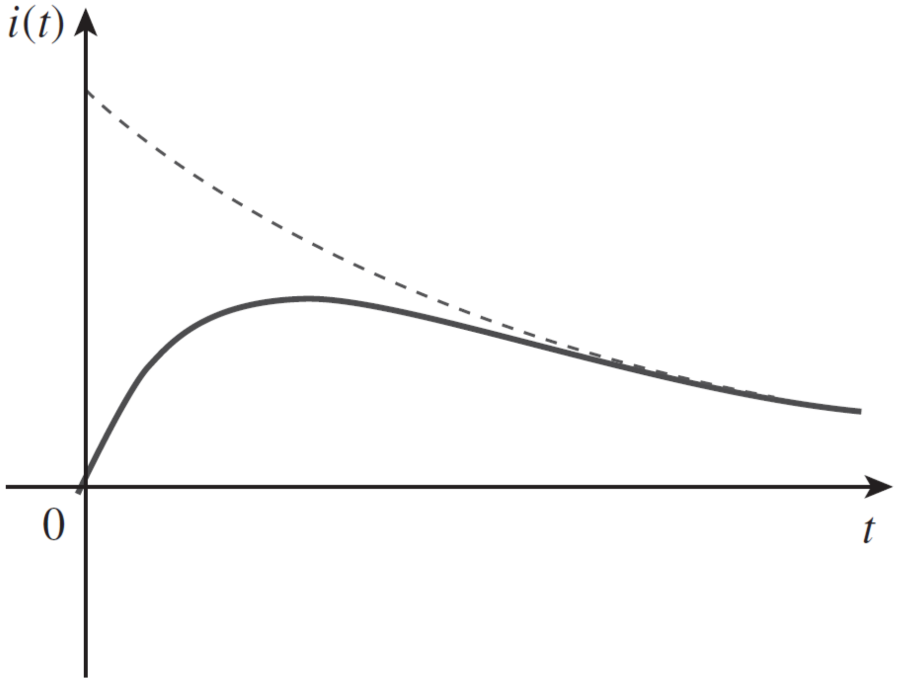
onde:

$\alpha = \dfrac{R}{2L}$ é o fator de amortecimento

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ é a frequência de ressonância

- Amortecimento supercrítico $(\alpha > \omega_0)$
  - Raízes reais, negativas e diferentes:

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$



Equação Característica:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

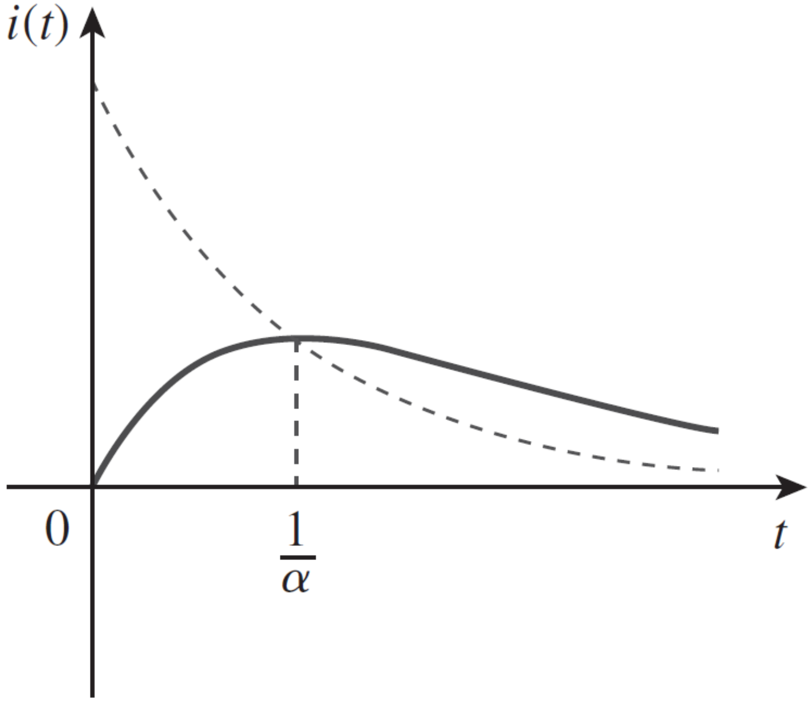
onde:

$\alpha = \dfrac{R}{2L}$ é o fator de amortecimento

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ é a frequência de ressonância

- Amortecimento crítico ($\alpha = \omega_0$)
  - Raízes reais e iguais:

$$i(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t}$$



Equação Característica:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

onde:

$\alpha = \dfrac{R}{2L}$ é o fator de amortecimento

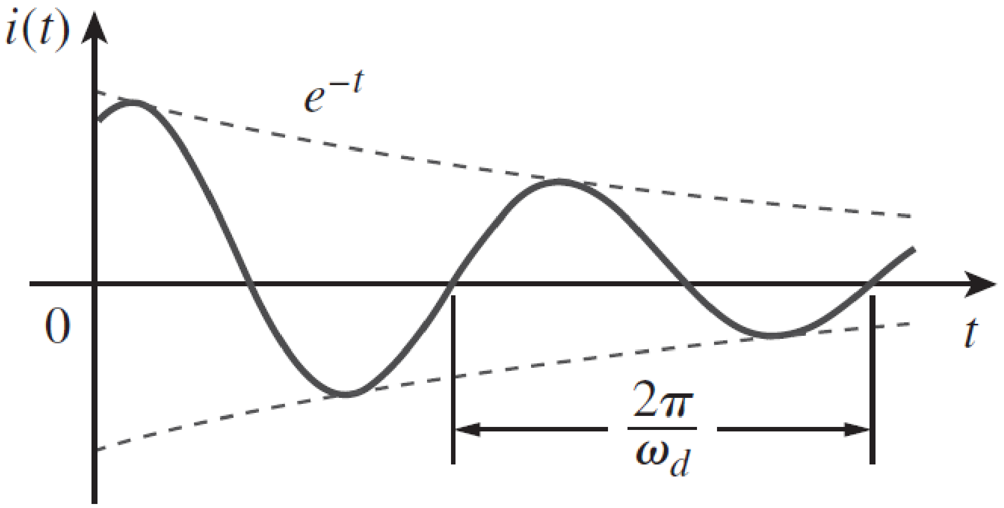
$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ é a frequência de ressonância

- Subamortecimento ($\alpha < \omega_0$)
  - Raízes complexas conjugadas:

Parte imaginária de s

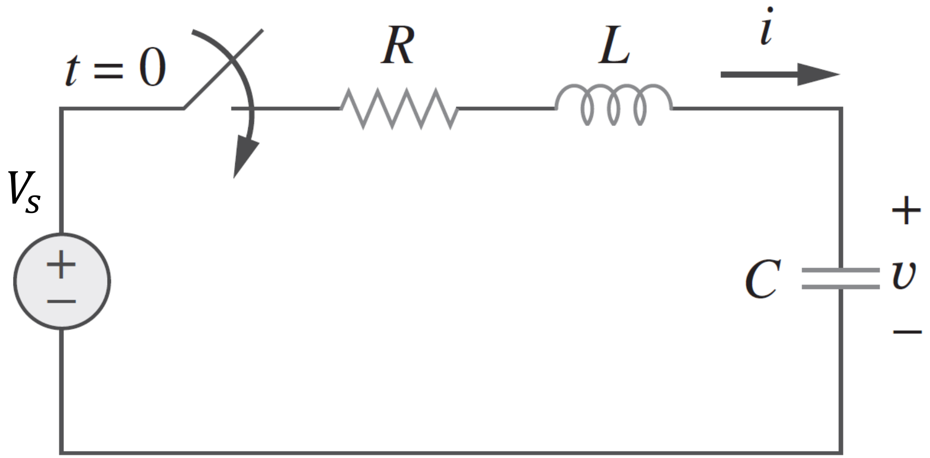
$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

$$i(t) = e^{-\alpha t}(B_1 cos\omega_d t + B_2 sen\omega_d t)$$



4. Circuitos de 2ª Ordem

- **Resposta ao degrau de um circuito RLC série**
  - Equação diferencial de 2ª ordem não-homogênea
  - A equação característica para o circuito RLC em série não é afetada pela presença da fonte CC
  - A resposta completa é dada pela soma da resposta natural mais a resposta forçada



$$v_R + v_L + v_C = V_S$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + v = V_s$$

