Aula 6 – Sinais e Sistemas
Sistemas LIT

André Pinho

Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo (LIT)

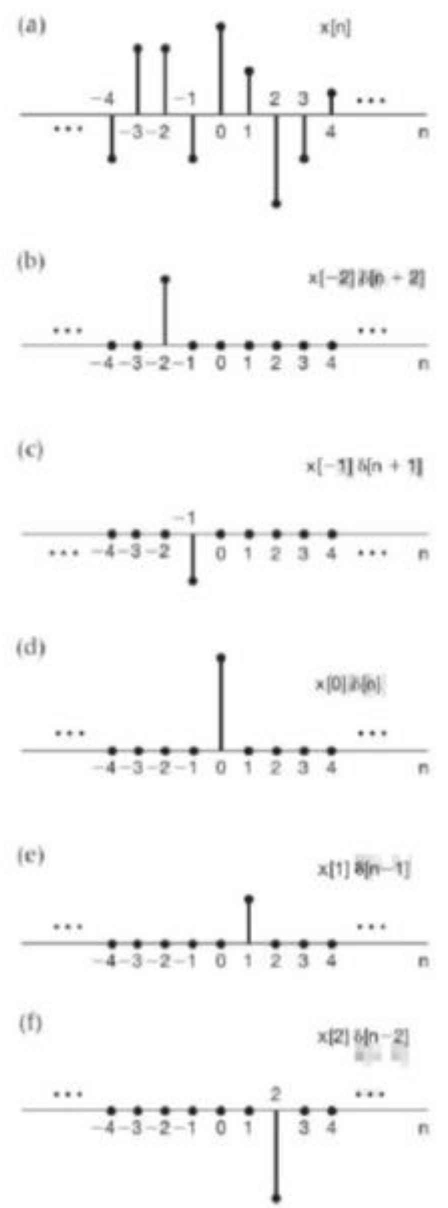
- Relevância dessa classe de sistemas
- Se as entradas puderem ser representadas pela combinação linear de sinais básicos, pode-se usar a SUPERPOSIÇÃO para determinar a saída do sistema em termos de suas respostas a esses sinais básicos.
- Os sinais, em geral, podem ser representados como uma combinação linear de impulsos unitários deslocados no tempo.

Sistemas LIT em tempo discreto

- Representando sinais em termos de impulsos

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Propriedade seletiva do impulso unitário



Sistemas LIT em tempo discreto

- Resposta ao impulso unitário
- $x[n]$ pode ser representada como a versão ponderada de impulsos unitários deslocados no tempo, $\delta[n-k]$
- A resposta de um sistema LIT a $x[n]$ será a superposição (soma) das respostas aos impulsos deslocados (invariância no tempo), ponderados pelo próprio $x[n]$

Respostas de Sistemas em tempo discreto

- Resposta ao impulso unitário (Sistemas LIT)
  - Seja $h_k[n]$ resposta do sistema a $\delta[n-k]$

$$h_k[n] = h_0[n-k]$$

Por notação:

$$h[n] = h_0[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

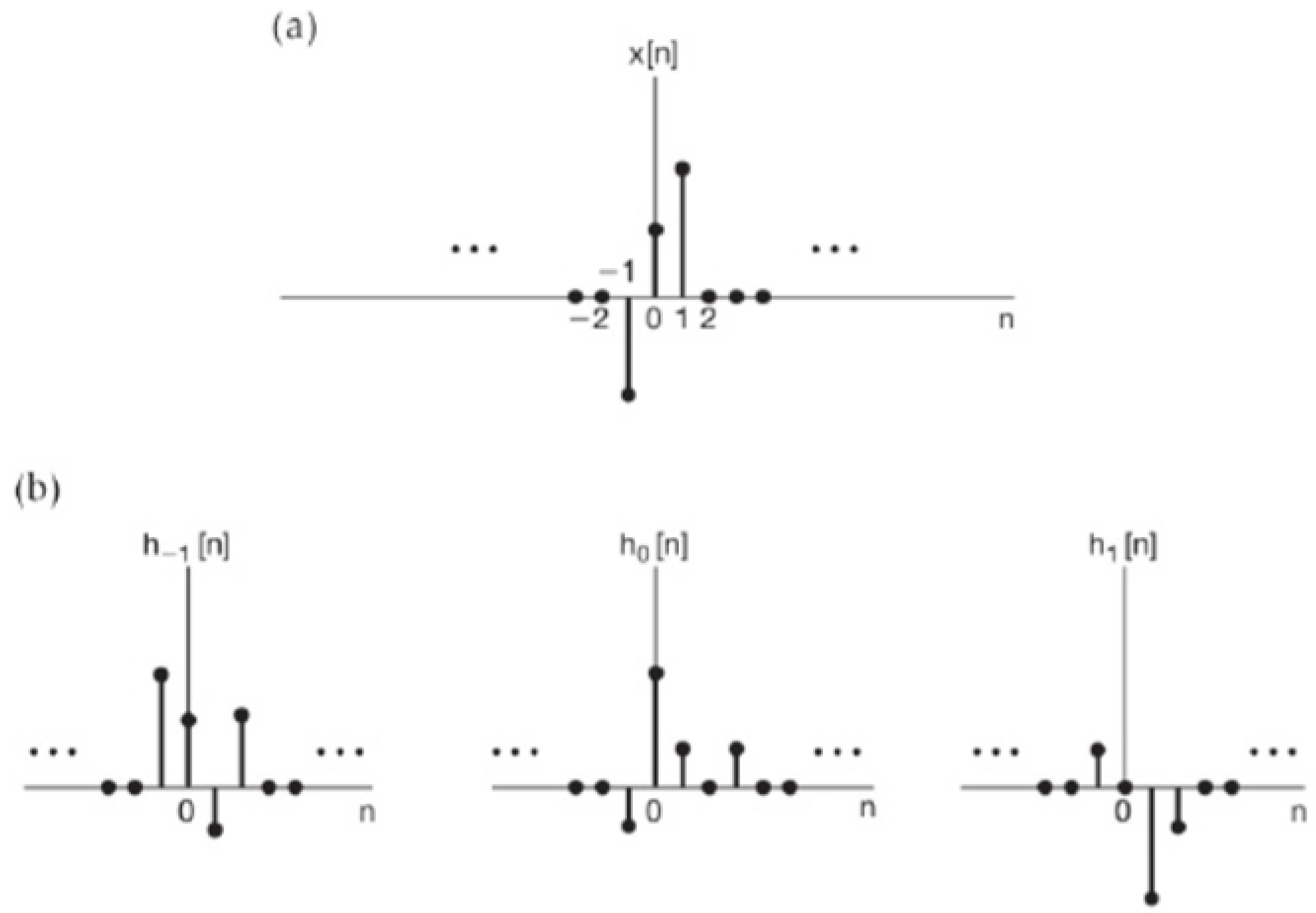
Respostas de Sistemas em tempo discreto

- Ou seja, se soubermos a resposta de um sistema LIT ao impulso unitário, podemos construir a resposta desse sistema para qualquer entrada arbitrária
  - Soma de Convolução

