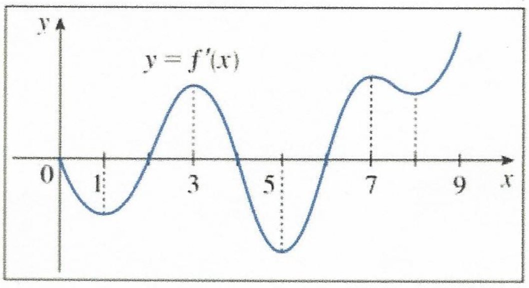
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Cálculo I – P2 (2016/2)
15/12/2016
Prof. Yoisell Rodríguez Núñez

Nome: YOISELL RODRÍGUEZ NÚÑEZ

Nº. Matrícula: — **Turma/Curso:** —

1. [2,0 *pontos*] A figura abaixo exibe o gráfico da derivada primeira f' de uma função $f:[0,9]\to\Re$.



0,5 a. Em quais intervalos a função f é **crescente**? É **decrescente**?

0,5 b. Quais são os **extremos locais** de f?

0,5 c. Quais são os intervalos onde o gráfico de f é **côncavo para cima**? E **côncavo para baixo**?

0,5 d. Quais são as abscissas dos **pontos de inflexão** do gráfico de f?

2. [2,0 *pontos*] Dada a função: $g(x)=\dfrac{3x^2}{4-4x+x^2}$ Determine:

0,75 a. **Intervalos de crescimento e/ou decrescimento** da função $g(x)$.

0,5 b. Pontos de **máximos** e de **mínimos** relativos (se existem).

0,75 c. Calcule os **pontos de inflexão** (se existem) e estude a **concavidade** de $g(x)$.

3. [1,5 *pontos*] Suponha que o número de bactérias em uma cultura no instante t é dada por $N(t)=5000(25+te^{-t/20})$. Ache o **maior número de bactérias** durante o intervalo de tempo $0\le t\le 100$.

4. [3,0 *pontos*] Calcule as seguintes **integrais**:

1,0 a. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

1,0 b. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\operatorname{sen} t}\cos t\,dt$

1,0 c. $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$

5. [1,5 *pontos*] Encontre a **área da região** do plano **limitada pelas curvas**: $y=7-2x^2$, $y=x^2+4$.

Assim como problemas surgem, as soluções aparecem... **BOA PROVA!!!**

P2 - Cálculo I

15/12/2016

Prof. Yoisell Rodríguez Núñez

RESOLUÇÃO

(1) Do gráfico, observamos que:

a) $f'(x) < 0$ em $(0,2) \cup (4,6)$ e

$f'(x) > 0$ em $(2,4) \cup (6,9)$.

Logo, $f(x)$ é crescente em $(2,4) \cup (6,9)$ e decrescente em $(0,2) \cup (4,6)$.

b) O extremos locais de f são 0 (máximo local), 2 (mínimo local), 4 (máximo local), 6 (mínimo local) e 9 (máximo local).

c) $f'(x)$ é crescente em $(1,3) \cup (5,7) \cup (8,9)$

$\Longrightarrow (f')'(x) = f''(x) > 0$ em $(1,3) \cup (5,7) \cup (8,9)$.

ou seja, $f(x)$ é côncava para cima em $(1,3) \cup (5,7) \cup (8,9)$.

Por outro lado,

$f'(x)$ é decrescente em $(0,1) \cup (3,5) \cup (7,8)$

$\Longrightarrow (f')'(x) = f''(x) < 0$ em $(0,1) \cup (3,5) \cup (7,8)$

isto é, o gráfico de $f(x)$ tem a concavidade voltada para baixo em $(0,1) \cup (3,5) \cup (7,8)$.

d) Em função do item anterior, podemos concluir que: as abscissas dos pontos de inflexão do gráfico de $f(x)$ são 1, 3, 5, 7 e 8.