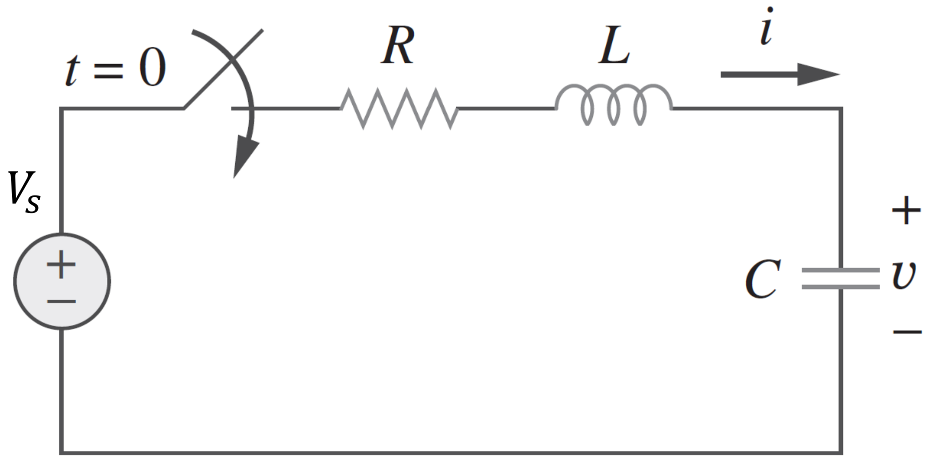
Mas $i = C\frac{dv}{dt}$, logo:

$$RC\frac{dv}{dt} + LC\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + v = V_s$$

$$\therefore \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{V_s}{LC}$$

4. Circuitos de 2ª Ordem

- **Resposta ao degrau de um circuito RLC série**
  - Equação diferencial de 2ª ordem não-homogênea
  - A equação característica para o circuito RLC em série não é afetada pela presença da fonte CC
  - A resposta completa é dada pela soma da resposta natural mais a resposta forçada



Resposta Completa
(resposta natural + resposta forçada)

- **Resposta natural:**

$$\left(\frac{dv_n}{dt}\right)^2 + \frac{R}{L}\frac{dv_n}{dt} + \frac{v_n}{LC} = 0$$

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

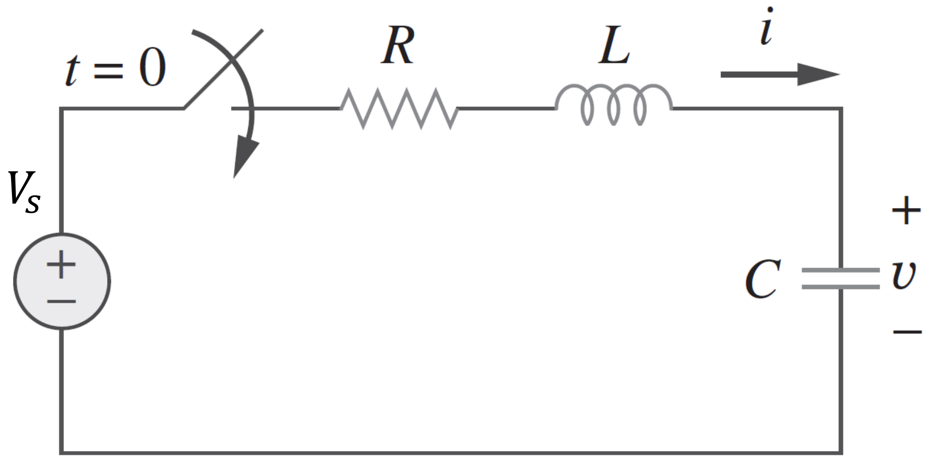
Mesma equação

- **Resposta forçada:**

$$\cancelto{0}{\left(\frac{dv_f}{dt}\right)^2} + \cancelto{0}{\frac{R}{L}\frac{dv_f}{dt}} + \frac{v_f}{LC} = \frac{V_s}{LC}$$

$$\therefore v_f = V_s$$

- **Resposta ao degrau de um circuito RLC série**
  - Equação diferencial de 2ª ordem não-homogênea
  - A equação característica para o circuito RLC em série não é afetada pela presença da fonte CC
  - A resposta completa é dada pela soma da resposta natural mais a resposta forçada



Resposta Completa
(resposta natural + resposta forçada)

- Amortecimento supercrítico ($\alpha > \omega_0$)

  $v(t) = V_s + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

- Amortecimento crítico ($\alpha = \omega_0$)

  $v(t) = V_s + (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t}$

- Subamortecimento ($\alpha < \omega_0$)

  $v(t) = V_s + e^{-\alpha t}(B_1 cos\omega_d t + B_2 sen\omega_d t)$

4. Circuitos de 2ª Ordem

- SADIKU, problema prático 8.1:

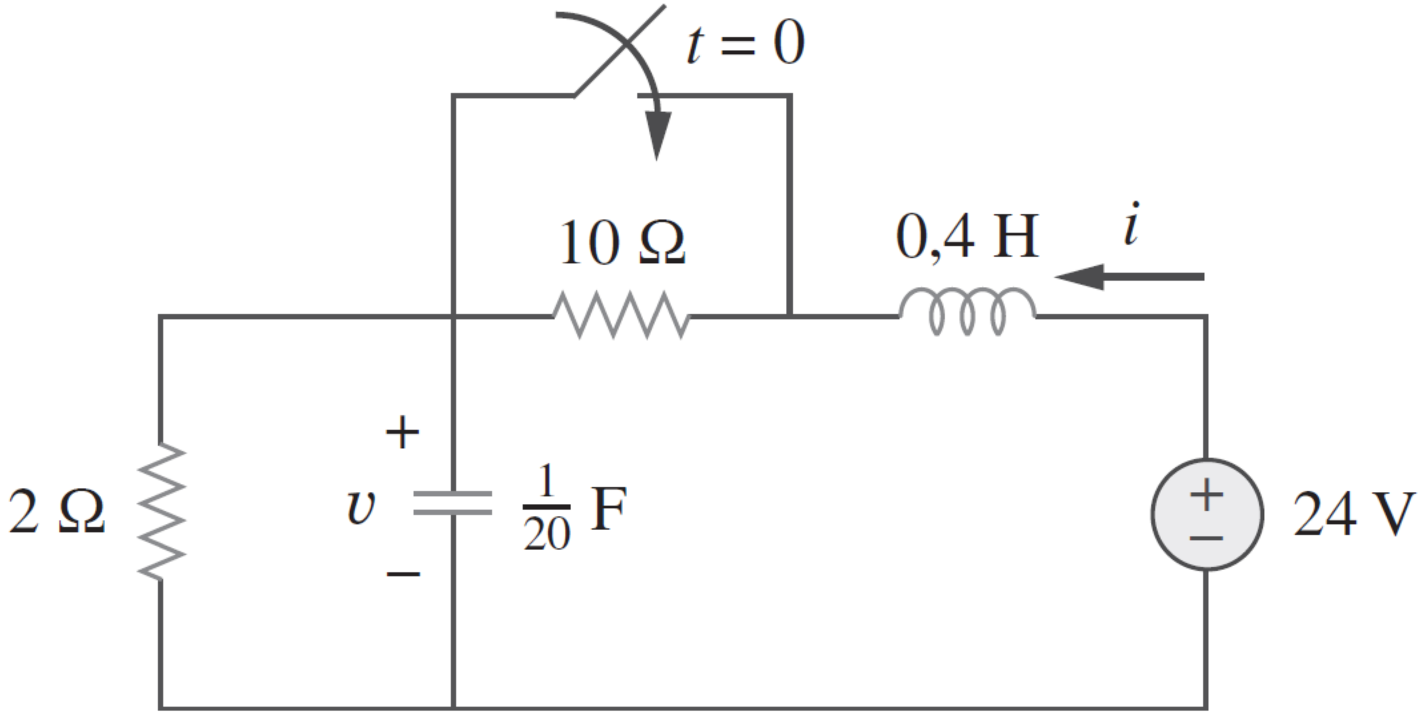
  A chave na figura a seguir foi aberta há um bom tempo, entretanto, foi fechada em $t = 0$.

  Determine:

  (a) $i(0^+), v(0^+)$;

  (b) $di(0^+)/dt, dv(0^+)/dt$

  (c) $i(+\infty), v(+\infty)$.

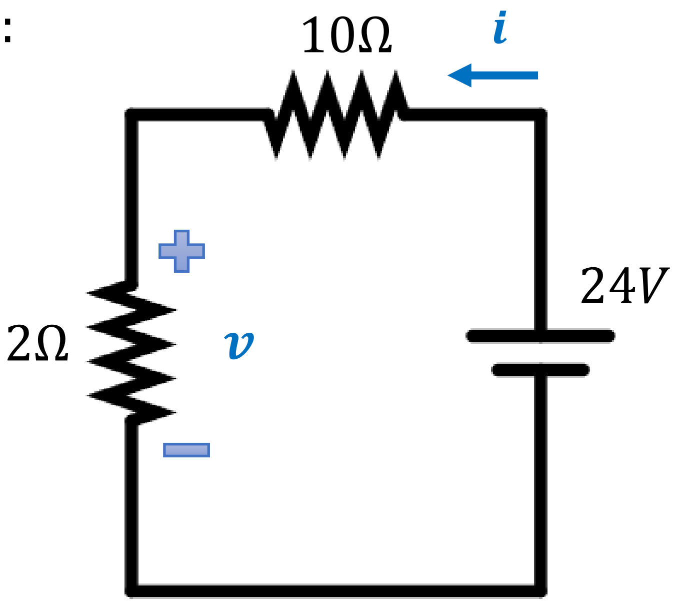


- SADIKU, problema prático 8.1:

➢ Solução:

a) Determinação das condições iniciais: $i(0^+), v(0^+)$

Para $t = 0^-$:



- $i(0^+) = i(0^-) = \frac{24}{12} = 2A$

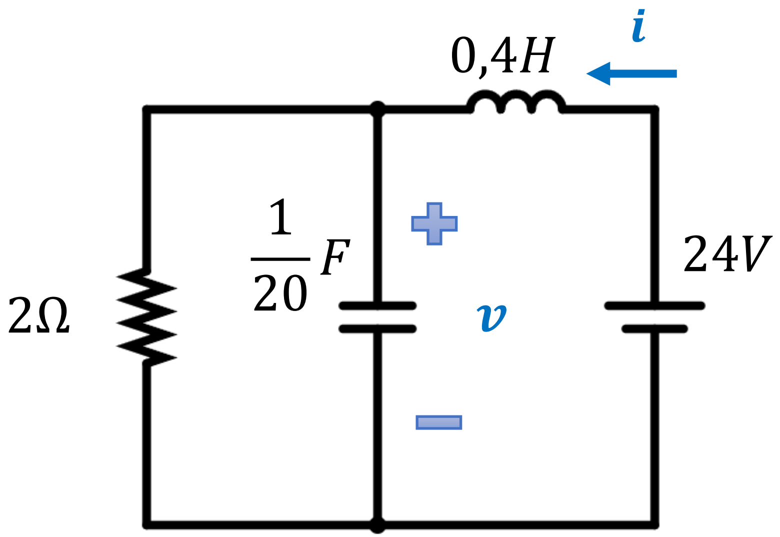
- $v(0^+) = v(0^-) = \left(\frac{2}{2+10}\right) 24 = 4V$

- SADIKU, problema prático 8.1:

➢ Solução:

b) Determinação das condições iniciais: $\frac{di(0^+)}{dt}, \frac{dv(0^+)}{dt}$

Para $t > 0$:



- LKT:

$$v(t) = 24 - 0{,}4\frac{di(t)}{dt}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{24 - v(t)}{0{,}4}$$

$$\therefore \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{24 - 4}{0{,}4} = 50\ A/s$$

- Análise Nodal:

$$\frac{v(t)}{2} + \frac{1}{20}\frac{dv(t)}{dt} + i = 0$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \left(i - \frac{v(t)}{2}\right)(20)$$

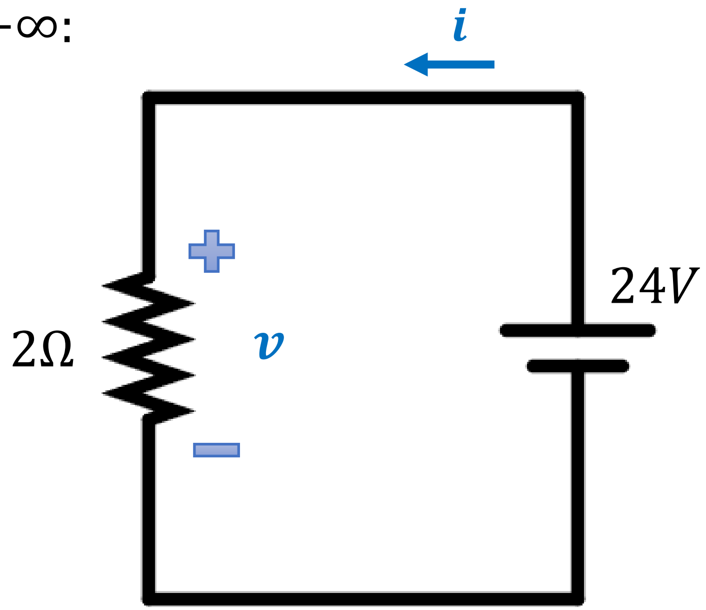
$$\therefore \frac{dv(0^+)}{\mathrm{dt}} = \left(2 - \frac{4}{2}\right)(20) = 0\ \mathrm{V/s}$$

- SADIKU, problema prático 8.1:

➢ Solução:

c) Determinação das condições iniciais: $i(+\infty), v(+\infty)$

Para $t \to +\infty$:



- $i(+\infty) = \dfrac{24}{2} = 12A$
- $v(+\infty) = 24V$

- SADIKU, problema 8.9:

A corrente em um circuito RLC é descrita por:

$$\left(\frac{di(t)}{dt}\right)^2 + 10\frac{di(t)}{dt} + 25\mathrm{i(t)} = 0$$

Se $i(0) = 10\ A$ e $di(0)/dt = 0$, determine $i(t)$ para $t > 0$.

➢ Solução:

- Equação característica:

$$s^2 + 10s + 25 = 0$$

$$(s+5)(s+5) = 0$$

Raízes reais e iguais
Amortecimento crítico

$$\therefore i(t) = k_1 e^{-5t} + k_2 t e^{-5t}$$

- Aplicando-se as condições iniciais:

$$i(0) = k_1 = 10$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -5k_1 e^{-5t} + k_2\left(e^{-5t} - 5te^{-5t}\right) =$$
$$= e^{-5t}(-5k_1 + k_2 - 5tk_2)$$

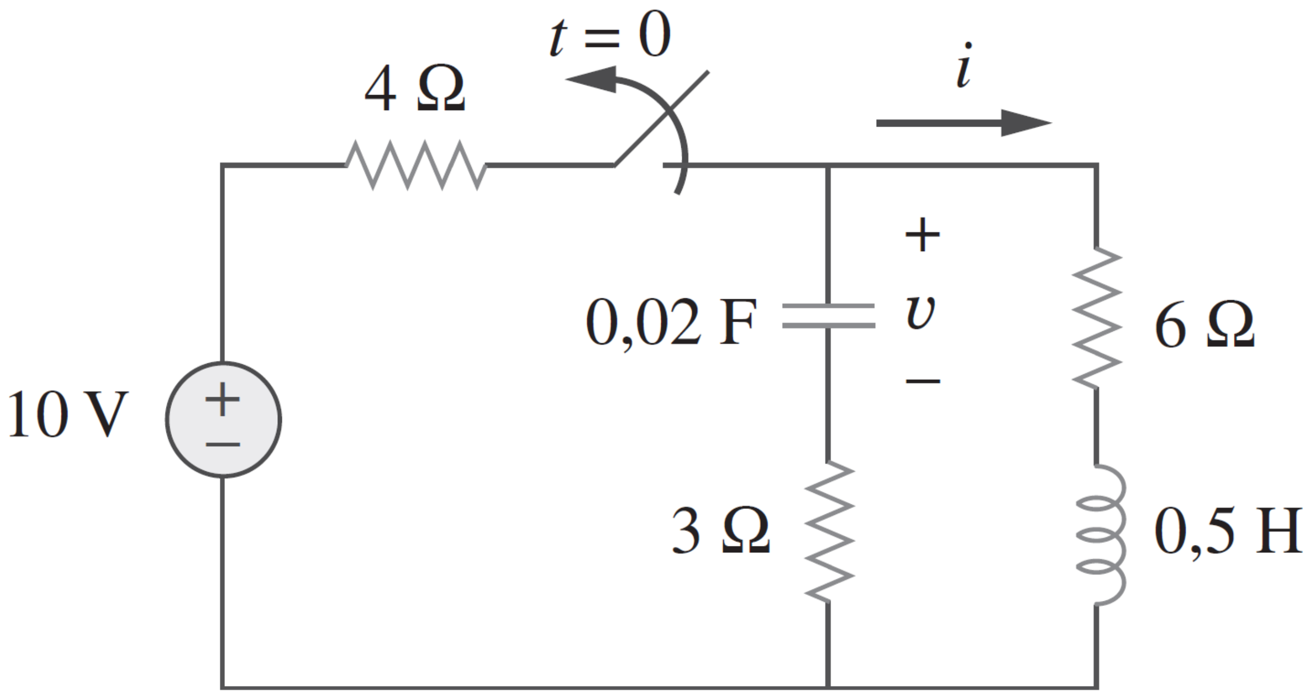
$$\therefore \frac{di(0)}{dt} = 0 = -50 + k_2 \quad\Rightarrow\quad k_2 = 50$$

- Resposta natural:

$$i(t) = (10 + 50t)e^{-5t}\ A,\ t > 0$$

- SADIKU, exemplo 8.14:

  Determine i(t) no circuito a seguir. Suponha que o circuito tenha atingido o estado estável em $t = 0^{-}$.

