Cálculo Integral
e
Introdução às Equações Diferenciais

Roberto Toscano Couto

rtoscano@id.uff.br

https://rtoscanocouto.wixsite.com/aula (*)

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Niterói, RJ

6 de setembro de 2022

(*) Neste site é sempre publicada a versão mais recente desta apostila.

Prefácio

Trata-se de um texto didático para a disciplina "Cálculo II-A" (ministrada pelo Departamento de Matemática Aplicada da UFF), cujo objetivo é o ensino introdutório do cálculo integral e das equações diferenciais ordinárias. Este texto contém exatamente o que se apresenta nas aulas, evitando que o aluno as copie, assim se obtendo mais a sua atenção e economizando tempo, bem como definindo com clareza o que se deve estudar. Para o seu aprendizado, são imprescindíveis as explicações dadas nas aulas, quando, então, se detalham muitas das passagens matemáticas.

Sumário

Parte I

CÁLCULO INTEGRAL

Capítulo 1

Integração

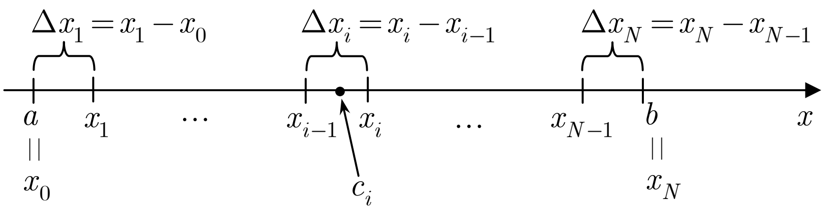
1.1 Integral Definida

1.1.1 Definição de Riemann

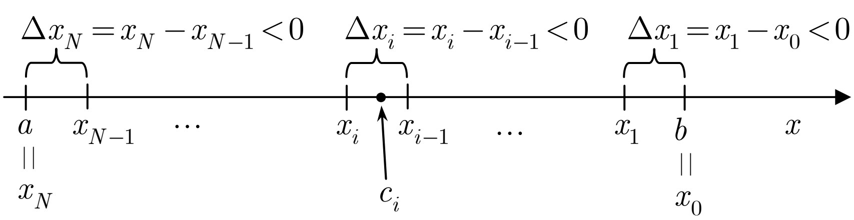
Considere uma função $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I = [a, b]$, um intervalo fechado de extremos a e b finitos. Define-se a *integral definida de* f *desde* a até b, também dita *integral definida de* f em I *na direção do eixo* x, denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$ (a é o *limite inferior* da integral, e b é o *limite superior*), por

$$\int_a^b f(x)\,dx \equiv \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \underbrace{\sum_{i\,=\,1}^{N} f(c_i)\Delta x_i}_{\text{soma de Riemann}} \ ,$$

onde, como mostra a figura abaixo, $\Delta x_i \equiv x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2 \cdots N$) são as larguras dos N subintervalos em que se subdivide o *intervalo de integração* $I = [a, b]$, e c_i é um ponto qualquer do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. O conjunto de pontos $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_N\}$, onde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$, usado para dividir $[a, b]$ em N subintervalos define uma *partição* de $I = [a, b]$, e a *soma de Riemann* (o somatório acima) é dita referir-se à partição P e aos números c_i empregados.



Pela definição acima, a *integral definida de* f *em* I *na direção contrária do eixo* x, isto é, $\int_b^a f(x)\,dx$, é obtida com os pontos de uma partição $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_N\}$ de $I = [a, b]$ como mostra a figura abaixo, ordenados do mesmo modo, do limite inferior $x_0 = b$ da integral para o limite superior $x_N = a$. Neste caso nota-se que todo $\Delta x_i < 0$:



Se o limite acima existe, isto é, se ele é finito e único independentemente da partição empregada e da escolha dos c_i, então a função f é dita *integrável em I segundo Riemann.*

Na definição de integral definida acima, note que não basta indicar que o limite deve ser efetuado apenas sob a condição $N \to \infty$, porque esta não garante que a condição de todo $\Delta x_i \to 0$ seja satisfeita; mas esta condição implica naquela (se $a \neq b$). Apesar disso, é comum, para simplificar a notação, indicar apenas a condição $N \to \infty$, ficando implícita a imposição da outra condição.

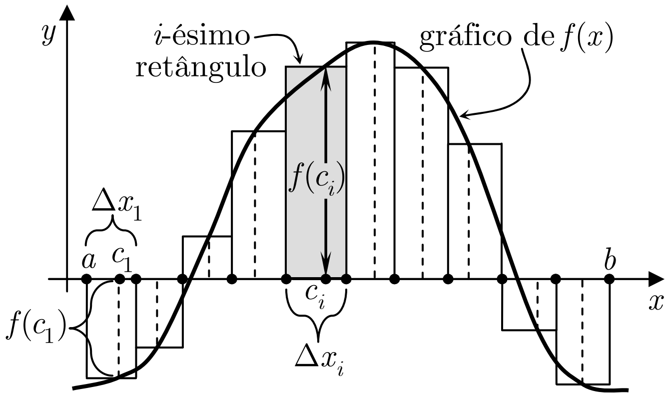
Demonstra-se que, se em I a função f é contínua ou é limitada com um número finito de descontinuidades, então ela é integrável em I.

1.1.2 Interpretação geométrica

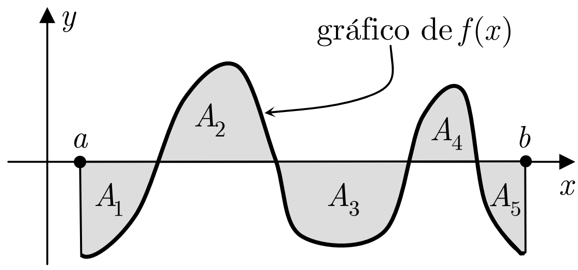
Na figura ao lado, $|f(c_i)\Delta x_i|$ é a área do i-ésimo retângulo (o que se encontra hachurado, de base $|\Delta x_i|$ e altura $|f(c_i)|$). Observe que $f(c_i)\Delta x_i$ pode ser positivo ou negativo, dependendo dos sinais de $f(c_i)$ e Δx_i .

Se $b > a$ (como na figura), então Δx_i é positivo e, portanto, $f(c_i)\Delta x_i$ tem o mesmo sinal de $f(c_i)$. Logo, quando $N \to \infty$ (número de subdivisões tende a infinito) e $\Delta x_i \to 0$, a soma de Riemann tende à soma das áreas acima do eixo x menos a soma das áreas abaixo deste, entendendo-se por "área" a da região entre o eixo x e o gráfico da função em $[a, b]$. Assim, no caso do gráfico mostrado na figura inferior à direita, temos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = -A_1 + A_2 - A_3 + A_4 - A_5 \quad .$$

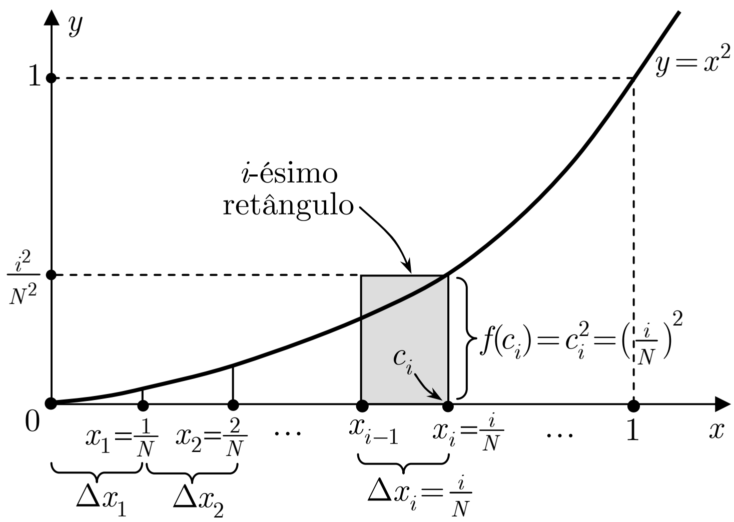


Soma de Riemann com $N = 10$ subdivisões



Para exemplificar o cálculo da integral definida pela soma de Riemann, calculemos $\int_0^1 x^2 dx$ dividindo o intervalo de integração $[0, 1]$ em N partes iguais. Nesse caso, a partição é definida pelas abscissas $x_0 = 0$, $x_1 = 1/N$, $x_2 = 2/N$, $\cdots$, $x_i = i/N$, $\cdots$, $x_N = 1$, tendo todos a mesma largura: $\Delta x_i = 1/N$. Logo, se em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tomarmos $c_i = x_i = i/N$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \underbrace{f(x)}_{x^2}\,dx &= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \underbrace{f(c_i)\Delta x_i}_{\substack{\text{área do } i\text{-ésimo}\\ \text{retângulo}}} \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} c_i^2 \frac{1}{N} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{i}{N}\right)^2 \frac{1}{N} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^3} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} i^2\right)}_{\frac{N^3}{3}+\frac{N^2}{2}+\frac{N}{6}} \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2}\right) = \frac{1}{3} \quad .
\end{aligned}$$



1.2 Propriedades da Integral Definida

Da definição de integral definida constata-se imediatamente essas duas propriedades:

$$\textbf{i)} \int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{e} \qquad \textbf{ii)} \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

[a prop. (ii) decorre dos sinais constrários de Δx_i nas somas de Riemann das duas integrais].

Com um certo trabalho (que não é apresentado neste texto) também podem ser provadas as propriedades abaixo a partir da definição de integral definida, cuja interpretação geométrica, entretanto, fornece uma maneira fácil de entender por que cada uma delas é verdadeira:

iii) Integral de uma função constante $f(x) = k$: $\displaystyle\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

iv) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

v) $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

vi) $\displaystyle\int_a^b [Af(x)+Bg(x)]dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx$ ....(linearidade)

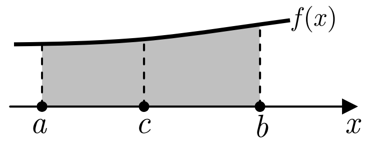
vii) $f(x) \geqslant 0 \;\; \forall x \in [a,b] \;\; \Rightarrow \;\; \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

viii) $f(x) \leqslant g(x) \;\; \forall x \in [a,b] \;\; \Rightarrow \;\; \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

ix) $\displaystyle |\int_a^b f(x)\,dx| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx \;\; (a < b)$

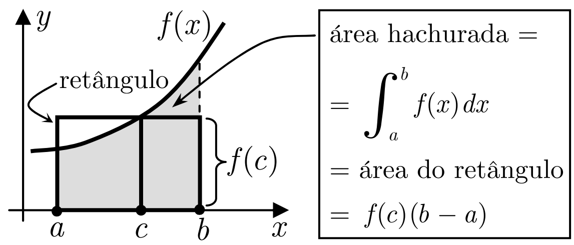
x) Aditividade do intervalo de integração:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



xi) Teorema do Valor Médio (TVM) p/ integrais (provado na seç. 5.1):

"Se f é uma função contínua em $[a,b]$ então existe c nesse intervalo tal que $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$."



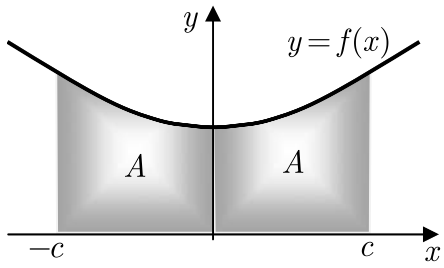
xii) Integral de função par ou ímpar no intervalo $[-c, c]$ (simétrico em relação à origem):

- Se f é uma função par:

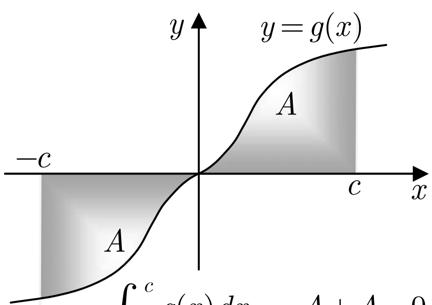
$$\int_{-c}^c f(x)\,dx = 2\int_0^c f(x)\,dx$$

- Se g é uma função ímpar:

$$\int_{-c}^c g(x)\,dx = 0$$



$$\int_{-c}^c f(x)\,dx = 2A = 2\int_0^c f(x)\,dx$$



$$\int_{-c}^c g(x)\,dx = -A + A = 0$$

1.3 Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Até o momento, os conceitos de derivada e de integral definida de uma função não apresentam qualquer vinculação entre eles. Parecem independentes, nada tendo a ver um com o outro, um sendo interpretado como o coeficiente angular da reta tangente, e o outro relacionado à área entre o eixo x e o gráfico da função. O teorema seguinte – denominado *Teorema Fundamental do Cálculo* – estabelece uma profunda relação entre diferenciação e integração, além de fornecer um meio de calcular a integral definida sem usar a soma de Riemann. Antes de prosseguir, convém fazer umas observações e definições preliminares, começando por relembrar alguns conceitos já estudados em Cálculo 1:

1.3.1 Conceitos preliminares

<u>Continuidade de uma função num intervalo fechado</u>:

Uma função f é dita contínua em $[a, b]$ se for contínua em (a, b), isto é,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \ \ \forall x_0 \in (a, b) \ \ ,$$

e se for lateralmente contínua nos extremos desse intervalo, isto é,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{ e } \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b) \ \ .$$

<u>Teorema do valor médio (TVM)</u>:

Se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) então existe pelo menos um real c em (a, b) tal que $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$.

Reveja a prova deste teorema num livro de Cálculo 1.

<u>Teorema da derivada nula</u>:

Uma função f contínua em $[a, b]$ que tem derivada nula em (a, b) é constante naquele intervalo fechado.

Prova: Para qualquer $x \in (a, b]$, temos, pelo TVM, que existe $c \in (a, x)$ tal que

$$f(x) - f(a) = \underbrace{f'(c)}_{0}(x - a) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(a) \ \ \square$$

<u>Definição de primitiva ou antiderivada</u>:

Uma função F é chamada de *primitiva* ou *antiderivada* de uma função f num intervalo *aberto* se $F' = f$ nesse intervalo. Por exemplo, $\operatorname{sen} x$ é uma primitiva de $\cos x$ em qualquer intervalo aberto, pois $(\operatorname{sen} x)' = \cos x \ \forall x \in \mathbb{R}$. Dizemos "uma" primitiva, em vez de "a" primitiva, porque, se F é uma primitiva de f, isto é, se $F' = f$, então $F + c$, com qualquer constante c, também é, pois $(F + c)' = f$.

Observe também que uma primitiva, sendo derivável, é necessariamente uma função contínua no intervalo (a, b) considerado, mas não em $[a, b]$, pois nada garante que sua continuidade se estenda lateralmente aos extremos desse intervalo fechado (pela direita de a e pela esquerda de b). Entretanto, no que segue, admite-se que toda primitiva F de f num intervalo (a, b) tem sua continuidade estendida aos extremos desse intervalo, isto é, F é contínua em $[a, b]$.

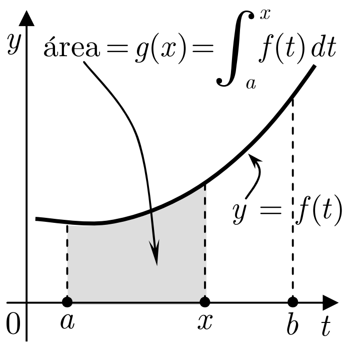
Teorema das primitivas de uma função:

Duas primitivas quaisquer F e G de uma função f em (a,b) que são contínuas em $[a,b]$ podem diferir apenas por uma constante neste intervalo fechado.

Prova: Como $F-G$ é contínua em $[a,b]$, e $(F-G)'=F'-G'=f-f=0$ em (a,b), então, pelo teorema da derivada nula, $F-G$ é constante em $[a,b]$ $\square$

Podemos agora tratar do teorema fundamental do Cálculo, que é frequentemente dividido em duas partes.

1.3.2 Teorema fundamental do Cálculo, Parte 1 (TFC-I)



Se f é uma função contínua em $[a,b]$, então a função definida por $g(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ é contínua nesse intervalo, é uma primitiva de f em (a,b), isto é,

$$g'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \;\; \forall x\in(a,b) \;\; ,$$

e tem as derivadas laterais $g'_+(a)=f(a)$ e $g'_-(b)=f(b)$.

Prova: Para $x\in(a,b)$, temos que

$$\begin{aligned} g'(x) \;&=\; \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} \\ &\overset{(1)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \;\overset{(2)}{=}\; \lim_{h\to 0}\frac{f(x^*)\cancel{h}}{\cancel{h}}\Bigg|_{\substack{\text{algum } x^* \\ \text{em } [x\,,\,x+h]}} \;\overset{(3)}{=}\; f(x) \;\; , \end{aligned}$$

onde a passagem indicada por (1) é justificada pela propriedade da aditividade do intervalo de integração: $\int_a^{x+h} f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+h} f(t)\,dt$; a indicada por (2) decorre do TVM para integrais de funções contínuas: $\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x^*)h$ para algum $x^*\in[x,x+h]$; já a passagem (3) segue do limite $x^*\xrightarrow{h\to 0} x$ e da continuidade de f.

Do resultado acima também se conclui que, sendo diferenciável em (a,b), g é contínua neste intervalo.

Similarmente provamos que $g'_+(a)=f(a)$ e $g'_-(b)=f(b)$, bastando considerar limites laterais nos cálculos acima. Da existência dessas derivadas laterais decorre a continuidade lateral de g em $x=a$ e $x=b$ $\square$

1.3.3 Teorema fundamental do Cálculo, Parte 2 (TFC-II)

Para uma função f contínua em $[a,b]$, tem-se que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$, se F for uma primitiva de f em (a,b) contínua em $[a,b]$.

Prova: Tal qual F, a função definida por $\int_a^x f(t)\,dt$, segundo o TFC-I, também é uma primitiva de f em (a,b) contínua em $[a,b]$, valendo, portanto, de acordo com o teorema das primitivas de uma função, a seguinte equação, para alguma constante c:

$$F(x) - \int_a^x f(t)\,dt = c\ , \quad \text{com } x \in [a,b]\ .$$

A substituição $x = a$ nessa equação fornece

$$F(a) - \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{0} = c \quad \Rightarrow \quad c = F(a)\ .$$

Usando esse resultado naquela mesma equação, agora com $x = b$, concluímos a prova:

$$F(b) - \int_a^b f(t)\,dt = F(a) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ \square$$

A principal vantagem do TFC-II é a de prover um modo de calcular a integral definida $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, quando se conhece uma primitiva F de f, por meio de uma simples diferença, $F(b) - F(a)$, que é corriqueiramente assim denotada: $F(b) - F(a) \equiv F(x)\Big|_a^b$ ou $\Big[F(x)\Big]_a^b$; por exemplo,

$$\Big[x^3 - 2x + 2\Big]_{-1}^{1} = \big[(1)^3 - 2(1) + 2\big] - \big[(-1)^3 - 2(-1) + 2\big] = -2\ .$$

Como ilustração do cálculo de integral definida usando o TFC-II, note que $x + x^3/3$ é uma primitiva de $1 + x^2$ [i.e., $(x + x^3/3)' = 1 + x^2$], ambas as funções satisfazendo as condições desse teorema; logo,

$$\int_1^2 (1 + x^2)\,dx = \Big[x + \frac{x^3}{3}\Big]_1^2 = \Big[2 + \frac{8}{3}\Big] - \Big[1 + \frac{1}{3}\Big] = \frac{10}{3}\ .$$

1.4 Integrais Indefinidas

Pelo exposto, é evidente que o cálculo de primitivas de funções é importante. As diversas técnicas disponíveis para obtê-las serão estudadas no capítulo 2. Abaixo apresentamos tão somente as regras básicas desse cálculo e a técnica baseada na mudança de variáveis. Sobre elas, convém enfatizar que, se acharmos uma primitiva g de uma função f, teremos automaticamente uma infinidade delas, a saber, todas as funções da forma $g + c$. Por exemplo, sendo $(x^2/2)' = x$, temos que todas as primitivas da função $f(x) = x$ são dadas por $g(x) = x^2/2 + c$. Também, se g é uma função tal que $g'(x) = 0$ então $g(x) = c$ (uma constante arbitrária é primitiva da função nula).

1.4.1 Definição

O TFC diz que se $g(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ [i.e., $g'(x) = f(x)$] então

$$\int_a^x f(t)\,dt = g(x) \underbrace{-g(a)}_{c} = g(x) + c, \ \text{ que é a primitiva mais genérica de } f(x)$$

(a partir de agora, a não ser que se afirme o contrário, c denota uma constante arbitrária), mostrando que a integral definida de $f(x)$ num intervalo $[a, x]$, de limite superior variável, ou indefinido, fornece a antiderivada mais genérica de $f(x)$. Isto sugere definirmos a *integral indefinida* de f, denotada por $\int f(x)\,dx$, como segue:

$$\int f(x)\,dx \equiv g(x) + c\,, \quad \text{onde } g'(x) = f(x)\,.$$

O processo para calcular $\int f(x)\,dx$, isto é, para achar a primitiva $g(x) + c$ mais genérica de $f(x)$, é chamado de *integração indefinida.* Por exemplo, a integral indefinida de $f(x) = x$ é $\int f(x)\,dx = \int x\,dx = x^2/2 + c\,.$

1.4.2 Regras básicas da integração indefinida

Regras genéricas:

i) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$ .... a derivada da integral de f é f

ii) $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$ .... a integral da derivada de f é $f + c$

iii) $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$

iv) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ .... regra da adição

v) $\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$ .... regra da linearidade

Regras específicas:

As várias fórmulas de diferenciação fornecem, se "lidas de trás para a frente", várias fórmulas de integração indefinida; assim obtemos, por exemplo:

- $\int dx = x + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$
- $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$
- $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$
- $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$
- $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$
- $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x \ (\text{ou } -\arccos x) + c$
- $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x \ (\text{ou } -\operatorname{arccot} x) + c$
- $\int \dfrac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x \ (\text{ou } -\operatorname{arccsc} x) + c$
- $\int x^\alpha dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c & \text{se } \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + c & \text{se } \alpha = -1 \ (*) \end{cases}$

$(*)$ Esse último resultado pode ser verificado derivando-se $\ln|x|$:

$$\big[\ln|x|\big]' = \left\{ \begin{array}{l} \big[\ln x\big]' = \dfrac{1}{x} \ (\text{se } x > 0) \\ \big[\ln(-x)\big]' = \dfrac{1}{-x} \cdot (-1) = \dfrac{1}{x} \ (\text{se } x < 0) \end{array} \right\rangle \Rightarrow \ \big[\ln|x|\big]' = \frac{1}{x} \ \Rightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c\,.$$

Exemplifiquemos essas regras genéricas e específicas da integral indefinida:

$$1)\ \int (5x+\sqrt{x}-7)\,dx = \int 5x\,dx + \int \sqrt{x}\,dx + \int(-7)\,dx = 5\int x\,dx + \int x^{1/2}\,dx - 7\int dx$$

$$= 5\left[\frac{x^{1+1}}{1+1}+c_1\right] + \left[\frac{x^{(1/2)+1}}{(1/2)+1}+c_2\right] - 7[x+c_3]$$

$$= \frac{5}{2}\,x^2 + \frac{2}{3}\,x^{3/2} - 7x + \underbrace{(5c_1+c_2-7c_3)}_{c}$$

$$2)\ \int \frac{x^4+3x^2+5}{x^2}\,dx = \int \left(x^2+3+5x^{-2}\right)\,dx = \frac{x^3}{3}+3x-5x^{-1}+c$$

$$3)\ \int (y\sqrt[3]{y}+1)^2\,dy = \int (y^{4/3}+1)^2 dy = \int (y^{8/3}+2\,y^{4/3}+1)\,dy = \frac{3}{11}\,y^{11/3} + \frac{6}{7}\,y^{7/3}+y+c$$

$$4)\ \int_1^4 \frac{1-x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 (x^{-1/2}-x^{1/2})\,dx = \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}-\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 = \cdots = -\frac{8}{3}$$

$$5)\ \int_0^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 |1-x|\,dx + \int_1^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$= \left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2 = \left[1-\frac{1}{2}-0\right] + \left[\frac{2^2}{2}-2-\left(\frac{1^2}{2}-1\right)\right] = 1$$

$$6)\ \int_0^3 |x^2-3x+2|\,dx = \int_0^1 (x^2-3x+2)\,dx + \int_1^2 (-x^2+3x-2)\,dx + \int_2^3 (x^2-3x+2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-2x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_2^3 = \cdots = \frac{11}{6}$$

1.5 Integração por Mudança de Variável Simples

1.5.1 Aplicação da regra da substituição

Apresentamos agora a integração *por mudança de variável*, ou *por substituição*, através dos seguintes exemplos (a sua justificada é fornecida na seç. 1.5.3 adiante):

$$1)\ \int x(x^2+5)^{100}dx = \int (\underbrace{x^2+5}_{u})^{100}\ \underbrace{x\,dx}_{du/2} = \frac{1}{2}\int u^{100}du = \frac{1}{2}\,\frac{u^{101}}{101}+c = \frac{(x^2+5)^{101}}{202}+c$$

[onde $u \equiv x^2+5 \;\Rightarrow\; du = 2x\,dx \;\Rightarrow\; x\,dx = du/2$] .

$$2)\ \int \sqrt{7x+2}\,dx = \int \underbrace{\sqrt{u}}_{u^{1/2}}\ \frac{du}{7} = \frac{1}{7}\,\frac{u^{3/2}}{3/2}+c = \frac{2}{21}(7x+2)^{3/2}+c$$

[onde $u \equiv 7x+2 \;\Rightarrow\; du = 7\,dx \;\Rightarrow\; dx = du/7$] .

$$3)\ \int \frac{x^2\,dx}{(x^3+4)^5} = \int \frac{du/3}{u^5} = \frac{1}{3}\int u^{-5}du = \frac{1}{3}\,\frac{u^{-4}}{-4}+c = -\frac{1}{12(x^3+4)^4}+c$$

[onde $u \equiv x^3+4 \;\Rightarrow\; du = 3x^2dx \;\Rightarrow\; x^2dx = du/3$] .

$$4)\ \int x^2\sqrt{3-2x}\,dx = \int \left(\frac{3-u}{2}\right)^2 \sqrt{u}\,\left(\frac{-du}{2}\right) = -\frac{1}{8}\int (9-6u+u^2)\,u^{1/2}du$$

$$= -\frac{1}{8}\int (9u^{1/2} - 6u^{3/2} + u^{5/2})\,du = -\frac{1}{8}\Big(\frac{9u^{3/2}}{3/2} - \frac{6u^{5/2}}{5/2} + \frac{u^{7/2}}{7/2}\Big) + c$$
$$= -\frac{3}{4}(3-2x)^{3/2} + \frac{3}{10}(3-2x)^{5/2} - \frac{1}{28}(3-2x)^{7/2} + c$$
[onde $u \equiv 3-2x \;\Rightarrow\; x = (3-u)/2 \;\Rightarrow\; dx = -du/2$] .

5) $$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t+5}} = \int \frac{(u-5)\,du}{\sqrt{u}} = \int (u^{1/2} - 5u^{-1/2})\,du = \frac{u^{3/2}}{3/2} - 5\,\frac{u^{1/2}}{1/2} + c$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{(t+5)^3} - 10\sqrt{t+5} + c \quad [\text{onde } u \equiv t+5 \;\Rightarrow\; du = dt \text{ e } t = u-5]\ .$$

Esse mesmo resultado é obtido com a seguinte mudança de variável, distinta da anterior:

$$v \equiv \sqrt{t+5} \;\Rightarrow\; \begin{cases} dv = dt/(2\sqrt{t+5}\,) = dt/(2v) \;\Rightarrow\; dt = 2vdv \\ v^2 = t+5 \;\Rightarrow\; t = v^2 - 5 \end{cases}$$

$$\therefore \int \frac{t\,dt}{\sqrt{t+5}} = \int \frac{(v^2-5)\,2\cancel{v}\,dv}{\cancel{v}} = 2\Big(\frac{v^3}{3} - 5v\Big) + c = \frac{2}{3}\sqrt{(t+5)^3} - 10\sqrt{t+5} + c\ .$$

1.5.2 A Regra da substituição aplicada a integrais definidas

1) Para calcular a integral definida $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{9-5x^2}\,dx$, primeiramente calculamos a integral indefinida

$$\int x\sqrt{9-5x^2}\,dx = \int \sqrt{u}\,\Big(\frac{-du}{10}\Big) = -\frac{1}{10}\,\frac{u^{3/2}}{3/2} = -\frac{1}{15}(9-5x^2)^{3/2}\ ,$$

onde se fez a mudança de variável

$$u \equiv 9-5x^2 \quad\Rightarrow\quad du = -10x\,dx \quad\Rightarrow\quad x\,dx = -du/10\ ,$$

para, então, usando o TFC-II, obter o resultado desejado:

$$\int_0^1 x\sqrt{9-5x^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{15}(9-5x^2)^{3/2}\Big]_0^1 = -\frac{1}{15}\big(\underbrace{4^{3/2}}_{8} - \underbrace{9^{3/2}}_{27}\big) = -\frac{1}{15}(8-27) = \frac{19}{15}\ .$$

Mais rápido, e geralmente mais conveniente, é, ao realizar a mudança de variável, também mudar os limites de integração na integração definida realizada na nova variável u. Tendo em conta que se $u = 9-5x^2$ então $x = 0 \Rightarrow u = 9$ e $x = 1 \Rightarrow u = 4$, o que pode ser representado pela tabela $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline u & 9 & 4 \end{array}$, temos que

$$\int_0^1 x\sqrt{9-5x^2}\,dx = \int_9^4 \sqrt{u}\,\Big(\frac{-du}{10}\Big) = \frac{-1}{10}\,\frac{u^{3/2}}{3/2}\Big|_9^4 = -\frac{1}{15}\big(\underbrace{4^{3/2}}_{8} - \underbrace{9^{3/2}}_{27}\big) = \frac{19}{15}\ .$$

2) $$\int_1^2 \frac{t^2dt}{(t^3+2)^2} = \int_3^{10} \frac{du/3}{u^2} = \frac{1}{3}\int_3^{10} u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-3}\Big|_3^{10} = \frac{-1}{3}\Big(\frac{1}{10} - \frac{1}{3}\Big) = \frac{7}{90}\ .$$

onde se fez $u = t^3 + 2 \;\Rightarrow\; du = 3t^2dt \;\Rightarrow\; t^2dt = \dfrac{du}{3}$ e os limites mudaram assim: $\begin{array}{c|cc} t & 1 & 2 \\ \hline u & 3 & 10 \end{array}$.

1.5.3 Justificativa da regra da substituição

Considere uma função g com derivada contínua no seu domínio $[a,b]$ (*), e sejam f e F funções contínuas em $[A,B] = \text{Im}(g)$, sendo $F' = f$ em (A,B). Pelo TFC-II, temos, por um lado, que (†)

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \Big[F\big(g(x)\big)\Big]_a^b = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big) \ ,$$

e, por outro, que

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big) \ .$$

Portanto, comparando os membros esquerdos das duas equações acima, obtemos a seguinte regra de transformação de uma integral definida em que se muda a variável de integração de x para $u = g(x)$:

$$\boxed{\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx \overset{u\,=\,g(x)}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du} \ .$$

Observe que a nova forma da integral definida, no membro direito dessa equação, resulta de uma substituição formal baseada na definição $g'(x)dx = du$ da diferencial da função $u = g(x)$, o que facilita lembrar o uso dessa regra.

É exatamente essa regra que é usada nos exemplos da seç. 1.5.2.

Desconsiderando os limites de integração nela, temos a regra de mudança de variáveis para integrais indefinidas, usada na seç. 1.5.1.

1.5.4 A regra da substituição em integrais da forma $\int f\big(g(x)\big)kg'(x)dx$

Em integrais como essa (sendo $k = \textit{const.}$), se a função f tem uma primitiva F conhecida (ou, em outros termos, f é uma derivada conhecida), então basta fazer a substituição $u = g(x)$, donde $du = g'(x)dx$, para que a integral se transforme noutra fácil de calcular:

$$\int f\big(g(x)\big)kg'(x)dx = k\int f(u)du = kF(u) + c = kF\big(g(x)\big) + c \ .$$

Exemplos:

1) $\displaystyle\int \sqrt{5x^2-3}\,x\,dx \overset{\substack{u\,=\,5x^2-3\\ du\,=\,10x\,dx}}{=} \int \sqrt{u}\,\frac{du}{10} = \frac{1}{10}\,\frac{u^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{10}\,\frac{(5x^2-3)^{3/2}}{3/2} + c$

2) $\displaystyle\int \frac{e^{6\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \overset{\substack{u\,=\,6\sqrt{x}\\ du\,=\,\frac{3\,dx}{\sqrt{x}}}}{=} \int e^u\,\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\,e^u + c = \frac{1}{3}\,e^{6\sqrt{x}} + c$

3) $\displaystyle\int (6x-1)\,\text{sen}^5(3x^2-x+1)\cos(3x^2-x+1)\,dx \overset{\substack{u\,=\,\text{sen}\,(3x^2-x+1)\\ du\,=(6x-1)\cos(3x^2-x+1)\,dx}}{=}$

$\displaystyle = \int u^5du = \frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{6}\,\text{sen}^6(3x^2-x+1) + c$

(*) Estamos considerando continuidade e diferenciabilidade laterais nos extremos desse intervalo: $\lim\limits_{x\to a^+} g'(x) = g'_+(a)$ e $\lim\limits_{x\to b^-} g'(x) = g'_-(b)$.

(†) Note que $\big[F\big(g(x)\big)\big]' = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x)$.