② $g(x) = \frac{3x^2}{4-4x+x^2} = \frac{3x^2}{(x-2)^2}$

$\text{Dom}\, g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

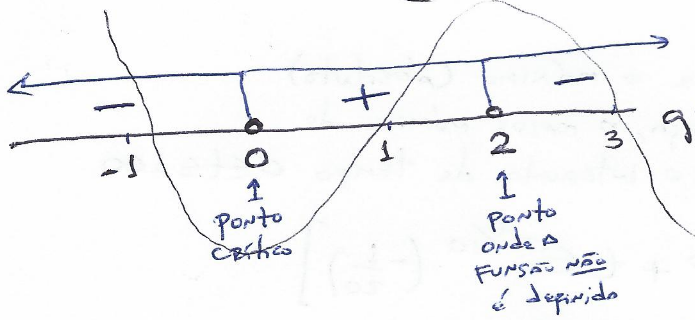
a) Intervalos de crescimento e decrescimento:

$$g'(x) = \frac{(6x)\cdot(x-2)^2 - 3x^2\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{\cancel{(x-2)}\left[6x(x-2)-6x^2\right]}{(x-2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{\cancel{6x^2}-12x-\cancel{6x^2}}{(x-2)^3} = -\frac{12x}{(x-2)^3}$$

Pontos críticos: $g'(x)=0$

$$\Longrightarrow -\frac{12x}{(x-2)^3} = 0 \Longrightarrow \boxed{x=0}$$



Logo, $g(x)$ é crescente em $(0,2)$ e decrescente em $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

b) Da análise acima conclui-se que:

$\boxed{x_0=0}$ é ponto de mínimo relativo de $g(x)$ e

Obs: $x_0=2$ não pode ser máximo (extremo) " " " já que $2 \notin \text{Dom}\, g$.

c) Concavidade e pontos de inflexão:

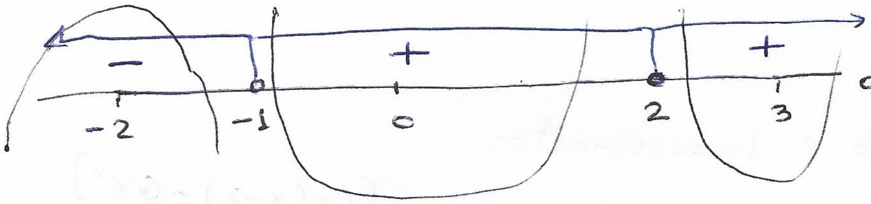
$$g''(x) = \frac{-12(x-2)^3 - (-12x)\cdot 3(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{-12(x-2)^3 + 36x(x-2)^2}{(x-2)^6}$$

$$= \frac{12\,\cancel{(x-2)^2}\left[-(x-2)+3x\right]}{(x-2)^{\cancel{6}\,4}} = \frac{12\left[-x+2+3x\right]}{(x-2)^4} = \frac{12(2x+2)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{12\left[2(x+1)\right]}{(x-2)^4}$$

$\Rightarrow g''(x) = \dfrac{24(x+1)}{(x-2)^4} = 0$, desde que $x+1=0$, ou seja, $x=-1$

Candidato a ser ponto de inflexão.



$g''(x) = \dfrac{24(x+1)}{(x-2)^4}$

Portanto, a função $g(x)$ é côncava para baixo em $(-\infty, -1)$ e concavidade voltada para cima em $(-1, 2) \cup (2, +\infty)$.

$\Rightarrow x_0 = -1$ é ponto de inflexão de $g(x)$.

---

(3) $N(t) = 5000\left(25 + t e^{-t/20}\right)$ (Função que representa o número de bactérias em uma cultura no instante t)

↳ Função objetivo

Obs: Precisamos achar o máximo (absoluto) dessa função, ou seja, o maior número de bactérias durante o intervalo de tempo $0 \le t \le 100$.