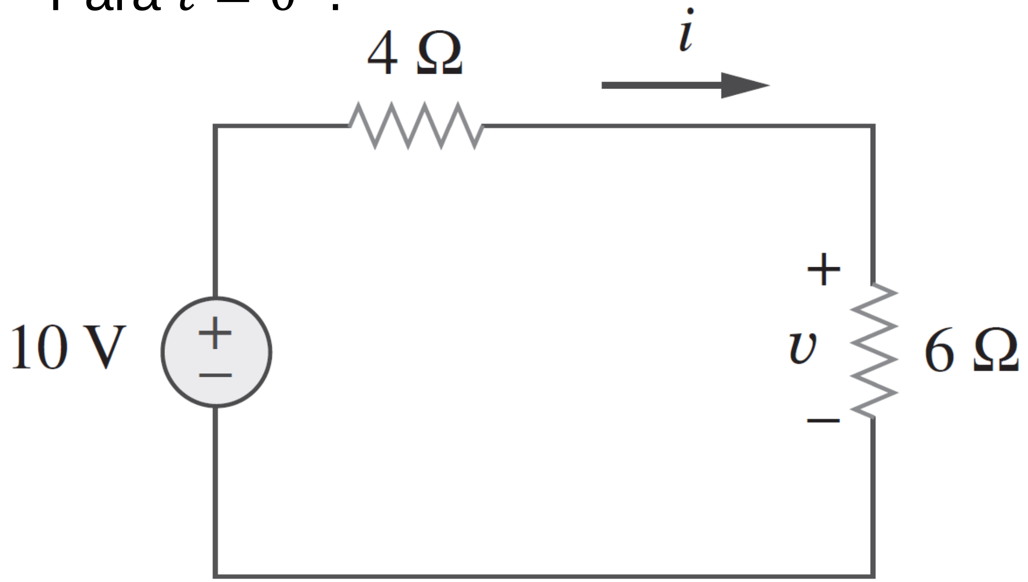


- SADIKU, exemplo 8.14:

➢ Solução:

- Determinação das condições iniciais: $i(0), \dfrac{di(0)}{dt}$?

Para $t = 0^-$:



- $i(t = 0^-) = \dfrac{10}{10} = 1A$

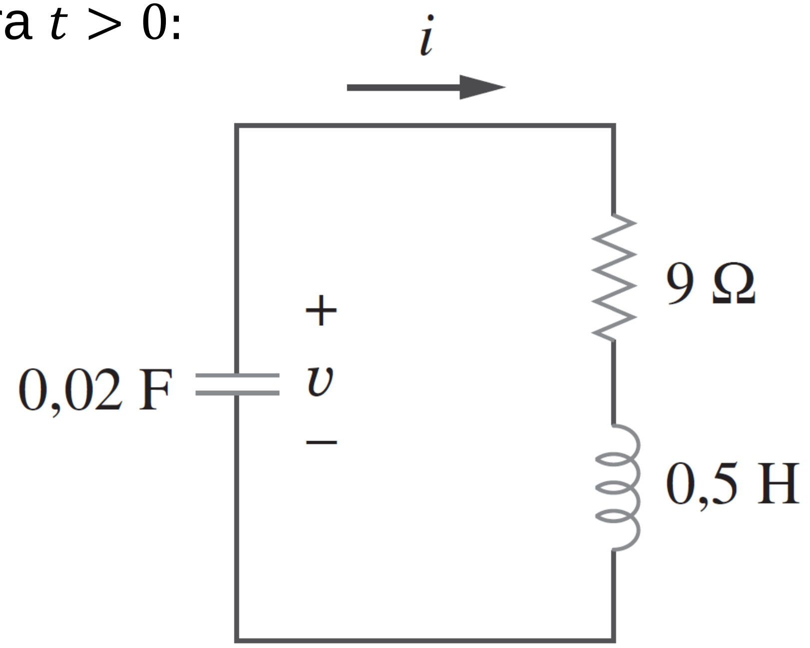
- $v(t = 0^-) = \left(\dfrac{6}{6+4}\right)10 = 6V$

- SADIKU, exemplo 8.14:

➢ Solução:

- Determinação das condições iniciais: $i(0), \dfrac{di(0)}{dt}?$

Para $t > 0$:



- $i(0^+) = i(0^-) = 1\text{A}$
- $v(0^+) = v(0^-) = 6V$

- Aplicando LKT:

$$v_L(0^+) + v_R(0^+) + v_C(0^+) = 0$$

$$L\frac{di(0^+)}{dt} + Ri(0^+) - \boldsymbol{v(0^+)} = 0$$

$$\frac{di(0^+)}{dt} + \frac{R}{L}i(0^+) - \frac{v(0^+)}{L} = 0$$

$$\therefore \frac{di(0^+)}{dt} = -\left(\frac{9}{0{,}5}\right)(1) + \frac{6}{0{,}5} = -6\ A/s$$

- SADIKU, exemplo 8.14:

➢ Solução:

- Determinação da eq. característica:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

onde:

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{9}{(2)(0{,}5)} = 9$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(0{,}5)(0{,}02)}} = 10$$

$$\therefore s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -9 \pm 4{,}36j$$

$\omega_0 > \alpha$ ⇒ Subamortecido

$$i(t) = e^{-\alpha t}(B_1 cos\omega_d t + B_2 sen\omega_d t) =$$

$$= e^{-9t}(B_1 cos4{,}36t + B_2 sen4{,}36t)$$

- SADIKU, exemplo 8.14:

➢ Solução:

- Aplicando as condições iniciais na resposta:

$$i(0) = e^{0}(B_1 \cos 0 + B_2 sen\ 0) = B_1 \qquad \therefore\ i(0) = B_1 = 1A$$

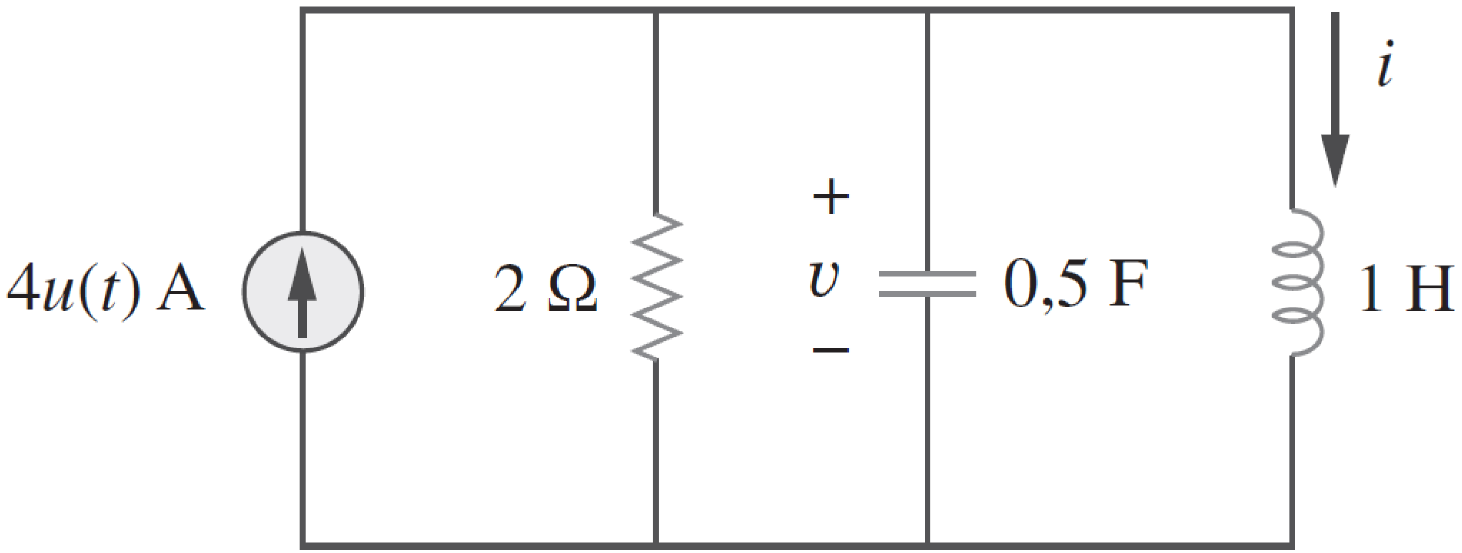
$$\frac{di(t)}{dt} = -9e^{-9t}B_1 cos4{,}36t - e^{-9t}B_1(sen4{,}36t)(4{,}36) - 9e^{-9t}B_2 sen4{,}36t + e^{-9t}B_2 cos4{,}36t(4{,}36)$$

$$\frac{di(0)}{dt} = (-9)B_1 + (4{,}36)B_2 = -6 \qquad \therefore\ B_2 = 0{,}688$$

$$\therefore\ i(t) = e^{-9t}(cos4{,}36t + 0{,}688sen4{,}36t)$$

- SADIKU, problema 8.45:

  Determine $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Suponha $v(0) = 0\,V$ e $i(0) = 1\,A$.

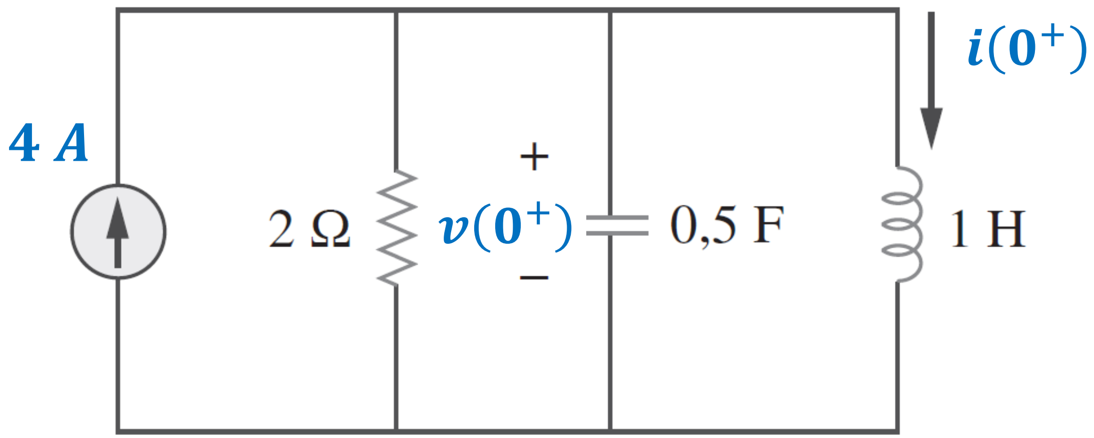


- SADIKU, problema 8.45:

➢ Solução:

- Determinação das condições iniciais: $\dfrac{di(0)}{dt}$?