4) $\displaystyle\int \sec^8 5x \tan 5x\,dx = \int \sec^7 5x \underbrace{\sec 5x \tan 5x\,dx}_{du/5} \overset{u\,=\,\sec 5x}{\underset{du\,=\,5\sec 5x \tan 5x\,dx}{=}} \int u^7\,\frac{du}{5} = \frac{u^8}{40} + c = \frac{\sec^8 5x}{40} + c$

5) $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,dx \overset{u\,=\,x^2}{\underset{du\,=\,2x\,dx}{=}} \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + c = \arctan x^2 + c$

6) $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx \overset{du\,=\,u'(x)dx}{=} \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

Usando essa fórmula em 6), é imediato o cálculo da integral de uma fração cujo numerador (a menos de um fator constante) é a derivada do denominador, como nesse próximo exemplo:

7) $\displaystyle\int \frac{\cos x - x}{2\,\mathrm{sen}\,x - x^2 + 3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2\cos x - 2x}^{u'}}{\underbrace{2\,\mathrm{sen}\,x - x^2 + 3}_{u}}\,dx = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln|2\,\mathrm{sen}\,x - x^2 + 3| + c$

8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,\ln(3x+1)}{3x+1}\,dx \overset{u\,=\,\ln(3x+1)}{\underset{du\,=\,\frac{3\,dx}{3x+1}}{=}} \int \mathrm{sen}\,u\,\frac{du}{3} = -\frac{1}{3}\cos u + c = -\frac{1}{3}\cos\ln(3x+1) + c$

9) $\displaystyle\int \frac{\sec x \tan x}{1+\sec^2 x}\,dx \overset{u\,=\,\sec x}{\underset{du\,=\,\sec x \tan x\,dx}{=}} \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + c = \arctan\sec x + c$

1.6 Fórmula de Leibniz da derivada de integral definida

Considere uma função f contínua e funções a e b diferenciáveis. Denotando por F uma primitiva de f , obtemos, usando o TFC-II e, em seguida, a regra da cadeia, a seguinte fórmula:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt} = \frac{d}{dx}\left\{F\big(b(x)\big) - F\big(a(x)\big)\right\} = \overbrace{F'}^{f}\big(b(x)\big)b'(x) - \overbrace{F'}^{f}\big(a(x)\big)a'(x)$$

$$\boxed{= f\big(b(x)\big)b'(x) - f\big(a(x)\big)a'(x)} \; .$$

Note que essa fórmula:

i] com $a(x) = a$ (const.) e $b(x) = x$ torna-se $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$: o TFC-I.

ii] é um caso particular da *fórmula de Leibniz da derivada de integral definida* , dada (sem demonstração e sem as condições para a sua validade) por

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt + f\big[x,b(x)\big]b'(x) - f\big[x,a(x)\big]b'(x) \; ,$$

na qual, em contraste com a anterior, a função f no integrando depende de duas variáveis: t (a variável de integração) e x (a variável da função que resulta da integração, em relação à qual a derivada é calculada).

Exemplos de aplicação (da primeira fórmula acima, menos genérica):

1) $\displaystyle y = \int_{-43}^{x} \frac{dt}{5+t^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\int_{-43}^{x} \frac{dt}{5+t^4} = \frac{1}{5+x^4}$

2) $y = \int_0^x |v|\,dv \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = |x|$

Os resultados nesses dois exemplos acima seguem *diretamente* do próprio TFC-I, mas não os seguintes.

3) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_3^{x^2} (5t+7)^{25} dt = (5x^2+7)^{25}(2x)$

4) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2+1}^{2} \sqrt[3]{u-1}\,du = 0 - \sqrt[3]{x^2+1-1}\,(2x) = -2x\sqrt[3]{x^2}$

5) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^3}^{x-x^2} \sqrt{t^3+1}\,dt = \sqrt{(x-x^2)^3+1}\,(1-2x) - \sqrt{(x^3)^3+1}\,(3x^2)$

6) $$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_{-x}^{x} \operatorname{sen} t^2 dt}{x^3} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-x}^{x} \operatorname{sen} t^2 dt}{d(x^3)/dx} = \lim_{x\to 0}\frac{[\operatorname{sen} x^2](1) - [\operatorname{sen}(-x)^2](-1)}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x^2 + \operatorname{sen} x^2}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen} x^2}{3x^2} \overset{\theta = x^2}{=} \frac{2}{3}\overbrace{\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}}^{1} = \frac{2}{3}$$

Conhecendo-se uma primitiva da função no integrando, em vez de usar a fórmula acima, podemos obviamente efetuar primeiramente a integral definida e depois derivar o resultado, embora não haja vantagem nesse procedimento; resolvamos por essa maneira o problema no Exemplo 3 novamente:

$$\frac{d}{dx}\int_3^{x^2} (5t+7)^{25} dt = \frac{d}{dx}\left[\frac{(5t+7)^{26}}{130}\right]_3^{x^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{(5x^2+7)^{26} - 22^{26}}{130}\right]$$

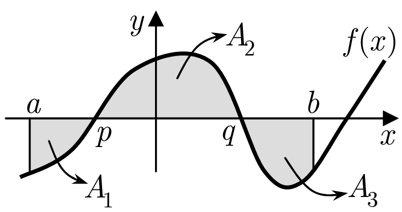
$$= \frac{26(5x^2+7)^{25}(10x)}{130} = 2x(5x^2+7)^{25}\ .$$

Esse modo já não seria aconselhável no caso do Exemplo 5, por causa da dificuldade de se calcular a integral indefinida $\int \operatorname{sen} t^2 dt$.

1.7 Cálculo de Áreas de Regiões Planas

1.7.1 Área entre o eixo x e o gráfico da função

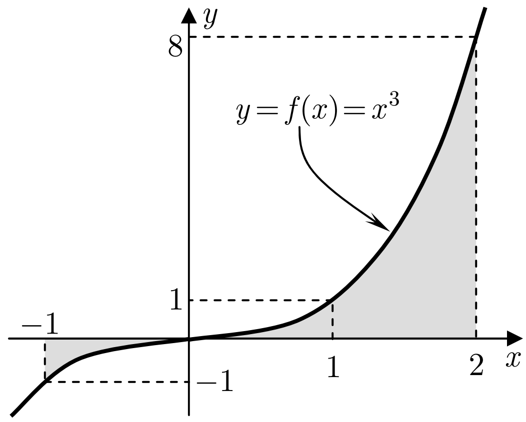
Considere a área hachurada $A = A_1 + A_2 + A_3$ na figura ao lado; trata-se da área da região limitada pelo intervalo $[a, b]$ do eixo x e o gráfico da função $f(x)$. Essa área não é dada pela integral $\int_a^b f(x)\,dx = -A_1 + A_2 - A_3$, mas por



$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \underbrace{\left[-\int_a^p f(x)\,dx\right]}_{A_1} + \underbrace{\left[\int_p^q f(x)\,dx\right]}_{A_2} + \underbrace{\left[-\int_q^b f(x)\,dx\right]}_{A_3}.$$

Exemplos:

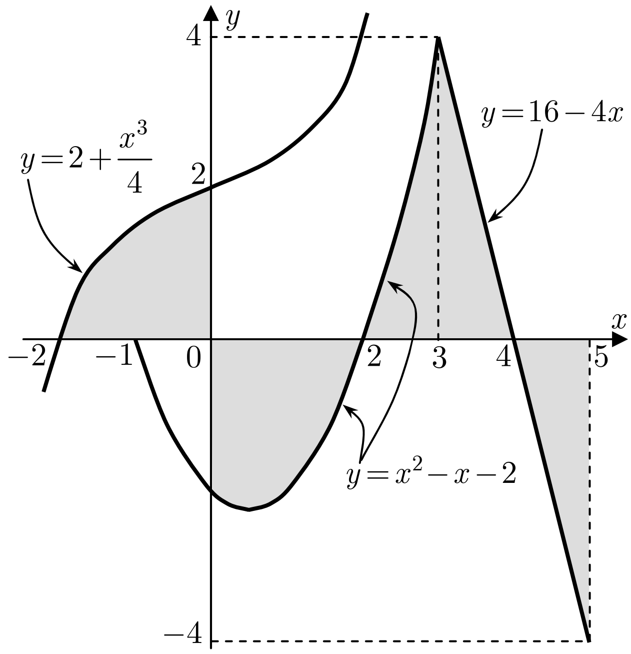
1) Cálculo da área A (hachurada à direita) desde o eixo x até o gráfico da função $f(x) = x^3$ no intervalo de $x = -1$ a $x = 2$:



$$A = -\int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{2} x^3 dx = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{16}{4} = \frac{17}{4} \text{ unidade de área (u.a.)}$$

2) Idem (área A hachurada à direita), de $x = -2$ a $x = 5$, para esta função:



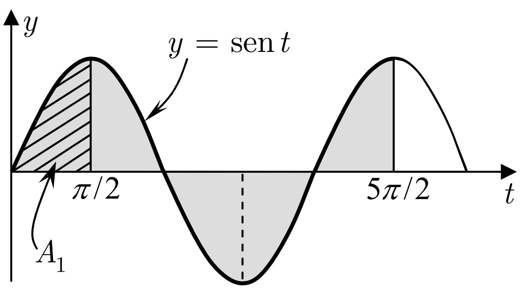
$$f(x) = \begin{cases} 2 + (x^3/4) & (x < 0) \\ x^2 - x - 2 & (0 \leqslant x < 3) \\ 16 - 4x & (3 \leqslant x) \end{cases}$$

$$A = \int_{-2}^{0} \left(2 + \frac{x^3}{4}\right) dx - \int_{0}^{2} (x^2 - x - 2)\, dx$$

$$+ \int_{2}^{3} (x^2 - x - 2)\, dx + \int_{3}^{4} (16 - 4x)\, dx$$

$$- \int_{4}^{5} (16 - 4x)\, dx = \frac{73}{6} \text{ u.a.}$$

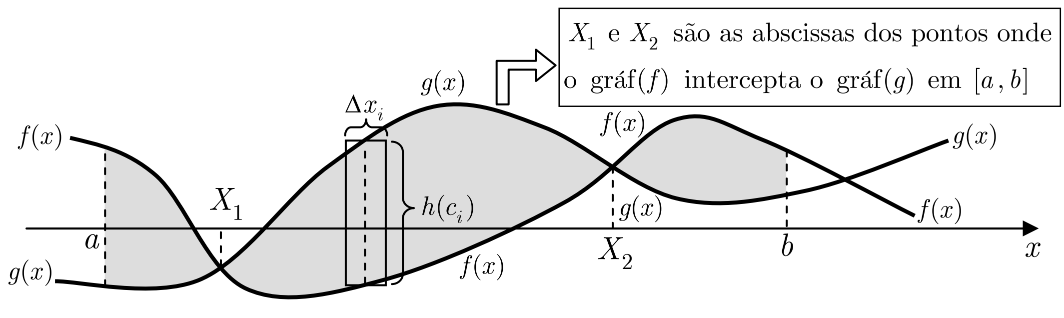
3) Idem, para $f(x) = \operatorname{sen}(5\pi x/4)$, $x \in [0, 2]$:



$$A = \int_{0}^{2} \left|\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{4}\right| dx \overset{t\,=\,\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{4}}{=} \frac{4}{5\pi} \underbrace{\int_{0}^{\frac{5\pi}{2}} |\operatorname{sen} t|\; dt}_{5A_1}$$

$$= \frac{4}{5\pi} \cdot 5 \underbrace{\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t\, dt\right]}_{A_1} = \frac{4}{\pi}\Big[-\cos t\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} \text{ u.a.}$$

1.7.2 Área entre dois gráficos



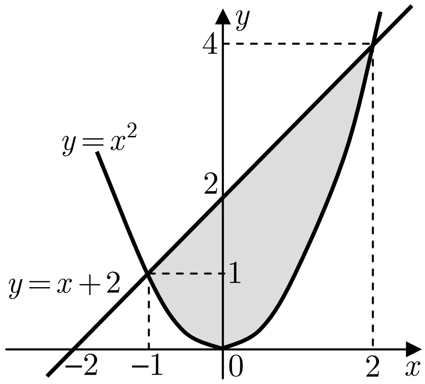
Na figura acima, considerando uma partição de $[a,b]$ como aquela na seç. 1.1.1, concluímos que a área hachurada é dada por

$$A \;=\; \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta x_i\,\to\,0}} \sum_{i\,=\,1}^{N} h(c_i)\,\Delta x_i\ , \quad \text{com} \;\; h(x) = |f(x)-g(x)|\ ,$$

isto é, por

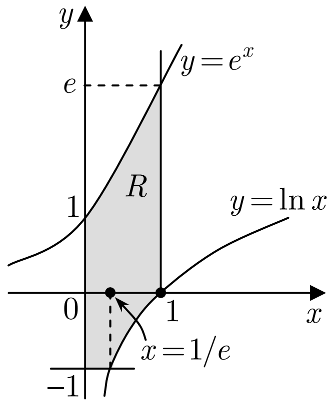
$$A = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx = \int_a^{x_1} [f(x)-g(x)]\,dx + \int_{x_1}^{x_2} [g(x)-f(x)]\,dx + \int_{x_2}^{b} [f(x)-g(x)]\,dx\ .$$

Nos exemplos a seguir, calcula-se a área $A(R)$ da região R dada:



1) R é a região hachurada à direita, entre o gráfico de $y = x+2$ e o de $y = x^2$.

$$A(R) = \int_{-1}^{2} \left[(x+2) - x^2\right] dx = \frac{9}{2}\ \text{u.a.}$$



2) R é a região à direita, limitada pelos gráficos de $y = e^x$, $y = \ln x$, $y = -1$, $x = 0$ e $x = 1$.

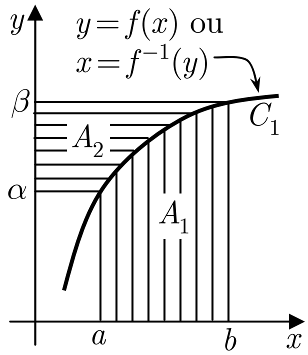
$$A(R) = \int_0^{1/e} \left[e^x - (-1)\right] dx + \int_{1/e}^{1} \left[e^x - \ln x\right] dx$$

$$= \Big[e^x + x\Big]_0^{1/e} + \Big[e^x - (x\ln x - x)\Big]_{1/e}^{1}$$

$$= \left[e^{1/e} + e^{-1}\right] + \left[e + 1 - e^{1/e} + (e^{-1}\ln e^{-1} - e^{-1})\right]$$

$$= e^{-1} + e - 2e^{-1} = \ (e - 1/e)\ \text{u.a.}$$

1.7.3 Opção de Cálculo da área por integrações em x ou y

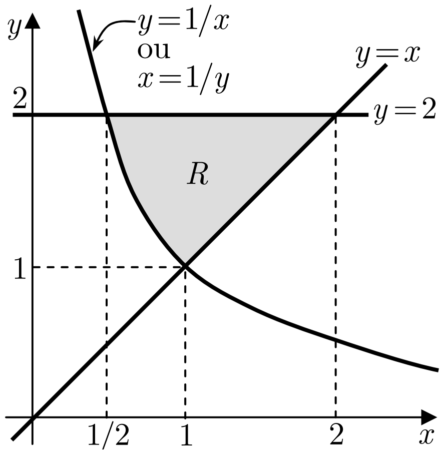


Uma equação envolvendo x e/ou y representa uma curva C no plano xy. Resolvendo y em termos de x (se possível), obtemos pelo menos uma relação funcional $y = f(x)$ que representa uma parte C_1 daquela curva (podendo tal parte ser toda a curva). Se f for inversível, essa porção C_1 de C também pode ser representada pela função $x = f^{-1}(y)$. As integrais de f e f^{-1}, contudo, têm significados distintos. A figura mostra que

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 \qquad \text{e} \qquad \int_\alpha^\beta f^{-1}(y)\,dy = A_2\ .$$

No cálculo de área entre gráficos de funções, há a opção de realizar as integrações na variável x ou y. Estude os dois exemplos seguintes de cálculo da área $A(R)$ da região R dada.

1) R é a região hachurada à direita, compreendida pelas curvas $y = x$, $xy = 1$ e $y = 2$:



$$A(R) = \int_{1/2}^{1} (2 - 1/x)\,dx + \int_{1}^{2} (2 - x)\,dx$$

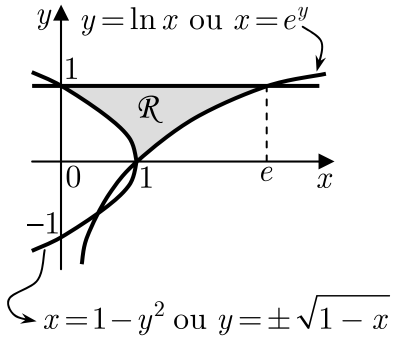
$$= \Big[2x - \ln x\Big]_{1/2}^{1} + \Big[2x - x^2/2\Big]_{1}^{2} = (3/2 - \ln 2) \text{ u.a.}$$

ou

$$A(R) = \int_{1}^{2} (y - 1/y)\,dy = \Big[y^2/2 - \ln y\Big]_{1}^{2}$$

$$= 2 - \ln 2 - 1/2 + 0 = (3/2 - \ln 2) \text{ u.a.}$$

2) R (à direita) é limitada por $y = \ln x$, $y = 1$ e $x = 1 - y^2$:



($y = \sqrt{1-x}$ corresponde à parte que delimita R)

$$A(R) = \int_{0}^{1} (1 - \sqrt{1-x}\,)\,dx + \int_{1}^{e} (1 - \ln x)\,dx$$

$$= \Big[x + (2/3)(1-x)^{3/2}\Big]_{0}^{1} + \Big[x - (x\ln x - x)\Big]_{1}^{e}$$

$$= 1 - 2/3 + e - 1 - 1 = (e - 5/3) \text{ u.a.}$$

ou

$$A(R) = \int_{0}^{1} \big[e^y - (1 - y^2)\big]\,dy = \Big[e^y - y + y^3/3\Big]_{0}^{1}$$

$$= e - 1 + 1/3 - 1 = (e - 5/3) \text{ u.a.}$$

Capítulo 2

Técnicas de Integração

2.1 Integração das Funções Trigonométricas e de $\tan^n x$

As integrais das seis funções trigonométricas são

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c \quad \text{e} \quad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c$$

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen} x}\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + c = -\ln|\csc x| + c$$

$$\begin{aligned}\int \sec x\,dx &= \int \sec x\,\frac{\tan x + \sec x}{\sec x + \tan x}\,dx = \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x}\,dx = \int \frac{(\sec x + \tan x)'}{\sec x + \tan x}\,dx \\ &= \ln|\sec x + \tan x| + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \csc x\,dx &= \int \csc x\,\frac{\cot x + \csc x}{\csc x + \cot x}\,dx = -\int \frac{-\csc x \cot x - \csc^2 x}{\csc x + \cot x}\,dx = -\int \frac{(\csc x + \cot x)'}{\csc x + \cot x}\,dx \\ &= -\ln|\csc x + \cot x| + c = \ln|\csc x - \cot x| + c\end{aligned}$$

As integrais de $\tan^n x$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ podem ser assim calculadas:

$$\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \tan x - x + c$$

$$\int \tan^3 x\,dx = \int (\tan x)(\overbrace{\sec^2 x - 1}^{\tan^2 x})\,dx = \underbrace{\int \tan x \sec^2 x\,dx}_{(1/2)\tan^2 x\ \ [*]} - \underbrace{\int \tan x\,dx}_{\text{já calculada}}$$

$$\int \tan^4 x\,dx = \int (\tan^2 x)(\sec^2 x - 1)\,dx = \underbrace{\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx}_{(1/3)\tan^3 x\ \ [*]} - \underbrace{\int \tan^2 x\,dx}_{\text{já calculada}}$$

$$\int \tan^5 x\,dx = \int (\tan^3 x)(\sec^2 x - 1)\,dx = \underbrace{\int \tan^3 x \sec^2 x\,dx}_{(1/4)\tan^4 x\ \ [*]} - \underbrace{\int \tan^3 x\,dx}_{\text{já calculada}} \text{ , e assim por diante.}$$

[*] Esses resultados são todos de integrais da forma $\int \tan^k x \sec^2 x\,dx$ que são assim calculadas:

$$\int \tan^k x \sec^2 x\,dx \underset{du = \sec^2 x dx}{\overset{u = \tan x}{=}} \int u^k du = \frac{u^{k+1}}{k+1} = \frac{\tan^{k+1} x}{k+1} \ .$$

Analogamente integramos $\cot^n x$:

$$\int \cot^2 x\,dx = \int (\csc^2 x - 1)\,dx = -\cot x - x + c$$

$$\int \cot^3 x\,dx = \int (\cot x)(\overbrace{\csc^2 x - 1}^{\cot^2 x})\,dx = \underbrace{\int \cot x \csc^2 x\,dx}_{-(1/2)\cot^2 x} - \underbrace{\int \cot x\,dx}_{\text{já calculada}} \ ,$$

e assim por diante, onde, para obter o resultado indicado na penúltima integral, substituímos $u = \cot x$ ($\Rightarrow \ du = -\csc^2 x\,dx$).

2.2 Integração por Partes

2.2.1 O método

Integrando $(uv)' = u'v + uv'$, obtemos $uv = \int u'v\,dx + \int uv'dx$, donde

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx} \ , \qquad \text{(I)}$$

ou, equivalentemente, substituindo $u'(x)dx = du$ e $v'(x)dx = dv$,

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}^{(*)} \ . \qquad \text{(II)}$$

O método da integração por partes consiste em, ao calcular $\int f(x)dx$, usar a fórmula (I), ou a (II), definindo adequadamente $u(x)$ e $v(x)$ de modo que $u(x)v'(x) = f(x)$ [caso se use (I)], ou u e dv de modo que $u\,dv = f\,dx$ [caso se use (II)], para expressar $\int f(x)dx$ em termos de uma integral mais simples: aquela que aparece no membro direito das fórmulas. Observe:

<u>Exemplo 1</u> - Cálculo de $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x\,dx$:

A fórmula (I) com $u(x) = x$ e $v'(x) = \operatorname{sen} x$ [$\Rightarrow u'(x) = 1$ e $v(x) = -\cos x$] fornece

$$\int \underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{v'(x)} dx \ = \ \underbrace{x}_{u(x)} (\underbrace{-\cos x}_{v(x)}) - \int \underbrace{1}_{u'(x)} (\underbrace{-\cos x}_{v(x)}) \ = \ -x\cos x + \operatorname{sen} x + c \ \blacksquare$$

Usemos agora a fórmula (II) com $u = x$ e $dv = \operatorname{sen} x\,dx$ [$\Rightarrow du = dx$ e $v = -\cos x$] :

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} x\,dx}_{dv} \ = \ \underbrace{x}_{u} (\underbrace{-\cos x}_{v}) - \int (\underbrace{-\cos x}_{v}) \underbrace{dx}_{du} \ = \ -x\cos x + \operatorname{sen} x + c \ \blacksquare$$

(*) ou $\int p\,dq = p\,q - \int q\,dp$ (a escolha das letras não importa)

Exemplo 2 - Cálculo de $\displaystyle\int x \ln x \, dx$:

$$\int \underbrace{x}_{v'} \underbrace{\ln x}_{u} \, dx \;=\; \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} \, dx \;=\; \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx \;=\; \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c \;\blacksquare$$

Exemplo 3 - Cálculo de $\displaystyle\int \ln x \, dx$:

$$\int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} \;=\; \underbrace{(\ln x)}_{u} \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{du} \;=\; x \ln x - \int dx \;=\; x \ln x - x + c \;\blacksquare$$

2.2.2 Integrações sucessivas por partes

2.2.2.1 O método

A integração por partes transforma o problema de se calcular $\int u \, dv$ no de calcular $\int v \, du$, devendo esta última integral ser mais simples, mas que, às vezes, para ser efetuada, ainda se torna necessária outra integração por partes. Vejamos:

Exemplo 1 :

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^{2x}}_{v'} \;=\; \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{v} - \underbrace{\int x \, e^{2x} dx}_{[*]} \quad .$$

$$[*] \quad \int \underbrace{x}_{p} \underbrace{e^{2x}}_{q'} dx \;=\; \underbrace{x}_{p} \underbrace{\frac{e^{2x}}{2}}_{q} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \;=\; \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \;.$$

$$\therefore \; \int x^2 e^{2x} dx \;=\; x^2 \frac{e^{2x}}{2} - \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right) + c \;\blacksquare$$

Exemplo 2 :

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\cos x}_{v'} \;&=\; \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{v} - \left[\int \underbrace{e^x}_{p} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{q'} dx \right] \\
&=\; e^x \operatorname{sen} x - \left[\underbrace{e^x}_{p} \underbrace{(-\cos x)}_{q} + \int e^x \cos x \, dx \right] \\
&=\; e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) - \int e^x \cos x \, dx
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 2 \int e^x \cos x \, dx = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) \quad \Rightarrow \quad \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + c \;\blacksquare$$

2.2.2.2 Integrais das potências ímpares positivas de $\sec x$

a) $\displaystyle\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$ ■ (v. seç. 2.1)

b) $$\int \sec^3 x\,dx = \int \overbrace{\sec x}^{u}\,\overbrace{\sec^2 x}^{v'}\,dx = \overbrace{\sec x}^{u}\,\overbrace{\tan x}^{v} - \int \overbrace{\tan^2 x}^{\sec^2 x - 1}\,\sec x$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x + \int \sec x\,dx \ .$$
$$\Rightarrow\ 2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x + \underbrace{\int \sec x\,dx}_{\text{já calculada}}$$
$$\Rightarrow\ \int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\big(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\big) + c \ ■$$

c) $$\int \sec^5 x\,dx = \int \overbrace{\sec^3 x}^{u}\,\overbrace{\sec^2 x}^{v'}\,dx = \overbrace{\sec^3 x}^{u}\,\overbrace{\tan x}^{v} - 3\int \overbrace{\tan^2 x}^{\sec^2 x - 1}\,\sec^3 x$$
$$= \sec^3 x \tan x - 3\int \sec^5 x + 3\int \sec^3 x\,dx \ .$$
$$\Rightarrow\ 4\int \sec^5 x\,dx = \sec^3 x \tan x + 3\cdot \underbrace{\int \sec^3 x\,dx}_{\text{já calculada}}$$
$$\Rightarrow\ \int \sec^5 x\,dx = \frac{1}{4}\left(\sec^3 x \tan x + 3\cdot\frac{\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|}{2}\right) + c \ ■$$

2.3 Integração de Produtos de Funções Trigonométricas

Nesta seção 2.3, por simplicidade verbal, ao se dizer que um número n é par ou ímpar, está implícito que $n \geqslant 0$.

2.3.1 Integrais da forma $\int \operatorname{sen}^p x \cos^q x\,dx$

2.3.1.1 Caso de p ou q ímpar

Usamos a identidade $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ para, modificando a potência ímpar, reescrever o integrando na forma $f(\cos x)\operatorname{sen} x$ ou $f(\operatorname{sen} x)\cos x$ e, em seguida, segundo a seç. 1.5.4, mudar para a variável $u = \cos x$ ou $u = \operatorname{sen} x$, respectivamente; observe:

Exemplo 1 :

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cos x\,dx = \int \underbrace{(1 - \operatorname{sen}^2 x)}_{f(\operatorname{sen} x)} \cos x\,dx \overset{u = \operatorname{sen} x}{\underset{du = \cos x\,dx}{=}} \int (1 - u^2)du$$
$$= u - \frac{u^3}{3} + c = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c \ ■$$

Exemplo 2 :

$$\int \operatorname{sen}^2 4x \cos^5 4x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 4x (\cos^2 4x)^2 \cos 4x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 4x (1 - \operatorname{sen}^2 4x)^2 \cos 4x\, dx$$

$$\underset{du = 4\cos 4x\, dx}{\overset{u = \operatorname{sen} 4x}{=}} \int u^2 (1-u^2)^2 \frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int (u^2 - 2u^4 + u^6) du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^3}{3} - \frac{2u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + c$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{sen}^3 4x}{3} - \frac{2\operatorname{sen}^5 4x}{5} + \frac{\operatorname{sen}^7 4x}{7}\right) + c \;\blacksquare$$

Exemplo 3 :

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3(2x+1)}{\sqrt{\cos(2x+1)}}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2(2x+1)}{\sqrt{\cos(2x+1)}} \operatorname{sen}(2x+1)\, dx$$

$$= \int \frac{\overbrace{1-\cos^2(2x+1)}^{f(\cos(2x+1))}}{\sqrt{\cos(2x+1)}} \operatorname{sen}(2x+1)\, dx \quad \underset{\frac{du}{dx} = -2\operatorname{sen}(2x+1)}{\overset{u = \cos(2x+1)}{=}} \quad \int \frac{1-u^2}{\sqrt{u}} \cdot \frac{-du}{2}$$

$$= \int \frac{u^{3/2} - u^{-1/2}}{2} du = \frac{u^{5/2}}{5} - u^{1/2} + c = \frac{\left[\cos(2x+1)\right]^{5/2}}{5} - \sqrt{\cos(2x+1)} + c \;\blacksquare$$

2.3.1.2 Caso de p e q pares

Reduzimos o grau da potência pela metade eliminando $\operatorname{sen}^2 x$ e $\cos^2 x$ por meio das identidades trigonométricas $\operatorname{sen}^2 x = (1-\cos 2x)/2$ e $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$ (*) ; observe:

Exemplo 1 :

$$\int \cos^2 ax\, dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2ax) dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{2a}\right) + c \;\blacksquare$$

Exemplo 2 :

$$\int \operatorname{sen}^4 2x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 2x)^2 dx = \int \left[\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\right]^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 4x + \underbrace{\cos^2 4x}_{[\$]}) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \frac{\operatorname{sen} 4x}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(x + \frac{\operatorname{sen} 8x}{8}\right)}_{[\$]}\right] + c \;\blacksquare \qquad \left(^{[\$]} \text{ usou-se o Exemplo 1 com } a = 4\right)$$

(*) Que são deduzidas a partir da identidade trigonométrica $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \begin{cases} 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \\ \text{ou} \\ 2\cos^2 x - 1 \end{cases}$

Exemplo 3 :

$$\int \operatorname{sen}^4 kx \cos^2 kx \, dx = \int \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2kx)\right]^2 \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2kx)\right] dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - 2\cos 2kx + \cos^2 2kx)(1+\cos 2kx) dx = \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2kx - \underbrace{\cos^2 2kx}_{[\&]} + \underbrace{\cos^3 2kx}_{[\#]}) dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[x - \frac{\operatorname{sen} 2kx}{2k} - \underbrace{\frac{1}{2}\left(x + \frac{\operatorname{sen} 4kx}{4k}\right)}_{[\&]} + \underbrace{\frac{1}{2k}\left(\operatorname{sen} 2kx - \frac{\operatorname{sen}^3 2kx}{3}\right)}_{[\#]}\right] + c \;\blacksquare$$

[&] Ex. 1 com $a = 2k$

[#] $\displaystyle\int \cos^3 2kx \, dx \overset{y=2kx}{=} \frac{1}{2k}\underbrace{\int \cos^3 y \, dy}_{\text{Ex. 1 da seç. 2.3.1.1}} = \frac{1}{2k}\left(\operatorname{sen} y - \frac{\operatorname{sen}^3 y}{3}\right) = \frac{1}{2k}\left(\operatorname{sen} 2kx - \frac{\operatorname{sen}^3 2kx}{3}\right)\Bigg\}$

2.3.2 Integrais da forma $\int \tan^p x \sec^q x \, dx$ ou $\int \cot^p x \csc^q x \, dx$

Como $\tan^p x \sec^q x = \operatorname{sen}^{\boldsymbol{p}} x \cos^{-(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})} x$ e $\cot^p x \csc^q x = \operatorname{sen}^{-(p+q)} x \cos^p x$, então, com p ou $-(p+q)$ ímpar, temos o caso já estudado na seç. 2.3.1.1, como, por exemplo:

$$\int \tan^3 2x \sec^4 2x \, dx = \overbrace{\int \operatorname{sen}^{\mathbf{3}} 2x \cos^{-\mathbf{7}} 2x \, dx}^{\boldsymbol{p}=3 \text{ (ímpar)}} \; , \qquad \int \tan^2 x \sec^{-7} x \, dx = \overbrace{\int \operatorname{sen}^{\mathbf{2}} x \cos^{\mathbf{5}} x \, dx}^{-(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})=5 \text{ (ímpar)}} \; .$$

E, com p e $-(p+q)$ pares, temos o caso já estudado na seç. 2.3.1.2; por exemplo,

$$\int \tan^4 2x \sec^{-4} 2x \, dx = \int \operatorname{sen}^4 2x \, dx \quad \text{e} \quad \int \tan^4 kx \sec^{-6} kx \, dx = \int \operatorname{sen}^4 kx \cos^2 kx \, dx$$

são os Exemplos 2 e 3 da seç. 2.3.1.2, respectivamente.

Pois bem, vejamos então alguns casos nos quais a integral em estudo não pode ser calculada como uma integral de $\int \operatorname{sen}^p x \cos^q x \, dx$ já considerada na seç. 2.3.1.

O método delineado abaixo para a integral $\int \tan^p x \sec^q x \, dx$ aplica-se igualmente para a integral $\int \cot^p x \csc^q x \, dx$, bastando substituir *tan* por *cot* e *sec* por *csc*, e corrigir as diferenças nos sinais oriundas da diferença entre as regras de diferenciação:

$$(\tan x)' = \sec^2 x \;\text{ e }\; (\sec x)' = \sec x \tan x \cdots\textit{versus}\cdots (\cot x)' = -\csc^2 x \;\text{ e }\; (\csc x)' = -\csc x \cot x \; .$$

2.3.2.1 Caso de p genérico e $q = 2k+2 > 0$ (secante com expoente par não nulo)

$$\int \tan^p x \sec^{2k+2} x \, dx = \int \tan^p x (\sec^2 x)^k \sec^2 x \, dx$$

$$= \int \underbrace{\tan^p x (1+\tan^2 x)^k}_{f(\underbrace{\tan x}_{u})} \underbrace{\sec^2 x \, dx}_{du} = \underbrace{\int u^p (1+u^2)^k du}_{\text{integral de potências}} \; .$$

Na seç. 2.2.2.2 vimos como integrar as potências ímpares da $\sec x$. O caso de potências pares inclui-se acima, correspondendo a $p = 0$; o primeiro exemplo é sobre esse caso.