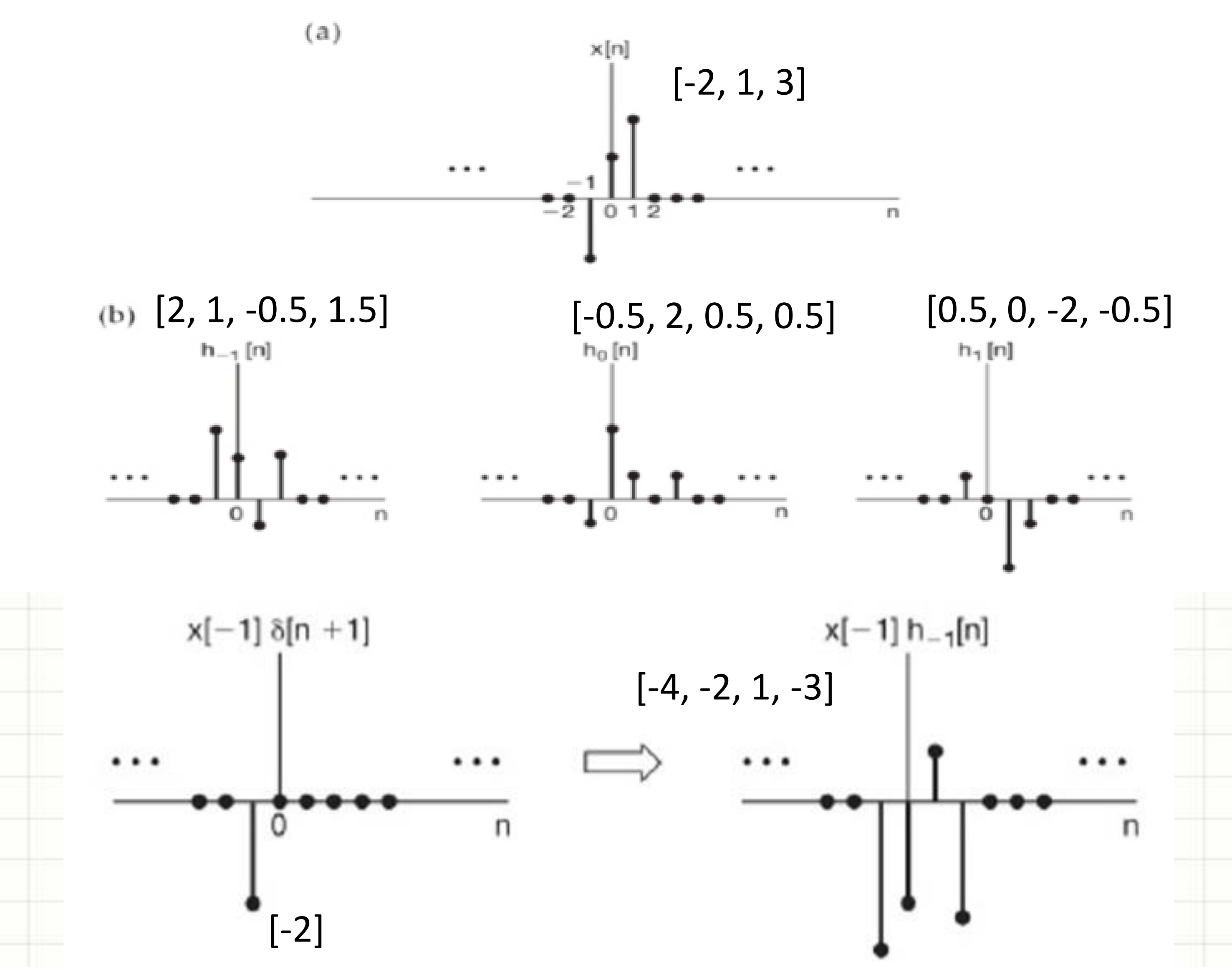
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

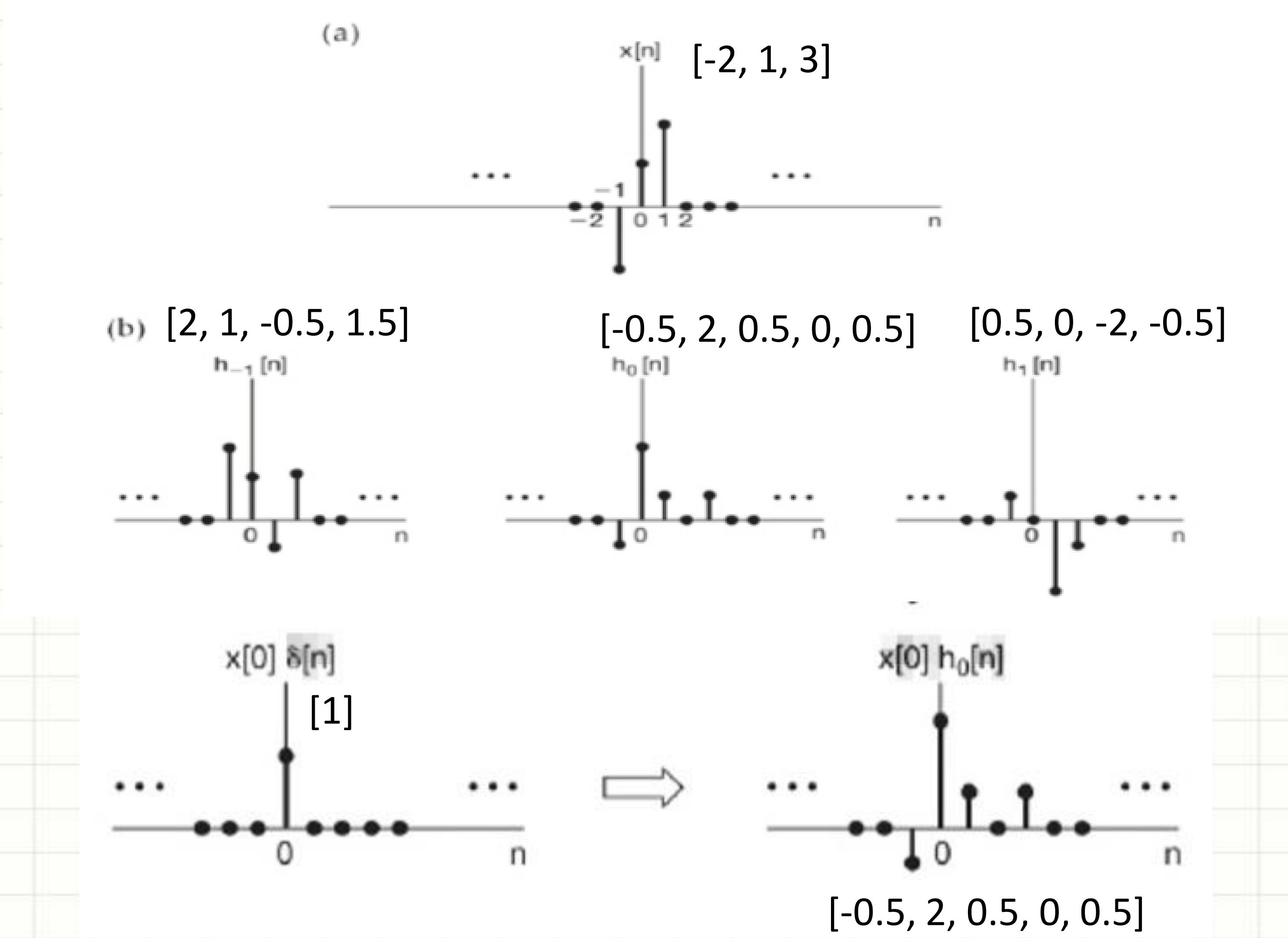
Respostas de Sistemas em tempo discreto (exemplo: variando *k* e observando *n*)