Para $t = 0^+$:



- $i(0^+) = i(0) = 1\ \mathrm{A}$

- $v(0^+) = v(0) = 0\ V$

- $v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} = \dfrac{di(t)}{dt}$

$$\therefore \frac{di(0^+)}{dt} = v(0^+) = 0\ V$$

- SADIKU, problema 8.45:

➢ Solução (**análise nodal**):

- $i_R + i_c + i = 4$

$$\frac{v}{2} + \frac{1}{2}\frac{dv}{dt} + i = 4$$

- Mas, $v = L\frac{di}{dt} = \frac{di}{dt}$. Então:

$$\frac{1}{2}\frac{di}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{di}{dt}\right)^2 + i = 4$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)^2 + \frac{di}{dt} + 2i = 8$$

- Resposta natural:

$$\left(\frac{di_n}{dt}\right)^2 + \frac{di_n}{dt} + 2i_n = 0$$

- Equação característica:

$$s^2 + s + 2 = 0$$

$$s = \frac{1}{2} \pm \frac{j\sqrt{7}}{2}$$

Raízes complexas conjugadas
Subamortecimento

$$\therefore i_n(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left[B_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + B_2 sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right]$$

- SADIKU, problema 8.45:

➢ Solução (**análise nodal**):

- Resposta particular:

$$\cancelto{0}{\left(\frac{di_f}{dt}\right)^2} + \cancelto{0}{\frac{di_f}{dt}} + 2i_f = 8$$

$$\therefore\ i_f = 4A$$

- Solução geral:

$$i = i_n + i_f$$

$$i(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left[B_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + B_2 sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right] + 4$$

- Aplicando-se as condições iniciais:

$$i(0) = 1 = 4 + B_1 \qquad \therefore\ B_1 = -3$$

$$\frac{di(t)}{dt} = e^{-\frac{t}{2}}\left\{\left(-\overset{-3}{B_1}\right)\left[\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \sqrt{7}\, sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right] + \right.$$
$$\left. + B_2\left[-sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \sqrt{7}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right]\right\}$$

$$\frac{di(0)}{dt} = 0 = \frac{1}{2}\left[(3)(1) + \mathrm{B}_2\left(\sqrt{7}\right)\right]$$

$$\therefore\ B_2 = -3/(\sqrt{7})$$

- SADIKU, problema 8.45:

➢ Solução (**análise nodal**):

- $i(t) = 4 - e^{-\frac{t}{2}}\left[3\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \frac{3}{\sqrt{7}} sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right]$

- $v(t) = \frac{di(t)}{dt} = e^{-\frac{t}{2}}\left\{(3)\left[\cancel{\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)} + \sqrt{7}\, sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right] + \left(-\frac{3}{\sqrt{7}}\right)\left[-sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \cancel{\sqrt{7}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)}\right]\right\} =$

$$= \frac{12}{\sqrt{7}}\, e^{-\frac{t}{2}}\, sen\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) V, \qquad t > 0$$

- **Definição da Transformada de Laplace:**
  - Dada uma função $f(t)$, sua transformada de Laplace (unilateral), representada por $F(s)$ ou $\mathcal{L}[f(t)]$, é definida por:
  - É uma transformação integral de uma função $f(t)$ do **domínio do tempo** para o **domínio da frequência complexa**, fornecendo $F(s)$.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

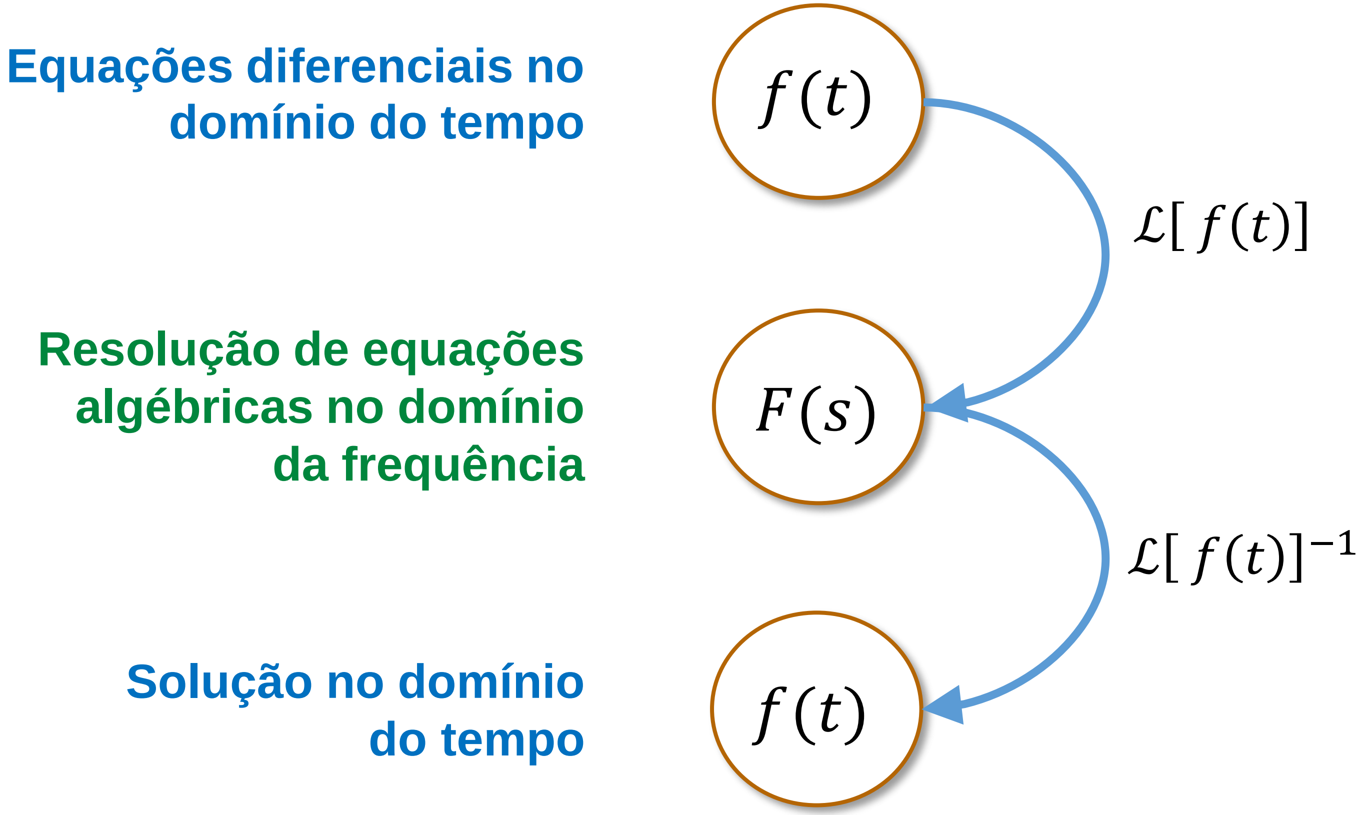
Onde:

s é um número complexo tal que $s = \sigma + j\omega$

- Na prática, não é preciso calcular as integrais.
- Basta usar a tabela das transformadas

Domínio do tempo *t*		**Domínio da frequência *s***
$f(t)$	$\longleftrightarrow$	$F(s)$

- **Por que usar a Transformada de Laplace?**
  - A Transformada de Laplace transforma as equações diferenciais no domínio do tempo em equações algébricas no domínio das frequência, **facilitando os cálculos.**



- **Pares da Transformada de Laplace**

f(t)	*F(s)*
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

f(t)	*F(s)*
$\text{sen}\,\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\text{sen}(\omega t+\theta)$	$\frac{s\,\text{sen}\theta+\omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t+\theta)$	$\frac{s\cos\theta-\omega\,\text{sen}\theta}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\,\text{sen}\,\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

5. Transformada de Laplace

- **Propriedades da Transformada de Laplace:**

Propriedade	f(t)	F(s)
Linearidade	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$
Fator de escala	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Deslocamento no tempo	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
Deslocamento de frequência	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
Diferenciação no tempo	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
	$\frac{d^2 f}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$
	$\frac{d^3 f}{dt^3}$	$s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$
	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-)$

Propriedade	f(t)	F(s)
Integração no tempo	$\int_0^t f(x)\,dx$	$\frac{1}{s} F(s)$
Diferenciação em frequência	$tf(t)$	$-\frac{d}{ds} F(s)$
Integração em frequência	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s)\,ds$
Periodicidade no tempo	$f(t) = f(t+nT)$	$\frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}}$
Valor inicial	$f(0)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
Valor final	$f(\infty)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$
Convolução	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$

- **Expansão de Frações Parciais para calcular a Transformada Inversa**

  - Seja $F(s)$ dado por:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$N(s)$: Polinômio-numerador

$D(s)$: Polinômio-denominador

  - As raízes de $N(s) = 0$ são chamadas de **zeros**

  - As raízes de $D(s) = 0$ são chamadas de **pólos**

Podemos usar a **Expansão de Frações Parciais** para subdividir $F(s)$ em termos simples cuja transformada inversa possa ser obtida diretamente da **tabela de transformadas**

5. Transformada de Laplace

- **Expansão de Frações Parciais para calcular a Transformada Inversa**
  - $F(s)$ pode apresentar 3 formas: <u>pólos simples</u>, <u>pólos repetidos</u> e <u>pólos complexos</u>.