Exemplo 1 :

$$\int \sec^4 x\,dx = \int \sec^2 x \sec^2 x\,dx = \int (\underbrace{1+\tan^2 x}_{f(\tan x)})\ \sec^2 x\,dx \quad \overset{u=\tan x}{\underset{du=\sec^2 x\,dx}{=}}$$

$$= \int (1+u^2)\,du = u + \frac{u^3}{3} + c = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + c \ \blacksquare$$

Exemplo 2 :

$$\int \tan^4 x \sec^4 x\,dx = \int \underbrace{\tan^4 x\ \overbrace{\sec^2 x}^{1+\tan^2 x}}_{f(\tan x)}\ \sec^2 x\,dx \quad \overset{u=\tan x}{\underset{du=\sec^2 x\,dx}{=}} \quad \int u^4(1+u^2)\,du$$

$$= \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c = \frac{\tan^5 x}{5} + \frac{\tan^7 x}{7} + c \ \blacksquare$$

Exemplo 3 :

$$\int \sqrt{\tan x}\ \sec^6 x\,dx = \int \underbrace{\tan^{1/2} x\ \overbrace{\sec^4 x}^{(1+\tan^2 x)^2}}_{f(\tan x)}\ \sec^2 x\,dx \quad \overset{u=\tan x}{\underset{du=\sec^2 x\,dx}{=}} \quad \int u^{1/2}\,(1+u^2)^2\,du$$

$$= \int (u^{1/2} + 2u^{5/2} + u^{9/2})du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + \frac{2u^{7/2}}{7/2} + \frac{u^{11/2}}{11/2} + c = \frac{2\tan^{3/2} x}{3} + \frac{4\tan^{7/2} x}{7} + \frac{2\tan^{11/2} x}{11} + c \ \blacksquare$$

Exemplo 4 :

$$\int \csc^6 7x\,dx = \int \csc^4 7x \csc^2 7x\,dx = \int \underbrace{(1+\cot^2 7x)^2}_{f(\cot 7x)} \csc^2 7x\,dx \quad \overset{u=\cot 7x}{\underset{du=-7\csc^2 7x\,dx}{=}} \quad \int (1+u^2)^2\ \frac{-du}{7}$$

$$= -\frac{1}{7}\int (1+2u^2+u^4)du = -\frac{1}{7}\left(u + \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right) + c = -\frac{\cot 7x}{7} - \frac{2\cot^3 7x}{21} - \frac{\cot^5 7x}{35} + c \ \blacksquare$$

2.3.2.2 Tangente com expoente par e secante com expoente ímpar

Neste caso, a integral pode ser transformada num somatório de integrais de potências ímpares da secante (estudadas na seç. 2.2.2.2); observe:

$$\int \tan^{2k} x \sec^{2l+1} x\,dx \ = \int (\tan^2 x)^k \sec^{2l+1} x\,dx$$

$$= \int \underbrace{(\sec^2 x - 1)^k}_{\substack{\text{só potências}\\ \text{pares de sec}}}\ \underbrace{(\sec x)^{2l+1}}_{\substack{\text{potência ím-}\\ \text{par de } \sec x}}\ dx \quad \left\{ = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} C_k^j \int (\sec x)^{\overbrace{[\,2(j+l)+1\,]}^{\text{ímpares}}} dx \right\} .$$

Por exemplo,

$$\int \tan^4 x \sec^3 x\,dx = \int (\tan^2 x)^2 \sec^3 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^3 x\,dx$$

$$= \int (\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1)\sec^3 x\,dx = \int \sec^7 x\,dx - 2\int \sec^5 x\,dx + \int \sec^3 x\,dx\ ,$$

uma soma de integrais do tipo estudado na seç. 2.2.2.2 .

2.3.3 As integrais $\int \operatorname{sen} ax \cos bx\, dx$, $\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\, dx$ e $\int \cos ax \cos bx\, dx$

Calculamos essas integrais usando as fórmulas (*)

$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(A+B) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(A-B) \ , \tag{2.1}$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\cos(A+B) + \frac{1}{2}\cos(A-B) \ , \tag{2.2}$$

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\cos(A-B) - \frac{1}{2}\cos(A+B) \ . \tag{2.3}$$

Exemplo 1

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 4x\, dx = \int \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen} 7x + \frac{1}{2}\underbrace{\operatorname{sen}(-x)}_{-\operatorname{sen} x}\right] dx = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 7x}{7}\right) + \frac{1}{2}(\cos x) + c \ \blacksquare$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 3x \cos 4x\, dx &= \int \frac{1-\cos 6x}{2}\cos 4x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x - \cos 6x \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx - \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{2}\cos 10x + \frac{1}{2}\cos 2x\right] dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{sen} 10x}{10}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right) + c \ \blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 3

$$\int \underbrace{\operatorname{sen} 3x \cos 3x}_{2\operatorname{sen} 6x} \cos 4x\, dx = 2\int \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen} 10x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right] = -\frac{\cos 10x}{10} - \frac{\cos 2x}{2} + c \ \blacksquare$$

Exemplo 4

$$\int \operatorname{sen} 2x \underbrace{\cos 3x \cos 4x}_{\frac{1}{2}\cos 7x + \frac{1}{2}\cos(-x)}\ dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{\operatorname{sen} 2x \cos 7x}_{\frac{1}{2}\operatorname{sen} 9x + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(-5x)}\ dx + \frac{1}{2}\int \underbrace{\operatorname{sen} 2x \cos x}_{\frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x}\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{\cos 9x}{9} + \frac{\cos 5x}{5}\right] + \frac{1}{4}\left[-\frac{\cos 3x}{3} - \cos x\right] \ \blacksquare$$

(*) assim deduzidas a partir das fórmulas do seno e cosseno da soma e da diferença:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(A+B) &= \operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B + \cos A && (1)\\ \operatorname{sen}(A-B) &= \operatorname{sen} A \cos B - \operatorname{sen} B + \cos A && (2)\\ \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B && (3)\\ \cos(A-B) &= \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B && (4)\end{aligned}$$

Da soma eq.(1) + eq.(2), obtemos $\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B) = 2\operatorname{sen} A \cos B$, donde segue a fórmula em (2.1).
Da soma eq.(3) + eq.(4), obtemos $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A \cos B$, donde segue a fórmula em (2.2).
Da diferença eq.(4) − eq.(3), obtemos $\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$, seguindo a fórmula em (2.3).

2.4 Integração por Substituição Trigonométrica

O cálculo da integral de uma função envolvendo uma raiz quadrada da forma

$$\sqrt{a^2 - x^2}\ , \quad \sqrt{x^2 + a^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{x^2 - a^2}$$

pode tornar-se mais simples mudando-se a variável x para a variável θ de modo que essas raízes quadradas se transformem em expressões mais simples mediante o uso subsequente das identidades trigonométricas $1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ ou $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$. Estudemos cada um desses casos separadamente, sempre considerando $a > 0$ (sem perda de generalidade):

2.4.1 Integrais envolvendo $\sqrt{a^2 - x^2}$, com $x \in [-a, a]$

Façamos a mudança de variável

$$x = a\operatorname{sen}\theta \ .$$

Podemos considerar que, ao intervalo $x \in [-a, a]$, corresponda o intervalo $\theta \in [-\pi/2\,,\,\pi/2]$ (4º e 1º quadrantes), onde a correspondência é biunívoca e, em particular, $\cos\theta \geqslant 0$. Logo, temos, por exemplo, que

Exemplo 1 :

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta}}_{a\sqrt{\cos^2\theta}\,=\,a\cos\theta\,(\geqslant 0)}\ a\cos\theta\,d\theta = a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = a^2\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{2} \ \blacksquare$$

Também a mudança de variável

$$x = a\cos\theta$$

leva a uma simplificação equivalente. Nesse caso, considerando $\theta \in [0, \pi]$ (1º e 2º quadrantes), a correspondência entre x e θ é biunívoca (a $x = a$ corresponde $\theta = \pi$, e a $x = a$, $\theta = 0$) e, em particular, $\operatorname{sen}\theta \geqslant 0$. Vejamos:

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_{\pi}^{0} \underbrace{\sqrt{a^2 - a^2\cos^2\theta}}_{a\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta}\,=\,a\operatorname{sen}\theta\,(\geqslant 0)}\ (-a\operatorname{sen}\theta)d\theta = -a^2\int_{\pi}^{0} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = -a^2\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4}\right]_{\pi}^{0} = \frac{\pi a^2}{2} \ \blacksquare$$

No exemplo seguinte, consideramos essa mesma integral, mas indefinida, com $x \in [-a, a]$:

Exemplo 2 :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \overset{x\,=\,a\operatorname{sen}\theta}{=} \int (a\cos\theta)(\overbrace{a\cos\theta\,d\theta}^{dx}) = a^2\int \cos^2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{2}\left(\theta + \frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}\right) + c$$

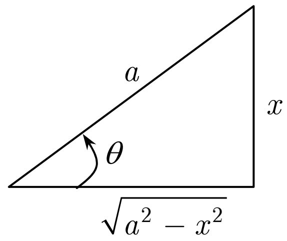
$$\overset{(\#)}{=} \frac{a^2}{2}\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) + c \ \blacksquare$$

Essa primitiva pode obviamente ser usada para calcular novamente a integral definida no Exemplo 1:

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left[\frac{a^2}{2}\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)\right]_{-a}^{a} = \frac{a^2}{2}\big[\underbrace{\operatorname{arcsen}1}_{\pi/2} - \underbrace{\operatorname{arcsen}(-1)}_{-\pi/2}\big] = \frac{\pi a^2}{2}\ .$$

Expliquemos a passagem indicada acima por (#), em que se retorna à variável original x:

Se $x = a\,\mathrm{sen}\theta$ então $\theta = \ \mathrm{arcsen}(x/a)$. Além disso, qualquer função trigonométrica de variável θ pode ser expressa em função de x, o que se realiza facilmente por meio da figura à direita. Nela vemos um triângulo retângulo no qual vale a equação $x = a\,\mathrm{sen}\theta$. Como o outro cateto deve medir $\sqrt{a^2 - x^2}$, obtemos $\cos\theta = \sqrt{a^2 - x^2}\,/a$. Assim,



$$\frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2} = \mathrm{sen}\theta \cdot \cos\theta = \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} = \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \ .$$

Considere as expressões das seis funções trigonométricas em termos de x que se obtêm por meio desse triângulo retângulo:

$$\mathrm{sen}\theta = 1/\csc\theta = x/a\ , \quad \cos\theta = 1/\sec\theta = \sqrt{a^2 - x^2}\,/a\ , \quad \tan\theta = 1/\cot\theta = x/\sqrt{a^2 - x^2}\ .$$

Embora só para valores positivos de x podemos construir aquele triângulo retângulo, ou, mais precisamente, para $x = a\,\mathrm{sen}\theta \in [0, a]$ (*), o que ocorre com θ no 1º quad. (†), é fácil verificar que, para $x \in [-a, 0]$, isto é, com θ no 4º quad., as relações acima continuam válidas, fornecendo, também neste quadrante, os sinais das funções trigonométricas corretamente.

Exemplo 3 :

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\,dx \overset{x = a\,\mathrm{sen}\theta}{\underset{dx\ = a\cos\theta\,d\theta}{=}} \int \frac{a\cos\theta}{a^2\,\mathrm{sen}^2\theta}\,a\cos\theta\,d\theta = \int \cot^2\theta\,d\theta = \int (\csc^2\theta - 1)d\theta$$
$$= \ -\cot\theta - \theta + c = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \ \mathrm{arcsen}\frac{x}{a} + c \ \blacksquare$$

Exemplo 4 :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 4x - 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-[x^2 + 4x + 3]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-[(x+2)^2 - 1]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x+2)^2}}$$
$$\overset{x+2\,=\,\mathrm{sen}\theta}{\underset{dx\,=\,\cos\theta\,d\theta}{=}} \int \frac{\cos\theta\,d\theta}{\underbrace{\sqrt{1 - \ \mathrm{sen}^2\theta}}_{\cos\theta}} = \int d\theta = \theta + c = \ \mathrm{arcsen}(x+2) + c \ \blacksquare$$

Um modo mais fácil de calcular essa integral é o seguinte:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 4x - 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x+2)^2}} \overset{x+2\,=\,u}{\underset{dx\,=\,du}{=}} \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \ \mathrm{arcsen}\,u + c = \ \mathrm{arcsen}(x+2) + c\ .$$

2.4.2 Integrais envolvendo $\sqrt{x^2 + a^2}$, com $x \in \mathbb{R}$

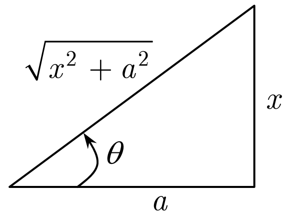
Façamos a transformação de variável

$$x = a\tan\theta \ .$$

Podemos admitir que $\theta \in (-\pi/2\,,\,\pi/2)$ (4º e 1º quadrantes), onde a transformação é biunívoca e, em particular, $\sec\theta > 0$ ($\geqslant 1$, na verdade).

(*) Estamos incluindo os casos degenerados desse triângulo num segmento de reta de tamanho a.

(†) Consideramos cada ângulo $\theta = 0$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$ e 2π como pertencente aos dois quadrantes dos quais θ é o ângulo limítrofe.



Antes de prosseguir, diga-se que, usando um triângulo retângulo como o da figura à direita (coerente com a mudança de variável acima) para calcular, em função de x, as demais funções trigonométricas, verificamos que as expressões obtidas (v. abaixo) são válidas tanto no 1º quad. (correspondente a $x \geqslant 0$) quanto no 4º (associado a $x \leqslant 0$):

$\tan\theta = 1/\cot\theta = x/a$, $\quad \cos\theta = 1/\sec\theta = a/\sqrt{x^2+a^2}$, $\quad \mathrm{sen}\theta = 1/\csc\theta = x/\sqrt{x^2+a^2}$.

Em muitas integrais, essas relações aparecem com o x substituído por outra expressão de x [e.g., $2(x-5)$ no Exemplo 7 abaixo].

Exemplo 5 :

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{x^2+a^2}\,dx \;=\; \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \underbrace{\sqrt{a^2\tan^2\theta + a^2}}_{a\sqrt{\sec^2\theta}\,=\,a\sec\theta}\; a\sec^2\theta\,d\theta \;=\; a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^3\theta\,d\theta \;=$$

$$\frac{a^2}{2}\Big[\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta|\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} \;=\; \frac{a^2}{2}\Big[\Big\{\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\Big\} - \Big\{\sqrt{2}\,(-1)+\ln(\sqrt{2}-1)\Big\}\Big]$$

$$= \;\frac{a^2}{2}\left[2\sqrt{2}+\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right] \;=\; \frac{a^2}{2}\big[2\sqrt{2}+\ln(3+2\sqrt{2}\,)\big] \;\blacksquare$$

Exemplo 6 :

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} \;=\; \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+1}} \;\overset{x-2\,=\,\tan\theta}{\underset{dx\,=\,\sec^2\theta}{=}}\; \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec\theta}$$

$$= \;\Big[\ln|\sec\theta+\tan\theta|\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \;=\; \ln(2+\sqrt{3}\,) - \ln(\sqrt{2}+1) \;\blacksquare$$

Exemplo 7 : Calculamos, com $x \in \mathbb{R}$, a integral indefinida

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-40x+109}} \;=\; \int \frac{dx}{\sqrt{[2(x-5)]^2+9}} \;\overset{2(x-5)\,=\,3\tan\theta}{\underset{2dx\,=\,3\sec^2\theta\,d\theta}{=}}\; \int \underbrace{\left[\frac{(3/2)\sec^2\theta}{3\sec\theta}\right]}_{(1/2)\sec\theta} d\theta$$

$$= \;\frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + c \;\overset{(\#)}{=}\; \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2-40x+109}}{3} + \frac{2(x-5)}{3}\right| + c$$

$$= \;\frac{1}{2}\ln\big[\sqrt{4x^2-40x+109}+2(x-5)\big] + c' \;\blacksquare$$

onde definimos $(-1/2)\ln 3 + c = c'$ e usamos a figura abaixo para nos auxiliar a realizar a passagem (#). O triângulo retângulo é tal que $\tan\theta = 2(x-5)/3$; logo $\sec\theta =$ (hipotenusa)/(cateto adjacente) $= \sqrt{4x^2-40x+109}\,/\,3 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.

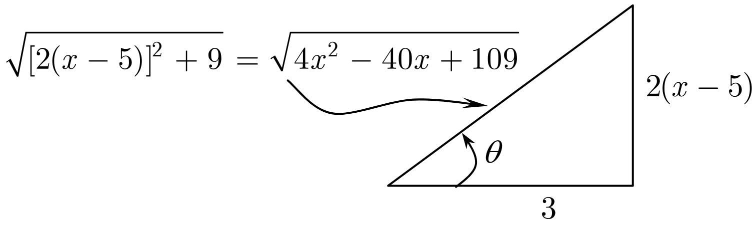
Uma alternativa à transformação $x = a\tan\theta$ é a mudança de variável

$$x = a\cot\theta \;\; ,$$

admitindo $\theta \in (0,\pi)$ (1º e 2º quadrantes), onde a transformação é biunívoca e, em particular, $\csc\theta > 0$.

Exemplo 8 :

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \;\overset{x\,=\,\cot\theta}{\underset{dx\,=\,-\csc^2\theta\,d\theta}{=}}\; \int_{\pi-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{-\csc^2\theta\,d\theta}{\csc\theta} \;=\; \ln|\csc\theta+\cot\theta|\,\Big|_{\pi-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \;=\; \ln(2+\sqrt{3}\,)-\ln(\sqrt{2}-1) \;\blacksquare$$



2.4.3 Integrais envolvendo $\sqrt{x^2-a^2}$, com $x \leqslant -a$ ou $x \geqslant a$ (i.e., $|x| \geqslant a$)

Convém fazer a mudança de variável

$$x = a\sec\theta \ .$$

Podemos considerar que, aos possíveis valores de x, isto é, $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$, correspondam os valores de θ no intervalo $[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ (1º e 2º quadrantes), onde a correspondência é biunívoca, ressaltando, em particular, que a função $\tan\theta$ é preponderantemente positiva ou negativa, conforme θ pertença ao 1º ou 2º quadrante, respectivamente.

<u>Exemplo 9</u> :

<u>a)</u> $$\int_{5\sqrt{2}}^{10} \frac{(x-5)\,dx}{\sqrt{x^2-25}} \underset{dx = 5\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\overset{x=5\sec\theta}{=}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(5\sec\theta-5)\,5\sec\theta\,\cancel{\tan\theta}\,d\theta}{5\,\cancel{\tan\theta}} = 5\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2\theta - \sec\theta)d\theta$$

$$= 5\Big[\tan\theta - \ln|\sec\theta+\tan\theta|\Big]_{\pi/4}^{\pi/3} = 5\big[\sqrt{3} - \ln(2+\sqrt{3}\,) - 1 + \ln(\sqrt{2}+1)\big] \ \blacksquare$$

Vejamos essa mesma função integrada num intervalo de valores negativos de x, caso em que os valores correspondentes de θ estão no 2º quadrante, onde a função $\tan\theta$ é negativa e, portanto, $\sqrt{\tan^2\theta} = -\tan\theta$):

<u>b)</u> $$\int_{-10}^{-5\sqrt{2}} \frac{(x-5)dx}{\sqrt{x^2-25}} \underset{dx = 5\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\overset{x=5\sec\theta}{=}} \int_{\pi-\frac{\pi}{3}}^{\pi-\frac{\pi}{4}} \frac{(5\sec\theta-5)\,5\sec\theta\,\cancel{\tan\theta}\,d\theta}{-5\,\cancel{\tan\theta}}$$

$$= -5\int_{\pi-\frac{\pi}{3}}^{\pi-\frac{\pi}{4}} (\sec^2\theta-\sec\theta)d\theta = -5\Big[\tan\theta - \ln|\sec\theta+\tan\theta|\Big]_{\pi-\frac{\pi}{3}}^{\pi-\frac{\pi}{4}}$$

$$= -5\Big[-1 - \ln|-\sqrt{2}-1| - \big(-\sqrt{3} - \ln|-2-\sqrt{3}\,|\,\big)\Big] = 5\Big[1 + \ln|\sqrt{2}+1| - \sqrt{3} - \ln|2+\sqrt{3}\,|\Big] \ .$$

Nesse caso, para quem não gosta de trabalhar com ângulos fora do 1º quadrante, a mudança para a variável positiva $u = -x$ elimina esse incômodo:

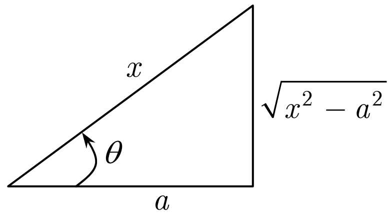
<u>c)</u> $$\int_{-10}^{-5\sqrt{2}} \frac{(x-5)dx}{\sqrt{x^2-25}} \overset{u=-x}{=} \int_{10}^{5\sqrt{2}} \frac{(-u-5)(-du)}{\sqrt{u^2-25}} = -\int_{5\sqrt{2}}^{10} \frac{(u+5)du}{\sqrt{u^2-25}}$$

$$\underset{du = 5\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\overset{u=5\sec\theta}{=}} = -\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{(5\sec\theta+5)\,\cancel{5}\sec\theta\,\cancel{\tan\theta}\,d\theta}{\cancel{5}\,\cancel{\tan\theta}} = -5\int_{\pi/4}^{\pi/3} (\sec^2\theta+\sec\theta)d\theta$$

$$= -5\Big[\tan\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta|\Big]_{\pi/4}^{\pi/3} = -5\big[\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}\,) - 1 - \ln(\sqrt{2}+1)\big] \ .$$

Passemos agora a considerar integrais indefinidas. No cálculo delas, não sabendo se os valores da função $\sec\theta$ estão no intervalo $[1, \infty)$ ou $(-\infty, -1]$, isto é, se θ varia no 1º ou no 2º quadrante, respectivamente, devemos ter o cuidado de escrever $\sqrt{\tan^2\theta} = \pm\tan\theta$, em que o sinal "+" deve ser usado se $\tan\theta \geqslant 0$ (isto é, se θ for do 1º quad., onde $\sec\theta \geqslant 1$), e o sinal "$-$" deve ser usado se $\tan\theta \leqslant 0$ (isto é, se θ for do 2º quad., onde $\sec\theta \leqslant 1$).

Tendo em conta esse uso dos sinais "+" e "$-$", e tendo em mente os sinais das diversas funções trigonométricas no 2º quadrante, podemos obter rapidamente para elas, por meio do triângulo retângulo à direita (que satisfaz a mudança de variável em estudo, $x = a\sec\theta$), as seguintes expressões em termos de x, nas quais "+" ou "$-$" deve ser usado conforme x seja positivo ou negativo :



$$\sec\theta = 1/\cos\theta = x/a\ , \quad \tan\theta = 1/\cot\theta = \pm\sqrt{x^2-a^2}\ , \quad \csc\theta = 1/\operatorname{sen}\theta = \pm x/\sqrt{x^2-a^2}\ .$$

Mais uma vez ressalte-se que, em muitas integrais, essas relações aparecem com o x substituído por outra expressão de x [por exemplo: $2(x-3)$ no Exemplo 12 adiante].

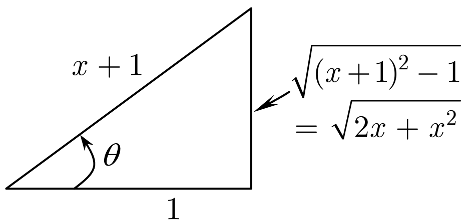
Exemplo 10 :

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx \overset{x\,=\,\sec\theta}{=} \int \frac{\pm\tan\theta}{\sec\theta}\sec\theta\tan\theta\,d\theta = \pm\int\tan^2\theta\,d\theta = \pm\int(\sec^2\theta-1)d\theta$$
$$= \pm(\tan\theta-\theta) = \pm\big(\pm\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcsec}x\big) + c$$
$$= \sqrt{x^2-1} - (\pm)\operatorname{arcsec}x \quad [\text{"+" se } \sec\theta = x \geqslant 1 \text{ e "}-\text{" se } x \leqslant -1] \ \blacksquare$$

Exemplo 11 :

$$\int \frac{dx}{\left[2x+x^2\right]^{3/2}} = \int \frac{dx}{\Big\{\big[(x+1)^2-1\big]^{1/2}\Big\}^3} \overset{x+1\,=\,\sec\theta}{=} \int \frac{\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\big\{\pm\tan\theta\big\}^3}$$
$$= \pm\int\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta = \pm\int\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta \overset{u\,=\,\operatorname{sen}\theta}{=} \pm\int\frac{du}{u}^2 = \pm\frac{-1}{u}+c$$
$$= \pm\frac{-1}{\operatorname{sen}\theta}+c = -(\pm\csc\theta) = -\frac{x+1}{\sqrt{2x+x^2}}+c \quad (x<-2 \text{ ou } x>0)\ \blacksquare$$

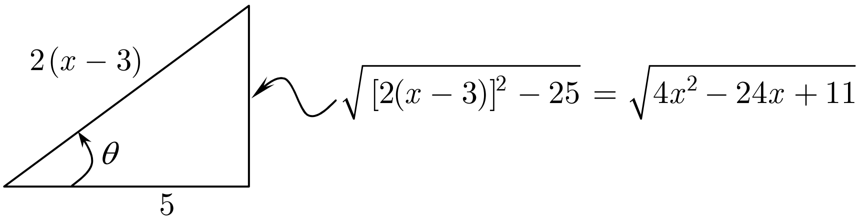
Neste exemplo, usa-se "+" se $\sec\theta = x+1 > 1\,(\Rightarrow\ x>0)$ e "$-$" se $\sec\theta = x+1 < -1\,(\Rightarrow\ x<-2)$. Nota-se que o triângulo retângulo à direita (satisfazendo $\sec\theta = x+1$ no 1º quad.) não fornece $\csc\theta$ corretamente no 2º quad., onde $\csc\theta$ continua positiva, sendo então dada por $\csc\theta = \pm(x+1)/\sqrt{2x+x^2}$ (com "+" ou "$-$" como acima).



Exemplo 12 : Cálculo da primitiva $F(x)$ de $1/\sqrt{4x^2-24x+11}$:

$$F(x) = \int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-24x+11}} = \int\frac{dx}{\sqrt{[2(x-3)]^2-25}} \underset{2\,dx\,=\,5\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\overset{2(x-3)\,=\,5\sec\theta}{=}} \frac{1}{2}\int\frac{\sec\theta\tan\tan\theta\,d\theta}{5\,\underbrace{\sqrt{\tan^2\theta}}_{\pm\tan\theta}}$$
$$= \pm\frac{1}{2}\int\sec\theta\,d\theta = \pm\frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta|+c \overset{(\#)}{=} \pm\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2(x-3)}{5}\pm\frac{\sqrt{4x^2-24x+11}}{5}\right|+c$$
$$= \pm\frac{1}{2}\ln\left|2(x-3)\pm\sqrt{4x^2-24x+11}\right|+c \quad \left(\text{"+" se } x>\frac{11}{2} \text{ e "}-\text{" se } x<\frac{1}{2}\right)\ \blacksquare$$

onde se fez $(1/2)(-\ln 5) + c \equiv c_1$. Na passagem (#) substituiu-se $\tan\theta = \pm\sqrt{4x^2 - 24x + 11}\,/\,5$, expressão deduzida com a ajuda da figura abaixo (um triângulo retângulo no qual $\sec\theta = 2(x-3)/5$) e observando que se deve usar o sinal "+" se $\sec\theta = 2(x-3)/5 > 1$ ($\Rightarrow\ x > 11/2$) e o sinal "−" se $\sec\theta = 2(x-3)/5 < -1$ ($\Rightarrow\ x < 1/2$) [é fácil constatar que $(-\infty, 1/2) \cup (11/2, \infty)$ é o domínio da função no integrando, obtido exigindo-se que $4x^2 - 24x + 11 > 0$].



Uma alternativa à mudança $x = a\sec\theta$ é a transformação de variável

$$x = a\csc\theta \ ,$$

considerando que, aos valores de x no intervalo $(-\infty, -a] \cup [a, \infty)$, correspondem os valores de θ no intervalo $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$ (variação nos 4º e 1º quadrantes), onde a correspondência é biunívoca, ressaltando, em particular, que a função $\cot\theta$ é preponderantemente positiva ou negativa conforme θ pertença ao 1º ou 4º quadrante, respectivamente. Vamos ilustrar o uso dessa transformação refazendo a primeira integral definida no Exemplo 9:

<u>Exemplo 13</u> :

$$\int_{5\sqrt{2}}^{10} \frac{(x-5)\,dx}{\sqrt{x^2-25}} \overset{x\,=\,5\csc\theta}{=} \int_{\pi/4}^{\pi/6} \frac{(5\csc\theta - 5)(-\cancel{5}\csc\theta\,\cancel{\cot\theta}\,d\theta)}{\underbrace{\sqrt{25\cot^2\theta}}_{\cancel{5}\,\cancel{\cot\theta}}} = 5\int_{\pi/4}^{\pi/6} (-\csc^2\theta + \csc\theta)d\theta$$

$$= 5\Big[\cot\theta - \ln|\csc\theta + \cot\theta|\Big]_{\pi/4}^{\pi/6} = 5\big[\sqrt{3} - \ln(2+\sqrt{3}\,) - 1 + \ln(\sqrt{2}+1)\big] \ ■$$

Basear nos exercícios feitos em sala

2.5 Integração de Funções Racionais por Frações Parciais

Queremos aqui integrar funções racionais, isto é, quocientes de polinômios: $P(x)/Q(x)$.

O método a ser exposto aplica-se a funções racionais em que o grau do polinômio no numerador é menor do que o grau do polinômio no denominador. Se este não for o caso, isto é, se $^\circ P > {}^\circ Q$ (*), então antes dividimos $P(x)$ por $Q(x)$, obtendo $P(x) = f(x)Q(x) + R(x)$ [onde $f(x)$ e $Q(x)$ são polinômios e $^\circ R < {}^\circ Q$], e escrevemos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{f(x)Q(x) + R(x)}{Q(x)} = f(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \underbrace{\int f(x)dx}_{\text{integral de um polinômio}} + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx \ .$$

Essa equação mostra que a integral da função racional original pode ser expressa como sendo a soma da integral de um polinômio com a integral de uma função racional à qual o método se aplica, pois o numerador, $R(x)$, é um polinômio de grau menor que o grau do polinômio no denominador, $Q(x)$.

(*) $^\circ P$ denota o grau do polinômio $P(x)$

É necessário também tomar a forma irredutível da função racional a que se aplicará o método, bastando, se for o caso, cancelar os fatores comuns no numerador e denominador.

Pois bem, a ideia é expandir $P(x)/Q(x)$ numa soma de frações mais simples, chamadas frações parciais da função racional $P(x)/Q(x)$. A decomposição de $Q(x)$ em fatores irredutíveis pode apresentar fatores lineares $(ax+b)$, quadráticos (ax^2+bx+c), ou de grau maior; consideraremos apenas casos em, nessa decomposição, não há fator irredutível de grau maior que dois.

2.5.1 Denominador com fatores lineares distintos

Note que

$$\frac{5x-4}{(x-2)(x+1)} = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+1} \;\; ;$$

logo,

$$\int \frac{5x-4}{(x-2)(x+1)}\,dx = \int \frac{2}{x-2}\,dx + \int \frac{3}{x+1}\,dx = 2\ln|x-2| + 3\ln|x+1| + c \;\; .$$

Portanto, integrar $\dfrac{5x-4}{(x-2)(x+1)}$ é fácil desde que conheçamos sua decomposição na soma das frações parciais (de denominadores lineares, no caso) $\dfrac{2}{x-2}$ e $\dfrac{3}{x+1}$. Abaixo mostramos dois modos de obter tal decomposição:

2.5.1.1 O método de igualar coeficientes

$$\frac{5x-4}{(x-2)(x+1)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{(A+B)\,x + (A-2B)}{(x-2)(x+1)}$$

$$\therefore \begin{cases} A+B=5 \\ A-2B=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \end{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots \boxed{\frac{5x-4}{(x-2)(x+1)} = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+1}}$$

2.5.1.2 O método de substituição

$$\frac{5x-4}{(x-2)(x+1)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \left\langle \begin{array}{l} \xrightarrow{\times\,(x-2)} \left[\underbrace{\frac{5x-4}{x+1}}_{\frac{6}{3}} = A + \underbrace{\frac{B(x-2)}{x+1}}_{0} \right]_{x\,=\,2} \Rightarrow \; A=2 \\[2em] \xrightarrow{\times\,(x+1)} \left[\underbrace{\frac{5x-4}{x-2}}_{\frac{-9}{-3}} = \underbrace{\frac{A(x+1)}{x-2}}_{0} + B \right]_{x\,=\,-1} \Rightarrow \; B=3 \end{array} \right.$$

Note que podemos escrever diretamente:

$$A = \left[\frac{5x-4}{x+1}\right]_{x\,=\,2} = \; 2 \qquad \text{e} \qquad B = \left[\frac{5x-4}{x-2}\right]_{x\,=\,-1} = \; 3 \;\; .$$

Exemplo 1 :

$$\int \frac{3x-5}{x^2-x-2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{8}{3}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{3}\ln|x-2| + \frac{8}{3}\ln|x+1| + c \;\; ,$$

pois

$$\frac{3x-5}{\underbrace{x^2-x-2}_{(x-2)(x+1)}} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1} \xrightarrow{\text{p/ subst.}} \begin{cases} A = \left.\dfrac{3x-5}{x+1}\right|_{x\,=\,2} = \dfrac{1}{3} \\[2ex] B = \left.\dfrac{3x-5}{x-2}\right|_{x\,=-1} = \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Exemplo 2 : 21/09/2022

$$I \equiv \int \frac{5x^5-13x^4-30x^3+19x^2-58x-16}{x^3-2x^2-8x}\,dx = \int (5x^2-3x+4)dx + \int \frac{3x^2-26x-16}{x^3-2x^2-8x}\,dx\ ,$$

onde dividimos os polinômios como segue:

$$\begin{array}{r|l} 5x^5-13x^4-30x^3+19x^2-58x-16 & x^3-2x^2-8x \\ \cline{2-2} -5x^5+10x^4+40x^3 \qquad\qquad\qquad\quad & 5x^2-3x+4 \\ \cline{1-1} -\ 3x^4+10x^3+19x^2-58x-16 & \\ 3x^4-\ \ 6x^3-24x^2 \qquad\qquad\ & \\ \cline{1-1} 4x^3-\ \ 5x^2-58x-16 & \\ -\ 4x^3+\ \ 8x^2+32x \qquad\ & \\ \cline{1-1} 3x^2-26x-16 & \end{array}$$

Mas

$x^3-2x^2-8x \Rightarrow x(x^2-2x-8)$

$$\frac{3x^2-26x-16}{\underbrace{x^3-2x^2-8x}_{x(x-4)(x+2)}} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{x+2} \xrightarrow{\text{p/ subst.}} \begin{cases} A = \left.\dfrac{3x^2-26x-16}{(x-4)(x+2)}\right|_{x\,=\,0} = \dfrac{-16}{-8} = 2 \\[2ex] B = \left.\dfrac{3x^2-26x-16}{x(x+2)}\right|_{x\,=\,4} = \dfrac{-72}{24} = -3 \\[2ex] C = \left.\dfrac{3x^2-26x-16}{x(x-4)}\right|_{x\,=\,-2} = \dfrac{48}{12} = 4 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} I &= \frac{5x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+4x+\int\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x-4}+\frac{4}{x+2}\right)dx \\ &= \boxed{\frac{5x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+4x+2\ln|x|-3\ln|x-4|+4\ln|x+2|+c\ \blacksquare} \end{aligned}$$

2.5.2 Denominador com fatores lineares repetidos

Tratamos agora de denominador como, por exemplo, $(x-1)^3(3x-2)^2(x+1)$.