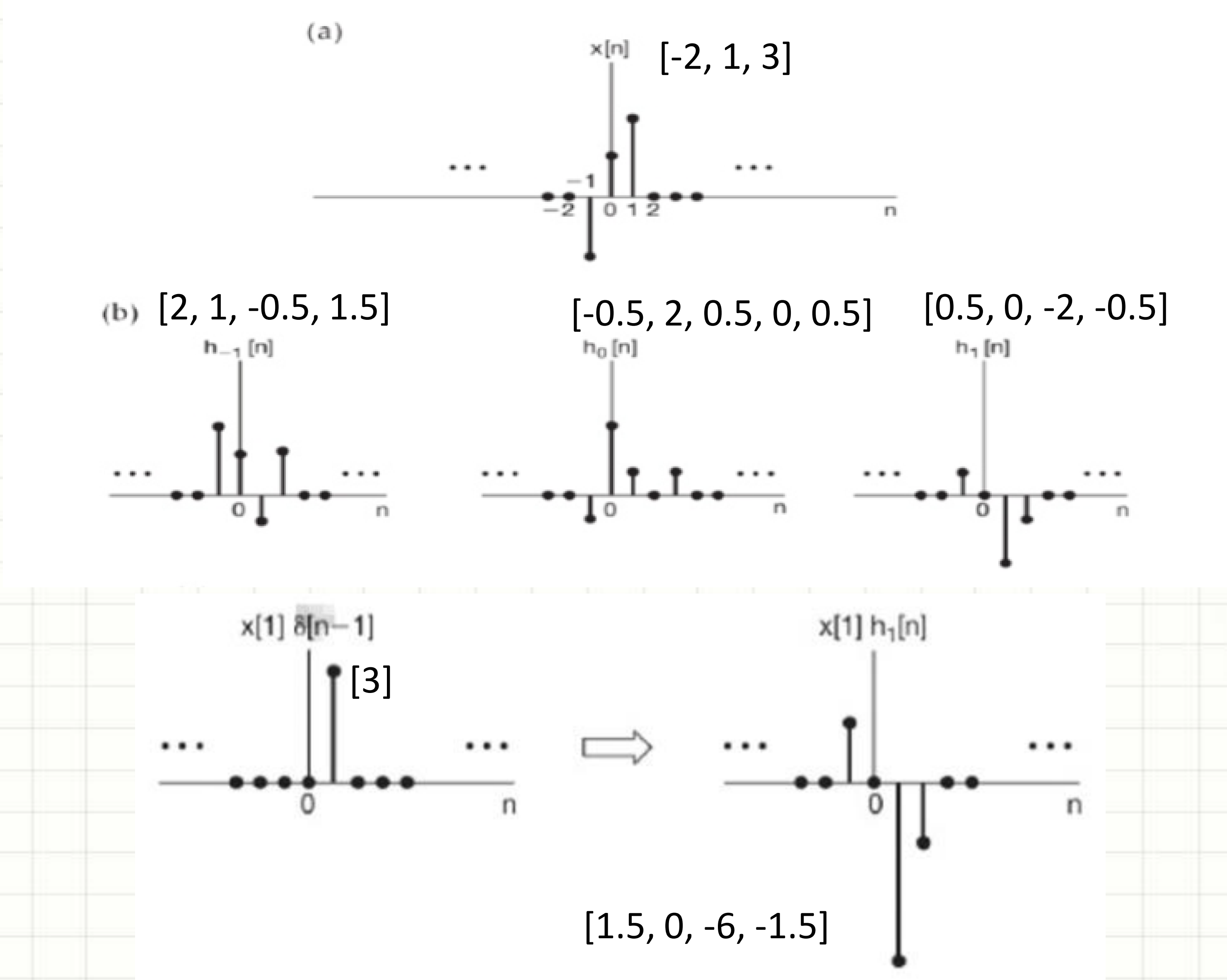
Respostas de Sistemas em tempo discreto (exemplo: variando *k* e observando *n*)



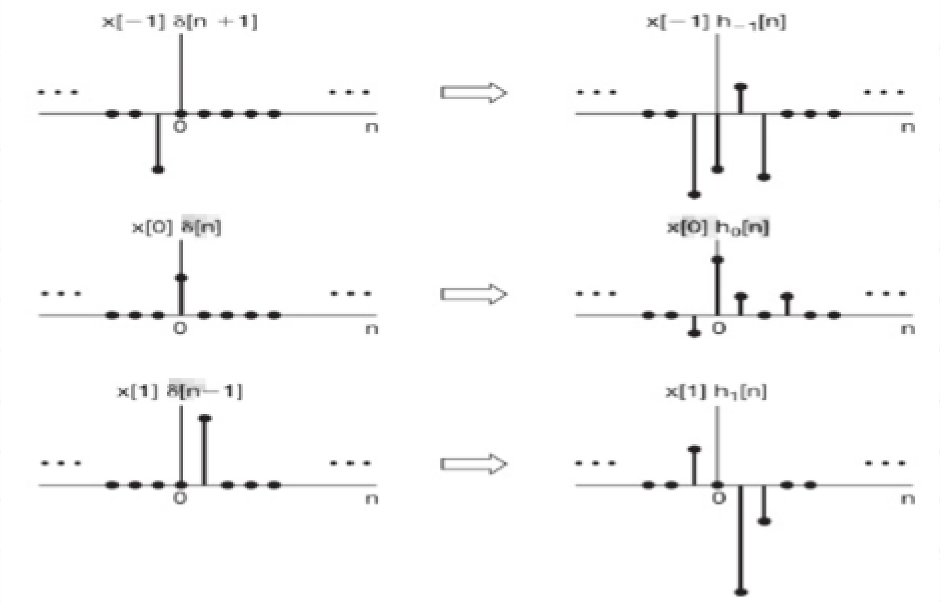
Respostas de Sistemas em tempo discreto (exemplo: variando *k* e observando *n*)



Respostas de Sistemas em tempo discreto (exemplo: variando *k* e observando *n*)



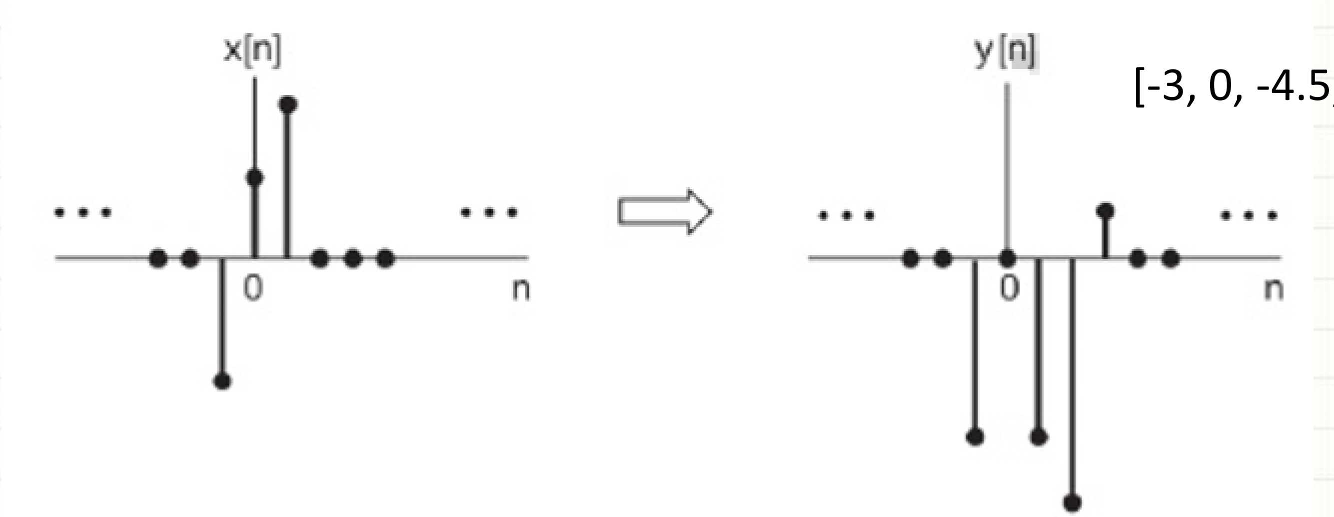
Respostas de Sistemas em tempo discreto (exemplo: variando *k* e observando *n*)



[-4, -2, 1, -3]

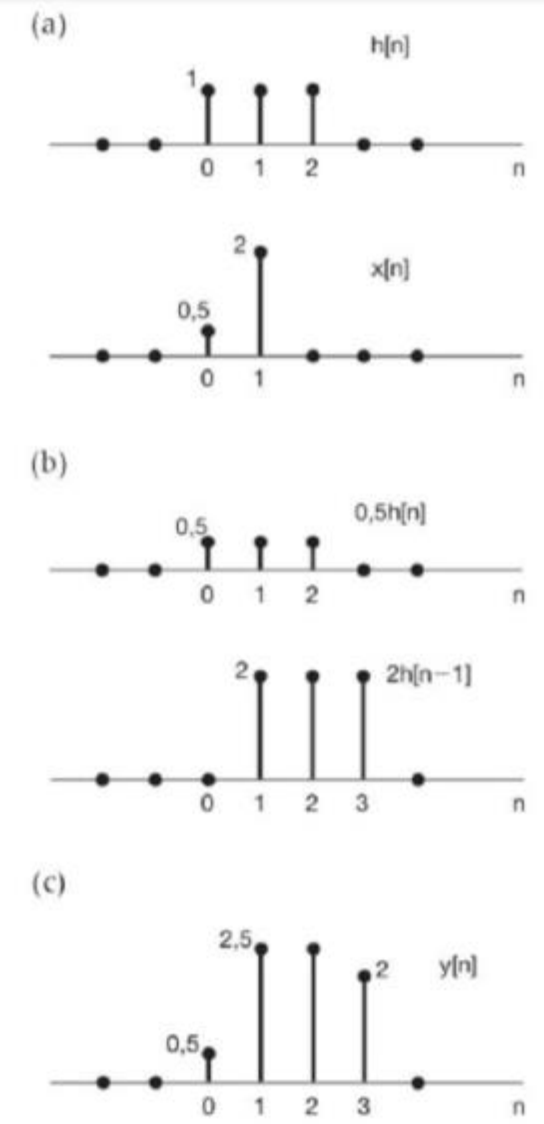
[-0.5, 2, 0.5, 0, 0.5]