	$F(s)$ original:	$F(s)$ com Expansão de Frações Parciais:
Pólos Simples:	$F(s)=\dfrac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$	$F(s)=\dfrac{k_1}{s+p_1}+\dfrac{k_2}{s+p_2}+\cdots+\dfrac{k_n}{s+p_n}$
Pólos Repetidos:	$F(s)=\dfrac{N(s)}{(s+p)^n}$	$F(s)=\dfrac{k_n}{(s+p)^n}+\dfrac{k_{n-1}}{(s+p)^{n-1}}+\cdots+\dfrac{k_1}{s+p}$
Pólos Complexos:	$F(s)=\dfrac{N(s)}{(s^2+as+b)}$	$F(s)=\dfrac{A\,s+B}{(s^2+as+b)}$

- SADIKU, exemplo 15.9:

Determine $f(t)$ dado que $F(s) = \dfrac{s^2 + 12}{(s)(s+2)(s+3)}$.

➢ Solução:

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

$$F(s) = \frac{A(s+2)(s+3) + B(s)(s+3) + C(s)(s+2)}{(s)(s+2)(s+3)}$$

$$F(s) = \frac{(A+B+C)s^2 + (5A+3B+2C)s + (6A)}{(s)(s+2)(s+3)}$$

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ 5A + 3B + 2C = 0 \\ 6A = 12 \end{cases}$$

$$\therefore A = 2, \qquad B = -8, \qquad C = 7$$

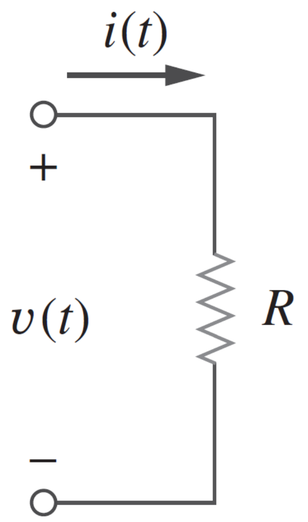
$$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{8}{s+2} + \frac{7}{s+3}$$

$\mathcal{L}[f(t)]^{-1}$

$$f(t) = 2u(t) - 8e^{-2t} + 7e^{-3t}$$

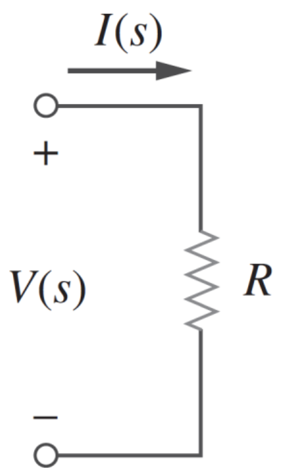
- **Modelos de Elementos de Circuitos: Resistor**

Domínio do tempo



$\mathcal{L}[\,f(t)]$

Domínio da frequência

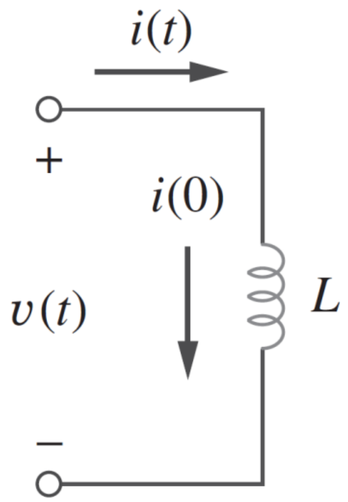


$$v(t) = R\ i(t)$$

$$V(s) = R\ I(s)$$

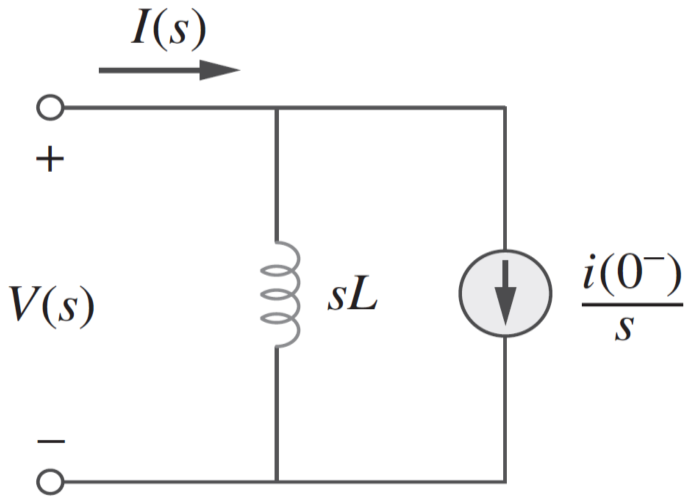
- **Modelos de Elementos de Circuitos: Indutor**

Domínio do tempo



$\mathcal{L}[f(t)]$

Domínio da frequência



$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

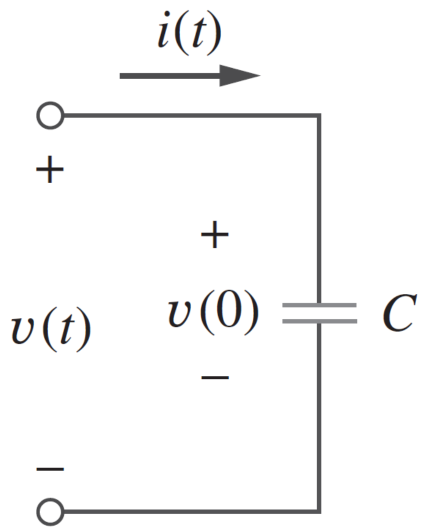
$$i(t) = \frac{1}{L}\int v(t)dt$$

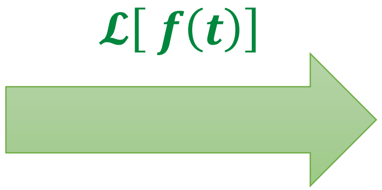
$$V(s) = L[sI(s) - i(0^-)]$$

$$I(s) = \frac{1}{sL}V(s) + \frac{i(0^-)}{s}$$

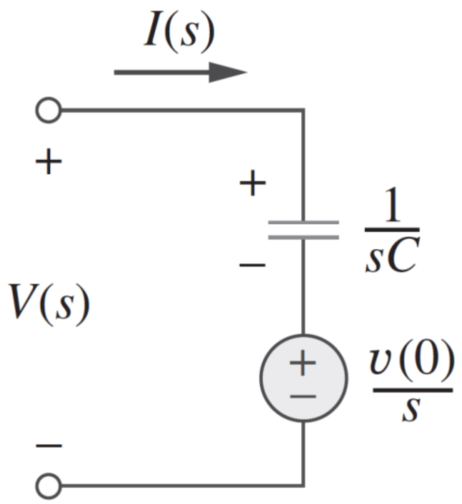
- **Modelos de Elementos de Circuitos: Capacitor**

Domínio do tempo





Domínio da frequência



$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

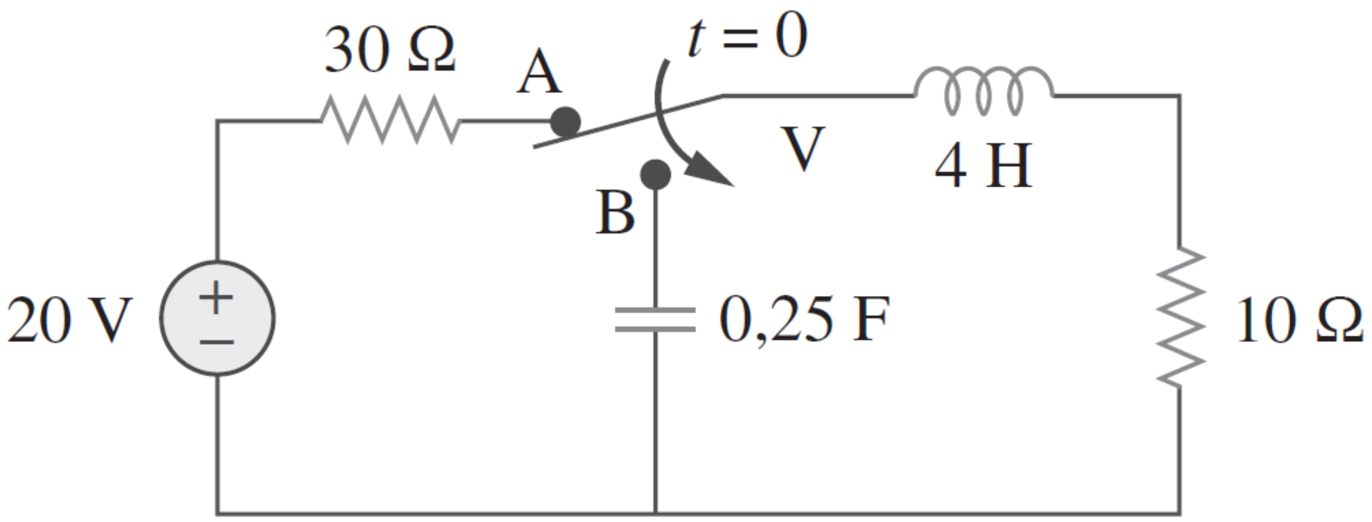
$$I(s) = C[sV(s) - v(0^-)]$$

$$V(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{v(0^-)}{s}$$

5. Transformada de Laplace

- SADIKU, problema 16.19:

  A chave na figura a seguir é movida da posição A para B em $t = 0$ (observe que a chave deve ser conectada ao ponto B antes de interromper a conexão com A). Determine $v(t)$ para $t > 0$.

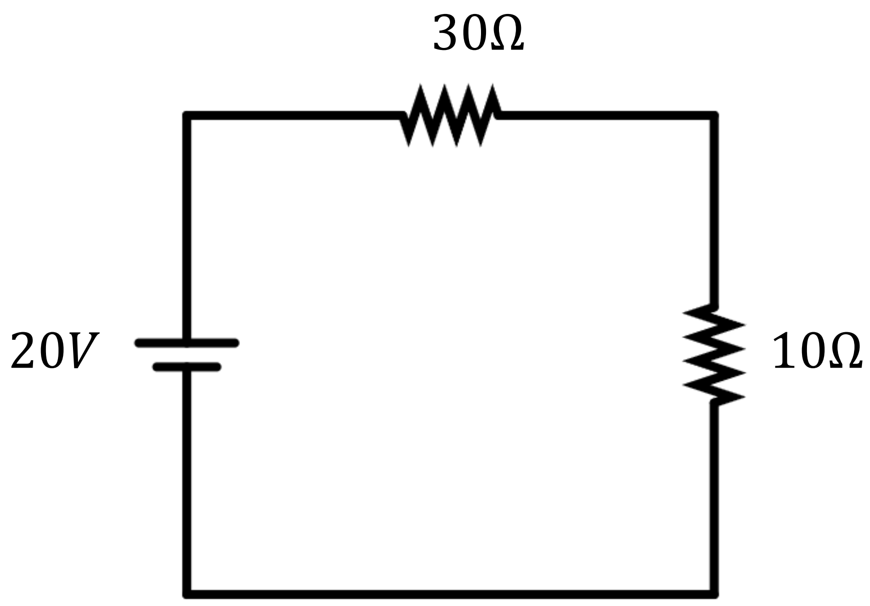


5. Transformada de Laplace

- SADIKU, problema 16.19:

➢ Solução:

Para $t = 0^-$ (**domínio de t**):

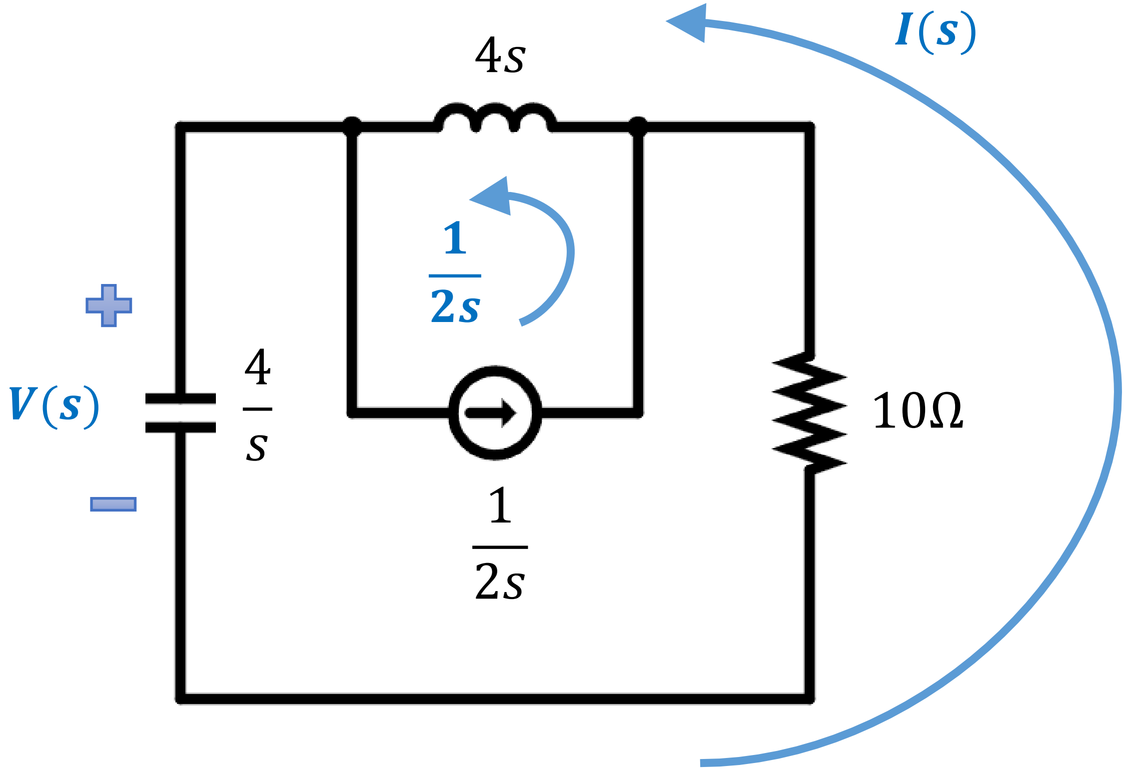


$$\therefore\ i(0^-) = \frac{20}{40} = 0{,}5\ A$$

- SADIKU, problema 16.19:

➢ Solução:

Para $t > 0$ (**domínio de s**):



$$\left(4s + \frac{4}{s} + 10\right) I + \left(\frac{1}{2s}\right)(4s) = 0$$

$$I(s) = -\frac{2s}{(4)\left(s^2 + \frac{5}{2}s + 1\right)}$$

$$\therefore V(s) = -\frac{2}{s^2 + \frac{5}{2}s + 1}$$

- SADIKU, problema 16.19:

➢ Solução:

- $V = -\dfrac{2}{s^2 + \frac{5}{2}s + 1}$

- $s^2 + \dfrac{5}{2}s + 1 = 0$

$$s = \frac{\left(-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4}\right)}{2}$$

$$\therefore s_1 = -\frac{1}{2}, \qquad s_2 = -2$$

- $V = -\dfrac{2}{s^2 + \frac{5}{2}s + 1} = -\dfrac{2}{\left(s + \frac{1}{2}\right)(s+2)} = \dfrac{A}{s + \frac{1}{2}} + \dfrac{B}{s+2} =$

$$= \frac{A(s+2) + B\left(s + \frac{1}{2}\right)}{\left(s + \frac{1}{2}\right)(s+2)} = \frac{s(A+B) + \left(2A + \frac{B}{2}\right)}{\left(s + \frac{1}{2}\right)(s+2)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + \dfrac{B}{2} = -2 \end{cases} \qquad \therefore A = -\frac{4}{3}, \qquad B = \frac{4}{3}$$

$$\therefore V(s) = \frac{4}{3}\left[-\frac{1}{s + \frac{1}{2}} + \frac{1}{s+2}\right] \xrightarrow{\mathcal{L}[f(t)]^{-1}} v(t) = \frac{4}{3}\left[-e^{-\frac{t}{2}} + e^{-2t}\right] V, t > 0$$

- SADIKU, problema 16.1:

A corrente em um circuito RLC é descrita por $\left(\frac{di}{dt}\right)^2 + 10\frac{di}{dt} + 25i = 0$.

Se $i(0) = 2$ e $di(0)/dt = 0$, determine $i(t)$ para $t > 0$.