Método: A cada fator da forma $(ax+b)^k$ $(k \geqslant 2)$ deve corresponder uma soma de k frações parciais

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}\ ,$$

onde A_1, A_2, $\cdots$, A_k são constantes a serem determinadas. Isto deve ser feito *para cada fator* do denominador. Fatores que não se repetem são tratados como na subseção anterior.

Exemplo 1

$$\frac{3x^2+4x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} \quad .$$

O método de substituição funciona na determinação de A e B_2:

$$A = \left.\frac{3x^2+4x+2}{(x+1)^2}\right|_{x\,=\,0} = 2 \ \cdots \ \text{[multiplicou-se a equação acima por } x \text{ e substitui-se } x \text{ por } 0]$$

$$B_2 = \left.\frac{3x^2+4x+2}{x}\right|_{x\,=\,-1} = -1 \ \cdots \ \text{[multiplicou-se por } (x+1)^2 \text{ e substitui-se } x \text{ por } -1]$$

Mas, para determinar B_1, o método de igualar coeficientes deve ser usado:

$$\frac{3x^2+4x+2}{x(x+1)^2} = \frac{\overbrace{A}^{2}(x+1)^2 + B_1 x(x+1) + \overbrace{B_2}^{-1} x}{x(x+1)^2} = \frac{(2+B_1)x^2+(3+B_1)x+2}{x(x+1)^2} \quad .$$

$$\therefore \begin{cases} 2+B_1 = 3 \\ 3+B_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow B_1 = 1 \quad \cdots\cdots \quad \therefore \frac{3x^2+4x+2}{x(x+1)^2} = \int\left[\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right] dx \, .$$

→ em Frações Parciais

Logo,

$$\int \frac{3x^2+4x+2}{x(x+1)^2}\, dx = 2\ln|x| + \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c \ \blacksquare$$

Exemplo 2

→ Precisa ser irredutível!

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{5x-2}{2x^3-x^2}\, dx \ . \quad \text{Faz-se} \ \frac{5x-2}{2x^3-x^2} = \frac{5x-2}{x^2(2x-1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B}{2x-1} \, .$$

→ Fatorando!

Pelo método de substituição, obtemos

$$A_2 = \left.\frac{5x-2}{2x-1}\right|_{x\,=\,0} = 2 \qquad \text{e} \qquad B = \left.\frac{5x-2}{x^2}\right|_{x\,=\,1/2} = \frac{(5/2)-2}{1/4} = 2 \ .$$

Pelo método de igualar coeficientes, obtemos

$$5x-2 = A_1 x(2x-1) + \underbrace{A_2}_{2}(2x-1) + \underbrace{B}_{2} x^2 = \underbrace{(2A_1+2)}_{0}\, x^2 + \underbrace{(-A_1+4)}_{5}\, x - 2 \quad \Rightarrow \boxed{A_1 = -1 \ .}$$

$A_1 = -1$

Logo,

$$I = \int_{-2}^{-1}\left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{2x-1}\right)dx = \left[-\ln|x| - \frac{2}{x} + \ln|2x-1|\right]_{-2}^{-1}$$
$$= -\ln 1 + 2 + \ln 3 - (-\ln 2 + 1 + \ln 5) \quad = \quad 1 + \ln 2 + \ln 3 - \ln 5 \ \ .$$

2.5.3 Denominador com fatores quadráticos irredutíveis

Abaixo, o fator quadrático ax^2+bx+c é irredutível em $\mathbb{R}$, isto é, com $b^2-4ac<0$.

Exemplo: $\dfrac{2x^2-3}{(2x-3)(3x+1)^2(2x^2+6x+10)}$

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B_1}{3x+1} + \frac{B_2}{(3x+1)^2} + \frac{Cx+D}{2x^2+6x+10}$$

exemplo de Fatoração

Método: A cada fator quadrático irredutível $ax^2 + bx + c$ que não se repete deve corresponder uma fração parcial da forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \ ,$$

e a cada fator quadrático irredutível repetido k vezes $(ax^2 + bx + c)^k$ deve corresponder uma soma de k frações parciais

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_k x + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k} \ .$$

Exemplo 1

$$\frac{8x^2 + 3x + 20}{\underbrace{x^3 + x^2 + 4x + 4}_{x^2(x+1)+4(x+1) \,=\, (x^2+4)(x+1)}} = \frac{8x^2 + 3x + 20}{(x^2+4)(x+1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{x+1} \ .$$

Determinamos C pelo mét. de subst.: $C = \left.\dfrac{8x^2 + 3x + 20}{x^2 + 4}\right|_{x\,=\,-1} = 5$.

Determinamos A e B pelo mét. de igualar coef.:

$$8x^2+3x+20 = (Ax+B)(x+1)+\underbrace{C}_{5}(x^2+4) = \underbrace{(A+5)}_{8}x^2+\underbrace{(A+B)}_{3}x+\underbrace{(B+20)}_{20} \ \Rightarrow\ A = 3 \ \text{ e } \ B = 0 \ .$$

Logo,

$$\int \frac{8x^2 + 3x + 20}{x^3 + x^2 + 4x + 4}\, dx = \int \frac{3x}{x^2 + 4}\, dx + \int \frac{5}{x+1}\, dx = \frac{3}{2} \ln|x^2 + 4| + 5 \ln|x+1| + c \ \blacksquare$$

Exemplo 2

$$\frac{12x^3 - x^2 + 14x - 11}{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{irredutíveis}}}{(x^2 + 1)}\,\underset{\uparrow}{(4x^2 + 4x + 3)}} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{4x^2 + 4x + 10} \ .$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ 12x^3 - x^2 + 14x - 11 &= (Ax + B)(4x^2 + 4x + 10) + (Cx + D)(x^2 + 1) \\ &= (\underbrace{4A + C}_{12})\,x^3 + (\underbrace{4A + 4B + D}_{-1})\,x^2 + (\underbrace{10A + 4B + C}_{14})\,x + (\underbrace{10B + D}_{-11}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 8 \\ D = -1 \end{cases}$$

Logo,

$$\int \frac{12x^3 - x^2 + 14x - 11}{(x^2+1)(4x^2+4x+10)} = \int \left(\frac{x-1}{x^2+1} + \frac{\overbrace{8x-1}^{8x+4-5}}{4x^2+4x+10} \right) dx$$

$$= \int \frac{x\,dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{(8x+4)\,dx}{4x^2+4x+10} - 5\,\Big(\overbrace{\int \frac{dx}{4x^2+4x+10}}^{(*)} \Big)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x + \ln(4x^2+4x+10) - \frac{5}{6}\arctan\frac{2x+1}{3} + c \;\blacksquare$$

$$(*) \int \frac{dx}{4x^2+4x+10} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2} \xrightarrow[dx\,=\,\frac{3}{2}\,du]{u\,=\,\frac{2x+1}{3}}$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{6}\arctan u + c_1 = \frac{1}{6}\arctan\frac{2x+1}{3} + c_1 \;.$$

<u>Exemplo 3</u>

$$\frac{x^3+x+2}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{x} + \frac{-2x+1}{x^2+1} + \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \;.$$

pois, pelo método de substituição, temos que

$$A = \left.\frac{x^3+x+2}{(x^2+1)^2}\right|_{x\,=\,0} = 2$$

e, pelo método de igualar coeficientes, que

$$\left.\begin{aligned} x^3+x+2 &= \overset{2}{A}(x^2+1)^2 + x(x^2+1)(Bx+C) + x(Dx+E) \\ &= \underbrace{(2+B)}_{0}x^4 + \underbrace{C}_{1}x^3 + \underbrace{(4+B+D)}_{0}x^2 + \underbrace{(C+E)}_{1}x + 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} B=-2 \\ C=1 \\ D=-2 \\ E=0 \;. \end{cases}$$

Logo,

$$\int \frac{x^3+x+2}{x(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx - \int \frac{2x\,dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} + \Big(\overbrace{\int \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\,dx}^{(\#)} \Big)$$

$$= 2\ln|x| - \ln(x^2+1) + \arctan x + \frac{1}{x^2+1} + c \;\blacksquare$$

$$(\#) \int \frac{-2x\,dx}{(x^2+1)^2} \underset{dt\,=\,2x\,dx}{\overset{t\,=\,x^2+1}{=}} \int \frac{-dt}{t^2} = \frac{1}{t} = \frac{1}{x^2+1}$$

<u>Exemplo 4</u>

$$\frac{x^5-2x^4+2x^3+x-2}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+G}{(x^2+1)^2} \;.$$

Determinamos, pelo mét. de subst.,

$$B = \left.\frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 + x - 2}{(x^2+1)^2}\right|_{x\,=\,0} = -2$$

e, pelo mét. de igualar coef., as demais constantes:

$$\left.\begin{aligned} & x^5 - 2x^4 + 2x^3 + x - 2 \\ & \quad = Ax(x^2+1)^2 + \overset{-2}{B}(x^2+1)^2 + (Cx+D)x^2(x^2+1) + (Ex+G)x^2 \\ & \quad = \underbrace{(A+C)}_{1}x^5 + \underbrace{(D-2)}_{-2}x^4 + \underbrace{(2A+C+E)}_{2}x^3 + \underbrace{(D+G-4)}_{0}x^2 + \overset{1}{A} - 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = 0 \\ E = 0 \\ G = 4 \\ A = 1 \end{cases}$$

Logo,

$$\int \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 + x - 2}{x^2(x^2+1)^2} = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{(x^2+1)^2}\right] dx = \ln|x| + \frac{2}{x} + 2\Big(\arctan x + \frac{x}{x^2+1}\Big) + c\,.$$

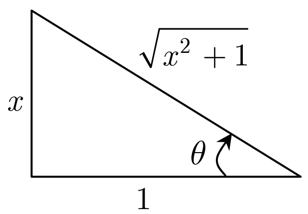
O último termo no integrando foi assim integrado:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \overset{x\,=\,\tan\theta}{\underset{dx\,=\,\sec^2\theta}{=}} \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^4\theta} = \int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{\overbrace{\operatorname{sen} 2\theta}^{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}}{4} = \frac{1}{2}(\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta) = \frac{1}{2}\Big(\arctan x + \frac{x}{x^2+1}\Big)\,,$$

onde, para expressar $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ em função de x, fizemos uso da figura abaixo:

$\tan\theta = x \Longrightarrow$



$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$$

<u>Exemplo 5</u>

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2 - 2x + 2)^2}\, dx &= \int \left[\frac{x+3}{x^2-2x+2} + \frac{5x-4}{(x^2-2x+2)^2}\right] dx \\ \overset{x\,=\,\tan\theta}{=} \int (4 + \tan\theta + 5\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta &= 3 + x + \frac{5x-4}{x^2-2x+2} + c\,, \end{aligned}$$

onde os detalhes dos cálculos são deixados como exercício. Essa integral pode ser calculada sem a expansão em frações parciais, substituindo-se $x = \tan\theta$ diretamente nela.

Na seç. 5.2 fornecemos uma justificativa da expansão em frações parciais exposta nesta seção.

2.5.4 Observações

2.5.4.1 Quociente de polinômios que não é irredutível

Observe esses dois modos de desenvolver a mesma função $f(x)$ em frações parciais:

$$
f(x) = \frac{x^4+2x^3-3x^2-4x+4}{x^2(x-1)^3} = \begin{cases} \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-1}+\dfrac{D}{(x-1)^2}+\dfrac{E}{(x-1)^3} \\ \Rightarrow\ A=-8\,,\ B=-4\,,\ C=9\,,\ D=E=0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{(x^2+4x-4)(x-1)^2}{x^2(x-1)^3} = \dfrac{x^2+4x-4}{x^2(x-1)} = \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-1} \\ \Rightarrow\ A=-8\,,\ B=-4\,,\ C=9 \end{cases}
$$

No primeiro modo não se percebe que o numerador e o denominador têm o fator comum $(x-1)^2$, sendo por isso realizados mais cálculos, haja vista os dois parâmetros D e E, ausentes no segundo modo, simplificado pelo cancelamento daquele fator comum antes do desenvolvimento em frações parciais.

2.5.4.2 Uso irrefletido de frações parciais

O cálculo de $\displaystyle\int x^2dx/(2x+5)^5$ fazendo a substituição $u=2x+5$, isto é,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2\,dx}{(2x+5)^5} &= \int \frac{\big[(u-5)/2\big]^2(du/2)}{u^5} = \frac{1}{8}\int \frac{u^2-10u+25}{u^5}\,du = \frac{1}{8}\int (u^{-3}-10u^{-4}+25u^{-5})\,du \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{u^{-2}}{-2}-10\frac{u^{-3}}{-3}+25\frac{u^{-4}}{-4}\right]+c \;=\; \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{2(2x+5)^2}+\frac{10}{3(2x+5)^3}-\frac{25}{4(2x+5)^4}\right]+c\ ,
\end{aligned}
$$

é mais fácil do que usando frações parciais:

$$
\int \frac{x^2}{(2x+5)^5} = \frac{A}{2x+5}+\frac{B}{(2x+5)^2}+\frac{C}{(2x+5)^3}+\frac{D}{(2x+5)^4}+\frac{E}{(2x+5)^5}
$$

$$
\Rightarrow\ \cdots\ \Rightarrow\ A=0\,,\ B=0\,,\ C=1/4\,,\ D=-10/4\,,\ E=25/4\ .
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \int \frac{x^2\,dx}{(2x+5)^5} &= \frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{(2x+5)^3}-\frac{10}{(2x+5)^4}+\frac{25}{(2x+5)^5}\right]dx \\
&= \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{2(2x+5)^2}+\frac{10}{3(2x+5)^3}-\frac{25}{4(2x+5)^4}\right]+c\ .
\end{aligned}
$$

2.5.4.3 Empregar frações parciais ou substituição trigonométrica?

Considere os seguintes cálculos da integral indefinida de $f(x)=1/(x^2-a^2)$ $(a>0)$ (ignoraremos a constante aditiva arbitrária):

a) Separemos $f(x)$ em frações parciais, obtendo

$$
\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{dx}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a}\int\Big(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\Big)dx = \frac{1}{2a}\big(\ln|x-a|-\ln|x+a|\big)\ .
$$

Observe que o resultado obtido é válido em todo o domínio de $f(x)$, isto é, para todo x real diferente de $\pm a$.

b) Façamos a substituição trigonométrica $x=a\sec\theta\in(-\infty,-a]\cup[a,\infty)$. Com essa substituição, há uma restrição de x aos valores tais que $|x|\geqslant a$, ou seja, x não pode tomar todos os valores do domínio de f. Temos então que

$$
\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{a^2\tan^2\theta} = \frac{1}{a}\int \csc\theta\,d\theta = -\frac{1}{a}\ln|\csc\theta+\cot\theta| = -\frac{1}{a}\ln\Big|\frac{x+a}{\sqrt{x^2-a^2}}\Big|\ .
$$

Este resultado só é válido para $|x|>a$ (o ponto $x=a$ não está no domínio da função f), o que condiz com a substituição trigonométrica realizada.

c) Façamos agora a substituição trigonométrica $x = a\,\text{sen}\,\theta \in [-a, a]$ (que restringe os valores de x aos com $|x| \leqslant a$):

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{-a^2\cos^2\theta} = -\frac{1}{a}\int \sec\theta\, d\theta = -\frac{1}{a}\ln|\sec\theta + \tan\theta| = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right| .$$

um resultado válido apenas para $|x| < a$, também condizente com a substituição trigonométrica realizada.

Conclui-se, portanto, que, ao se integrar indefinidamente uma função, os resultados podem valer em todo o domínio da função ou em diferentes partes dele conforme o método empregado.

2.6 Integral de $(Ax + B)/(ax^2 + bx + c)^\gamma$, com $a \neq 0$.

Nesta seção estudamos a integral mais complicada que pode surgir na aplicação do método de integração por frações parciais considerado.

Caso 1) Se $\gamma = 0, -1, -2, -3, \cdots$, o integrando é um polinômio, fácil de integrar.

Caso 2) Se $Ax + B$ for igual à derivada de $ax^2 + bx + c$ a menos de um fator constante, faz-se a mudança de variável $u = ax^2 + bx + c$ (v. Exemplo 1 abaixo); se não for, verifique os casos seguintes:

Caso 3) Se $\gamma = 1, 2, 3, \cdots$ e $ax^2 + bx + c$ tiver zeros reais, integre por frações parciais.

Caso 4) Se $ax^2 + bx + c$ for irredutível em $\mathbb{R}$ ou $\gamma \notin \mathbb{Z}$ (com qualquer $ax^2 + bx + c$), proceda como nos Exemplos 2 e 3, respectivamente.

<u>Exemplo 1:</u> $$\int \frac{(\overbrace{2x-4}^{u'/(-3)})\,dx}{(\underbrace{-3x^2+12x+8}_{u\ \to\ u'=-6x+12})^2} = -\frac{1}{3}\int\frac{du}{u^2} = \frac{1}{3u} + c = \frac{1}{3(-3x^2+12x+8)} .$$

<u>Exemplo 2</u>

$$I = \int \frac{(2x+7)\,dx}{(4x^2-8x+13)^2} = \int \frac{\frac{1}{4}(\overbrace{8x-8}^{u'})+9}{(\underbrace{4x^2-8x+13}_{u})^2}\,dx = \underbrace{\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2}}_{J} + \underbrace{9\int\frac{dx}{[4x^2-8x+13]^2}}_{K} + c ,$$

onde

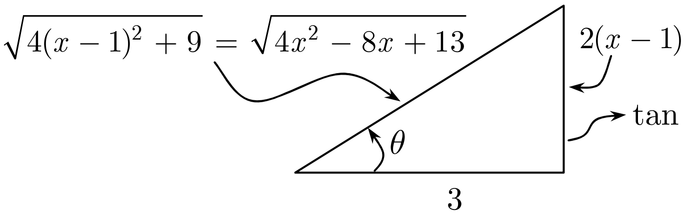
$$J = \frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{4u} = -\frac{1}{4\,(4x^2-8x+13)^2}$$

e

$$K = 9\int\frac{dx}{[4x^2-8x+13]^2} = 9\int\frac{dx}{[\underbrace{4(x-1)^2}_{9\tan^2\theta}+9]^2} \overset{2(x-1)=3\tan\theta}{\underset{2dx=3\sec^2\theta}{=}} 9\int\frac{\frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta}{81\sec^4\theta}$$

$$= \frac{1}{6}\int\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\text{sen}\,2\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{12} + \frac{1}{12}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$= \frac{\arctan\left[\frac{2}{3}(x-1)\right]}{12} + \frac{1}{12}\cdot\frac{2(x-1)}{\sqrt{4x^2-8x+13}}\cdot\frac{3}{\sqrt{4x^2-8x+13}} .$$



$$\tan\theta = \frac{2(x-1)}{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{2(x-1)}{\sqrt{4x^2-8x+13}} \\[2ex] \cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{4x^2-8x+13}} \end{cases}$$

No próximo exemplo temos o fator quadrático $-x^2 - 6x - 5$, que é redutível em $\mathbb{R}$ $\big[$igual a $-(x+5)(x+1)\big]$, um detalhe importante na integração por frações parciais, um método que, entretanto, não se aplica neste exemplo.

Exemplo 3 : A seguinte integral indefinida, com $x \in (-5,-1)$:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x\,dx}{(-x^2-6x-5)^{3/2}} = \int \frac{\frac{-1}{2}(\overbrace{-2x-6}^{u'}) - 3}{(\underbrace{-x^2-6x-5}_{u})^{3/2}}\,dx \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{3/2}}}_{J} + \underbrace{(-3)\int \frac{dx}{(-x^2-6x-5)^{3/2}}}_{K} + c \ , \end{aligned}$$

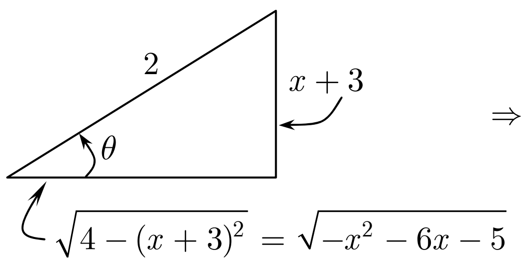
onde

$$J = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{-x^2-6x-5}}$$

e

$$\begin{aligned} K &= -3\int \frac{dx}{(-x^2-6x-5)^{3/2}} = -3\int \frac{dx}{[4 - \underbrace{(x+3)^2}_{4\operatorname{sen}^2\theta}]^{3/2}} \underset{dx\,=\,2\cos\theta\,d\theta}{\overset{x+3\,=\,2\operatorname{sen}\theta}{=}} -3\int \frac{2\cos\theta\,d\theta}{8\cos^3\theta} \\ &= -\frac{3}{4}\int \sec^2\theta\,d\theta = -\frac{3}{4}\tan\theta = -\frac{3}{4}\,\frac{x+3}{\sqrt{-x^2-6x-5}} \ . \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x+3}{2} \ \Longrightarrow$$



$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{x+3}{\sqrt{-x^2-6x-5}}$$

Observe, no Caso 4, que, se $A = 0$, isto é, se a integral é da forma $\int B\,dx/(ax^2+bx+c)^\gamma$, o seu cálculo reduz-se ao de uma integral como a denotada por K nos Exemplos 2 e 3 acima.

2.7 Substituições Diversas

2.7.1 Raízes n-ésimas

Exemplo 1

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx \overset{\substack{u \equiv \sqrt{x} \\ \therefore\, x = u^2}}{\underset{dx = 2u\,du}{=}} \int \frac{u}{1+u^2}\,2u\,du = 2\int\left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right)du$$

$$= 2(u - \arctan u) + c = 2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x} + c \;\blacksquare$$

Exemplo 2

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx \overset{\substack{u \equiv \sqrt{x+4} \\ \therefore\, x = u^2-4}}{\underset{dx = 2u\,du}{=}} \int \frac{u}{u^2-4}2u\,du = 2\int \frac{u^2}{u^2-4}du$$

$$= 2\int\left(1 + \frac{4}{u^2-4}\right)du = 2\int\left[1 + \frac{4}{(u-2)(u+2)}\right]du$$

$$= 2\int\left(1 + \frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2}\right)du = 2(u + \ln|u-2| - \ln|u+2|) + c$$

$$= 2\sqrt{x+4} + 2\ln|\sqrt{x+4} - 2| - 2\ln|\sqrt{x+4} + 2| + c \;\blacksquare$$

Note que devemos ter $x \neq 0$ em $\sqrt{x+4}/x$, o que garante que $u \neq \pm 2$.

Exemplo 3

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{3u^2du}{1+u} \cdots\cdots\cdots \text{pois } u = \sqrt[3]{x} \Rightarrow \begin{cases} x = u^3 \\ dx = 3u^2du \end{cases}$$

$$= 3\int\left[(u-1) + \frac{1}{u+1}\right]du$$

$$= 3\Big(\frac{u^2}{2} - u\Big) + 3\ln|u+1| + c$$

$$= \frac{3}{2}x^{2/3} - 3x^{1/3} + 3\ln|x^{1/3}+1| + c \;\blacksquare$$

$$\begin{array}{rl|}
u^2 & \;u+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-u^2 - u} & \;u-1 \\
-\,u & \\
u+1 & \\ \hline
1 &
\end{array}
\qquad \therefore \frac{u^2}{1+u} = (u-1) + \frac{1}{u+1}$$

Exemplo 4

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} = \frac{3}{2}\int \frac{(u^3-1)\,u^2du}{u} \cdots \text{pois } u = \sqrt[3]{x^2+1} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = u^3 - 1 \\ 2x\,dx = 3u^2du \\ x^3dx = x^2(x\,dx) = (u^3-1)\frac{3}{2}u^2du \end{cases}$$

$$= \frac{3}{2}\int (u^4 - u)\,du = \frac{3}{2}\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^2}{2}\right) + c = \frac{3}{10}(x^2+1)^{5/3} - \frac{3}{3}(x^2+1)^{2/3} + c \;\blacksquare$$

Exemplo 5

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} \overset{(*)}{=} \int \frac{6u^5du}{u^3-u^2} \;=\; 6\int \frac{u^3du}{u-1} \;=\; 6\int \left(u^2+u+1+\frac{1}{u-1}\right)du$$

$$=\; 6\left(\frac{u^3}{3}+\frac{u^2}{2}+u+\ln|u-1|\right)+c \;=\; 2x^{1/2}+3x^{1/3}+6x^{1/6}+6\ln|x^{1/6}-1|+c \;\blacksquare$$

$$^{(*)}\; u=\sqrt[6]{x}\;\; \big[\,6=\mathrm{mmc}\{2,3\}\big] \;\Rightarrow\; x=u^6 \;\Rightarrow\; \begin{cases} dx=6u^5du \\ x^{1/2}=u^3 \;\text{ e }\; x^{1/3}=u^2 \end{cases}$$

Exemplo 6

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}} \overset{(*)}{=} \int \frac{12u^{11}du}{u^4+u^3} \;=\; 12\int \frac{u^8du}{u+1}$$

$$=\; 12\int \left(u^7-u^6+u^5-u^4+u^3-u^2+u-1+\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$=\; 12\left(\frac{u^8}{8}-\frac{u^7}{7}+\frac{u^6}{6}-\frac{u^5}{5}+\frac{u^4}{4}-\frac{u^3}{3}+\frac{u^2}{2}-u+\ln|u+1|\right)+c \;=\; \cdots$$

$$^{(*)}\; \mathrm{mmc}\{3,4\}=12 \quad \therefore\; u=\sqrt[12]{x}=x^{1/12} \;\Rightarrow\; x=u^{12} \;\Rightarrow\; \begin{cases} dx=12u^{11}du \\ x^{1/3}=u^4 \;\text{ e }\; x^{1/4}=u^3 \end{cases}$$

Exemplo 7

$$\int \frac{dx}{\sqrt[7]{x^5}-\sqrt[7]{x^3}} \overset{(*)}{=} \int \frac{7u^6du}{u^5-u^3} \;=\; \int \frac{7u^3du}{u^2-1} \;\cdots\cdots\; ^{(*)}\text{pois }\; u=\sqrt[7]{x} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=u^7 \\ dx=7u^6du \end{cases}$$

$$=\; 7\int \left(u+\frac{u}{u^2-1}\right)du \;=\; 7\left(\frac{u^2}{2}+\frac{1}{2}\ln|u^2-1|\right)+c \;=\; \frac{7}{2}x^{2/7}+\frac{7}{2}\ln|x^{2/7}-1|+c \;\blacksquare$$

Exemplo 8

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[3]{x^2}} \overset{(*)}{=} \int \frac{12u^{11}du}{u^9-u^8} \;=\; 12\int \frac{u^3du}{u-1} \;=\; 12\int \left(u^2+u+1+\frac{1}{u-1}\right)du$$

$$=\; 4u^3+6u^2+12u+12\ln|u-1|+c \;=\; 4x^{1/4}+6x^{1/6}+12x^{1/12}+12\ln|x^{1/12}-1|+c \;\blacksquare$$

$$^{(*)}\; \mathrm{mmc}\{4,3\}=12 \quad \therefore\; u=\sqrt[12]{x}=x^{1/12} \;\Rightarrow\; x=u^{12} \;\Rightarrow\; \begin{cases} dx=12\,u^{11}du \\ \sqrt[4]{x^3}=u^9 \;\text{ e }\; \sqrt[3]{x^2}=u^8 \end{cases}$$

Exemplo 9

$$\frac{2}{3}\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}-1} \overset{(*)}{=} \frac{2}{3}\int \frac{u^3(6u^5du)}{u^4-1} = 4\int \frac{u^8du}{u^4-1}$$

$$= 4\int \left[u^4+1+\frac{1}{u^4-1}\right]du = \int \left[4u^4+4+\frac{4}{(u^2+1)(u+1)(u-1)}\right]du$$

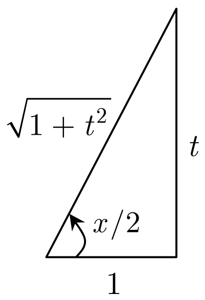
$$= \int \left(4u^4+4+\frac{-2}{u^2+1}+\frac{-1}{u+1}+\frac{1}{u-1}\right) = \frac{4u^5}{5}+4u-2\arctan u+\ln|\frac{u-1}{u+1}|+c$$

$$= \frac{4x^{5/6}}{5}+4x^{1/6}-2\arctan x^{1/6}+\ln|\frac{x^{1/6}-1}{x^{1/6}+1}|+c \ \blacksquare$$

$$^{(*)}\ \text{mmc}\{2,3\}=6 \quad \therefore\ u=\sqrt[6]{x}=x^{1/6} \ \Rightarrow\ x=u^6 \ \Rightarrow \begin{cases} dx = 6\,u^5du \\ \sqrt{x}=u^3 \ \text{ e } \ \sqrt[3]{x^2}=u^4 \end{cases}$$

2.7.2 Tangente do arco-metade

Com a substituição $t=\tan(x/2)$, podemos converter qualquer função racional nas duas variáveis $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ em uma função racional de t. Para isso, empregamos as fórmulas deduzidas abaixo:



$$\tan\frac{x}{2}=t$$

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\boxed{\cos x} = \cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}-\frac{t^2}{1+t^2} \boxed{=\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$\boxed{\operatorname{sen} x} = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \boxed{=\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$dt=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx=\frac{1+t^2}{2}\,dx \ \Rightarrow\ \boxed{dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}}$$

Exemplo 1

$$\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{1}{1-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{2\,dt}{1+t^2-(1-t^2)}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{2t^2} = \frac{-1}{t}+c = \frac{-1}{\tan\dfrac{x}{2}}+c = -\cot\frac{x}{2}+c \ \blacksquare$$

Exemplo 2

$$\int \frac{1}{3-5\operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{1}{3-5\,\dfrac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{2\,dt}{3+3t^2-10t}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{(t-3)(3t-1)} = \int \left(\frac{-3/4}{3t-1}+\frac{1/4}{t-3}\right)dt = -\frac{1}{4}\ln|3t-1|+\frac{1}{4}\ln|t-3|+c$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|3\tan\frac{x}{2}-1|+\frac{1}{4}\ln|\tan\frac{x}{2}-3|+c \ \blacksquare$$

Exemplo 3

$$\int \frac{2\cos x\,dx}{\operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{sen} x} = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x \cos + \operatorname{sen} x}\,dx = \int \frac{(1-t^2)/(1+t^2)}{\dfrac{2t}{1+t^2}\,\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + \dfrac{2t}{1+t^2}}\,\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$= 2\int \frac{(1-t^2)dt}{2t(1-t^2)+2t(1+t^2)} = 2\int \frac{(1-t^2)dt}{4t} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t} - t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{4}t^2 + c = \frac{1}{2}\ln|\tan\frac{x}{2}| - \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + c \ \blacksquare$$

Exemplo 4

$$\int \frac{1}{3\operatorname{sen} x + 4\cos x}\,dx = \int \frac{1}{3\,\dfrac{2t}{1+t^2} + 3\,\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \left(\frac{-2/5}{2t+1} + \frac{1/5}{t-2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{5}\ln|2t+1| - \frac{1}{5}\ln|t-2| + c = \frac{1}{5}\ln|2\tan\frac{x}{2}+1| - \frac{1}{5}\ln|\tan\frac{x}{2} - 2| + c \ \blacksquare$$

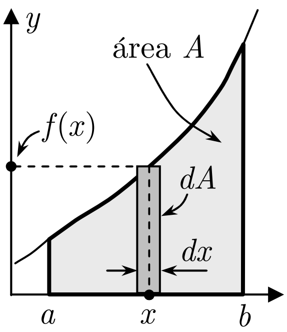
Rio, 28/09/2022

Capítulo 3

Algumas Aplicações da Integral e Extensões do Conceito de Integral

3.1 Algumas Aplicações da Integral

3.1.1 O raciocínio por infinitésimos



Para calcular a área A entre o eixo x e o gráfico de uma função $f(x)$ positiva no intervalo $[a,b]$, hachurada à direita, primeiramente construímos o infinitésimo (ou elemento) de área $dA(x)$ mostrado nessa figura: a área de um retângulo de base infinitesimal dx em torno de x e de altura $f(x)$, dada por $dA(x) = f(x)dx$; dizemos que esse é o infinitésimo de área "na" abscissa x. A expressão "em torno de x" é usada para indicar que x é uma abscissa qualquer pertencente ao intervalo infinitesimal dx (o que lembra, na definição da integral de Riemann na seç. 1.1.1, a independência da escolha do c_i no subintervalo Δx_i). Em seguida integramos esses infinitésimos de área desde a abscissa mínima em A, $x = A$, até a abscissa máxima, $x = b$:

$$A = \int_a^b dA(x) = \int_a^b f(x)dx \quad .$$

Note que essa integração em relação a x é a "soma" da infinidade de infinitésimos de áreas situados em cada x. Essa é uma visão do processo de *integrar*, a de *somar uma infinidade de infinitésimos*. Genericamente, calculamos uma grandeza G integrando seu infinitésimo dG, que tem sempre a forma $dG(x) = g(x)dx$, onde x é a variável de integração, da qual depende a função $g(x)$ que surge na dedução de dG. Tal qual o somatório $\sum_{i=1}^N G_i$, que é uma soma de todo termo G_i associado a cada $i = 1, \cdots, N$, a integral $\int_a^b dG(x) = \int_a^b g(x)dx$ é a "soma" de todo infinitésimo $dG(x) = g(x)dx$ associado a cada $x \in [a,b]$.