[1.5, 0, -6, -1.5]



[-3, 0, -4.5, -4.5, 0.5]

Respostas de Sistemas em tempo discreto (exemplo 2: variando *k* e observando *n*)

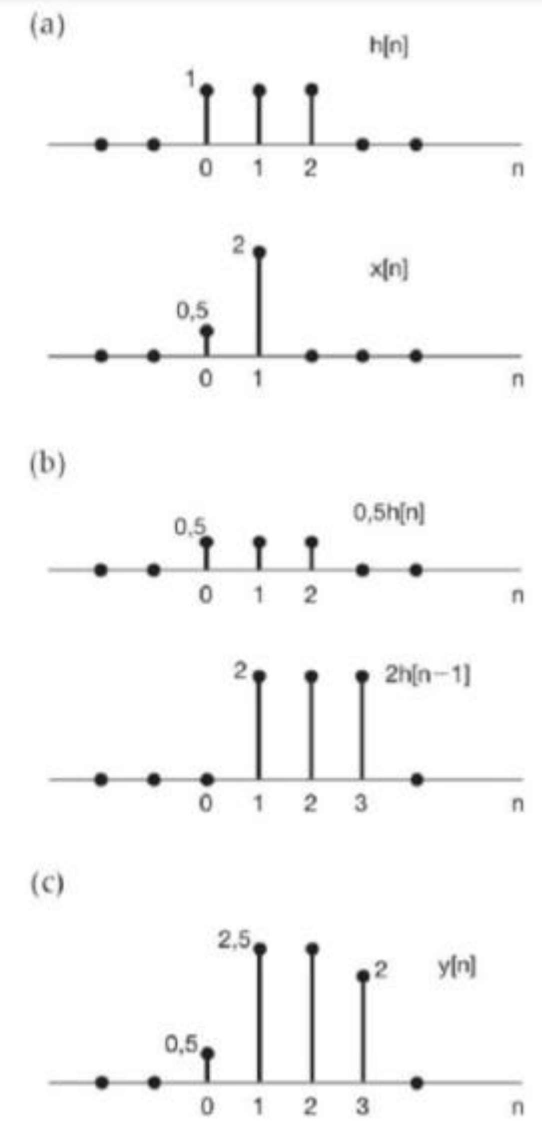


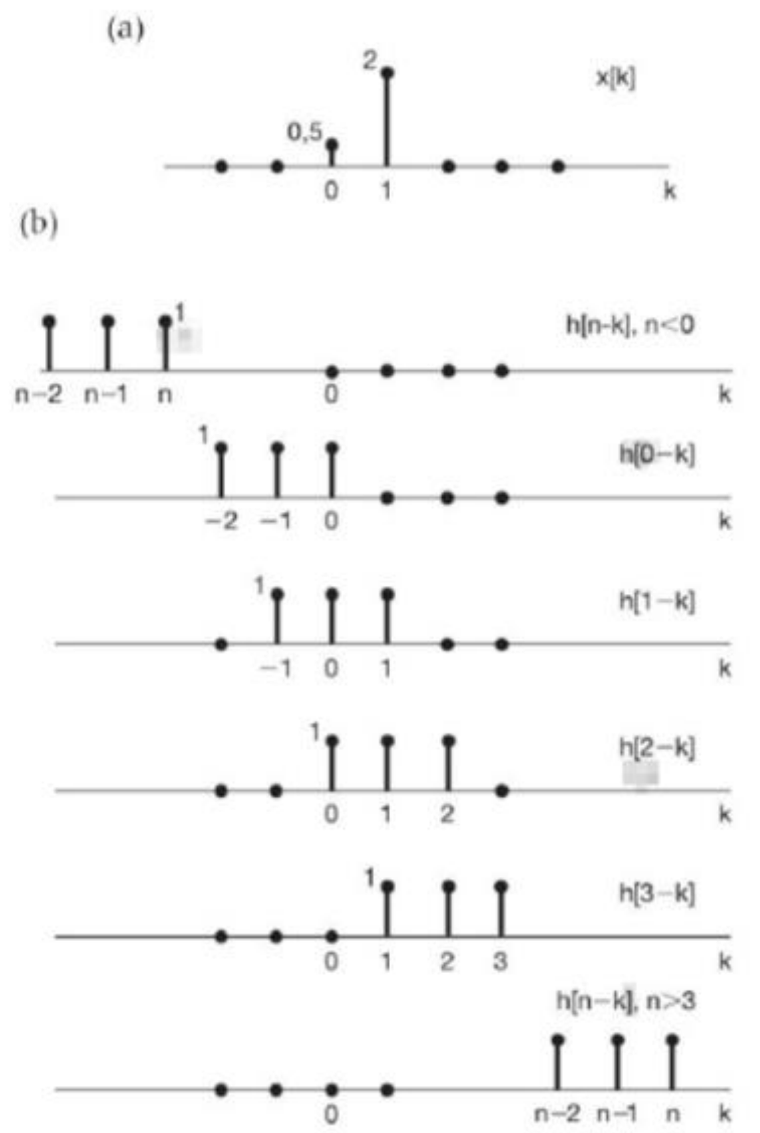
Respostas de Sistemas em tempo discreto

- A convolução pode ser entendida como um deslizamento da versão rebatida da sequência $h[n]$ através da entrada $x[n]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Respostas de Sistemas em tempo discreto (exemplo 3: variando *n* e observando *k*)





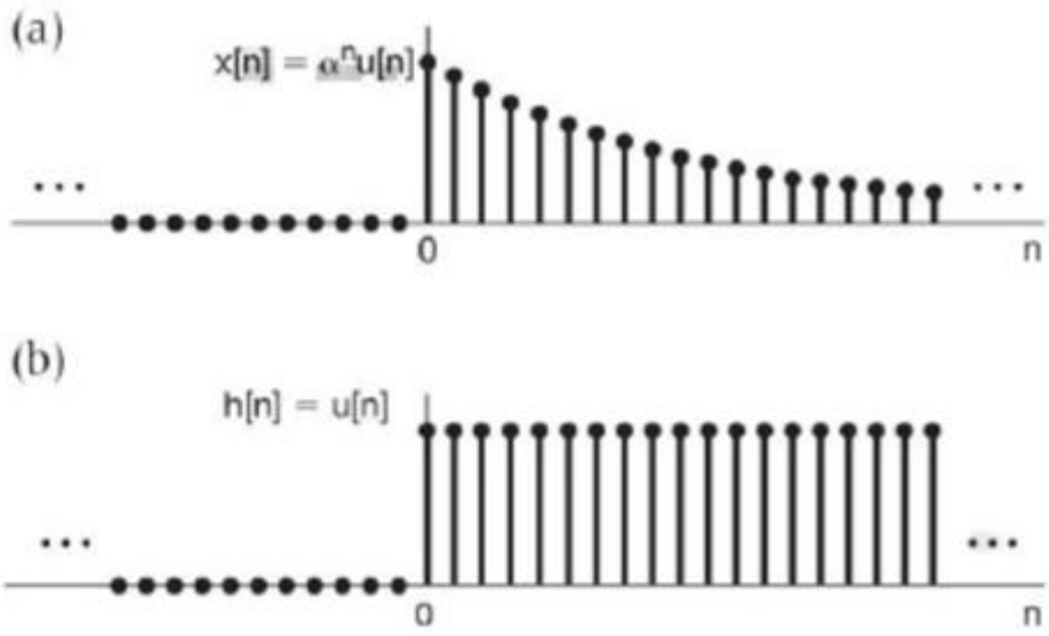
Respostas de Sistemas em tempo discreto (exemplo 3.1: variando *n* e observando *k*)

Respostas de Sistemas em tempo discreto (exemplo 3.1: variando *n* e observando *k*)