➢ Solução:

$$[s^2 I - s\, i(0^-) - i'(0^-)] + 10[sI - i(0^-)] + 25\text{I} = 0$$

$$\therefore I(s) = \frac{2s + 20}{(s+5)^2}$$

- Frações Parciais

$$\frac{2s+20}{(s+5)^2} = \frac{A}{(s+5)^2} + \frac{B}{s+5} = \frac{s(B) + (A+5B)}{(s+5)^2}$$

$$\begin{cases} B = 2 \\ A + 5B = 20 \end{cases} \qquad \therefore A = 10, \qquad B = 2$$

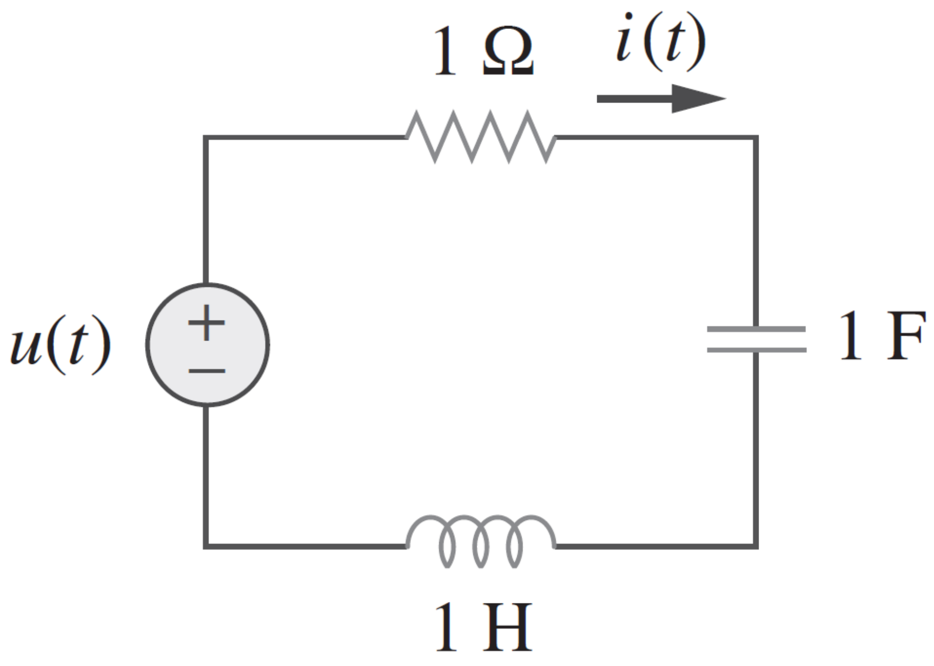
$$\therefore I(s) = \frac{10}{(s+5)^2} + \frac{2}{s+5}$$

$\mathcal{L}[\,f(t)]^{-1}$

$$i(t) = 10te^{-5t} + 2e^{-5t} =$$
$$= (2 + 10t)e^{-5t}u(t)$$

- SADIKU, problema 16.12:

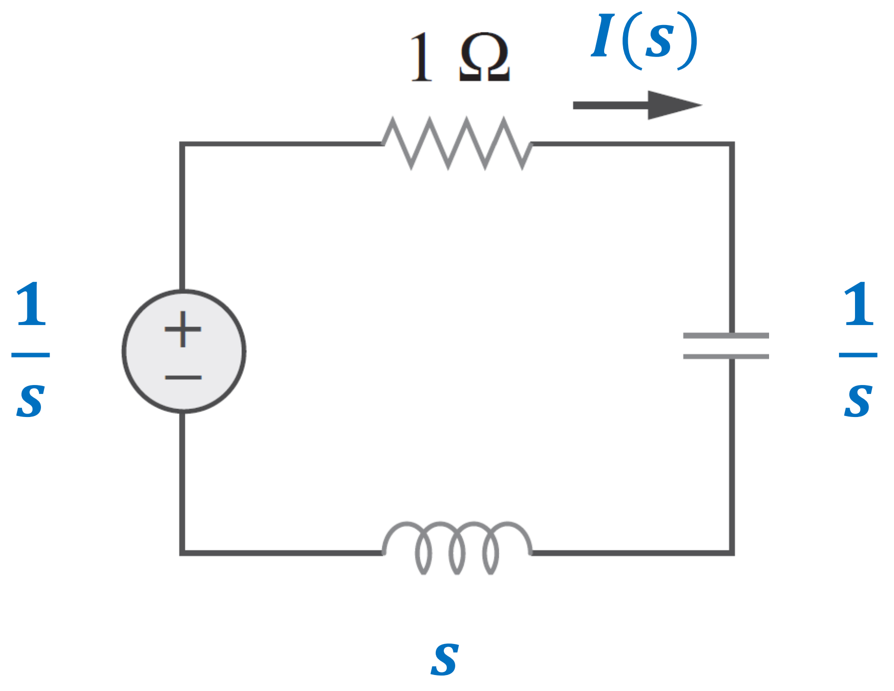
  Determine $i(t)$ no circuito a seguir por meio de transformadas de Laplace.



- SADIKU, problema 16.12:

➢ Solução:

- Circuito no domínio da frequência:



$$I(s) = \frac{1/s}{s + \frac{1}{s} + 1} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

- Pólos complexos. Por isso, vamos completar o quadrado:

Como: $\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 = s^2 + s + \frac{1}{4}$

Então: $I(s) = \dfrac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

- SADIKU, problema 16.12:

➢ Solução:

$$I(s) = \frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$\mathcal{L}[\,f(t)]^{-1}$

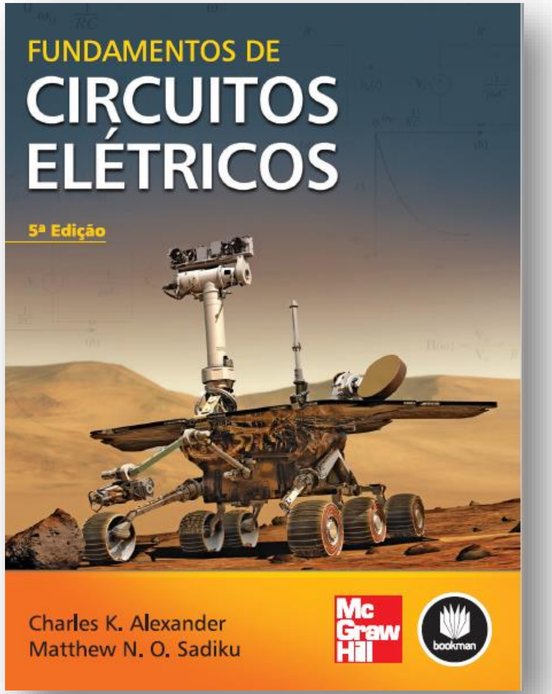
$$\therefore\ i(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}}\, sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) A, \qquad t > 0$$

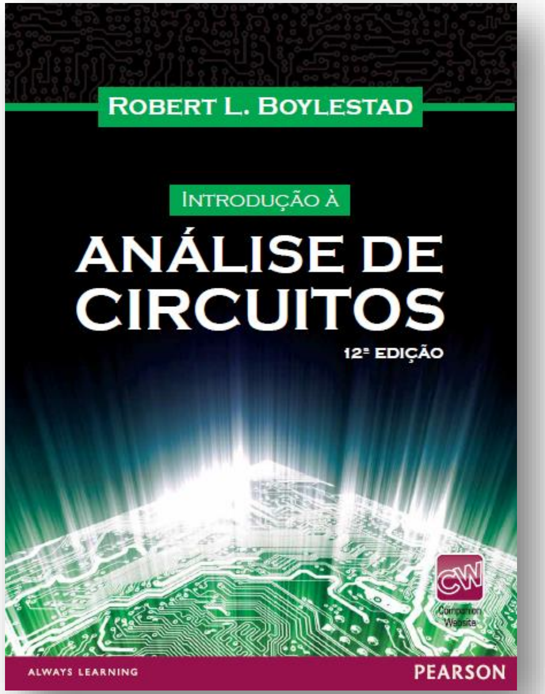
OBS.:

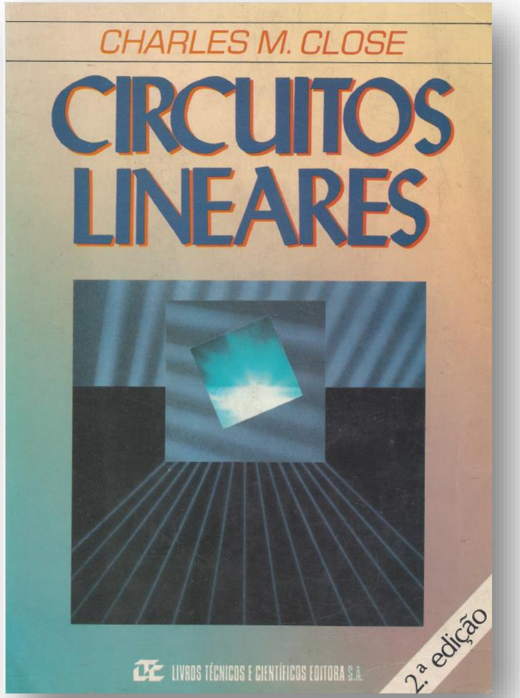
$f(t)$	$F(s)$
$sen(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$

6. Referências

- C. K. Alexander e M. N. O. Sadiku, *Fundamentals of electric circuits*, 5ª ed., New York, NY: McGraw-Hill, 2013.
- R. L. Boylestad, *Introdução à análise de circuitos*, 12ª ed., São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2012.
- C. Close, *Circuitos Elétricos*, 2ª ed., Rio de Janeiro: Editora LTC, 1975.







Obrigado!

Tiago P. Abud

tpabud@id.uff.br