A definição de Riemann da integral acima é formalmente obtida pela substituição de $\int_a^b$ por $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^N$, de x por c_i, e de dx por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, \cdots, N)$, onde as abscissas em $\{x_0 = a, x_1, \cdots, x_N = b\}$ definem uma partição de $[a,b]$; assim, neste processo reverso, obtemos

$$A = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^N \underbrace{f(c_i)\Delta x_i}_{\Delta A_i} \quad .$$

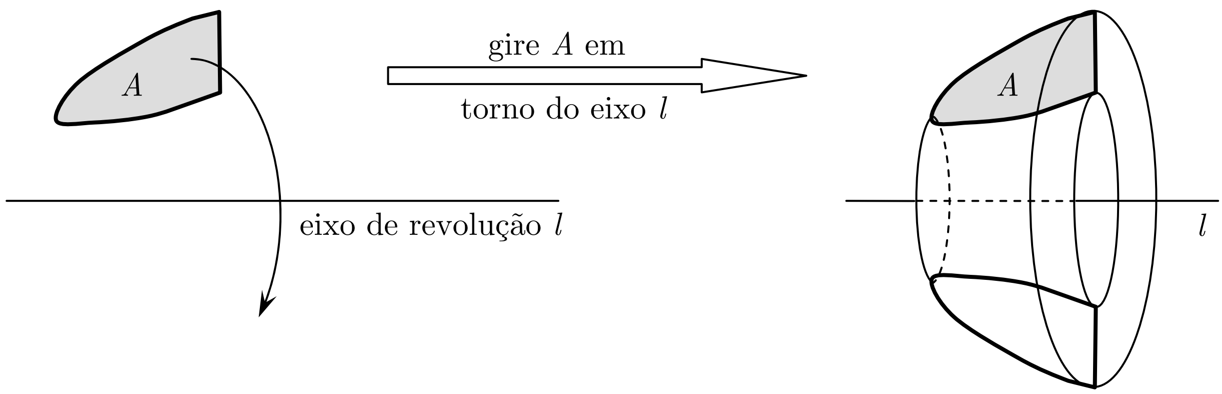
Neste somatório temos uma soma das subáreas ΔA_i de A definidas em torno de cada c_i, que é uma abscissa qualquer do subintervalo Δx_i.

Quando, então, dizemos que certa grandeza G é a integral de um infinitésimo seu, dG, que é construído diretamente a partir de dx (que é a diferencial da variável em relação a qual se efetua a integração), estamos empregando um raciocínio que se justifica no limite que define a soma de Riemann daquela grandeza. Assim, construir uma integral definida por infinitésimos é tão natural quanto pela soma de Riemann, além de ser mais rápido e mais fácil; evidenciaremos isso ao exemplificar a aplicação de integral definida no cálculo de volumes de revolução e no de comprimento de arco.

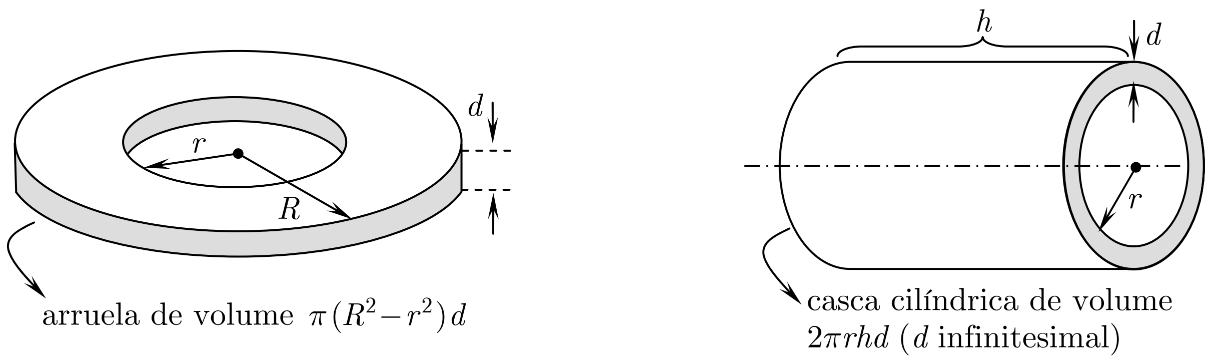
3.1.2 Volume de sólido de revolução

A figura a seguir a seguir ilustra a obtenção de um sólido de revolução. Gira-se de 360° uma área (ou região) plana A em torno de uma reta l (chamada de eixo de revolução) contida no plano de A.

Neste estudo, admitimos que o eixo de revolução seja paralelo ao eixo x ou y e que não corta a área plana A. Além disso, admitimos que A esteja compreendida entre os gráficos de duas funções de x, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, ou de duas funções de y, $x = f(y)$ e $x = g(y)$.



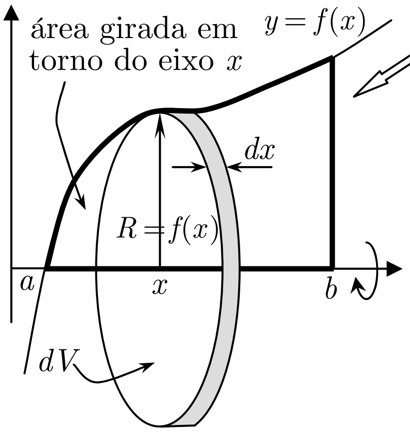
Um volume de revolução pode ser visto como formado de cascas cilíndricas ou de arruelas de espessuras infinitesimais. Integrando os volumes infinitesimais dessas cascas ou arruelas, obtemos o volume do sólido. Temos, assim, o método das arruelas e o das cascas cilíndricas para o cálculo do volume de um sólido de revolução.



Seguem exemplos de cálculo, por ambos os métodos, das arruelas (dos discos se $r = 0$) e das cascas cilíndricas, do volume V do sólido gerado pela revolução da área dada (hachurada na figura) em torno do eixo especificado (indicado, na figura, pelo símbolo ↻). Após a determinação de R, r, e h (definidos na figura acima) em função de x ou y, o volume desejado é obtido com a integração de $dV = \pi(R^2 - r^2)\,d$ ou $dV = 2\pi rhd$, sendo a espessura d igual a dx ou dy nos problemas considerados. Como a espessura de dV é fácil de determinar (simplesmente igual a dx

ou dy), o aluno logo identificará a variável de integração, isto é, logo saberá se deverá expressar R, r, e h em função de x (quando a espessura for igual a dx) ou em função de y (quando ela for igual a dy).

Exemplo 1 : Revolução em torno do eixo x da área demarcada na figura abaixo (entre o gráfico da função $f(x)$ e o eixo x, com $a \leqslant x \leqslant b$). Vemos um disco à esquerda e uma casca cilíndrica à direita que compõem o sólido de revolução, cujo volume V obtido por meio delas é fornecido.



Método das arruelas
(discos, no caso)

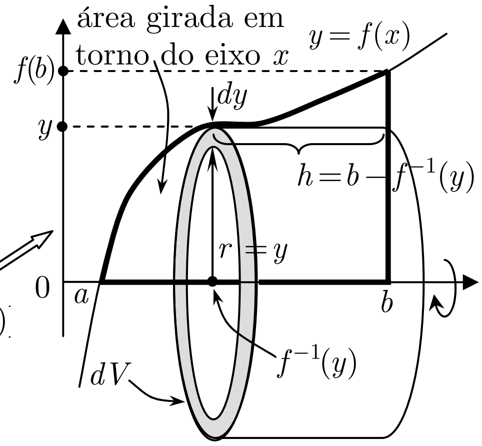
$$dV = \pi R^2 dx = \pi f^2(x)dx$$

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)dx}$$

Mét. das cascas cilíndricas

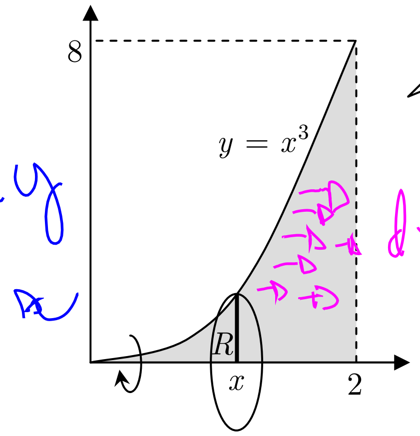
$$dV = 2\pi rh\, dy = 2\pi y\,[b - f^{-1}(y)]$$

$$\boxed{V = 2\pi \int_0^{f(b)} y\,[b - f^{-1}(y)]\,dy}$$



Exemplo 2 : Revolução da área sob $y = x^3$ ($y \geqslant 0$), com $x \in [0, 2]$, em torno do eixo x.

R=y



dx

Método das arruelas
(discos, no caso)

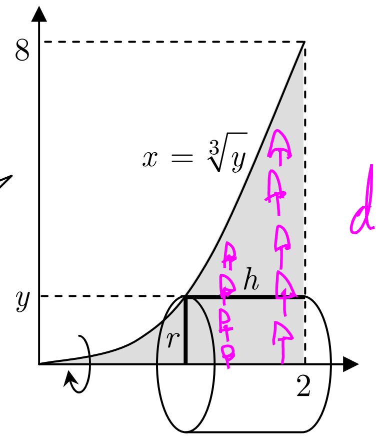
$$dV = \pi R^2 dx, \quad R = x^3$$

$$\boxed{V = \pi \int_0^2 (x^3)^2\, dx} = \frac{128\pi}{7} \text{ u.v.}$$

Mét. das cascas cilíndricas

$$dV = 2\pi rh\, dy, \quad r = y\,, \quad h = 2 - \sqrt[3]{y}$$

$$\boxed{V = 2\pi \int_0^8 y\,(2 - \sqrt[3]{y})\, dy} = \frac{128\pi}{7} \text{ u.v.}$$

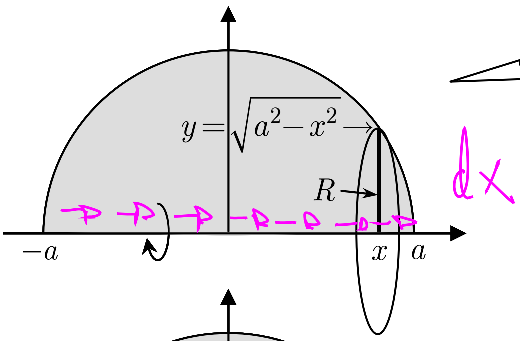


dy

$\to H = 2 - (x)$

$H = 2 - \sqrt[3]{y}$

Exemplo 3 : Revolução do semicírculo dado em torno do eixo x .

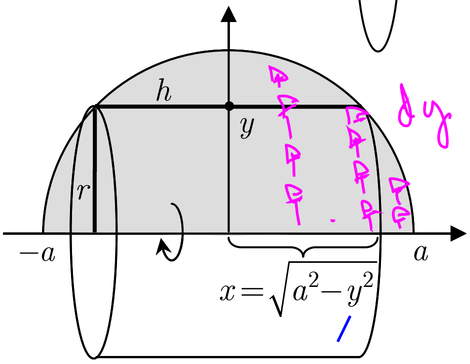


Método das arruelas (discos, no caso)

$dV = \pi R^2 dx = \pi x^3 dx\,,\quad R = \sqrt{a^2 - x^2}$

$$\boxed{V = \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)dx = 2\pi \int_{0}^{a} (a^2 - x^2)dx} = \cdots$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\text{u.v. (volume da esfera de raio } a)$$



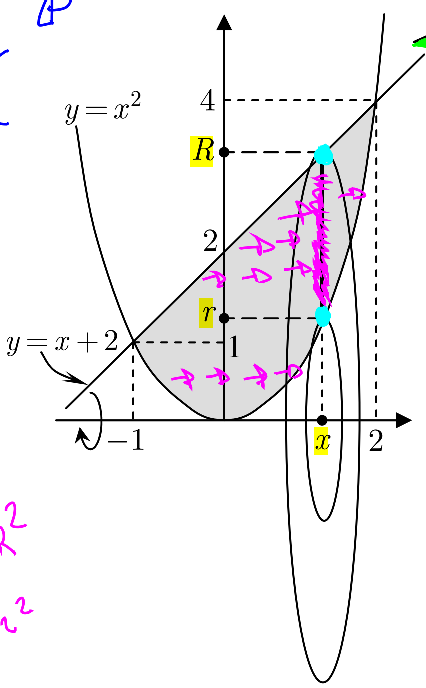
Método das cascas cilíndricas

$dV = 2\pi rh\, dy\,,\quad r = y\,,\quad h = 2\sqrt{a^2 - y^2}$

$$\boxed{V = 2\pi \int_{0}^{a} y\, 2\sqrt{a^2 - y^2}\, dy} = \cdots = \frac{4\pi a^3}{3}\text{u.v.}$$

Exemplo 4 : Revolução da área limitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$ em torno do eixo x .

Pode calc usdn na P1



Método das arruelas

$dV = \pi(R^2 - r^2)dx\,,\ R = x+2\,,\ r = x^2$

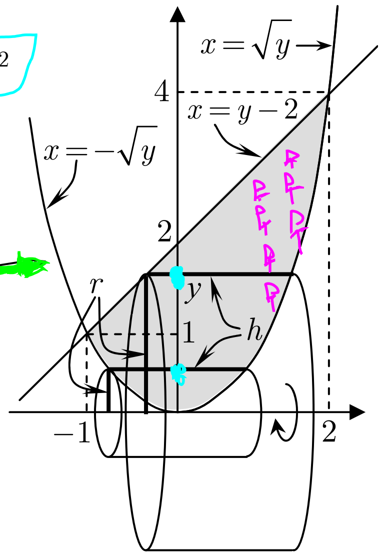
$$\boxed{V = \pi \int_{-1}^{2} \left[(x+2)^2 - (x^2)^2\right] dx}$$

Método das cascas cilíndricas

$dV = 2\pi rh\, dy\,,\quad r = y\,,\quad h = 2 - \sqrt[3]{y}$

$$h = \begin{cases} 2\sqrt{y} & \text{se } y \in [0,1] \\ \sqrt{y} - (y-2) & \text{se } y \in [1,4] \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{1}^{4} y\left[\sqrt{y} - (y-2)\right] dy \\ &+ 2\pi \int_{0}^{1} y\left[2\sqrt{y}\,\right] dy \end{aligned}}$$



$A_1 = \pi R^2$

$A_2 = \pi r^2$

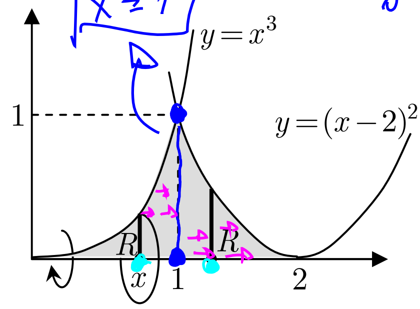
Area $= \pi R^2 - \pi r^2$

$\boxed{\text{Area} = \pi(R^2 - r^2)}$

Exemplo 5 : Revolução da área limitada por $y = x^3$, $y = (x-2)^2$ e $y = 0$ em torno do eixo x .

Tem que imaginar rodando!

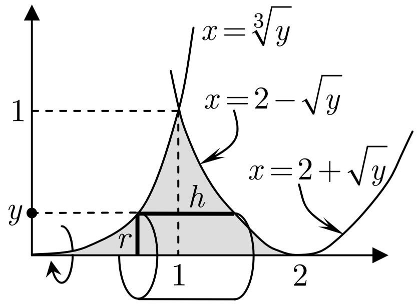
$\boxed{x = 1}$



Método das arruelas (discos, no caso)

$$dV = \pi R^2 dx = \pi x^3 dx, \quad R = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \in [0,1] \\ (x-2)^2 & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$$

$$\boxed{V = \pi \int_0^1 (x^3)^2 dx + \pi \int_1^2 \left[(x-2)^2\right]^2 dx} = \frac{12\pi}{35} \text{ u.v.}$$

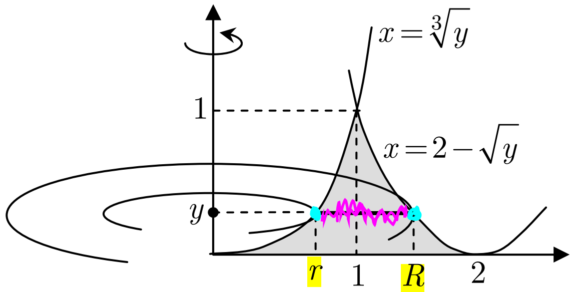


Método das cascas cilíndricas

$$dV = 2\pi rh\, dy, \quad r = y, \quad h = (2 - \sqrt{y}) - \sqrt[3]{y}$$

$$\boxed{V = 2\pi \int_0^1 y\left[(2-\sqrt{y}) - \sqrt[3]{y}\right] dy} = \frac{12\pi}{35} \text{ u.v.}$$

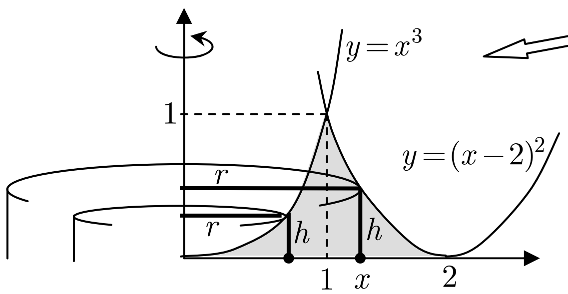
Exemplo 6 : Revolução da área do Exemplo 5, mas em torno do eixo y .



Método das arruelas

$$dV = \pi (R^2 - r^2)\, dy, \quad R = 2 - \sqrt{y}, \quad r = \sqrt[3]{y}$$

$$\boxed{V = \pi \int_0^1 \left[(2 - \sqrt{y})^2 - (\sqrt[3]{y})^2\right] dy} = \frac{37\pi}{30} \text{ u.v.}$$

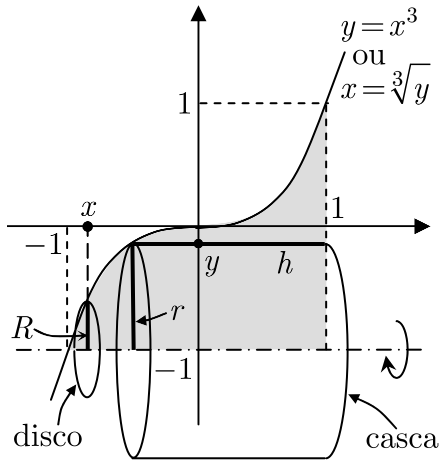


Método das cascas cilíndricas

$$dV = 2\pi rh\, dy, \quad r = x, \quad h = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \in [0,1] \\ (x-2)^2 & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$$

$$\boxed{V = 2\pi \int_0^1 x\, x^3 dx + 2\pi \int_1^2 x(x-2)^2 dx} = \frac{37\pi}{30} \text{ u.v.}$$

Exemplo 7 : Rotação da área limitada por $y = x^3$, $y = -1$ e $x = 1$ em torno da reta $y = -1$.



Método dos discos

$$dV = \pi R^2 dx\,, \quad R = x^3 - (-1)$$

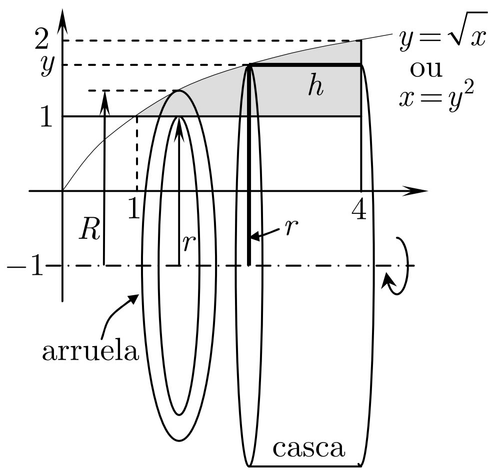
$$\boxed{V = \pi \int_{-1}^{1} \left[x^3 - (-1)\right]^2 dx}$$

Método das cascas cilíndricas

$$dV = 2\pi r h\, dy\,, \quad r = y - (-1)\,, \quad h = 1 - \sqrt[3]{y}$$

$$\boxed{V = 2\pi \int_{-1}^{1} \left[y - (-1)\right]\left(1 - \sqrt[3]{y}\right) dy}$$

Exemplo 8 : Rotação da área limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 1$ e $x = 4$ em torno da reta $y = -1$.



Método das arruelas

$$dV = \pi(R^2 - r^2)\, dx\,, \quad R = \sqrt{x} - (-1)\,, \quad r = 2$$

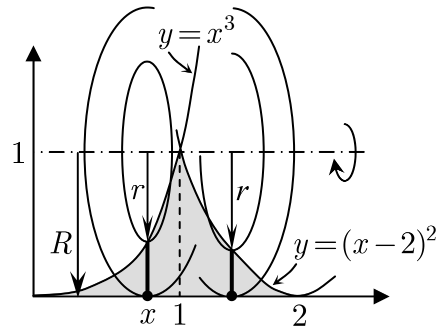
$$\boxed{V = \pi \int_{1}^{4} \left[(\sqrt{x} + 1)^2 - 2^2\right] dx}$$

Método das cascas cilíndricas

$$dV = 2\pi r h\, dy\,, \quad r = y - (-1)\,, \quad h = 4 - y^2$$

$$\boxed{V = 2\pi \int_{1}^{2} (y + 1)(4 - y^2)\, dy}$$

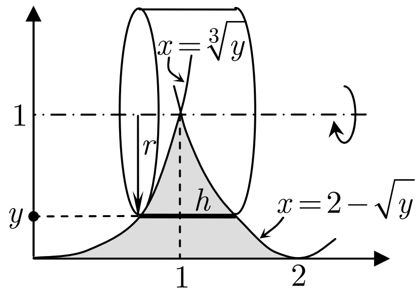
Exemplo 9 : Revolução da área do Exemplo 5, mas em torno da reta $y=1$.



Método das arruelas

$$dV=\pi(R^2-r^2)\,dx\,,\quad R=1\,,\quad r=\begin{cases}1-x^3 & \text{se } x\in[0,1]\\ 1-(x-2)^2 & \text{se } x\in[1,2]\end{cases}$$

$$\boxed{V=\pi\int_0^1\left\{1-\left[(1-x^3)^2\right]\right\}dx+\pi\int_1^2\left\{1-\left[1-(x-2)^2\right]^2\right\}dx}$$



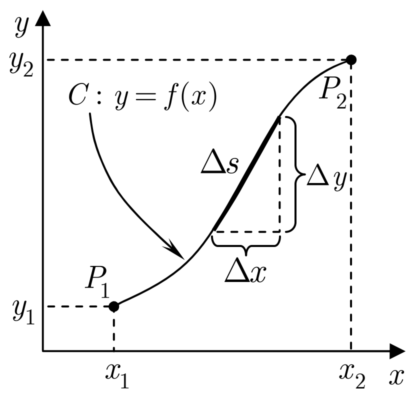
Método das cascas cilíndricas

$$dV=2\pi rh\,dy\,,\quad r=1-y\,,\quad h=(2-\sqrt{y}\,)-\sqrt[3]{y}$$

$$\boxed{V=2\pi\int_0^1(1-y)\left[(2-\sqrt{y}\,)-\sqrt[3]{y}\;\right]dy}$$

3.1.3 Comprimento de arco

Na figura à direita, a curva C entre o ponto $P_1(x_1,y_1)$ e o ponto $P_2(x_2,y_2)$ é o gráfico de uma função $y=f(x)$ com derivada contínua. Nesse caso, podemos aproximar o comprimento Δs de um pequeno arco dela (em negrito na figura) por meio do teorema de Pitágoras:



$$\Delta s\;\simeq\;\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\;=\;\sqrt{1+\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]^2}\;\Delta x\;,\qquad [\,\mathrm{I}\,]$$

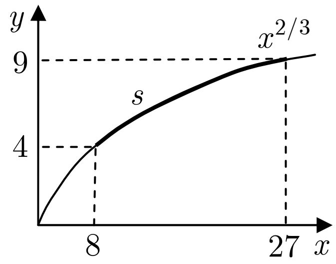
com $\Delta x>0$. No limite de quando $\Delta x\to 0^+$, a equação acima pode ser escrita na forma

$$ds\;=\;\sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\;dx\;=\;\sqrt{1+[f'(x)]^2}\;dx\;,$$

e a integração dessa expressão de ds ao longo de C fornece o comprimento dessa curva:

$$\text{comprimento de } C=\int_C ds=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\;dx\;.$$

Por exemplo, calculemos o comprimento s da curva dada por $y=f(x)=x^{2/3}$ entre as abscissas $x=8$ e $x=27$:



$$s \;=\; \int_8^{27} \sqrt{1+\left[\,(x^{2/3})'\,\right]^2}\; dx \;=\; \int_8^{27} \sqrt{1+\left[\,(2/3)\,x^{-1/3}\right]^2}\; dx$$

$$\int_8^{27} \sqrt{1+\frac{4}{9}x^{-2/3}}\; dx \;=\; \int_8^{27} \sqrt{\frac{9x^{2/3}+4}{9x^{2/3}}}\; dx \;=\; \int_8^{27} \frac{\sqrt{9x^{2/3}+4}}{3x^{1/3}}\; dx$$

$$\overset{(*)}{=} \int_{40}^{85} \frac{\sqrt{u}}{3}\,\frac{du}{6} \;=\; \frac{1}{18}\,\frac{u^{3/2}}{3/2}\bigg|_{40}^{85} \;=\; \frac{85^{3/2}-40^{3/2}}{27} \;\simeq\; 19,65 \text{ u.c.}$$

$^{(*)}$ Detalhes da mudança de variável nessa passagem: $\begin{cases} u \equiv 9x^{2/3}+4 \\ \therefore\; \dfrac{dx}{x^{1/3}} = \dfrac{du}{6} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{c|c} x & u \\ \hline 8 & 40 \\ 27 & 85 \end{array}$

Outro exemplo: cálculo do comprimeto da curva $y = x^2$ entre os pontos $(0,0)$ e $(1,1)$ (os detalhes da efetuação da integral são deixados como exercício):

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad ds \;=\; \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx \;=\; \sqrt{1+4x^2}\; dx$$

$$\Rightarrow \quad s = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\; dx \;=\cdots\;=\; \frac{2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})}{4} \;\text{ u.c.}$$

Na equação [I] acima, colocamos Δx em evidência para que surgisse o quociente $\Delta y/\Delta x$, que, no limite, se torna na derivada $dy/dx = f\,'(x)$. Podemos, se for mais conveniente, colocarmos Δy em evidência para que surja o quociente $\Delta x/\Delta y$, que, no limite, leva à derivada $dy/dx = g\,'(x)$ da função inversa $g(y)$ de $f(x)$. Nesse caso, portanto, já usando diretamente o teorema de Pitágoras com os infinitesimais dx e dy, em vez de Δx e Δy , podemos deduzir a seguinte fórmula para o comprimento da curva C considerada na figura acima, agora baseada numa integração em relação a y :

$$ds \;=\; \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \;=\; \sqrt{1+\left[\frac{dx}{dy}\right]^2}\; dy \;=\; \sqrt{1+[g\,'(x)]^2}\; dy$$

$$\therefore\; \text{comprimento de } C = \int_C ds = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1+[g\,'(y)]^2}\; dy \;\; .$$

Por exemplo, calculemos o comprimento s da curva dada por $8x = y^4 + (2/y^2)$ entre os pontos $(3/8,\, 1)$ e $(33/16\,, 2)$. Nesse caso é mais fácil escrever x em função de y, obtendo:

$$x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4}y^{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{2}y^{-3} \;\; ;$$

assim,

$$s = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{2}y^{-3}\right)^2}\, dy \;=\; \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}y^6 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y^{-6}}\, dy$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{4}y^6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y^{-6}}\, dy \;=\; \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{2}y^{-3}\right)^2}\, dy \;=\int_1^2 \left(\frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{2}y^{-3}\right) dy$$

$$= \left[\frac{y^4}{8} - \frac{y^{-2}}{4}\right]_1^2 \;=\; \left[\frac{16}{8} - \frac{1/4}{4} - \left(\frac{1}{8} - \frac{1/2}{4}\right)\right] \;=\; \frac{31}{16} \text{ u.c.}$$

Outro exemplo: cálculo do comprimento da curva dada por $x = y^3/3 + (4y)^{-1}$ entre as ordenadas $y = 1$ e $y = 2$ (forneça os detalhes dos cálculos):

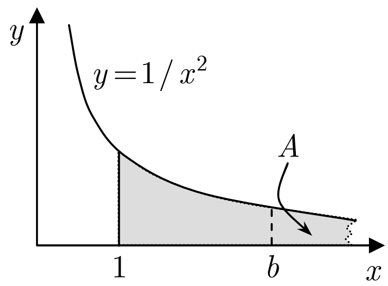
$$x = \frac{y^3}{3} + \frac{1}{4y} \Rightarrow ds \;=\; \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \;=\; \cdots \;=\; \left(y^2 + \frac{y^{-2}}{4}\right) dy$$

$$\Rightarrow s \;=\; \int_1^2 \left(y^2 + \frac{y^{-2}}{4}\right) dy \;=\; \cdots \;=\; \frac{59}{24} \text{ u.c.}$$

3.2 Extensões do Conceito de Integral

3.2.1 Integrais impróprias com intervalos de integração ilimitados

Já tivemos a oportunidade de calcular áreas de regiões do plano usando a integral definida. Essas regiões eram limitadas. Se quisermos calcular a área de regiões ilimitadas, teremos que efetuar limites. Considere, por exemplo, a área sob o gráfico da função $y = 1/x^2$ à direita de $x = 1$, que é ilimitada. O seu cálculo pode ser realizado efetuando-se o seguinte limite:



$$A = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{-1}{x}\right|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-1}{b} + 1\right) = 1 \text{ u.a.}$$

Este exemplo mostra a conveniência de se definirem as chamadas "integrais impróprias" de uma função real $f(x)$ como segue (convém lembrar que, ao se escrever um intervalo $[a, b]$, está implícito que $a < b$):

a) *Integral imprópria com o limite de integração s u p e r i o r infinito:*

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)dx \equiv \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx} \quad \text{se } f \text{ é integrável em todo } [a, b]\,.$$

b) *Integral imprópria com o limite de integração i n f e r i o r infinito:*

$$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x)dx \equiv \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx} \quad \text{se } f \text{ é integrável em todo } [a, b]\,.$$

c) *Integral imprópria com limites de integração* i n f e r i o r *e* s u p e r i o r *infinitos:*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \equiv \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx} \text{ (onde } c \in \mathbb{R}) \text{ se } f \text{ é integrável em todo } [a,b]\,.$$

As integrais impróprias em (a) e (b) são ditas *convergentes* ou *divergentes* conforme os limites a elas associados existam ou não existam, respectivamente. Já a integral imprópria em (c) é dita *convergente* se ambos os limites a ela associados existirem e é dita *divergente* se qualquer desses limites não existir.

Exemplo 1

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} \equiv \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \arctan\Big|_0^b = \underbrace{\lim_{b\to\infty} \arctan b}_{\pi/2} - \arctan 0 = \frac{\pi}{2} \;\blacksquare$$

Exemplo 2

$$\int_{-\infty}^{3} \frac{dx}{(9-x)^2} \equiv \lim_{a\to-\infty} \int_a^3 \frac{dx}{(9-x)^2} = \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{9-x}\Big|_a^3 = \frac{1}{9-3} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} \frac{1}{9-a}}_{0} = \frac{1}{6} \;\blacksquare$$

Exemplo 3

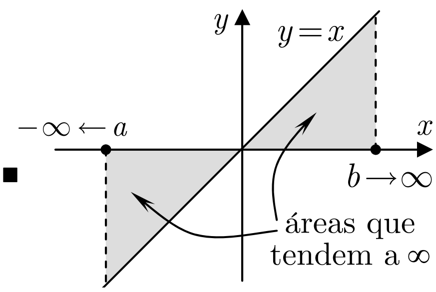
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} + \int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \frac{-1/2}{x^2+1}\Big|_a^0 + \lim_{b\to\infty} \frac{-1/2}{x^2+1}\Big|_0^b = \frac{-1}{2} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} \frac{-1/2}{a^2+1}}_{0} + \underbrace{\lim_{b\to\infty} \frac{-1/2}{b^2+1}}_{0} + \frac{1}{2} = 0 \;\blacksquare$$

Exemplo 4

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 x\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_a^0 + \lim_{b\to\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_0^b$$

$$= 0 - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} (a^2/2)}_{\infty} + \underbrace{\lim_{b\to\infty} (b^2/2)}_{\infty} - 0 = \underbrace{-\infty + \infty}_{\substack{\text{v. interpretação} \\ \text{geométrica na fig.}}} : \text{ divergente } \blacksquare$$



Exemplo 5

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x}\,dx \overset{u=\ln x}{\underset{du=dx/x}{=}} \lim_{b\to\infty} \int_0^{\ln b} u\,du = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\ln b} = \lim_{b\to\infty} \frac{\ln^2 b}{2} = \infty \;\blacksquare$$

Exemplo 6

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\underbrace{x^2-7x+10}_{(x-2)(x-5)}} = \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{-1/3}{x-2} + \frac{1/3}{x-5}\right) dx = \frac{1}{3} \lim_{a\to\infty} \Big[-\ln|x-2| + \ln|x-5|\Big]_a^0$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{a\to\infty} \left[\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right|\right]_a^0 = \frac{1}{3}\left[\ln\frac{5}{2} - \underbrace{\lim_{a\to\infty} \ln\left|\frac{a-5}{a-2}\right|}_{\ln 1 = 0}\right] = \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2} \;\blacksquare$$

Exemplo 7 : Cálculo da integral de -2 a ∞ da função considerada na seç. 2.5.4.2 (p. 41):

$$\int_{-2}^{\infty} \frac{x^2}{(2x+5)^5}\, dx \;=\; \lim_{b\to\infty} \int_{-2}^{b} \frac{x^2}{(2x+5)^5}\, dx \;\stackrel{u\,=\,2x+5}{=}\; \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{2b+5} \frac{\big[(u-5)/2\big]^2}{u^5}\, \frac{du}{2}$$

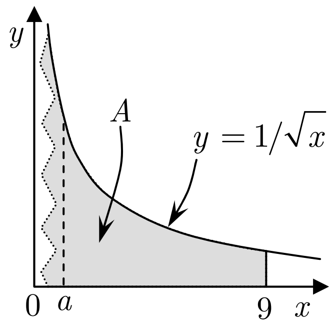
$$= \frac{1}{8} \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{2b+5} \frac{u^2 - 10u + 25}{u^5}\, du \;=\; \frac{1}{8} \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{2u^2} + \frac{10}{3u^3} - \frac{25}{4u^4} \right]_{1}^{2b+5\,\equiv\,\beta}$$

$$= \frac{1}{8} \underbrace{\lim_{\beta\to\infty} \left[-\frac{1}{2\beta^2} + \frac{10}{3\beta^3} - \frac{25}{4\beta^4} \right]}_{0} - \frac{1}{8} \left[-\frac{1}{2} + \frac{10}{3} - \frac{25}{4} \right] \;=\; \frac{41}{96} \;\blacksquare$$

3.2.2 Integrais impróprias com integrandos ilimitados

As integrais impróprias definidas acima permitem calcular áreas de regiões ilimitadas no plano xy que se estendem indefinidamente para a direita ou para a esquerda. Consideramos agora regiões ilimitadas que se estendem indefinidamente para cima ou para baixo.