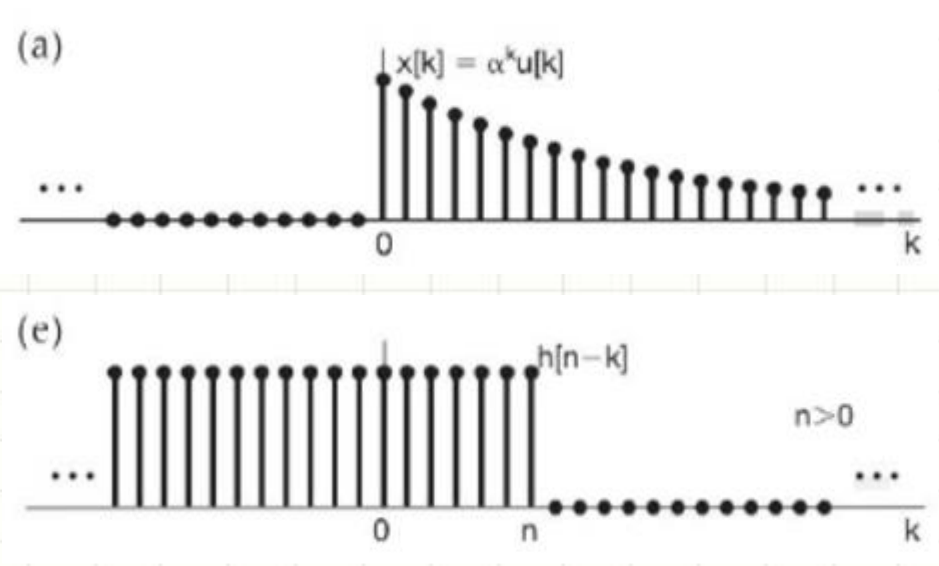
Respostas de Sistemas em tempo discreto (exemplo 4: variando *n* e observando *k*)

$$x[n] = \alpha^n u[n]$$
$$\alpha < 1$$

$$h[n] = u[n]$$



Respostas de Sistemas em tempo discreto (exemplo 4: variando *n* e observando *k*)

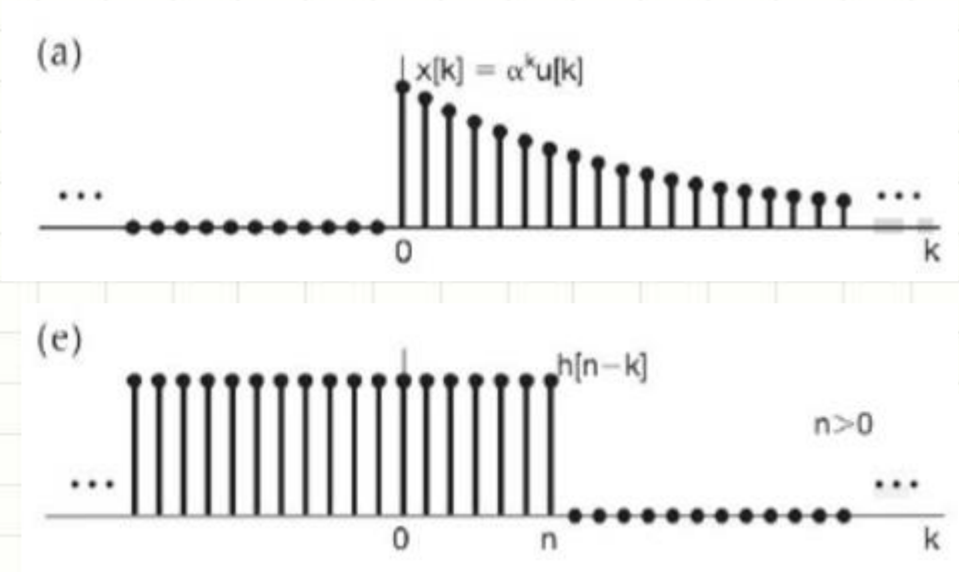


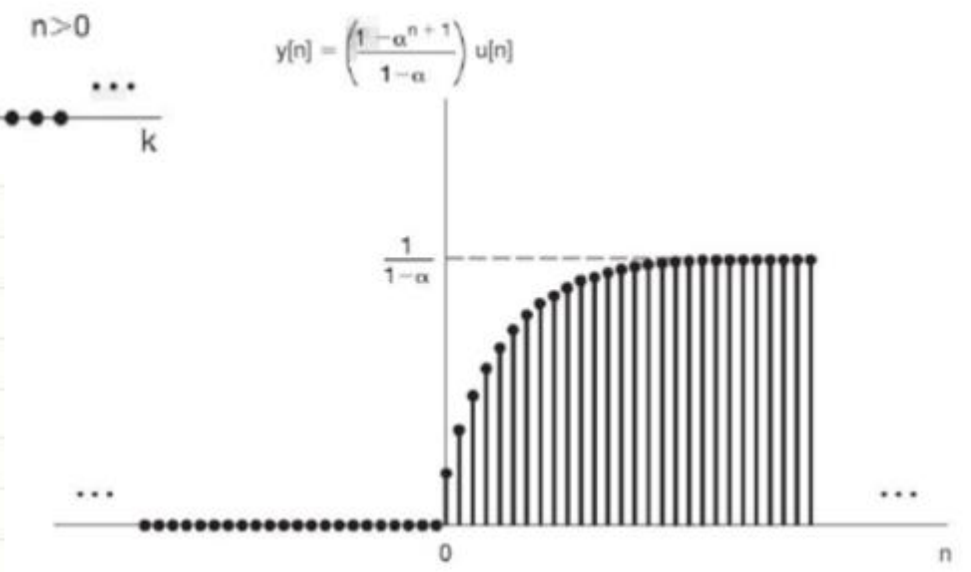
$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k, & 0 \le k \le n \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

Respostas de Sistemas em tempo discreto (exemplo 4: variando *n* e observando *k*)

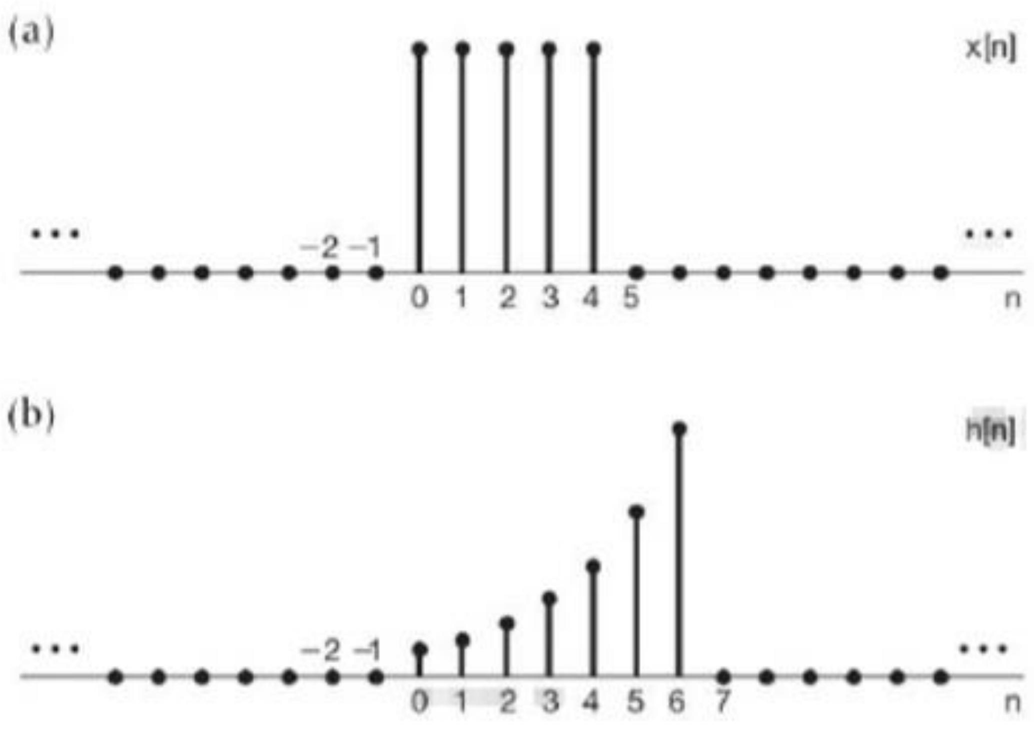
$$y[n] = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u[n]$$





Respostas de Sistemas em tempo discreto (exemplo 5: variando *n* e observando *k*)

$$x[n] = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq 4 \\ 0, \qquad\qquad cc \end{cases} \qquad h[n] = \begin{cases} \alpha^n, 0 \leq n \leq 6 \\ 0, \qquad\qquad cc \end{cases}$$