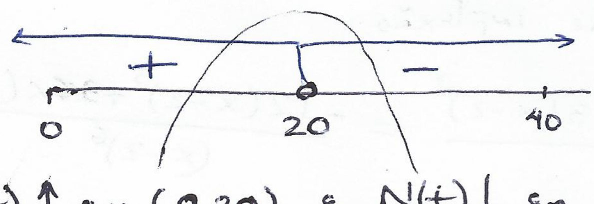
$$N'(t) = 5000\left[0 + \left(e^{-t/20} + t e^{-t/20} \cdot \left(-\frac{1}{20}\right)\right)\right]$$

$$= 5000\left[e^{-t/20} - \frac{t}{20} e^{-t/20}\right]$$

$$= 5000 e^{-t/20}\left(1 - \frac{t}{20}\right) = 0 \quad \text{desde que} \quad 1 - \frac{t}{20} = 0$$

já que $e^{-t/20} \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Logo, $1 - \dfrac{t}{20} = 0 \Rightarrow \dfrac{t}{20} = 1 \Rightarrow \boxed{t = 20}$



$N'(t) = 5000 e^{-t/20}\left(1 - \dfrac{t}{20}\right)$

$N(t) \uparrow$ em $(0, 20)$ e $N(t) \downarrow$ em $(20, +\infty)$. $\Rightarrow t_0 = 20$ é máximo.

3 Continuação ...

$$N(20) = 5000\left(25 + 20e^{-\frac{20}{20}}\right)$$
$$= 5000\left(25 + 20e^{-1}\right)$$
$$= 5000\left(25 + \frac{20}{e}\right)$$
$$\approx 161\,788$$

$$N(0) = 5000\left(25 + \cancel{0 \cdot e^{0}}\right)$$
$$= 125\,000$$

$$N(100) = 5000\left(25 + 20e^{-\frac{100}{20}}\right)$$
$$= 5000\left(25 + 20e^{-5}\right)$$
$$= 5000\left(25 + \frac{20}{e^{5}}\right)$$
$$\approx 128\,369$$

Logo, o maior número de bactérias ocorre em $t = 20$.
$\approx 161\,788$

(4) a) $$\int \frac{1}{x \ln x}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fazendo}}}{=} \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$= \boxed{\ln|\ln x| + C}$$

Fazendo
$$\boxed{\begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}\,dx \end{array}}$$

---

b) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\operatorname{sen} t} \cos t\,dt \underset{\uparrow}{=} \int_0^1 e^u\,du = e^u \Big|_{u=0}^{u=1} = e^1 - e^0$$

$$= \boxed{e - 1}$$

Mudança de variável:
$$\boxed{\begin{array}{l} u = \operatorname{sen} t \\ du = \cos t\,dt \end{array}}$$

$$0 \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \underbrace{\operatorname{sen} 0}_{=0} \le u = \operatorname{sen} t \le \underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}_{=1}$$

---

c) $$\underbrace{\int \cos^2 x\,dx}_{= \mathrm{I}} = \int \underbrace{\cos x}_{=u} \underbrace{\cos x\,dx}_{=dv} \underset{\uparrow}{=} \cos x \cdot \operatorname{sen} x - \int (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)\,dx$$

Integrando x partes
$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \cos x & du = -\operatorname{sen} x\,dx \\ dv = \cos x\,dx & v = \operatorname{sen} x \end{array}}$$

$$= \cos x \operatorname{sen} x + \int \operatorname{sen}^2 x\,dx$$

$$= \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \int (1 - \cos^2 x)\,dx$$

$$= \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \int 1\,dx - \underbrace{\int \cos^2 x\,dx}_{= \mathrm{I}}$$

$$\Longrightarrow \int \cos^2 x\,dx + \int \cos^2 x\,dx = \cos x \cdot \operatorname{sen} x + \int 1\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int \cos^2 x\,dx = \cos x \cdot \operatorname{sen} x + x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(\cos x \cdot \operatorname{sen} x + x + C\right)}$$