Por exemplo, para calcular a área A sob o gráfico da função $y = 1\sqrt{x}$ entre o eixo y e a reta vertical em $x = 9$, efetuamos o seguinte limite:



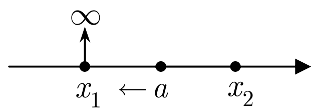
$$A = \lim_{a\to 0^+} \int_a^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a\to 0^+} \left.\frac{x^{1/2}}{1/2}\right|_a^9 = \frac{9^{1/2}}{1/2} - \underbrace{\lim_{a\to 0^+} \frac{a^{1/2}}{1/2}}_{0} = \frac{3}{1/2} = 6 \text{ u.a.}$$

Note que $\int_0^9 dx/\sqrt{x}$ não existe como uma integral de Riemann, porque o seu integrando não é definido no intervalo fechado $[0,9]$, razão pela qual essa integral é *imprópria*. Em vista disso, convém fazer as seguintes definições:

a) *Integral imprópria de função infinita no limite de integração inferior:*

Considere uma função real $f(x)$ infinita ($\pm\infty$) em x_1 e integrável em todo $[a, x_2]$ com $a > x_1$. A integral imprópria definida por meio do limite

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \equiv \lim_{a\to x_1^+} \int_a^{x_2} f(x)dx}$$

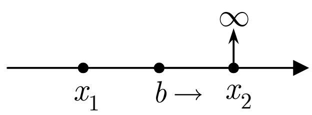


é dita convergente, se tal limite existe, e, divergente, se não existe.

b) *Integral imprópria de função infinita no limite de integração superior:*

Considere uma função real $f(x)$ infinita ($\pm\infty$) em x_2 e integrável em todo $[x_1, b]$ com $b < x_2$. A integral imprópria definida por meio do limite

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \equiv \lim_{b\to x_2^-} \int_{x_1}^{b} f(x)dx}$$

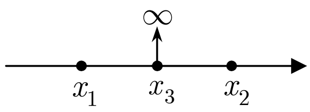


é dita convergente, se tal limite existe, e, divergente, se não existe.

c) *Integral imprópria de função infinita num* p o n t o i n t e r i o r *do intervalo de integração:*

Considere uma função real $f(x)$ infinita ($\pm\infty$) em $x_3 \in (x_1, x_2)$ e integrável em todo intervalo $[x_1, b]$ com $x_1 < b < x_3$ e em todo intervalo $[a, x_2]$ com $x_3 < a < x_2$. A integral imprópria definida pela expressão

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \equiv \int_{x_1}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_2} f(x)dx}$$



é dita convergente se as duas integrais impróprias no membro direito [já definidas em (a) e (b)] forem convergentes, sendo divergente se qualquer dessas duas também for.

Exemplo 1 : $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{4} \frac{dx}{(x-3/2)^{2/5}} = \lim_{a\to\frac{3}{2}^+} \int_a^4 \frac{dx}{(x-3/2)^{2/5}} = \lim_{a\to\frac{3}{2}^+} \frac{5}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^{3/5}\Bigg|_a^4$

$$= \frac{5}{3}\left(4-\frac{3}{2}\right)^{3/5} - \underbrace{\frac{5}{3}\lim_{a\to\frac{3}{2}^+}\left(a-\frac{3}{2}\right)^{3/5}}_{0} = \frac{5}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^{3/5} \ \blacksquare$$

Exemplo 2 : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec x\, dx = \lim_{b\to(\pi/2)^-} \int_0^b \sec x\, dx = \lim_{b\to(\pi/2)^-} \ln(\sec x + \tan x)\Big|_0^b$

$$= \lim_{b\to(\pi/2)^-} \Big[\ln(\underset{\infty}{\sec b} + \underset{\infty}{\tan b})\Big] - \underbrace{\ln(\overbrace{\sec 0}^{1} + \overbrace{\tan 0}^{0})}_{\ln 1 = 0} = \infty \ \text{(divergente)} \ \blacksquare$$

Exemplo 3 - A seguinte integral é igual a $-A_1 + A_2$, onde A_1 e A_2 são respectivamente as áreas entre os intervalos $[-4, -2)$ e $(-2, 1]$ do eixo x e o gráfico da função $y = 1/\sqrt[3]{x+2}$:

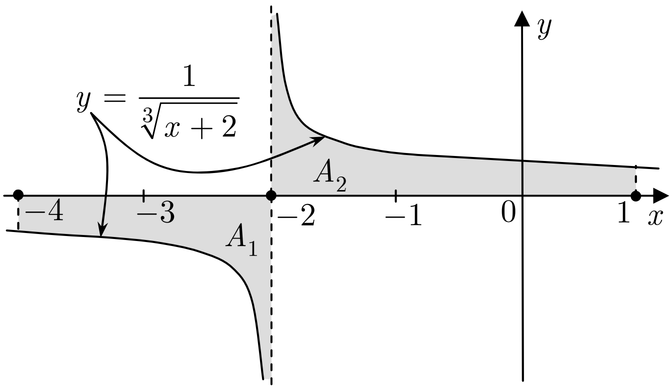
$$\int_{-4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}} = \int_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}} + \int_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}$$

$$= \lim_{b\to-2^-} \int_{-4}^{b} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}} + \lim_{b\to-2^+} \int_{a}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}$$

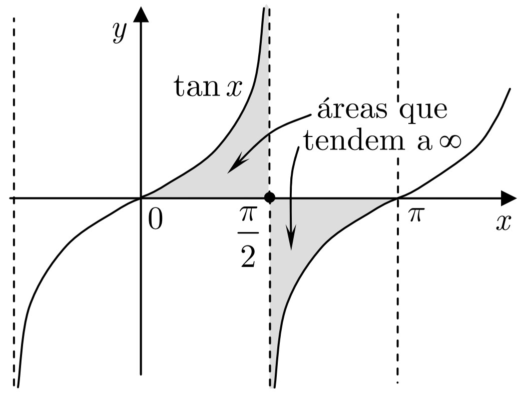
$$= \lim_{b\to-2^-} \frac{3}{2}(x+2)^{2/3}\Big|_{-4}^{b} + \lim_{a\to-2^+} \frac{3}{2}(x+2)^{2/3}\Big|_{a}^{1}$$

$$= \underbrace{\frac{3}{2}\lim_{b\to-2^-}(b+2)^{2/3}}_{0} - \frac{3}{2}(-4+2)^{2/3}$$

$$+ \frac{3}{2}(1+2)^{2/3} - \underbrace{\frac{3}{2}\lim_{a\to-2^+}(a+2)^{2/3}}_{0} = \frac{3}{2}\left(3^{2/3} - 2^{2/3}\right) \ \blacksquare$$



Exemplo 4



$$\int_0^{\pi} \tan x\,dx \;=\; \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^{b} \tan x\,dx + \lim_{a\to\frac{\pi}{2}^+}\int_a^{\pi} \tan x\,dx$$

$$= \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} \ln|\sec x|\,\Big|_0^{b} + \lim_{a\to\frac{\pi}{2}^+} \ln|\sec x|\,\Big|_a^{\pi}$$

$$= \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} \ln|\overset{\infty}{\uparrow}{\sec b}\,| - \underbrace{\ln|\overbrace{\sec 0}^{1}|}_{0} + \underbrace{\ln|\overbrace{\sec \pi}^{-1}|}_{0} - \lim_{a\to\frac{\pi}{2}^+} \ln\underbrace{|\overset{-\infty}{\uparrow}{\sec a}\,|}_{\to\infty}$$

$$= \underbrace{\infty \;-\; \infty}_{\substack{\text{v. interpretação}\\ \text{geométrica na fig.}}} \;:\; \text{divergente} \;\blacksquare$$

Exemplo 5

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}} = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^{b} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}} \;\overset{u\,=\,1-\operatorname{sen} x}{\underset{du\,=\,-\cos x\,dx}{=}}\; \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-}\int_1^{1-\operatorname{sen} b} \frac{-du}{\sqrt{u}} \;=\; \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{-u^{1/2}}{1/2}\,\Bigg|_1^{1-\operatorname{sen} b}$$

$$= \underbrace{\lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{-(1-\operatorname{sen} b)^{1/2}}{1/2}}_{0} \;-\; \frac{-1}{1/2} \;=\; 2 \;\blacksquare$$

Nos dois exemplos seguintes, as integrais são impróprias porque tanto o intervalo de integração quanto o integrando são ilimitados.

Exemplo 6

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to\infty}} \int_a^{b} \frac{dx}{x^2} \;=\; \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to\infty}} \frac{-1}{x}\,\Bigg|_a^{b} \;=\; \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to\infty}} \left(\frac{-1}{b}+\frac{1}{a}\right)$$

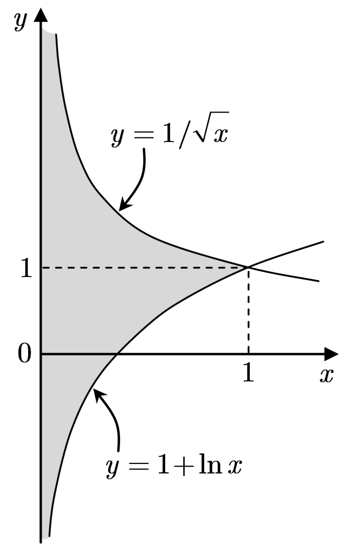
$$= \underbrace{\lim_{a\to 0^+} \frac{1}{a}}_{\infty} \;+\; \underbrace{\lim_{b\to\infty} \frac{-1}{b}}_{0} \;=\; \infty \;:\; \text{divergente!}$$

Exemplo 7

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \;=\; \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to\infty}} \int_a^{b} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \;\overset{u\,=\,\sqrt{x}}{\underset{x\,=\,u^2}{=}}\; \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to\infty}} \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{2\cancel{u}\,du}{(1+u^2)\,\cancel{u}}$$

$$= \;2 \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to\infty}} \arctan u\,\Big|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \;=\; 2\underbrace{\lim_{b\to\infty} \arctan\sqrt{b}}_{\pi/2} - 2\underbrace{\lim_{a\to 0^+} \arctan\sqrt{a}}_{0} \;=\; \pi \;\blacksquare$$

Exemplo 8: Cálculo da área A da região acinzentada ao lado: à direita do eixo y, acima do gráfico de $y = 1 + \ln(x)$ e abaixo do gráfico de $y = 1/\sqrt{x}$.



A sua área A é calculada como segue:

$$A = \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \left[\frac{1}{\sqrt{x}} - (1 + \ln x) \right] dx$$

$$= \lim_{a\to 0+} \Big[2\sqrt{x} - x \ln x \Big]_a^1 = 2 - \lim_{a\to 0+} a \ln a = 2 \ \blacksquare$$

pois $\lim\limits_{a\to 0+} a \ln a = \lim\limits_{a\to 0+} \dfrac{\ln a}{1/a} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{a\to 0+} \dfrac{1/a}{-1/a^2} = \lim\limits_{a\to 0+} (-a) = 0$.

Observação: Considere a integral $\int_{-1}^{1} \big(1/\sqrt[3]{x^2}\big) dx$. Caso não se perceba que o integrando se torna infinito no ponto interior $x = 0$ do intervalo de integração e se realize seu cálculo, de maneira errada, usando-se "normalmente" o TFC-II, obter-se-ia

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{1} x^{-2/3} dx = 3x^{1/3} \Big|_{-1}^{1} = 3(\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{-1}\,) = 6 \ .$$

Agora, pelo procedimento correto, obtém-se

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{0} x^{-2/3} dx + \int_{0}^{1} x^{-2/3} dx = \lim_{b\to 0^-} \int_{-1}^{b} x^{-2/3} dx + \lim_{a\to 0^+} \int_{a}^{1} x^{-2/3} dx$$

$$= \lim_{b\to 0^-} \Big[3\sqrt[3]{x} \Big]_{-1}^{b} + \lim_{a\to 0^+} \Big[3\sqrt[3]{x} \Big]_{a}^{1} = 3 \lim_{b\to 0^-} \Big[\underbrace{\sqrt[3]{b}}_{\searrow 0} - \sqrt[3]{-1} \Big] + 3 \lim_{a\to 0^+} \Big[\sqrt[3]{1} - \underbrace{\sqrt[3]{a}}_{\searrow 0} \Big] = 6 \ ,$$

o mesmo resultado.

Mas, digamos, é "por acaso" que esses dois resultados coincidem. De fato, se, na integral acima, o integrando for substituído pela função $1/x^2$, que também é infinita em $x = 0$, a primeira maneira (uso direto do TFC-II) fornece

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2 \ ,$$

o que é um absurdo, pois, sendo $1/x^2 > 0$, um resultado negativo é inadmissível! Pelo procedimento correto, obtém-se uma integral infinitamente positiva (divergente):

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to 0^-} \int_{-1}^{b} \frac{dx}{x^2} + \lim_{a\to 0^+} \int_{a}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{b\to 0^-} \left[\frac{-1}{x} \right]_{-1}^{b} + \lim_{a\to 0^+} \left[\frac{-1}{x} \right]_{a}^{1} = \lim_{b\to 0^-} \Big[\underbrace{(-\frac{1}{b})}_{\searrow \infty} - 1 \Big] + \lim_{a\to 0^+} \Big[-1 + \underbrace{\frac{1}{a}}_{\searrow \infty} \Big] = \infty \ .$$

3.2.3 Critérios de verificação da convergência de integrais impróprias

Critério 1

a) Se $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$ então $\int_a^\infty f(x)dx$ é divergente.

b) Se $\lim_{x\to-\infty} f(x) \neq 0$ então $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ é divergente.

c) Se $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) \neq 0$ então $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ é divergente.

Critério 2 : Se f e g são duas funções não negativas no intervalo I , temos o seguinte:

a) Se $f(x) \leqslant g(x)\ \forall\, x \in I$ e $\int_I g(x)dx$ é convergente então $\int_I f(x)dx$ também é convergente.

b) Se $f(x) \geqslant g(x)\ \forall\, x \in I$ e $\int_I g(x)dx$ é divergente então $\int_I f(x)dx$ também é divergente.

Critério 3 : Para a e b positivos e quaisquer α e β valem as proposições:

a) $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ converge somente para $p > 1$.

b) $\int_0^b \frac{dx}{x^p}$ converge somente para $p < 1$.

c) $\int_\alpha^\infty e^{px}dx$ converge somente para $p < 0$.

d) $\int_{-\infty}^\beta e^{px}dx$ converge somente para $p > 0$.

Critério 4 : Se $\int_I |f(x)|dx$ é convergente então $\int_I f(x)dx$ também é convergente.

Todos os critérios acima são bem evidentes, exceto o critério 3, cuja prova requer alguns cálculos. Para provar os itens (a) e (b) do critério 3, analisa-se separadamente para $p = 1$, $p < 1$ e $p > 1$ a convergência quando $b \to \infty$ ou $a \to 0^+$ do seguinte resultado:

$$\int_a^b x^{-p}dx = \begin{cases} \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a \ \text{ se } \ p = 1 \\ \dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_a^b = \dfrac{1}{-p+1}\left[\dfrac{1}{b^{p-1}} - a^{1-p}\right] \ \text{ se } \ p < 1 \ \text{ ou } \ p > 1 \end{cases}$$

E, no caso dos itens (c) e (d), analisa-se separadamente para $p = 0$, $p < 0$ e $p > 0$ a convergência quando $\beta \to \infty$ ou $\alpha \to -\infty$ do seguinte resultado:

$$\int_\alpha^\beta e^{px}dx = \begin{cases} \beta - \alpha \ \text{ se } \ p = 0 \\ \dfrac{e^{px}}{p}\Big|_\alpha^\beta = \dfrac{e^{p\beta} - e^{p\alpha}}{p} \ \text{ se } \ p < 0 \ \text{ ou } \ p > 0 \end{cases}$$

Exemplo 1

A integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{3x^3+6}{4x^3+5x^2+2}\,dx$ é divergente de acordo com o critério 1(a):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+6}{4x^3+5x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{6}{x^3}}{4+\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^3}}=\frac{3}{4}\neq 0\ .$$

Exemplo 2

As integrais $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2+2}{5x^2+1}\,e^{\frac{x}{x^2+1}}dx$, $\displaystyle\int_1^\infty e^{1/x}\arctan x\,dx$ e $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^x}{x^2}\,dx$ são divergentes de acordo com o critério 1(a):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{5x^2+1}\,e^{\frac{x}{x^2+1}}=\frac{1}{5}\,e^0=\frac{1}{5}\neq 0\ ,\qquad \lim_{x\to\infty}e^{1/x}\arctan x=1\cdot\frac{\pi}{2}\neq 0\ ,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\text{l'H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty\neq 0\quad \text{[l'H indica o uso da regra de l'Hôpital]}\ .$$

Note que, para provar a convergência de uma integral pelo critério 2(a), basta encontrar uma função $g(x)$ tal que $f(x)\leqslant g(x)$ no intervalo I e que $\int_I g(x)dx$ seja convergente. Já a prova da *divergência* usando o critério 2(b), a função $g(x)$ deve ser tal que $f(x)\geqslant g(x)$ em I e que $\int_I g(x)dx$ seja divergente. É o que se faz nos exemplos a seguir.

Exemplo 3

A integral $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ é convergente de acordo com o critério 2(a):

- Em $[1,\infty)$, $e^{-x^2}=\dfrac{1}{e^{x^2}}\leqslant\dfrac{1}{e^x}$
- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{e^x}\,dx$ é convergente; de fato, $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}-e^{-x}\Big|_1^b=-\underbrace{\lim_{b\to\infty}-e^{-b}}_{0}+e^{-1}=e^{-1}$

Exemplo 4

A integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+x^2}\,dx$ é convergente de acordo com o critério 2(a):

- Em $[0,\infty)$, $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+x^2}\leqslant\dfrac{1}{1+x^2}$
- $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ é convergente, pois

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\arctan x\Big|_0^b=\underbrace{\lim_{b\to\infty}\arctan b}_{\pi/2}-\underbrace{\arctan 0}_{0}=\frac{\pi}{2}\ .$$

Exemplo 5

A integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(x^3+1)}{\sqrt{x^3+x+2}}\,dx$ é convergente de acordo com o critério 2(a):

- Em $[1,\infty)$, $\dfrac{\text{sen}^2(x^3+1)}{\sqrt{x^3+x+2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x^3+x+2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x^3}} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$
- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ é convergente de acordo com o critério 3(a) $\qquad$ [∗]

Observação: Neste exemplo, se o limite de integração inferior fosse 0, em vez de 1, e se fosse seguido o mesmo procedimento, a integral na equação [∗] acima teria 0 no limite inferior e não seria convergente. Mas a integral modificada, isto é, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\text{sen}^2(x^3+1)}{\sqrt{x^3+x+2}}\,dx$, é convergente, o que se verifica desmembrando-a em duas:

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}^2(x^3+1)}{\sqrt{x^3+x+2}}\,dx = \int_0^1 \frac{\text{sen}^2(x^3+1)}{\sqrt{x^3+x+2}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\text{sen}^2(x^3+1)}{\sqrt{x^3+x+2}}\,dx \; .$$

A primeira integral no lado direito é convergente por ser a integral de uma função contínua no intervalo de integração, e a segunda já teve a sua convergência provada acima.

<u>Exemplo 6</u> : A integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{e^x}dx$ é convergente de acordo com o critério 2(a):

- Em $[1,\infty)$, $\dfrac{\ln x}{e^x} \leqslant \dfrac{x}{e^x} = xe^{-x}$
- $\displaystyle\int_1^\infty xe^{-x}dx$ é convergente, pois

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\Big[-e^{-x}(x+1)\Big]_1^b = -\lim_{b\to\infty}\frac{b+1}{e^b} + 2e^{-1} \overset{\text{l'H}}{=} -\underbrace{\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}}_{0} + \frac{2}{e} = \frac{2}{e} \; .$$

<u>Exemplo 7</u> : A integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos^2(4+x^2)\ln x}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx$ é convergente de acordo com o critério 2(a):

- Em $[1,\infty)$, $\dfrac{\cos^2(4+x^2)\ln x}{\sqrt{x^5+2x}} \leqslant \dfrac{1\cdot x}{\sqrt{x^5}} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$
- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$ é convergente de acordo com o critério 3(a)

<u>Exemplo 8</u> : A integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+4x^3}\,dx$ é convergente de acordo com o critério 2(a):

- Em $[1,\infty)$, $\dfrac{dx}{\sqrt{x}+4x^3} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}+\underbrace{4x^3}_{\text{maior}}} \leqslant \dfrac{1}{4x^3} = \dfrac{1/4}{x^3}$
- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1/4}{x^3}\,dx$ é convergente de acordo com o critério 3(a)

<u>Exemplo 9</u> : A integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+4x^3}\,dx$ é convergente de acordo com o critério 2(a):

- Em $(0,1]$, $\dfrac{dx}{\underbrace{\sqrt{x}}_{\text{maior}}+4x^3} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x^{1/2}}$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ é convergente de acordo com o critério 3(b)

Exemplo 10 : A integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{3+\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ é divergente de acordo com o critério 2(b):

- Em $[1,\infty)$, $\displaystyle \frac{3+\operatorname{sen} x}{x} \geqslant \frac{3-1}{x} = \frac{2}{x}$
- $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2}{x}\,dx$ é divergente de acordo com o critério 3(a)

Exemplo 11 : A integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{5x^3+6}}\,dx$ é divergente de acordo com o critério 2(b):

- Em $[1,\infty)$, $\displaystyle \frac{1}{\sqrt[3]{5x^3+6}} \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{5x^3+6x^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{11x^3}} = \frac{1/\sqrt[3]{11}}{x}$
- $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1/\sqrt[3]{11}}{x}\,dx$ é divergente de acordo com o critério 3(a)

Exemplo 12 : A integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+x^2}\,dx$ é convergente de acordo com o critério 4, pois $\displaystyle\int_0^{\infty} \left|\frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+x^2}\right|\,dx$ é convergente, o que se vê pelo critério 2(a):

$$\left|\frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2} \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \text{ é convergente (já visto no Exemplo 4) .}$$

Capítulo 4

Exercícios

1] Calcule $m > 0$ de modo que seja unitária a área da região delimitada pela reta $y = mx$ e pela parábola $y = 2x - x^2$.

2] Calcule: **(a)** $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{\sqrt{x^2-1}} \frac{e^t}{t}\,dt$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\int_{\operatorname{sen} x}^{1} e^{-t^2}dt}{\operatorname{sen} x - 1}$ **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\int_4^{(x-1)^2+4} e^{t^2}dt}{x^3 - 3x + 2}$

3] Integração por partes:
(a) $\displaystyle\int (12x^2 + 4x - 10)\cos 2x\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int \cos\ln x\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x}\cos 3x\,dx$ **(d)** $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$

4] Integração por substituição trigonométrica:
(a) $\displaystyle\int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$ **(c)** $\displaystyle\int \frac{x^n dx}{(x^2+1)^3}$ (n= 2 e 3) **(d)** $I = \displaystyle\int_{1/3}^{2/3} \frac{\sqrt{4-9x^2}}{x^2}\,dx$

5] Integração por frações parciais:
(a) $\displaystyle\int \frac{5x+4}{x^2+3x-10}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{4}{x^4-1}\,dx$

6] Técnicas de integração diversas:
(a) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{1+\operatorname{sen} x}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[3]{x^2}}$ **(c)** $\displaystyle\int 2x^3\sec^2 x^2\,dx$

7] Obtenha, tanto pelo método das arruelas quanto das cascas cilíndricas, a integral que fornece o volume V do sólido gerado pela revolução em torno da reta $x = 3$ da região descrita nos seguintes Exemplos da seç. 3.1.2:
(a) Exemplo 4 **(b)** Exemplo 5

8] Cálculo de integrais impróprias:
(a) $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-2\sqrt{x}}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\cos x\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ **(d)** $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ **(e)** $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^3}\,dx$

9] Análise da convergência de integrais impróprias:
(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x^3+\sqrt{x}}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(3x^2+2)}{x^{7/9}}\,dx$

(c) Se a e b são constantes reais maiores que 1, mostre que $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x\ln^p x}$ e $\displaystyle\int_0^{b} \frac{dx}{x\ln^p x}$ convergem somente para $p > 1$ e $p < 1$, respectivamente.

(d) Analise a convergência das integrais $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{4+x\ln^2 x}$ e $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{4+x\ln x}$.

10] Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+\tan x}{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

Respostas

1] $2-\sqrt[3]{6}$

2] **(a)** $x\,e^{\sqrt{x^2-1}}/(x^2-1)$ **(b)** $-1/e$ **(c)** $e^{16}/3$

3] **(a)** $(6x^2+2x-8)\operatorname{sen}2x+(6x+1)\cos 2x+c$ **(b)** $\dfrac{x}{2}(\operatorname{sen}\ln x+\cos\ln x)+c$

(c) $\dfrac{e^{2x}(2\cos 3x+3\operatorname{sen}3x)}{13}\Bigg|_0^{\pi}=-\dfrac{2(2+e^{2\pi})}{13}$ **(d)** $\Big[x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x\Big]_0^1=\dfrac{\pi}{2}+\ln 2-2$

4] **(a)** $\dfrac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}+c$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2}\pm\dfrac{1}{2}\operatorname{arcsec}x+c$ ("+" se $x>0$ e "−" se $x<0$)

(c) $\ln|x+\sqrt{x^2+1}\,|-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+c$ se $n=2$ e $\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+c$ se $n=3$

(d) I [após a mudança $3x\equiv 2\operatorname{sen}\theta$] $=-3\Big[\cot\theta+\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2}=3\sqrt{3}-\pi$

5] **(a)** $\Big[2\ln|x-2|+3\ln|x+5|\Big]_3^4=6\ln 3-7\ln 2$

(b) $\ln|x-1|-\ln|x+1|-2\arctan x+c$

6] **(a)** $\operatorname{sen}x-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2x+c$

(b) $-\dfrac{15}{4}x^{4/15}-\dfrac{15}{2}x^{2/15}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}+15\sqrt[15]{x}-15\ln|1+\sqrt[15]{x}|+c$

(c) $x^2\tan x^2+\ln|\cos x^2|+c$

7] **(a)** Exemplo 4:

$V=\pi\displaystyle\int_0^1\Big[\big(3-(-\sqrt{y}\,)\big)^2-(3-\sqrt{y}\,)^2\Big]dy+\pi\int_1^4\Big[\big(3-(y-2)\big)^2-(3-\sqrt{y})^2\Big]dy$ (arruelas)

$V=2\pi\displaystyle\int_{-1}^{2}(3-x)(x+2-x^2)dx$ (cascas cilíndricas)

(b) Exemplo 5:

$V=\pi\displaystyle\int_0^1\big[(3-\sqrt[3]{y}\,)^2-(1+\sqrt{y}\,)^2\big]dy$ (arruelas)

$V=2\pi\displaystyle\int_0^1(3-x)x^3dx+2\pi\int_1^2(3-x)(x-2)^2dx$ (cascas cilíndricas)

8] **(a)** $3/(2e^2)$ **(b)** $1/2$ **(c)** $1/\ln 2$ **(d)** $(1+\ln 2)/2$ **(e)** 1

9] **(a)** convergente **(b)** convergente **(c)** faça $u=\ln x$ **(d)** convergente e divergente

10] π

Capítulo 5

Apêndice

5.1 Prova do teorema do valor médio para integrais

Faremos uso do teorema de Weierstrass (TW) e do teorema do valor intermediário (TVI), os quais, como verificado na aula, são bastante intuitivos (v. Cap. 5 do Vol. 1 in Guidorizzi).

Sendo a função f contínua em $[a,b]$, ela admite, segundo o TW, um valor mínimo m e um valor máximo M nesse intervalo, valendo então a desigualdade:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad \forall x \in [a,b] \quad .$$

Logo, de acordo com a propriedade (viii) da integral definida na seç. 1.2, podemos escrever

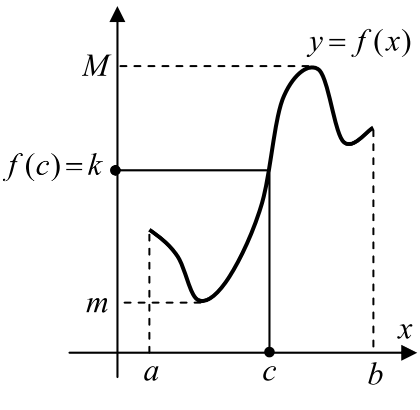
$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x) \leqslant \int_a^b M\,dx \quad ,$$

ou

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x) \leqslant M(b-a) \quad ,$$

ou ainda, após divisão por $b-a$,

$$m \leqslant \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)}{b-a}}_{k} \leqslant M \quad .$$



Mas, pelo TVI, o número k indicado acima é, pela f, a imagem de algum $c \in [a,b]$ (v. figura ao lado), isto é,

$$k = (b-a)^{-1}\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \quad ,$$

donde, finalmente,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \ \blacksquare$$

5.2 Justificativa da expansão de função racional em frações parciais

Nesta seção, diferenciamos as constantes *reais* das *complexas* e os polinômios de coeficientes *reais* dos de coeficientes *complexos* denotando-os por letras *latinas* se reais ou por letras *gregas* se complexos (maiúsculas ou minúsculas, com ou sem subíndices). Por exemplo, $Q(x) = ax^2 + bx + C_1$ é um polinômio de coeficientes reais, e $\Theta(x) = \alpha x^2 + \beta x + \Gamma_k$ é um polinômio de coeficientes complexos.

Precisaremos desse conhecido teorema:

- Teorema de d'Alembert: Se $\Pi(\alpha) = 0$ então existe $\Theta(x)$ tal que $\Pi(x) = (x-\alpha)\Theta(x)$.

Ele é usado para provar os dois teoremas seguintes, cuja aplicação repetida justifica os métodos de expansão em frações parciais apresentados (dentro de retângulos que os realçam) nas seções 2.5.2 e 2.5.3.

- Teorema [desmembramento da fração parcial $A/(x-a)^k$]:

Se $P(x)/[R(x)(x-a)^k]$ é uma função racional com o grau de $P(x)$ menor que o grau de $R(x)(x-a)^k$, $k \in \mathbb{N}^*$ e $R(a) \neq 0$, então existem A e $Q(x)$ tais que

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{P(x)}{R(x)(x-a)^k} = \dfrac{A}{(x-a)^k} + \dfrac{Q(x)}{R(x)(x-a)^{k-1}} \ , \\[2ex] \text{sendo o grau de } Q(x) \text{ menor que o grau de } R(x)(x-a)^{k-1} \ . \end{array}}$$

Prova:

Escrevendo as duas frações no lado direito com o mesmo denominador presente no lado esquerdo, somando-as e comparando os numeradores nos dois lados, concluímos que

$$P(x) = A\,R(x) + (x-a)Q(x) \ . \qquad \text{(i)}$$

Substituindo $x = a$ nessa equação, deduzimos

$$P(a) = A\,R(a) \ , \qquad \text{(ii)}$$

donde provamos a existência de $A = P(a)/R(a)$ ✓

Agora escrevendo (i) na forma

$$(x-a)Q(x) = P(x) - A\,R(x) \equiv S(x) \qquad \text{(iii)}$$

e substituindo $x = a$, obtemos $S(a) = 0$, o que, pelo Teorema de d'Alembert, implica na existência de $S_1(x)$ tal que

$$S(x) = (x-a)S_1(x) \ . \qquad \text{(iv)}$$

Se substituirmos (iv) em (iii), obtemos $(x-a)Q(x) = (x-a)S_1(x)$, assim se concluindo $Q(x)$ existe, sendo o $S_1(x)$ que se provou existir ✓

Por fim, uma vez que, de acordo com (iii),

$$^\circ[(x-a)Q(x)] \ = \ ^\circ[P(x) - A\,R(x)] \ ^{(*)} \ ,$$

então, aplicando as propriedades do grau do polinômio resultante da operação de outros polinômios, obtemos

$$1 + {}^\circ Q \ \leqslant \ \text{máx}\{^\circ P, {}^\circ R\} \ . \qquad \text{(v)}$$

(*) $^\circ[P(x)]$ ou $^\circ P$ denota o grau do polinômio $P(x)$

Usando a hipótese $°P \leqslant °R + k - 1$, o lado direito da desigualdade acima deve satisfazer

$$\text{máx}\{°P, °R\} \;\leqslant\; \text{máx}\{°R + k - 1\,, °R\} \;=\; °R + k - 1 \;\; . \qquad \text{(vi)}$$

Logo, substituindo (vi) em (v), concluímos que

$$1 + °Q \;\leqslant\; \text{máx}\{°P, °R\} \leqslant\; °R + k - 1 \quad\Rightarrow\quad °Q \leqslant °R + k - 2 \checkmark \quad \blacksquare$$

• Teorema [desmembramento da fração parcial $(Ax + B)/(x^2 + bx + c)^k$]:

Se $P(x)/[R(x)(x^2 + bx + c)^k]$ é uma função racional com o grau de $P(x)$ menor que o grau de $R(x)(x^2 + bx + c)^k$, $k \in \mathbb{N}^*$ e $R(\alpha) \neq 0$, onde α é um zero não real de $x^2 + bx + c$, então existem A, B e $Q(x)$ tais que

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{P(x)}{R(x)(x^2 + bx + c)^k} = \dfrac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^k} + \dfrac{Q(x)}{R(x)(x^2 + bc + c)^{k-1}} \;\; , \\[2ex] \text{sendo o grau de } Q(x) \text{ menor que o grau de } R(x)(x^2 + bx + c)^{k-1} \; . \end{array}}$$

Prova:

Nesta prova, mantenha-se em mente que, não sendo α real, então sua parte imaginária (um número real) não se anula: $\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0$.