Solução

Solução

Respostas de Sistemas em tempo discreto

- Exercício 1

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3]$$

$$h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1]$$

  - Calcule e represente graficamente:

  $a)\ y_1[n] = x[n] * h[n]$

  $b)\ y_2[n] = x[n+2] * h[n]$

  $c)\ y_3[n] = x[n] * h[n+2]$

Respostas de Sistemas em tempo discreto

- Exercício 2

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u[-n-1]$$

$$h[n] = u[n-1]$$

  - Calcule e represente graficamente:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Solução

Respostas de Sistemas em tempo discreto

- Exercício 3

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]$$

$$h[n] = u[n+2]$$

  - Calcule e represente graficamente:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Solução

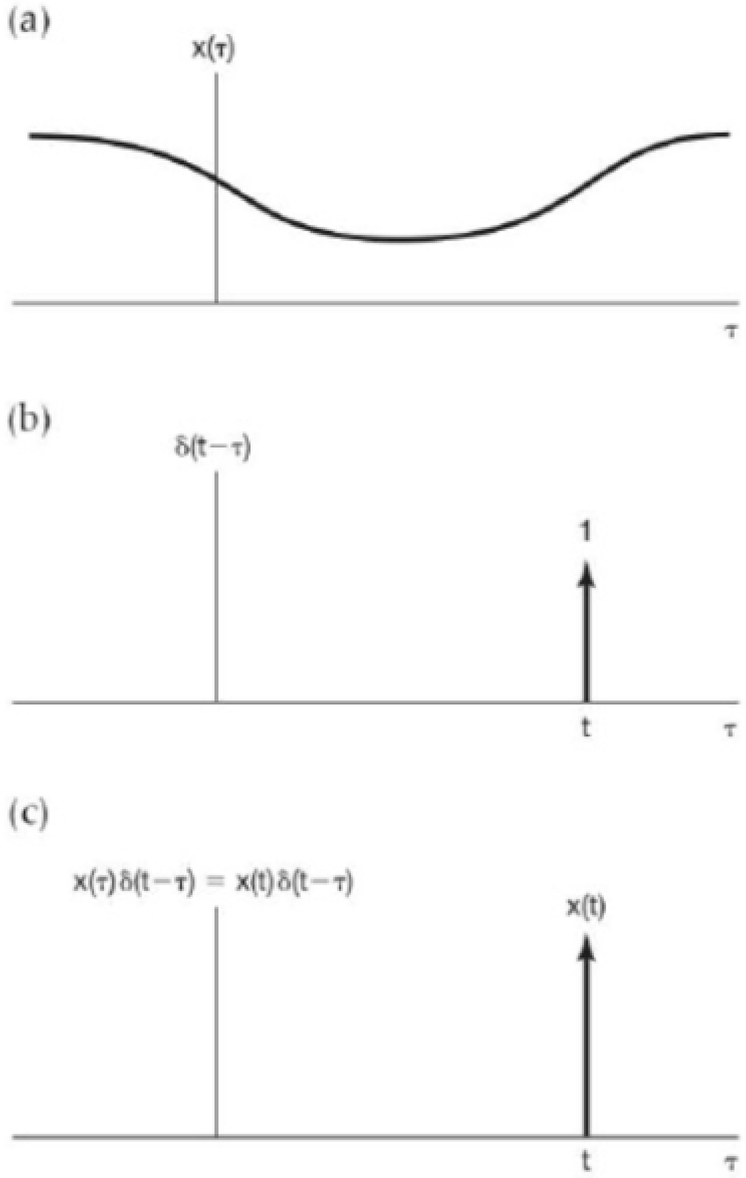
Solução

Sistemas LIT em tempo contínuo: a integral de convolução

Propriedade seletiva do

Impulso unitário

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$



Sistemas LIT em tempo contínuo: a integral de convolução

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Considerando $h(t)$ como resposta do sistema ao impulso unitário $\delta(t)$, temos que a saída correspondente a esta entrada pode ser determinada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Sistemas LIT em tempo contínuo: a resposta ao impulso unitário

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

(Integral de Convolução)

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Sistemas LIT em tempo contínuo: a resposta ao impulso unitário

- Exemplo 1:

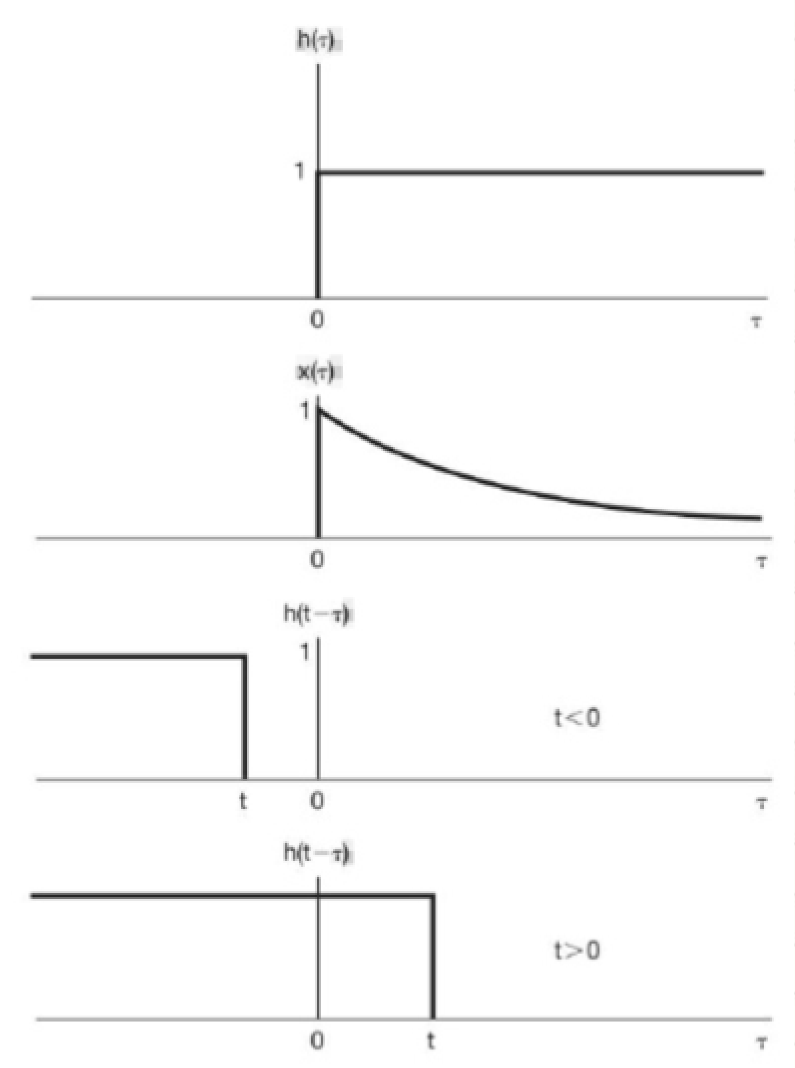
$$x(t) = e^{-at}u(t), a > 0$$

$$h(t) = u(t)$$

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau}\, d\tau$$

$$= -\frac{1}{a}e^{-a\tau}, 0 \to t$$

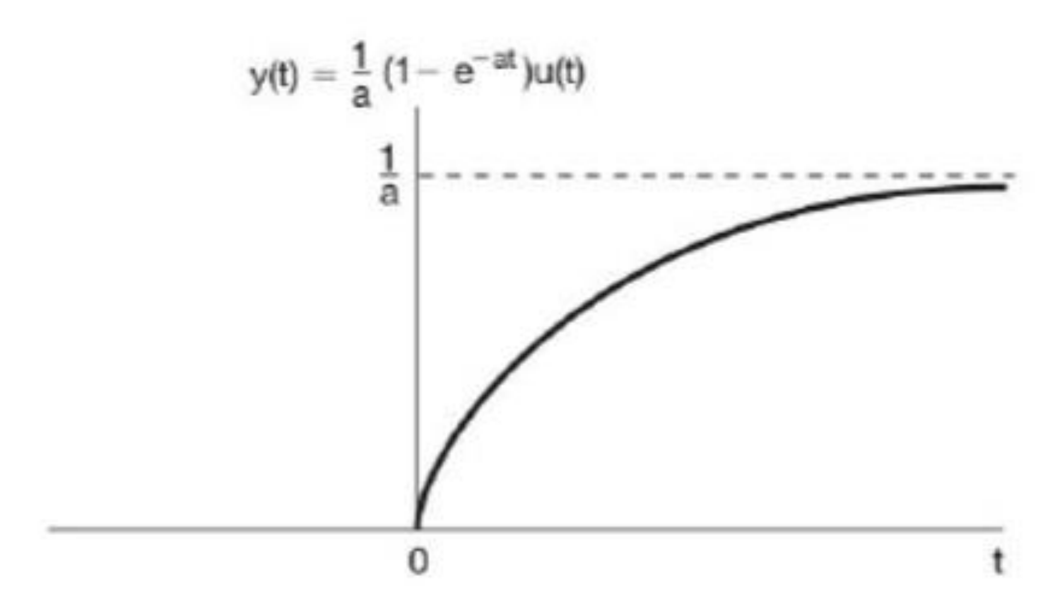
$$= \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$$