(4) Continuação...

c) Outra forma:

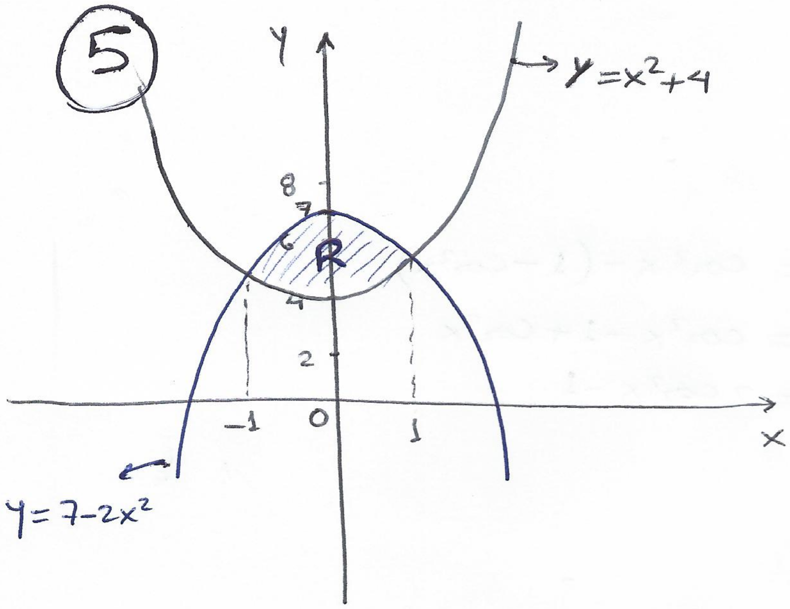
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$
$$= \cos^2 x - 1 + \cos^2 x$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$\Longrightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Logo,

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \left[\frac{1 + \cos(2x)}{2} \right] dx$$
$$= \frac{1}{2} \left[\int 1 \, dx + \int \cos(2x) \, dx \right]$$
$$= \frac{1}{2} \left[x + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + C \right], \; C \in \mathbb{R}$$
$$= \frac{1}{2} \left[x + \frac{\cancel{2} \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cancel{2}} + C \right]$$
$$= \boxed{\frac{1}{2} \left[x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x + C \right]}$$

(5)



Pontos de intersesão entre as curvas:

$$\begin{cases} y = 7-2x^2 \\ y = x^2+4 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow 7-2x^2 = x^2+4$$

$$\Longrightarrow 3x^2-3=0$$

$$\Longrightarrow 3(x^2-1)=0$$

$$\Longrightarrow x=-1 \quad \text{e} \quad x=1$$

Portanto,

$$\underbrace{A(R)}_{\substack{\text{Área}\\ \text{entre as}\\ \text{curvas}}} = \int_{-1}^{1} \Big[\underbrace{(7-2x^2)}_{\substack{\text{Função}\\ \text{que fica}\\ \text{por cima}}} - \underbrace{(x^2+4)}_{\substack{\text{Função}\\ \text{que fica}\\ \text{por baixo.}}} \Big]\, dx$$

Pontos de intersesão entre as curvas (Limites de integração)

$$= \int_{-1}^{1} (7-2x^2-x^2-4)\,dx = \int_{-1}^{1} (3-3x^2)\,dx = \int_{-1}^{1} 3(1-x^2)\,dx$$

$$= 3\int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = 3\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=1} = 3\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1-\frac{(-1)}{3}\right)\right]$$

$$= 3\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right] = 3\left[\cancel{1}-\frac{1}{3}+\cancel{1}-\frac{1}{3}\right] = 3\left(2-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \cancel{3}\left(\frac{6-2}{\cancel{3}}\right) = 4 \text{ unidades de área (u.A).}$$

R/ $\boxed{A(R) = 4 \text{ u.A}}$