Escrevendo as duas frações no lado direito com o mesmo denominador presente no lado esquerdo e comparando os numeradores, concluímos que

$$P(x) = (Ax + B)\,R(x) + (x^2 + bx + c)Q(x) \;\; . \qquad \text{(i)}$$

Substituindo $x = \alpha$ e $x = \alpha^*$ (este é complexo conjugado a α) na equação acima, lembrando que α e α^* são os dois zeros de $x^2 + bx + c$, deduzimos

$$P(\alpha) = (A\alpha + B)\,R(\alpha) \Rightarrow A\alpha + B = \frac{P(\alpha)}{R(\alpha)} \equiv \gamma \;\; ,$$

$$P(\alpha^*) = (A\alpha^* + B)\,R(\alpha^*) \Rightarrow A\alpha^* + B = \frac{P(\alpha^*)}{R(\alpha^*)} = \frac{P^*(\alpha)}{R^*(\alpha)} = \left[\frac{P(\alpha)}{R(\alpha)}\right]^* = \gamma^* \;\; .$$

Subtraindo essas duas equações, mostramos que a constante A existe e é real:

$$A(\alpha - \alpha^*) = \gamma - \gamma^* \quad\Rightarrow\quad A = \frac{\gamma - \gamma^*}{\alpha - \alpha^*} = \frac{2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\gamma}{2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\alpha} = \frac{\mathrm{Im}\gamma}{\mathrm{Im}\,\alpha} \in \mathbb{R} \checkmark$$

E somando aquelas duas equações, mostramos que a constante B existe e é real:

$$A(\underbrace{\alpha + \alpha^*}_{2\mathrm{Re}\,\alpha}) + 2B = \underbrace{\gamma + \gamma^*}_{2\mathrm{Re}\gamma} \quad\Rightarrow\quad B = \mathrm{Re}\gamma - A\,\mathrm{Re}\,\alpha \in \mathbb{R} \checkmark$$

Agora escrevendo (i) na forma

$$(x^2 + bx + c)Q(x) = P(x) - (Ax + B)\,R(x) \equiv S(x) \qquad \text{(ii)} \;\; ,$$

e, nessa equação, substituindo $x = \alpha$ (um zero de $x^2 + bx + c$), obtemos $S(\alpha) = 0$, o que, pelo Teorema de d'Alembert, implica na existência de $\varTheta_1(x)$ tal que

$$S(x) = (x - \alpha)\,\varTheta_1(x) \;\; . \qquad \text{(iii)}$$

A substituição em (ii) de $x = \alpha^*$ (também um zero de $x^2 + bx + c$) fornece $S(\alpha^*) = 0$; usando esse resultado e (iii) com $x = \alpha^*$, obtemos

$$S(\alpha^*) = (\underbrace{\alpha^* - \alpha}_{2\,\mathrm{Im}\,\alpha \neq 0})\,\Theta_1(\alpha^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Theta_1(\alpha^*) = 0 \ \ ,$$

o que, pelo Teorema de d'Alembert, implica na existência de $\Theta_2(x)$ tal que

$$\Theta_1(x) = (x - \alpha^*)\,\Theta_2(x) \ \ . \qquad \text{(iv)} \ \ .$$

Assim, substituindo (iv) em (iii), obtemos

$$S(x) = (x - \alpha)(x - \alpha^*)\,\Theta_2(x) = (x^2 + bx + c)\,\Theta_2(x) \ \ ,$$

e a substituição dessa expressão de $S(x)$ em (ii) fornece

$$(x^2 + bx + c)Q(x) = (x^2 + bx + c)\,\Theta_2(x) \ \ ,$$

assim se concluindo que $Q(x)$ existe, sendo o $\Theta_2(x)$ cuja existência foi provada ✓

Por fim, uma vez que, de acordo com (ii),

$$^\circ[(x^2 + bx + c)Q(x)] \ = \ ^\circ[P(x) - (Ax + B)\,R(x)] \ \ ,$$

donde

$$2 + {}^\circ Q \ \leqslant \ \text{máx}\{{}^\circ P,\ 1 + {}^\circ R\} \ \ . \qquad \text{(v)}$$

Usando a hipótese ${}^\circ P \leqslant {}^\circ R + 2k - 1$, o lado direito da desigualdade acima deve satisfazer

$$\text{máx}\{{}^\circ P,\ 1 + {}^\circ R\} \ \leqslant \ \text{máx}\{{}^\circ R + 2k - 1\,,\ {}^\circ R\} \ = \ {}^\circ R + 2k - 1 \ \ . \qquad \text{(vi)}$$

Logo, substituindo (vi) em (v), concluímos que

$$2 + {}^\circ Q \ \leqslant \ \text{máx}\{{}^\circ P,\ 1 + {}^\circ R\} \leqslant \ {}^\circ R + 2k - 1 \quad \Rightarrow \quad {}^\circ Q \leqslant {}^\circ R + 2k - 3 \checkmark \quad \blacksquare$$

Parte II

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Capítulo 6

Noções Fundamentais

6.1 Conceitos Básicos

i) Equação diferencial (ED): equação contendo derivadas da *variável dependente* em relação a uma ou mais *variáveis independentes* que tomam valores num conjunto especificado, denominado *domínio da ED*.

ii) Equação diferencial ordinária (EDO): um equação diferencial contendo uma única variável independente, sendo derivadas ordinárias, portanto, as derivadas que ocorrem nela.

Esse é o tipo de ED considerado a partir deste ponto.

iii) Ordem da EDO: é a ordem de diferenciação mais elevada da variável dependente. No exemplo abaixo, y é uma variável dependente (é uma função) de x:

Exemplo 1 : $e^{-x}y^4(x) - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 + \dfrac{d^2y}{dx^2} = e^x$ é uma EDO de 2ª ordem.

iv) Solução: para uma EDO de variáveis dependente y e independente x, é qualquer função $y(x)$ que satisfaz a EDO em todos os pontos do domínio, isto é, do intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ onde a EDO é resolvida.

Exemplo 2 : A função $y = e^x$ (donde $y' = y'' = e^x$) é uma solução em $\mathbb{R}$ da EDO no Exemplo 1 acima (verifique isso, substituindo $y = y' = y'' = e^x$ nela).

Exemplo 3 : A EDO $y'' + y(x) = 0$ tem, em $\mathbb{R}$, as soluções $y_1 = \cos x$ e $y_2 = \operatorname{sen} x$, pois $y_1'' + y_1(x) = 0$ e $y_2'' + y_2(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

A solução $y(x)$ pode ser definida implicitamente por uma equação $f(x, y) = 0$, que descreve uma curva no plano xy denominada *curva solução* da EDO.

Exemplo 4 : A EDO $(1 + y'^2)^3 - y''^2(x) = 0$ tem por curva solução (uma delas) a circunferência $x^2 + y^2 - 1 = 0$, sobre a qual são definidas implicitamente as soluções $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Verifiquemos isso no caso do sinal "$+$" (e ficará evidente que a solução com o sinal "$-$" também é solução):

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = -x/\sqrt{1 - x^2} \quad \Rightarrow \quad y'' = -1/(1 - x^2)^{3/2} \quad \Rightarrow$$

$$(1 + y'^2)^3 - y''^2 = \left[1 + \frac{x^2}{1 - x^2}\right]^3 - \left[\frac{-1}{(1 - x^2)^{3/2}}\right]^2 = \left[\frac{1 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2}}{1 - x^2}\right]^3 - \frac{1}{(1 - x^2)^3} = 0\ \checkmark$$

Essa verificação foi feita usando-se a equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$ da curva solução para obter y como função explícita de x e então, derivando essa função até duas vezes, obter y' e y''. Mas frequentemente a equação da curva solução não permite que se calcule facilmente y como função explícita de x; nesse caso derivamos a equação da curva solução implicitamente em relação a x. Para mostrar isso, repetimos a verificação acima dessa maneira:

$$\underbrace{x^2 + y^2 - 1 = 0}_{\text{(i)}} \xrightarrow{d/dx} \underbrace{2x + 2yy' = 0}_{\text{(ii)}} \xrightarrow{d/dx} \underbrace{2 + 2y'^2 + 2yy'' = 0}_{\text{(iii)}} \ .$$

$$\text{(ii)} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{y' = -x/y}_{\text{(iv)}} \ .$$

$$\text{(iv) em (iii)} \quad \Rightarrow \quad 2 + (-x/y)^2 + 2yy'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{y'' = -(x^2 + y^2)/y^3}_{\text{(v)}} \ .$$

Substituindo (iv) e (v) na EDO, obtemos

$$\begin{aligned} (1 + y'^2)^3 - y''^2 &= [1 + (-x/y)^2]^3 - [-(x^2 + y^2)/y^3]^2 \xrightarrow{\cdot\, y^6} (y^2 + x^2)^3 - (x^2 + y^2)^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 \, (\overbrace{x^2 + y^2 - 1}^{0\,(*)}) = 0 \ \checkmark \qquad \left[\,^{(*)} \text{ em vista de (i)}\right] \ . \end{aligned}$$

v) Costuma-se dizer que uma EDO na qual y e x são as variáveis dependente e independente, respectivamente, é *uma EDO para (a função)* $y(x)$. Visualizando a solução da EDO como uma curva C, conforme explicado, costuma-se dizer também que se trata da *EDO da curva C*.

6.2 EDO Linear

Uma EDO linear de ordem $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ é da forma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = h(x) \ ^{(*)} \ ,$$

ou, com o somatório desenvolvido,

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y(x) = h(x) \ . \tag{6.1}$$

Assim, a EDO linear de ordem n é formada por uma combinação linear da função $y(x)$ e das suas derivadas de ordem 1 a n, com coeficientes que são funções de x [as funções $a_k(x)$], geralmente colocada no lado esquerdo da EDO, e por uma função de x [a função $h(x)$], geralmente posta no lado direito.

Observação: Note que a EDO linear, por ser formada pela combinação *linear* descrita, não pode apresentar a função $y(x)$ e suas derivadas: (i) multiplicadas entre si, (ii) com expoentes diferentes de 1, ou (iii) como argumento de função não linear. Por exemplo, não são lineares as seguintes EDOs:

$$y^2 + \frac{dy}{dx} = 0 \ , \quad y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x \ , \quad y\frac{dy}{dx} = 0 \ , \quad \frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \ , \quad \operatorname{sen}\frac{dy}{dx} = 0 \ , \quad \frac{dy}{dx} + \cos y = 0 \ .$$

A EDO linear de ordem n pode ser escrita abreviadamente na forma

$$\hat{L}y(x) = h(x) \tag{6.2}$$

(*) A derivada de ordem zero de $y(x)$ é, por definição, a própria função $y(x)$: $y^{(0)}(x) \equiv y(x)$.

se definirmos o operador (que age sobre funções de uma variável)

$$\hat{L} = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x) \quad , \tag{6.3}$$

ou

$$\hat{L} \equiv a_n(x)\hat{D}^n + \cdots + a_2(x)\hat{D}^2 + \cdots + a_1(x)\hat{D} + a_0(x) \quad , \tag{6.4}$$

onde $\hat{D}^k \equiv d^k/dx^k$ é o operador "derivada de ordem k", com $k \in \mathbb{N}^*$. Daqui por diante $\hat{L}$ será sempre o operador acima, de forma que (6.2) sempre denotará a EDO linear de ordem n.

Quando $h(x) \equiv 0$, temos a EDO $\hat{L}y(x) = 0$, dita *homogênea*; ela tem a propriedade especial de sempre admitir a solução nula $y(x) \equiv 0$. A EDO $\hat{L}y(x) = h(x) \not\equiv 0$ é dita *não homogênea*; nesta é comum referir-se a $h(x)$ como *termo independente*.

Se um operador $\hat{O}$ satisfaz a propriedade $\hat{O}[k_1u_1(x) + k_2u_2(x)] = k_1\hat{O}u_1(x) + k_2\hat{O}u_2(x)$ com qualquer par de funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$ e com quaisquer constantes k_1 e k_2, então $\hat{O}$ é um *operador linear*. É fácil mostrar que o operador $\hat{L}$ definido acima é linear (pois $\hat{D}^k$ é linear). Por causa disso, as EDOs lineares satisfazem os chamados *princípios de superposição*, que diferem conforme ela seja homogênea ou não seja; ei-los:

- <u>Princípio de superposição para a EDO linear homogênea $\hat{L}y(x) = 0$</u> :

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções então a combinação linear $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ com coeficientes c_1 e c_2 constantes e arbitrários também é solução.

A prova é imediata: $\hat{L}y_1(x) = 0$ e $\hat{L}y_2(x) = 0$, porque $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções; logo,

$$\hat{L}[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)] = c_1\underbrace{\hat{L}y_1(x)}_{0} + c_2\underbrace{\hat{L}y_2(x)}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{L}[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)] = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \ \text{ é solução} \ \checkmark$$

<u>Exemplo 5</u> : Vimos, no Exemplo 3, que as funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ são soluções da EDO $y'' + y(x) = 0$, que é linear. Logo, por superposição, $c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$ constitui uma infinidade de soluções dessa EDO (correspondentes à infinidade de valores das constantes arbitrárias c_1 e c_2); é simples verificar isso diretamente diferenciando essa combinação linear de soluções.

- <u>Princípio de superposição para a EDO linear não homogênea $\hat{L}y(x) = h(x)$</u> :

Se essa EDO tem soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ quando $h(x)$ é respectivamente igual a $h_1(x)$ e $h_2(x)$, então $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ é solução quando $h(x)$ é igual a $c_1h_1(x) + c_2h_2(x)$.

Prova: Uma vez que, por hipótese, $\hat{L}y_1(x) = h_1(x)$ e $\hat{L}y_2(x) = h_2(x)$, temos que

$$\hat{L}[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)] = c_1\underbrace{\hat{L}y_1(x)}_{h_1(x)} + c_2\underbrace{\hat{L}y_2(x)}_{h_2(x)} \quad \Rightarrow \quad \hat{L}[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)] = c_1h_1(x) + c_2h_2(x)$$

$$\Rightarrow \quad c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \ \text{ é solução quando o lado direito da EDO é } c_1h_1(x) + c_2h_2(x) \ \checkmark$$

6.3 EDO e Soluções

6.3.1 Nomenclatura das soluções

A *solução geral* de uma EDO qualquer, de variável dependente y e variável independente x, é uma função $y(x)$, definida explícita ou implicitamente, que engloba todas as soluções da EDO.

Nem sempre a solução geral pode ser expressa por uma única fórmula. Por exemplo, a EDO $y' + y^2(x) = 0$ admite as soluções $y = 1/x$ e $y(x) \equiv 0$.

A solução geral frequentemente envolve em sua expressão constantes arbitrárias em número igual à ordem da EDO. Para visualizar isso, considere a EDO $y'''(x) = x$; sua solução geral é obtida com 3 integrações indefinidas sucessivas, a cada integração surgindo uma constante arbitrária, denominada *constante de integração*:

$$y''' = x \quad \xrightarrow{\int} \quad y'' = \frac{x^2}{2} + c_1 \quad \xrightarrow{\int} \quad y' = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2 \quad \xrightarrow{\int} \quad y = \frac{x^4}{24} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \ .$$

Enfatize-se que não se pode afirmar que, para qualquer EDO de ordem n, uma solução sua contendo n constantes arbitrárias é a solução geral. Veremos, entretanto, que isso pode ser afirmado no caso de uma EDO *linear* de ordem n (sob certas condições): se for encontrada uma solução contendo n constantes arbitrárias, essa é a solução geral.

A *solução mais geral* de qualquer EDO de ordem n é uma função contendo em sua definição, explícita ou implícita, n constantes arbitrárias, podendo, como dito acima, ser a solução geral ou não. Muitos não fazem essa distinção (denominando solução geral de uma EDO de ordem n qualquer solução envolvendo n constantes arbitrárias).

Solução particular é uma solução que se obtém da solução mais geral por uma uma escolha específica das constantes arbitrárias (a escolha geralmente é feita de modo a satisfazer certas condições).

Solução singular é a solução que não se obtém da solução mais geral de uma EDO de ordem n por uma escolha particular das n constantes arbitrárias presentes naquela solução, ocorrendo frequentemente no caso de EDOs não lineares.

Exemplo 6 : A EDO de 1ª ordem ${y'}^2 - 2y' + 4y(x) = -1 + 4x$ não é linear. Uma solução contendo uma constante arbitrária c é $y(x) = x - (x-c)^2$; de fato:

$$\begin{aligned} & y = x - (x-c)^2 \ \Rightarrow \ y' = 1 - 2(x-c)\ . \\ \therefore\ & {y'}^2 - 2y' + 4y = [1-2(x-c)]^2 - 2[1-2(x-c)] + 4[x-(x-c)^2] \\ & \qquad\qquad\qquad = 1 - \cancel{4(x-c)} + \cancel{4(x-c)^2} - 2 + \cancel{4(x-c)} + 4x - \cancel{4(x-c)^2} \\ & \qquad\qquad\qquad = -1 + 4x \ \checkmark \end{aligned}$$

Mas $y(x) = x - (x-c)^2$ não é a solução geral (ela é a mais geral), uma vez que $y(x) = x$ também é solução (fácil de verificar) e não resulta daquela por uma escolha particular de c.

6.3.2 Formação de EDOs a partir das soluções.

Se a EDO for de 1ª ordem, a sua solução mais geral é expressa matematicamente por $F(x, y, c_1) = 0$ (uma equação envolvendo x, y e uma constante arbitrária c_1), representando geometricamente uma família de curvas com um parâmetro c_1 cujos valores, reais, variam continuamente: uma infinidade de curvas solução, cada uma correspondendo a um valor de c_1, ao longo de cada uma das quais a solução $y(x)$ pode estar definida implicitamente (se $\partial F/\partial y \neq 0$ ao longo dela, de acordo com o teorema da função implícita) ou mesmo explicitamente.

Exemplo 7 : Para a EDO $y' = 2x$, a solução geral (obtida por uma única integração) é $F(x, y, c_1) \equiv x^2 - y + c_1 = 0$, representando a família de parábolas $y = x^2 + c_1$, cada uma definindo uma solução explícita $y(x)$, todas com vértices ao longo do eixo y.

Exemplo 8 : A EDO $yy' + x = 0$ tem sua solução mais geral (aprenderemos a resolvê-la) dada por $F(x, y, c_1) \equiv x^2 + y^2 - c_1 = 0$ ($c_1 > 0$), mostrando que as curvas solução são todas as circunferências de raio $\sqrt{c_1}$ centradas na origem, cada uma definindo implicitamente duas soluções, $y = \pm\sqrt{c_1 - x^2}$, as quais podem ser verificadas que realmente satisfazem a EDO:

$$\left.\begin{array}{l} y = \pm\sqrt{c_1 - x^2} \\ y' = \pm\dfrac{-x}{\sqrt{c_1 - x^2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad yy' + x \;=\; \left(\pm\cancel{\sqrt{c_1 - x^2}}\,\right)\left(\pm\frac{-\,x}{\cancel{\sqrt{c_1 - x^2}}}\right) + x \;=\; -x + x \;=\; 0 \checkmark$$

Que $x^2 + y^2 - c_1 = 0$ é uma família de curvas solução da EDO pode ser verificado pelo segundo modo apresentado acima, no Exemplo 4, isto é, derivando implicitamente em relação a x a equação daquela família, admitindo y como função de x:

$$x^2 + y^2 - c_1 = 0 \quad \xrightarrow{d/dx} \quad 2x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -x/y$$
$$\therefore \text{ A EDO: } \quad yy' + x \;=\; y(-x/y) + x \;=\; -x + x \;=\; 0 \checkmark$$

Se a EDO for de 2ª ordem, a sua solução mais geral é expressa matematicamente por $F(x, y, c_1, c_2) = 0$, uma família de curvas solução com dois parâmetros c_1 e c_2. Segue um exemplo desse caso.

Exemplo 9 : A EDO $y''(x) = 0$ tem a solução geral $F(x, y, c_1, c_2) \equiv c_1 x + c_2 - y = 0$; ou seja, suas curvas solução são todas as retas do plano xy, exceto o eixo y, cada uma correspondendo a certos valores fixos de c_1 e c_2 e definindo explicitamente a solução $y = c_1 x + c_2$.

Nesses Exemplos 7, 8 e 9, dada uma EDO, verificamos que certa família de curvas era formada por curvas solução daquela EDO. Há o problema inverso: o de, dada uma família de curvas, determinar a EDO cujo conjunto de curvas solução contém as curvas daquela família. Estabeleçamos matematicamente esse problema e como resolvê-lo.

Considere uma família de curvas com parâmetros $c_1, c_2, \cdots, c_n$ arbitrários(*):

$$F(x, y, c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0 \; . \qquad \text{(A)}$$

Essa equação define y em função x , uma infinidade ∞^n de tais funções, cada uma correspondendo a um conjunto particular de valores das constantes c_1 , c_2 , $\cdots$, c_n . Agora o mais interessante: uma EDO que é satisfeita por cada uma dessas funções pode ser formada! Para obtê-la, derivamos (A) em relação a x n vezes sucessivamente, obtendo assim outras n equações que, juntamente com (A), formam um sistema de $n + 1$ equações que, com a eliminação das n constantes c_1 , c_2 , $\cdots$, c_n , resulta numa única equação, que é a EDO de ordem n desejada:

$$\Phi(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \; . \qquad \text{(B)}$$

É evidente que essa EDO, pela forma como foi deduzida, é satisfeita por toda função $y(x)$ definida por (A).

A equação (A), além de ser denominada *família de curvas solução* da EDO em (B), é chamada de *primitiva* dessa EDO, e, como já mencionamos, também de *solução mais geral*, devendo a terminologia *solução geral* ser usada somente quando a equação (A) definir todas as funções que satisfazem a EDO, pois o procedimento acima não garante de forma alguma que a equação (A) tenha todas as soluções da EDO (B) deduzida a partir de (A).

(*) Ao se dizer que dois parâmetros c_1 e c_2 são arbitrários, cada um é arbitrário, sendo eles, portanto, independentes, não havendo nenhuma relação entre eles (como, por exemplo, $3c_1 + 5c_2 = 4$).

Nos dois exemplos que seguem, é deduzida a EDO que é satisfeita pela família de curvas dada (ou, em outros termos, é deduzida a EDO que é satisfeita pelas funções $y(x)$ que são definidas pela equação que descreve a família de curvas dada).

Exemplo 10 : Dedução da EDO que tem por curvas solução todas as circunferências centradas no eixo x e que tangenciam o eixo y (ou, mais simplesmente, dedução da "EDO de todas as circunferências centradas no eixo x e que tangenciam o eixo y").

Como a equação dessas circunferências é $(x - c_1) + y^2 = c_1^2$ $(c_1 \neq 0)$, com uma constante, o sistema formado por essa equação e pela derivada em relação a x dela é o formado pelas equações (i) e (ii) abaixo, donde devemos eliminar c_1 :

$$(x - c_1)^2 + y^2 = c_1^2 \qquad \text{(i)}$$

$$\text{(i)} \xrightarrow{d/dx} 2(x - c_1) + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2c_1 = 2x + 2yy' \qquad \text{(ii)}$$

$$\text{(i)} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2c_1x + \cancel{c_1^2} + y^2 = \cancel{c_1^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2c_1x + y^2 = 0 \qquad \text{(iii)}$$

$$\text{Subst. (ii) em (iii) :} \quad x^2 - (2x + 2yy')x + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{2xyy' - y^2 = -x^2} \; .$$

Exemplo 11 : Dedução da EDO de todas as circunferências de raio unitário.

Como a equação dessas circunferências é $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = 1$, com duas constantes, o sistema formado por essa equação e pelas duas equações que resultam dela por duas diferenciações sucessivas em relação a x é o que segue, donde devemos eliminar as duas constantes:

$$\begin{cases} (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = 1 & \text{(i)} \\ x - c_1 + (y - c_2)y' = 0 & \text{(ii)} \\ 1 + y'^2 + (y - c_2)y'' = 0 & \text{(iii)} \end{cases}$$

$$\therefore \text{ (ii)} \Rightarrow \quad (x - c_1)^2 = (y - c_2)^2 y'^2 \qquad \text{(iv)}$$

$$\text{(iv) em (i)} \quad \Rightarrow \quad (y - c_2)^2 y'^2 + (y - c_2)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (y - c_2)^2 = \frac{1}{y'^2 + 1} \qquad \text{(v)}$$

$$\text{(iii)} \Rightarrow \quad (y - c_2)^2 y''^2 = (y'^2 + 1)^2 \qquad \text{(vi)}$$

$$\text{(v) em (vi)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y'^2 + 1} \cdot y''^2 = (y'^2 + 1)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y''^2 = (y'^2 + 1)^3} \; .$$

Quando se sabe que uma EDO pode ser deduzida pelo procedimento acima, o de eliminação das n constantes arbitrárias presentes numa primitiva (numa família de curvas com n parâmetros), é evidente que tal EDO admite uma solução envolvendo n constantes arbitrárias. Por outro lado, não é evidente que qualquer EDO de ordem n possa ser deduzida de uma primitiva, não se podendo afirmar, portanto, que, ao se defrontar com uma EDO de ordem n pela primeira vez, que ela apresente uma solução apresentando n constantes arbitrárias (a chamada solução mais geral).

6.4 Problemas de Valor Inicial e de Fronteira

As n constantes arbitrárias presentes na solução mais geral de uma EDO de ordem n podem ser determinadas por meio de n condições suplementares adequadas. Frequentemente, essas condições consistem na exigência de que a solução e suas derivadas tomem valores pré-especificados num dado ponto x_0:

$$y(x_0) = y_0 \, , \quad y'(x_0) = y'_0 \, , \quad y''(x_0) = y''_0 \, , \quad \cdots \, , \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \; .$$

Quando condições desse tipo são impostas, o problema é conhecido como *problema de valor inicial*, comumente abreviado por PVI.

Outros tipos de condições existem. Por exemplo, valores que a solução ou derivadas destas devam ter nos extremos do *domínio I da EDO* podem ser pré-especificados. Nesse caso, temos o chamado *problema de valor de fronteira*. Por exemplo, se $I = (1, \infty)$, cada uma das seguintes equações pode ser uma condição na fronteira em $x = 1$: $y(1) = 2$, $y''(1) = 0$, $y'(1) = -1$, $2y(1) + 3y'(1) = 4$.

Capítulo 7

Solução de EDOs de 1ª Ordem Especiais

Consideraremos as seguintes EDOs de 1ª ordem:

01) Separável: $y'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x)}{Q(y)}$ ou $P(x)dx = Q(y)dy$.

02) Homogênea: $y'(x) = F(y/x)$.

03) Exata: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ ou $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ com $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

04) Linear: $y' + p(x)y(x) = h(x)$.

05) Redutível à separável:

$$P(ax+by+c)dx + Q(px+qy+r)dy = 0 \quad \text{com} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} = aq - bp = 0 \ .$$

06) Redutível à homogênea:

$$y'(x) = F\left(\frac{ax+by+c}{px+qy+r}\right) \quad \text{com} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

07) Redutível à exata mediante fator integrante:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \ \text{ se existir } \lambda(x) \text{ ou } \lambda(y) \text{ tal que } \ \frac{\partial(\lambda P)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x} \ .$$

08) Redutível à linear: $\begin{cases} \underline{\textit{eq. de Bernoulli}}: & y' + A(x)y(x) = B(x)y^\alpha(x) \ \ (\alpha \neq 1) \\ \underline{\textit{eq. de Riccati}}: & y' = A(x)y^2 + B(x)y(x) + C(x) \end{cases}$

09) Equação de Clairaut: $y(x) = xy' + F(y')$

10) Equação de Lagrange: $y(x) = G(x)y' + F(y')$

Uma EDO para uma função $y(x)$, ainda que apenas de 1ª ordem, sendo *qualquer* equação envolvendo $y'(x)$, ainda pode ser demasiadamente complicada, senão impossível, de ser resolvida. Observe, entretanto, que as oito primeiras EDOs acima são da forma $y'(x) = F(x,y)$. Essa EDO, formada pela igualdade de y' a uma função F qualquer de x e $y(x)$, já se torna possível de ser resolvida para diversos tipos da função $F(x,y)$; as oito primeiras EDOs acima são só alguns exemplos dessa possibilidade. Além disso, é muito importante que, para tal EDO, haja um teorema (cuja prova é omitida), enunciado em seguida, estabelecendo condições para a existência de uma única solução.

Teorema 7.1

[Sobre a existência e a unicidade da solução de um PVI com a EDO $y'(x) = F(x,y)$.]

Se $F(x,y)$ e $\partial F/\partial y$ forem funções contínuas numa região retangular $R = \{(x,y) : x \in (x_0 - a \;\; x_0 + a) \text{ e } y \in (y_0 - b \;\; y_0 + b)\}$, sendo a e b positivos, então o PVI definido por $y'(x) = F(x,y)$ e $y(x_0) = y_0$ tem uma única solução $y(x)$ que é definida, no mínimo, num intervalo $(x_0 - \delta \;\; x_0 + \delta)$, onde δ é o menor entre a e b/K, sendo K o máximo de $|F(x,y)|$ em R.

Antes de começarmos a resolver as EDOs listadas acima, convém dizer que a EDO $y' = F(x,y)$ pode ser formalmente escrita com outra aparência. Usando a notação $y' = dy/dx$ e tendo em conta que qualquer função $F(x,y)$ pode sempre ser escrita como o quociente de duas outras funções, isto é, como $-P(x,y)/Q(x,y)$, obtemos

$$\boxed{y'(x) = F(x,y)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0} \ .$$

Quadriculadas acima estão duas formas que são a todo momento usadas para expressar a mesma EDO.

Nas seções que seguem, ao dizer simplesmente que a solução [isto é, a função $y(x)$ que satisfaz a EDO] é dada por uma equação $y = y(x)$ ou $f(x,y) = 0$, definindo-a explicita ou implicitamente, respectivamente, estamos-nos referindo à solução mais geral, contendo uma constante arbitrária.

7.1 Separável

Sendo essa EDO da forma

$$P(x)dx = Q(y)dy \ ,$$

bastante mnemônica é a forma da sua solução, dada por

$$\int P(x)dx = \int Q(y)dy \ ,$$

obtida integrando-se indefinidamente cada membro separadamente, estando a constante arbitrária dessa solução embutida nas duas integrais indefinidas [de acordo com a notação explicada na seç. 1.4.1: nos membros esquerdo e direito da equação acima, temos as primitivas mais genéricas de $P(x)$ e $Q(y)$, respectivamente.]

Derivando a equação acima em relação a x (usando, para isso, o TFC-I em ambos membros da equação e, no membro direito, a regra da cadeia, pois y é função de x), obtemos a EDO, provando que essa equação é a solução mais geral:

$$\int P(x)dx = \int Q(y)dy \xrightarrow{d/dx} P(x) = Q(y)\frac{dy}{dx} \ \checkmark$$

Segue, como exemplo, a resolução de uma EDO separável:

$$(x^2 - 1)\sqrt{1-y^2}\,dx - x^2 dy = 0 \ \left[\text{ou } \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,y' = 1 - x^{-2}\right] \ \Rightarrow \ \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = (1 - x^{-2})dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int (1 - x^{-2})dx \ \Rightarrow \ \text{arcsen}\, y = x + x^{-1} + c\ , \ \text{ ou } \ y = \text{sen}(x + x^{-1} + c) \ \blacksquare$$

Para verificar que esse resultado é, de fato, solução da EDO, derivamo-lo em relação a x. Podemos derivar a última equação (a que fornece a solução na forma explícita) ou a penúltima (fornecendo a solução na forma implícita); derivemos a penúltima:

$$\frac{d}{dx}\,\text{arcsen}\, y = \frac{d}{dx}(x + x^{-1} + c) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, y' = 1 - x^{-2} \ , \ \text{ que é a EDO} \checkmark$$

7.2 Homogênea

A EDO homogênea tem a forma $y'(x) = F(y/x)$, com uma função só do quociente y/x no lado direito. Um modo de resolvê-la consiste em definir uma função $v(x)$ por esse quociente:

$$v(x) \equiv y/x \quad \Rightarrow \quad y(x) = xv(x) \quad \Rightarrow \quad y' = v + xv' = v + x\frac{dv}{dx} \ ,$$

e a EDO toma a forma

$$y' = F(y/x) \quad \Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = F(v) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{F(v) - v} = \frac{dx}{x} \ ,$$

ou seja, ela passa a ser separável, que já sabemos resolver.

Resolvamos uma EDO homogênea como exemplo:

$$(x-y)dx - (x+y)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x-y \ \leftarrow \div x}{x+y \ \leftarrow \div x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1 - y/x}{1 + y/x} \ .$$

$$v(x) \equiv y/x \quad \Rightarrow \quad y = xv \quad \Rightarrow \quad y' = v + x\frac{dv}{dx} \ .$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{1+v} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{\dfrac{1-v}{1+v} - v} = \frac{dx}{x} \ \ \text{(separável)} \ .$$

$$\frac{(1+v)dv}{1-2v-v^2} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\int \frac{-2-2v}{1-2v-v^2} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln|1-2v-v^2| = \ln|x| + c_1 \ .$$

$$\ln|1-2v-v^2| + \ln|x^2| = \ln|x^2(1-2v-v^2| = -2c_1 \quad \Rightarrow \quad x^2(1-2v-v^2) = \pm e^{-2c_1} \equiv c$$

$$\xrightarrow{v = y/x} \quad x^2\left(1 - 2\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}\right) = c \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2xy - y^2 = c \ \blacksquare$$

Verificação dessa solução:

$$x^2 - 2xy - y^2 = c \quad \xrightarrow{d/dx} \quad 2x - 2y - 2xy' - 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x-y}{x+y} \ , \ \text{ que é a EDO} \checkmark$$

7.3 Exata

Por definição, uma expressão da forma $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, conhecida por *diferencial*, é uma *diferencial exata* se for a diferencial de uma função, isto é, se existir uma função $U(x,y)$ tal que $Pdx + Qdy = dU = \dfrac{\partial U}{\partial x}dx + \dfrac{\partial U}{\partial y}dy$, ou equivalentemente que $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P$ e $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q$.

Teorema 7.2

Se $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ são funções contínuas da classe C^1 tal que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, então a diferencial $Pdx + Qdy$ é exata.

Para provar esse teorema, basta mostrar que existe uma função $U(x,y)$ cuja diferencial seja $Pdx + Qdy$, isto é, que $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P$ e $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q$. Realmente existe tal função, dada, por exemplo, por

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,u)du \quad ,$$

pois, usando o TFC-I, vê-se imediatamente que $\dfrac{\partial U}{\partial x} = P$ e que

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \underbrace{P(t,y)}_{\frac{\partial Q}{\partial t}(t,y)} dt + Q(x_0,y) = Q(x,y) - \cancel{Q(x_0,y)} + \cancel{Q(x_0,y)} = Q(x,y) \text{ . CQD.}$$

Observação: A recíproca desse teorema é verdadeira. De fato, se $Pdx+Qdy$ é uma diferencial exata então existe $U(x,y)$ tal que $U_x = P$ e $U_y = Q$, donde, por ser U da classe C^2 (pois P e Q são da classe C^1), temos que $(U_x)_y = P_y = (U_y)_x = Q_x$.

Como exemplo de aplicação do teorema acima, dada a diferencial $(2x\,\text{sen}\,y)dx + (x^2\cos y)dy$, concluímos que ela é exata, pois $\dfrac{\partial}{\partial y}(2x\,\text{sen}\,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x^2\cos y) = 2x\cos y$. De fato, ela é a diferencial da função $U(x,y) = x^2\,\text{sen}\,y$: observe que $dU = \dfrac{\partial U}{\partial x}dx + \dfrac{\partial U}{\partial y}dy = (2x\,\text{sen}\,y)dx + (x^2\cos y)dy$, que é a diferencial dada.