Sistemas LIT em tempo contínuo: a resposta ao impulso unitário

- Exemplo 1:

$$y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})u(t)$$

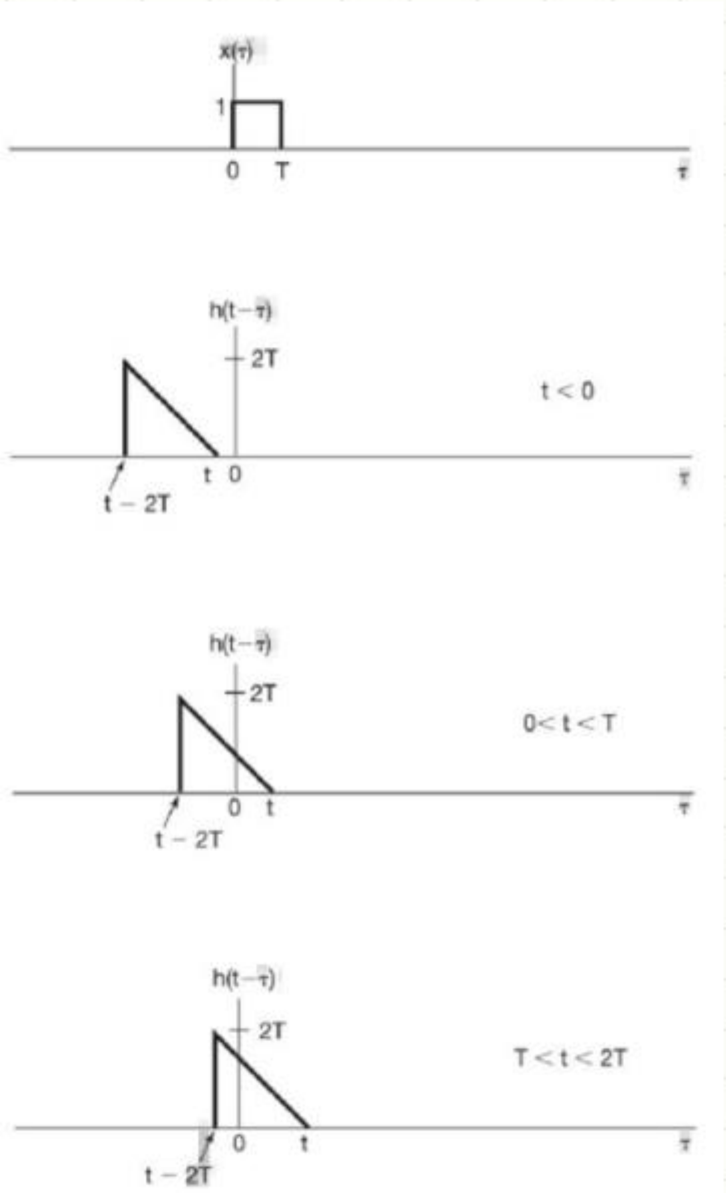


Sistemas LIT em tempo contínuo: a resposta ao impulso unitário

- Exemplo 2:

$$x(t) = \begin{cases} 1, 0 < t < T \\ 0, \quad cc \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} t, 0 < t < 2T \\ 0, \quad cc \end{cases}$$



Solução

Solução

Sistemas LIT em tempo contínuo: a resposta ao impulso unitário

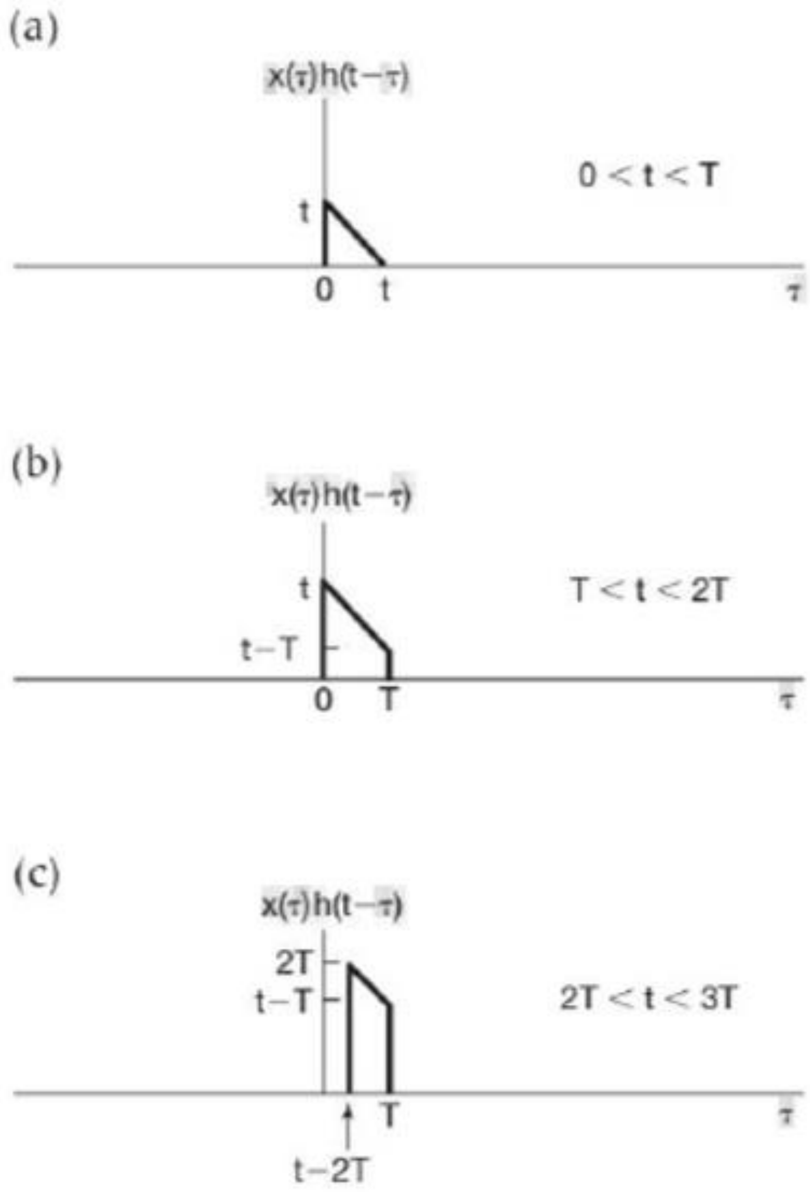
- Exemplo 2:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

(área sob a curva)

Diferentes intervalos:

diferentes figuras geométricas



Sistemas LIT em tempo contínuo: a resposta ao impulso unitário

- Exemplo 2:

$a)\ 0 < t < T$=> triângulo: $A = \frac{b.h}{2} = \frac{t^2}{2}$

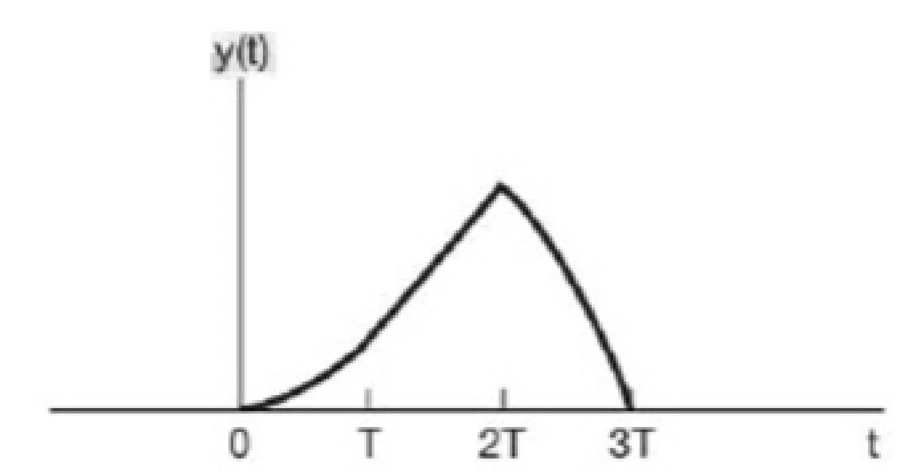
$b)\ T < t < 2T$=> trapézio: $A = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{(t+t-T)T}{2}$

$c)\ 2T < t < 3T$=> trapézio: $A = \frac{(B+b).h}{2} = \frac{(2T+1-T)(T-t+2T)}{2}$

Sistemas LIT em tempo contínuo: a resposta ao impulso unitário

- Exemplo 2:

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2}, & 0 < t < T \\ Tt - \dfrac{T^2}{2}, & T < t < 2T \\ -\dfrac{t^2}{2} + Tt + \dfrac{3T^2}{2}, & 2T < t < 3T \end{cases}$$



Propriedades dos sistemas LIT

- Comutativa
  - Tempo discreto

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

  - Tempo contínuo

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

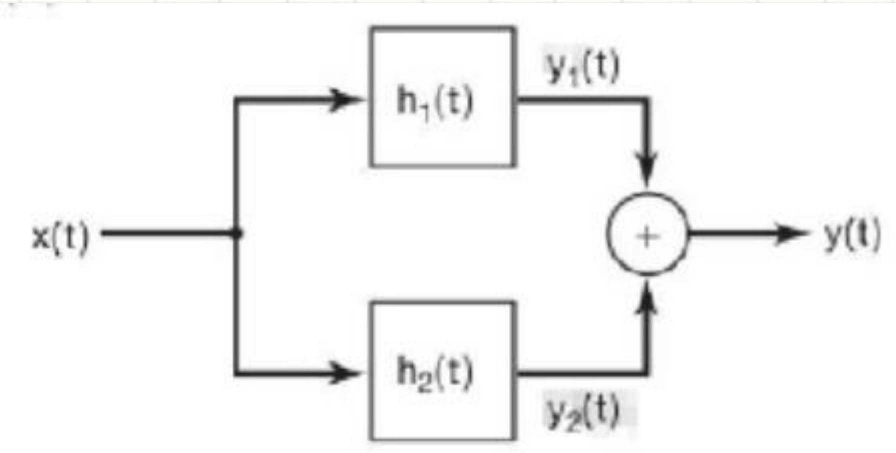
Propriedades dos sistemas LIT

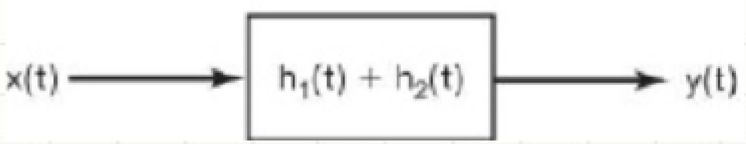
- Distributiva
  - Tempo discreto

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

  - Tempo contínuo

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$





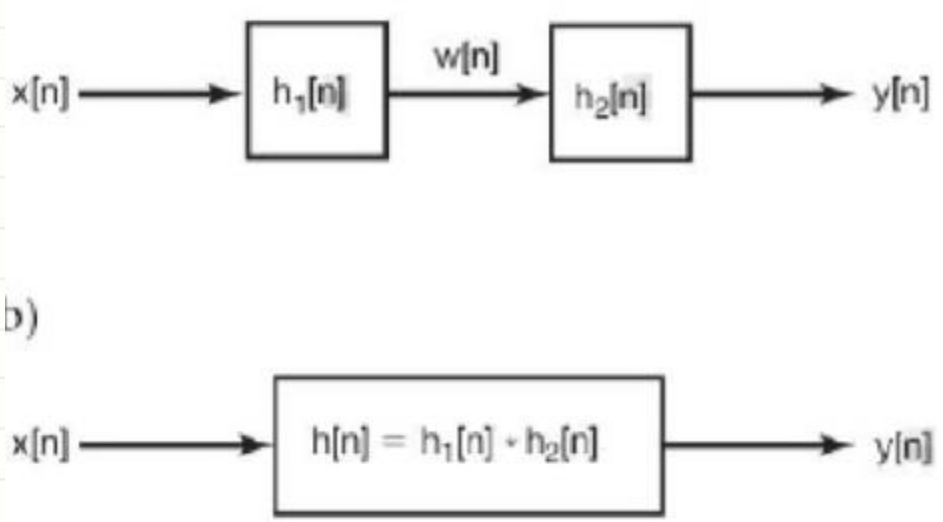
Propriedades dos sistemas LIT

- Associativa
  - Tempo discreto

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

  - Tempo contínuo

$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$



Propriedades dos sistemas LIT

- Sistemas LIT invertíveis

  i. $y_1(t) = x(t) * h_1(t)$

  ii. $x(t) = y_1(t) * h_2(t)$

  iii. $y_1(t) = y_1(t) * h_2(t) * h_1(t)$

$$h_2(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

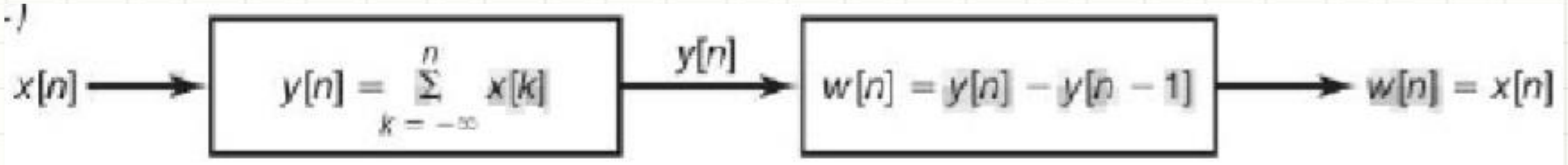
Propriedades dos sistemas LIT

- Sistemas LIT invertíveis: exemplo

$$h[n] = u[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]u[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$



$h[n]$ $h_1[n]$

Propriedades dos sistemas LIT

- Sistemas LIT invertíveis: exemplo

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1], \qquad h[n] = u[n]$$

i. $h[n] * h_1[n] = u[n] * \{\delta[n] - \delta[n-1]\}$

ii. $h[n] * h_1[n] = u[n] * \delta[n] - u[n] * \delta[n-1]$

iii. $h[n] * h_1[n] = u[n] - u[n-1]$

iv. $h[n] * h_1[n] = \delta[n]$

Propriedades dos sistemas LIT

- Causalidade em sistemas LIT

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

  - O sistema não pode ser antecipativo, ou seja não deve depender de $x[k]$, para $k > n$
  - Para isso, $h[n-k]$ deve ser nulo para todo $k > n$
  - Fazendo $k = 0$
  - $h[n] = 0, n < 0$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Propriedades dos sistemas LIT

- De modo equivalente, a integral de convolução de um sistema LIT causal é dada por:

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- A causalidade de um sistema LIT é equivalente à sua resposta ao impulso ser um sinal causal
- Apesar de ser uma propriedade de sistema, tal terminologia é comum para se referir a sinais, sendo causais, se nulos para $t < 0$ (ou $n < 0$)

Propriedades dos sistemas LIT

- Estabilidade: para toda entrada limitada, o sistema produz uma saída limitada
- $|x[n]| < B$, para todo n

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right|$$

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]|$$

$$|x[n-k]| < B$$

$$|y[n]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

Propriedades dos sistemas LIT

- Estabilidade: para toda entrada limitada, o sistema produz uma saída limitada

$$|y[n]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

- Da equação acima, conclui-se que se a resposta ao impulso é absolutamente somável, ou seja:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty,$$

- $y[n]$é limitado e o sistema é estável

Propriedades dos sistemas LIT

- De modo equivalente, um sistema de tempo contínuo é estável se sua resposta ao impulso é absolutamente integrável:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

Propriedades dos sistemas LIT

- Estabilidade: exemplo 1

$$y[n] = x[n - n_0],$$

$$h[n] = ?$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = ?$$

$$y(t) = x(t - t_0)$$