Pelo exposto, é consistente denominar a equação $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ de *EDO exata* quando o primeiro membro é uma diferencial exata, isto é, segundo o teorema, quando $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. Nesse caso, existe uma função $U(x,y)$ tal que $dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, donde

$$\boxed{U(x,y) = \text{constante}}$$

(uma equação que define y implicitamente como uma função de x) é uma solução da EDO.

Exemplo 1 :

$(x^3+y^2)dx + (2xy+\cos y)dy = 0$ é exata, pois $\dfrac{\partial(x^3+y^2)}{\partial y} = \dfrac{\partial(2xy+\cos y)}{\partial x} = 2y$.

$$\therefore \begin{cases} \left[\dfrac{\partial U}{\partial x}\right] = x^3 + y^2 \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = 2xy + \cos y \xrightarrow{\int dy} U = xy^2 + \text{sen}\,y + f(x) \Rightarrow \left[\dfrac{\partial U}{\partial x}\right] = y^2 + f'(x) \end{cases} \Bigg\rangle \overset{\text{igualando}}{\Rightarrow}$$

$$x^3 + y^2 = y^2 + f'(x) \Rightarrow f'(x) = x^3 \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} + c_1 \Rightarrow U(x,y) = xy^2 + \text{sen}\,y + \frac{x^4}{4} + c_1 \text{ .}$$

$U(x,y) = k$ (constante) é a solução, isto é, $xy^2 + \text{sen}\,y + \dfrac{x^4}{4} = \underbrace{k - c_1}_{c}$ ∎

Exemplo 2 :

$$(2x-y-5)dx+(7-x-4y)dy=0 \text{ é exata, pois } \frac{\partial(2x-y-5)}{\partial y}=\frac{\partial(7-x-4y)}{\partial x}=-1\ .$$

$$\therefore \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial x}=2x-y-5 \xrightarrow{\int dx} U=x^2-xy-5x+f(y) \ \Rightarrow \ \left[\dfrac{\partial U}{\partial y}\right]=-x+f'(y) \\ \left[\dfrac{\partial U}{\partial y}\right]=7-x-4y \end{array}\right\rangle \overset{\text{igualando}}{\Rightarrow}$$

$$f'(y)=7-4y \ \Rightarrow \ f(y)=7y-2y^2+c_1 \ \Rightarrow \ U=x^2-xy-5x+7y-2y^2+c_1\ .$$

$U=$ constante é a solução, isto é, $x^2-xy-5x+7y-2y^2=c$ ■

7.4 Linear

A EDO de 1ª ordem linear é da forma $a(x)y'+b(x)y(x)=H(x)$. Um modo de resolvê-la consiste, num primeiro passo, escrevê-la com o coeficiente de y' unitarizado, ou seja, dividimo-la por $a(x)$; definindo $b(x)/a(x)\equiv p(x)$ e $H(x)/a(x)\equiv h(x)$, obtemo-la numa forma que, nesse método de solução, chamamos de *forma padrão*:

$$\boxed{y'+p(x)y(x)=h(x)}\ .$$

O segundo passo é calcular o chamado *fator integrante*:

$$\boxed{f(x)=e^{\displaystyle\int p(x)dx}}\ ,$$

cuja razão de defini-lo é essa propriedade:

$$\frac{df}{dx}=\underbrace{e^{\int p(x)dx}}_{f}\underbrace{\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}\right)}_{p} \quad\Rightarrow\quad f'=fp\ .$$

De fato, multiplicando a EDO em sua forma padrão pelo fator integrante, obtemos

$$y'f+y\underbrace{fp}_{f'}=hf \quad\Rightarrow\quad \underbrace{y'f+yf'}_{(yf)'}=hf \quad\Rightarrow\quad \boxed{(yf)'=hf}\ ,$$

que é a fórmula (cuja memorização é aconselhada) que compõe o terceiro passo; dela, por uma simples integração, chega-se à solução $y(x):\ yf=\int hf\,dx\ \cdots$.

Exemplo 1 : $y'-y/x=x-2\ \ (x>0)$

$$f=e^{\displaystyle\int(-1/x)dx}=e^{-\ln x}=\left(e^{\ln x}\right)^{-1}=x^{-1}=\frac{1}{x}\ .$$

$$\therefore\ \left(y\,\frac{1}{x}\right)'=(x-2)\frac{1}{x} \ \Rightarrow\ \frac{y}{x}=\int\left(1-\frac{2}{x}\right)dx=x-2\ln x+c \ \Rightarrow\ y=x^2-2x\ln x+cx \ ■$$

Exemplo 2 : $(2\cos x)\, y' - (2\,\mathrm{sen}\, x)\, y = \underbrace{\mathrm{sen}\, 2x}_{2\,\mathrm{sen}\, x\cos x} \;\; (0 < x < \pi/2) \overset{\div\, 2\cos x}{\Longrightarrow} y' - \dfrac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x}\, y = \mathrm{sen}\, x$.

$$f = e^{\displaystyle\int \frac{-\,\mathrm{sen}\, x}{\cos x}\, dx} = e^{\,\ln(\cos x)} = \cos x \;\; .$$

$$\therefore\;\; (y\, \cos x)' = \mathrm{sen}\, x \cos x \;\;\Rightarrow\;\; y\, \cos x = \frac{\mathrm{sen}^2 x}{2} + c \;\;\Rightarrow\;\; y = \frac{\mathrm{sen}^2 x}{2\cos x} + \frac{c}{\cos x} \;\; \blacksquare$$

Exemplo 3 : O PVI dado por $xy' - y = 2x^3$ $(x > 0)$ e $y(1) = 3$.

Essa EDO na forma padrão é $y' - (1/x)y = 2x^2$; resolvendo-a e impondo a condição inicial, obtemos

$$f = e^{\displaystyle\int (-1/x) dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x} \;\; .$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(y\,\dfrac{1}{x}\right)' = 2x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 2x \;\;\Rightarrow\;\; \dfrac{y}{x} = x^2 + c \;\;\Rightarrow\;\; y = x^3 + cx \\ y(1) = 1 + c = 3 \;\;\Rightarrow\;\; c = 2 \end{array}\right\rangle \;\Rightarrow\;\; y = x^3 + 2x \;\; \blacksquare$$

Exemplo 4 : $dx + (x - y)dy = 0$.

Dividindo a EDO por dx, obtemos $1 + (x - y)y' = 0$, uma EDO não linear para $y(x)$. Mas, se a dividirmos por dy, obtemos uma EDO linear para $x(y)$:

$$\frac{dx}{dy} + x(y) = y \;\Rightarrow\; \text{fator integ. } f = e^{\int 1\, dy} = e^y \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dy}\big(e^y x\big) = e^y y$$

$$\Rightarrow \quad e^y x = \int y e^y\, dy \overset{p.p.}{=} e^y (y - 1) + c \quad\Rightarrow\quad x(y) = y - 1 + ce^{-y} \;\; \blacksquare$$

Caso se considere a EDO dada como uma EDO para $y(x)$, a solução obtida acima não fornece $y(x)$ explicitamente, mas como a função inversa da função $x(y)$ obtida.

7.5 Redutível à Separável

$$P(ax + by + c)\, dx + Q(Ax + By + C)\, dy = 0 \quad \text{com} \quad \varDelta \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = aB - Ab = 0 \;\; .$$

Dentre os casos em que o determinante $\varDelta$ se anula, importa considerar apenas os seguintes:

(i) $\varDelta \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} = 0$ com $abAB \neq 0$, quando a EDO tem a forma acima;

(ii) $\varDelta \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ $(ab \neq 0)$, tendo a EDO a forma $P(ax + by + c)\, dx + Q_0 dy = 0$ (Q_0 const.);

(iii) $\varDelta \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ A & B \end{vmatrix}$ $(AB \neq 0)$, tendo a EDO a forma $P_0 dx + Q(Ax + By + C)\, dy = 0$ (P_0 const.).

Isso porque nos demais casos a EDO já é separável; de fato:

$$\varDelta \equiv \begin{vmatrix} a & 0 \\ A & 0 \end{vmatrix} \quad \text{com} \quad aA \neq 0 \quad \Rightarrow \quad P(ax+c)\,dx + Q(Ax+C)\,dy = 0 \ ;$$

$$\varDelta \equiv \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & B \end{vmatrix} \quad \text{com} \quad bB \neq 0 \quad \Rightarrow \quad P(by+c)\,dx + Q(By+C)\,dy = 0 \ ;$$

$$\varDelta \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad P_0 dx + Q_0 dy = 0 \ .$$

No caso (i), o fato de o determinante $\varDelta$ ser nulo indica que $Ax + By$ é uma constante vezes $ax + by$, o que enseja definir a nova variável $t = ax + by$ (ou alternativamente $t = Ax + By$) a ser usada para substituir x na EDO. Assim temos que

$$Ax + By = Ax + \frac{Ab}{a}\,y = \frac{A}{a}\,(ax+by) \quad \Rightarrow \quad Ax + By = \frac{A}{a}\,t \ \ ,$$

donde

$$A\,dx + B\,dy = \frac{A}{a}\,dt \ \ \Rightarrow \ \ dx = \frac{1}{a}\,dt - \frac{B}{A}\,dy \ \ .$$

Com esses resultados podemos calcular a nova forma da EDO, produzida pela mudança da variável independente x para t [estamos admitindo que temos inicialmente uma EDO para $y(x)$, sendo então natural usar t para eliminar x, assim deduzindo a EDO para $y(t)$]:

$$P(ax+by+c)\,dx + Q(Ax+By+C)\,dy \ = \ P(t+c)\left(\frac{1}{a}\,dt - \frac{B}{A}\,dy\right) + Q\left(\frac{A}{a}\,t + C\right)dy$$

$$= \ (1/a)\,P(t+c)\,dt + \big[-(B/A)\,P(t+c) + Q(C + At/a)\big]\,dy = 0 \ \ ,$$

uma EDO separável.

Nos casos (ii) e (iii), a EDO se torna separável com a substituição de x por $t = ax + by$ e $t = Ax + By$, respectivamente (verifique!).

Em resumo, para deduzir tornar separável a EDO considerada, basta efetuar a mudar da variável x para a variável $t = ax + by$ (ou $t = Ax + By$) no caso (i), para $t = ax + by$ no caso (ii), e para $t = Ax + By$ no caso (iii).

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1 : $(x+y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0$

Definindo $t \equiv x + y$, obtemos $dx = dt - dy$, e a EDO toma a forma de uma EDO separável:

$$(t+1)(dt-dy) + (2t-1)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad (t+1)dt + (t-2)dy = 0$$

$$\Rightarrow dy = -\frac{t+1}{t-2}\,dt = -\left(\frac{t-2+3}{t-2}\right)dt \quad \Rightarrow \quad dy = -\left(1 + \frac{3}{t-2}\right)dt$$

$$\Rightarrow y = -\big(t + 3\ln|t-2|\big) + c \quad \Rightarrow \quad y = -\big(x + y + 3\ln|x+y-2|\big) + c$$

$$\Rightarrow 2y + x + 3\ln|x+y-2| = c \ \blacksquare$$

Exemplo 2 : $2\,dx + (\underbrace{x+y}_{t}+1)dy = 0 \;\Rightarrow\; 2(dt-dy)+(t+1)dy = 0 \;\Rightarrow\; 2\,dt + (t-1)dy = 0$

$$\Rightarrow \quad dy = -\frac{2}{t-1}\,dt \quad \Rightarrow \quad y = -2\ln|t-1| + c \quad \Rightarrow \quad y + 2\ln|x+y-1| = c \;\blacksquare$$

Exemplo 3 : $(2x-2y+4)\underbrace{dx}_{dt+dy} + (\underbrace{x-y}_{t}+1)^2 dy = 0$

Definindo $t \equiv x - y$ como se indica acima, obtemos

$$(2t+4)(dt+dy) + (t+1)^2 dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \big[\underbrace{(2t+4)dt + 2t + 4}_{t^2+4t+5}\big]dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{-(2t+4)}{t^2+4t+5} \quad \Rightarrow \quad y = -\ln|t^2+4t+5| + c$$

$$\Rightarrow \quad y + \ln|(x-y)^2 + 4(x-y) + 5| = c \;\blacksquare$$

7.6 Redutível à Homogênea

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right) \text{ com } \begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0 \; .$$

Nesta seção não consideramos o caso em que $c = C = 0$, quando a EDO já é homogênea, e é exatamente a existência deste caso que nos permite visualizar um método de tornar homogênea a EDO acima. Como, nesse caso excluído, as retas $ax+by+c=0$ e $Ax+By+C=0$ se interceptam na origem, então a EDO se tornará homogênea no sistema de coordenadas t e u no qual aquelas retas se interceptem na origem, isto é, sejam dadas por $at+bu=0$ e $At+Bu=0$. Ora, se as coordenadas do ponto de interseção daquelas retas é dado pelo par ordenado (x_0, y_0) do plano xy e pelo par $(0,0)$ do plano tu, então as coordenadas t e u desejadas são as produzidas pela translação definida por $t = x - x_0$ e $u = y - y_0$.

Então, em resumo, primeiramente calculamos o ponto (x_0, y_0) que é a solução do sistema linear formado pelas equações $ax+by+c=0$ e $Ax+By+C=0$ (cuja solução é única, pois, por hipótese, o determinante principal desse sistema é diferente de zero). Em seguida, calculamos a forma da EDO acima no sistema de coordenadas $(t,u) = (x-x_0\,,\; y-y_0)$. Tendo em conta que $dy = du$ e $dx = dt$, podemos escrever:

$$dy = F\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)dx \quad \Rightarrow \quad du = F\left(\frac{at+bu}{At+Bu}\right)dt = F\left(\frac{a+b\,u/t}{A+B\,u/t}\right)dt \; ,$$

que é uma EDO homogênea.

Note que a EDO transformada (a EDO homogênea no sistema das coordenadas t e u) é rapidamente obtida escrevendo-se du/dt, $at+bu$ e $At+Bu$ respectivamente no lugar de dy/dx, $ax+by+c$ e $Ax+By+C$.

Por exemplo, considere a EDO $(x+2y-1)\,dx + (2x-y-7)\,dy = 0$. Uma vez que

$$\begin{cases} x+2y-1=0 \\ 2x-y-7=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (3,-1) \quad ,$$

definimos as novas coordenadas

$$t = x - 3 \quad \text{e} \quad u = y - (-1) = y + 1 \quad ,$$

obtendo, no sistema dessas coordenadas, a EDO homogênea

$$(t+2u)\,dt + (2t-u)\,du = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = \frac{t+2u}{2t-u} \quad \Rightarrow \quad u'(t) = \frac{1+2u/t}{2-u/t} \ .$$

Resolvemos essa equação como já estudamos, fazendo $u(t)/t \equiv v(t)$, obtendo

$$v't + v = \frac{1+2v}{v-2} \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{1}{t}\left[\frac{1+2v}{v-2} - v\right] = \frac{1}{t}\left[\frac{1+2v-v^2+2v}{v-2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{t}\left[\frac{1+4v-v^2}{v-2}\right] \quad \Rightarrow \quad \int \frac{(v-2)\,dv}{1+4v-v^2} = \int \frac{dt}{t}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln|\,1+4v-v^2\,| = \ln|\,t\,| + c_1 \quad \Rightarrow \quad |\,1+4v-v^2\,| = |\,c_2\,t^{-2}| \quad \overset{v\,\equiv\,u/t}{\Rightarrow}$$

$$|\,1+\frac{4u}{t} - \frac{u^2}{t^2}| = |\,c_2\,t^{-2}| \quad \Rightarrow \quad |\,t^2+4tu-u^2| = |\,c_2| \quad \Rightarrow \quad t^2+4tu-u^2 = \pm c_2 \equiv c_3 \ .$$

Por fim, retornamos às variáveis originais, substituindo $t = x-3$ e $u = y+1$:

$$(x-3)^2 + 4(x-3)(y+1) - (y+1)^2 = c_3 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 6x + 9 + 4xy + 4x - 12y - 12 - y^2 - 2y - 1 = c_3$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 4xy - y^2 - 2x - 14y = c_3 + 4 \equiv c \ \blacksquare$$

7.7 Redutível à Exata

Observe que a EDO $-y\,dx + x\,dy = 0$ não é exata, mas são exatas as seguintes EDOs, obtidas daquela multiplicando-a por um termo, por $1/x^2$, $1/y^2$ ou $1/(x^2+y^2)$, respectivamente:

$$\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2} = 0\,, \quad \frac{-y\,dx + x\,dy}{y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = 0 \ ;$$

de fato, essas equações podem ser escritas na forma $dU(x,y) = 0$ com

$$U(x,y) = y/x\ , \qquad U(x,y) = -x/y \qquad \text{e} \qquad U(x,y) = \arctan(y/x) \ ,$$

respectivamente, todas elas tendo a mesma família de soluções $y = kx$ (k constante).

Vejamos o que está por trás disso.

Se $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ não é uma EDO exata, deduzamos as condições para que o fator $\lambda(x,y)$ torne $\lambda P(x,y)dx + \lambda Q(x,y)dy = 0$ exata. Vimos que, para isso, é necessário e suficiente que

$$\boxed{\frac{\partial(\lambda P)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y}P + \lambda\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \lambda}{\partial y}Q + \lambda\frac{\partial Q}{\partial x} \ ,$$

donde obtemos a seguinte equação de derivadas parciais (EDP) cuja solução fornece o fator λ:

$$\frac{Q}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{P}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \ .$$

A resolução dessa equação de derivadas parciais está fora dos objetivos dessa disciplina, mas podemos tentar determinar λ como função só de x ou só de y.

a) Se λ for função só de x então $\partial\lambda/\partial y = 0$ e $\partial\lambda/\partial x = \lambda'(x)$; então, da EDP acima, obtemos uma EDO de 1ª ordem linear que é homogênea, cuja solução, conforme a seç. 7.4, é imediata:

$$\lambda' - \frac{P_y - Q_x}{Q}\lambda(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(x) = k\, e^{\displaystyle\int \frac{P_y - Q_x}{Q}\, dx} \quad (k \text{ constante}) \ .$$

Essa EDO para $\lambda(x)$ só será consistente se $(P_y - Q_x)/Q$ for função só de x ; se esse não é o caso, não se é possível obter λ como função só de x .

b) Se λ for função só de y então $\partial\lambda/\partial x = 0$ e $\partial\lambda/\partial y = \lambda'(y)$; logo, similarmente,

$$\lambda' + \frac{P_y - Q_x}{P}\lambda(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(y) = k\, e^{\displaystyle\int \frac{P_y - Q_x}{-P}\, dy} \quad (k \text{ constante}) \ ,$$

sendo a EDO acima consistente se $(P_y - Q_x)/P$ for função só de y .

Note que essas EDOs que são resolvidas para se obter λ também são separáveis, podendo, como tais, ser resolvida, conforme a seç. 7.1. Além disso, a constante k na expressão de λ é obviamente irrelevante, pois ela multiplica todos os termos *aditivos* da EDO, cancelando-se; por causa disso, passaremos a usar as fórmulas acima para $\lambda(x)$ e $\lambda(y)$ com $k = 1$.

Seguem dois exemplos de resolução desse tipo de EDO. É mostrado que há a opção de se calcular o fator integrante λ diretamente usando-se as fórmulas deduzidas nos parágrafos (a) e (b) acima, o que exige que elas sejam memorizadas, e a opção de se calcular λ partindo da equação diferencial quadriculada acima, que é mais fácil de lembrar do que as fórmulas do fator integrante, mas exigindo que mais cálculos sejam realizados.

Exemplo 1 : $\underbrace{y^2}_{P}\, dx + \underbrace{(xy+1)}_{Q}\, dy = 0 \ \ (y > 0)$

Como $P_y - Q_x = 2y - y = y \neq 0$, a EDO não é exata. Tentemos um fator que dependa só de y , pelas duas maneiras mencionadas:

i) Usando a fórmula pronta para $\lambda(y)$ deduzida acima:

$$\lambda(y) = k\, e^{\displaystyle\int \frac{P_y - Q_x}{-P}\, dy} = e^{\displaystyle\int \frac{y}{-y^2}\, dy} = e^{\displaystyle\int \frac{-1}{y}\, dy} = e^{-\ln y} = 1/y \ .$$

ii) Impondo a condição de a EDO ser exata (dada pela equação quadriculada acima):

$$\frac{\partial[\lambda P]}{\partial y} = \frac{\partial[\lambda Q]}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial[\lambda y^2]}{\partial y} = \frac{\partial[\lambda(xy+1)]}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad y^2\lambda' + 2y\lambda = y\lambda$$

$$\Rightarrow \quad \lambda' + \frac{1}{y}\lambda(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{k}{e^{\displaystyle\int \frac{1}{y}\, dy}} = \frac{k}{e^{\ln y}} = \frac{k}{y} \ .$$

Muito bem, multiplicando a EDO pelo fator $1/y$ calculado, obtemos

$$\lambda\,(P\, dx + Q\, dy) = \frac{1}{y}\big[y^2 dx + (xy+1)dy\big] = y\, dx + \left(x + \frac{1}{y}\right) dy = 0 \ ,$$

que é exata (verifique!). A solução, obtida como já se explicou na seç. 7.3, é

$$U(x,y) = xy + \ln y = c \ \blacksquare$$

Exemplo 2 : $\underbrace{x^2 - y^2}_{P} dx + \underbrace{2xy}_{Q} dy = 0 \quad (x > 0)$

Como $P_y - Q_x = -2y - 2y = -4y \neq 0$, a EDO não é exata. Tentemos um fator que dependa só de x:

i) Usando a fórmula pronta para $\lambda(x)$:

$$\lambda(x) = e^{\displaystyle\int \frac{P_y - Q_x}{Q}\, dx} = e^{\displaystyle\int \frac{-4y}{2xy}\, dy} = e^{\displaystyle -2\int \frac{1}{x}\, dy} = e^{-2\ln x} = 1/x^2 \quad .$$

ii) Impondo a condição de a EDO ser exata:

$$\frac{\partial[\lambda P]}{\partial y} = \frac{\partial[\lambda Q]}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial[\lambda(x^2 - y^2)]}{\partial y} = \frac{\partial[\lambda\, 2xy]}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \lambda(-2y) = \lambda' 2xy + \lambda 2y$$

$$\Rightarrow \quad \lambda' + \frac{2}{x}\lambda(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{e^{\displaystyle\int \frac{2}{x}\, dy}} = \frac{1}{e^{2\ln x}} = \frac{1}{x^2} \quad .$$

Assim,

$$\lambda\,(P\, dx + Q\, dy) = \frac{2}{x}\big[(x^2 - y^2)dx + 2xy\, dy\big] = \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y}{x}\, dy = 0 \quad ,$$

que é exata (verifique!), e cuja solução é

$$U(x, y) = x + y^2/x = c \ \blacksquare$$

7.8 Redutível à Linear

7.8.1 Equação de Bernoulli

A forma dessa EDO é a seguinte:

$$\boxed{y' + A(x)y(x) = B(x)y^\alpha(x)} \quad ,$$

que se degenera numa EDO *separável* se $A(x) \equiv 0$ e numa EDO *linear* se $B(x) \equiv 0$ ou $\alpha = 1$.

Fora desses casos degenerados, um método de solução é o seguinte:

$$y' + A(x)y(x) = B(x)y^\alpha(x) \quad \overset{\cdot\, y^{-\alpha}}{\Rightarrow} \quad y^{-\alpha}y' + A(x)\underbrace{y^{-\alpha+1}(x)}_{v(x)} = B(x) \quad .$$

Acima indicamos a mudança de variável dependente a ser feita:

$$v(x) = y^{-\alpha+1}(x) \quad \Rightarrow \quad v' = (-\alpha + 1)y^{-\alpha}y' \quad \Rightarrow \quad y^{-\alpha}y' = \frac{v'}{1-\alpha} \quad ,$$

e a EDO torna-se linear: $\dfrac{v'}{1-\alpha} + Av = B$, ou $v' + [(1-\alpha)A(x)]v(x) = [(1-\alpha)B(x)]$.

Exemplo: $y' - \dfrac{2y}{x} = 3xy^3 \ (x>0) \quad \overset{\cdot\, y^{-3}}{\Rightarrow} \quad y^{-3}y' - \dfrac{2}{x}\underbrace{y^{-2}}_{v} = 3x$.

$$v \equiv y^{-2} \quad \Rightarrow \quad v' = -2y^{-3}y' \ \frac{v'}{-2} - \frac{2}{x}\,v = 3x \quad \Rightarrow \quad v' + \frac{4}{x}\,v(x) = -6x \ \ \text{(linear)} \ .$$

$$\therefore\ f \equiv e^{\int \frac{4}{x}\,dx} = e^{4\ln x} = x^4 \quad \Rightarrow \quad (v\,x^4)' = -6x\cdot x^4 \quad \Rightarrow \quad vx^4 = -x^6 + c$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{c-x^6}{x^4} \ = \ y^{-2} \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{x^4}{c-x^6} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \pm\frac{x^2}{\sqrt{c-x^6}} \ \blacksquare$$

7.8.2 Equação de Riccati

$$\boxed{y' = A(x)y^2(x) + B(x)y(x) + C(x)} \ ,$$

que se degenera numa equação de Bernoulli se $C(x) \equiv 0$.

Descrevemos um método de solução baseado no conhecimento prévio de uma solução particular $y_1(x)$ da equação de Riccati. O método consiste em convertê-la numa equação de Bernoulli por uma simples mudança da variável dependente, de y para Y, dada por

$$y(x) = Y(x) + y_1(x) \ ,$$

que, ao substituir na equação de Riccati, obtemos

$$(Y+y_1)' = A(Y+y_1)^2 + B(Y+y_1) + C \quad \Rightarrow \quad Y' + \cancel{y_1'} = AY^2 + 2Ay_1Y + \cancel{Ay_1^2} + BY + \cancel{By_1} + \cancel{C} \ ,$$

onde o cancelamento é justificado por y_1 ser uma solução da eq. de Riccati. Obtemos então

$$Y' + (-2Ay_1 - B)Y(x) = A(x)Y^2(x) \ \cdots\cdots \ \text{uma eq. de Bernoulli (com } \alpha = 2) \ .$$

Seguem dois exemplos:

Exemplo 1 : $y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1$, que tem a solução particular $y_1(x) = x$.

Fazendo a substituição $y = Y + x$, obtemos

$$(Y+x)' = (Y+x)^2 - 2x(Y+x) + x^2 + 1 \quad \Rightarrow$$

$$Y' + 1 \ = \ Y^2 + \cancel{2xY} + \cancel{x^2} - \cancel{2xY} - \cancel{2x^2} + \cancel{x^2} + 1 \quad \Rightarrow \quad Y' = Y^2 \ ,$$

que é uma EDO de Bernoulli degenerada numa equação separável. Logo,

$$\frac{dY}{dx} = Y^2 \ \Rightarrow \ \int \frac{dY}{Y^2} = \int dx \ \Rightarrow \ -\frac{1}{Y} = x + c \ \Rightarrow \ Y = \frac{-1}{x+c} \ \Rightarrow \ y(x) = \frac{-1}{x+c} + x \ \blacksquare$$

Temos então a solução mais geral $y(x) = -(x+c)^{-1} + x$ (com uma constante arbitrária) e a solução particular previamente conhecida $y(x) = x$, que é singular (ela não decorre da solução mais geral com algum valor específico de c).

Observação: Neste Exemplo 1, se tivéssemos começado com a solução particular $y_1(x) = x - x^{-1}$ (obtida da solução mais geral calculada acima fazendo $c = 0$), obteríamos a solução mais geral $y(x) = (x + kx^2)^{-1} + y_1(x) = x - k/(1+kx)$, com $k \in \mathbb{R}$, que não inclui a solução $y_1(x) = x - x^{-1}$: esta agora é a solução singular. Vê-se que uma solução é singular em relação à solução mais geral, e não em relação à EDO.

Exemplo 2 : $y' = y^2 - x^{-1}y(x) - x^2$, que tem a solução particular $y_1(x) = x^{-1}$.

Fazendo a substituição $y = Y + x^{-1}$, obtemos

$$(Y + x^{-1})' = (Y + x^{-1})^2 - x^{-1}(Y + x^{-1}) - x^{-2} \quad \Rightarrow$$

$$Y' - \cancel{x^{-2}} = Y^2 + x^{-1}Y + \cancel{x^{-2}} - x^{-1}Y - \cancel{x^{-2}} - \cancel{x^{-2}} \quad \Rightarrow$$

$$Y' - x^{-1}Y = Y^2 \text{ (Bernoulli)} \overset{\cdot\, Y^{-2}}{\Rightarrow} Y^{-2}Y' - x^{-1}\underbrace{Y^{-1}}_{v} = 1 \underset{v' = Y^{-2}Y'}{\overset{v = Y^{-1}}{\Longrightarrow}} -v' - x^{-1}v = 1$$

$$\Rightarrow \quad v' + x^{-1}v = -1 \text{ (linear)} \xrightarrow{f = e^{\int x^{-1}dx} = x} (xv)' = -x \quad \Rightarrow \quad xv = -x^2/2 + c$$

$$\Rightarrow \quad v = Y^{-1} = -\frac{x}{2} + \frac{c}{x} \quad \Rightarrow \quad Y = \left(\frac{c}{x} - \frac{x}{2}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \left(\frac{c}{x} - \frac{x}{2}\right)^{-1} + x^{-1} \ \blacksquare$$

Temos então a solução mais geral $y(x) = (c/x - x/2)^{-1} + x^{-1}$ e a solução particular $y(x) = x^{-1}$, que é singular.

7.9 Equação de Clairaut

A equação de Clairaut, dada por

$$\boxed{y = xy' + F(y')} \ ,$$

não apresenta novidade se a função F acima for uma função afim, isto é, se $F(y') = ay' + b$ (a e b constantes), pois neste caso ela se degenera numa linear muito simples: $(x + a)y' - y = b$.

Para resolvê-la, primeiramente substituímos $y'(x) = p(x)$:

$$\underline{\underline{y = xp + F(p)}} \ . \qquad \text{(I)}$$

Em seguida, derivamos em relação a x:

$$\cancel{y'} = \cancel{p} + xp' + F'(p)p' \quad \Rightarrow \quad \big[x + F'(p)\big]\, p' = 0 \ ,$$

donde

$$\begin{cases} p' = 0 \quad \Rightarrow \quad p = c \ , & \text{(II)} \\ x + F'(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -F'(p) \ . & \text{(III)} \end{cases}$$

Aos dois resultados em (II) e (III), tendo (I) em conta, correspondem duas soluções. A substituição de (II) em (I) fornece a *solução mais geral* (a que exibe a constante arbitrária c):

$$y(x) = cx + F(x) \ \blacksquare$$

Ao resultado em (III) corresponde a *solução singular da equação da Clairaut*. Se for possível calcular analiticamente a inversa de F' para deduzir $p = (F')^{-1}(-x)$, com a substituição dessa expressão em (I), obtemos tal solução na *forma explícita*:

$$y(x) = x\,(F')^{-1}(-x) + F\big[(F')^{-1}(-x)\big] \ \blacksquare$$

Se isso não for possível, deixamo-la na *forma paramétrica* (parâmetro p), dada por (I) e (III):

$$x(p) = -F'(p) \quad \text{e} \quad y(p) = -p\,F'(p) + F(p) \ \blacksquare$$

Exemplo 1 : $y = xy' - \ln y$ [nesse caso, $F(y') = -\ln y'$]

Substituindo y' por $p(x)$ e derivando, obtemos

$$\underline{\underline{y = xp - \ln p}} \quad \Rightarrow \quad \cancel{y'} = \cancel{p} + xp' - (1/p)p' \quad \Rightarrow \quad (x - 1/p)p' = 0 \ .$$

Solução mais geral: $p' = 0 \ \Rightarrow \ p = c \ \Rightarrow \ y(x) = cx - \ln c$ ■

Solução singular: $x - 1/p = 0 \Rightarrow p = 1/x \Rightarrow y = x(1/x) - \ln(1/x) \Rightarrow y(x) = 1 + \ln x$ ■

Exemplo 2 : $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - x\dfrac{dy}{dx} + y = 0$.

$$y = xy' - (y')^2 \ \overset{y'=p}{\Rightarrow} \ \underline{\underline{y = xp - p^2}} \ \overset{d/dx}{\Rightarrow} \ \cancel{y'} = \cancel{p} + xp' \ \Rightarrow \ (x - 2p)p' = 0 \ .$$

Solução mais geral: $p' = 0 \ \Rightarrow \ p = c \ \Rightarrow \ y(x) = cx - c^2$ ■

Solução singular: $x - 2p = 0 \ \Rightarrow \ p = \dfrac{x}{2} \ \Rightarrow \ y = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^2}{4} \ \Rightarrow \ y(x) = \dfrac{x^2}{4}$ ■

Exemplo 3 : $y = xy' - (y'^2 + e^{y'}) \ \overset{y'=p}{\Rightarrow} \ \underline{\underline{y = xp - (p^2 + e^p)}} \ \overset{d/dx}{\Rightarrow}$

$$\cancel{y'} = \cancel{p} + xp' - (2p + e^p)p' \ \Rightarrow \ (x - 2p - e^p)p' = 0 \ .$$

Solução mais geral: $p' = 0 \ \Rightarrow \ p = c \ \Rightarrow \ y(x) = cx - c^2 - e^c$ ■

Solução singular (forma paramétrica): $x(p) = 2p + e^p$, $y(p) = (2p + e^p)p - (p^2 + e^p)$ ■

7.10 Equação de Lagrange

$$\boxed{y(x) = xG(y') + F(y')} \qquad \text{(com } G(y') \not\equiv y' \text{ para evitar a eq. de Clairaut)}$$

Para resolvê-la, o primeiro passo é, como na equação de Clairaut, fazer a substituição $y'(x) = p(x)$, tomando a EDO a forma

$$y(x) = xG(p) + F(p) \ , \qquad \text{(I)}$$

e então derivar essa equação em relação a x, obtendo

$$p - G(p) = [xG'(p) + F'(p)]\frac{dp}{dx} \ . \qquad \text{(II)}$$

Se $p - G(p) \neq 0$, então $dp/dx \neq 0$, o que garante a existência de dx/dp e possibilita escrever a seguinte EDO linear para $x(p)$, que já sabemos resolver:

$$[G(p) - p]\frac{dx}{dp} + G'(p)x(p) = -F'(p) \ . \qquad \text{(III)}$$

Como na resolução da equação de Clairaut, se a solução de (III) é fuma função $x(p)$ cuja inversa $p(x)$ é possível calcular analiticamente, então a substituição de $p(x)$ em (I) fornece a solução numa *forma explícita* $y(x)$; caso contrário, contentamo-nos com uma *forma paramétrica* da solução mais geral formada pela solução $x(p)$ de (III) e pela função $y(p) = y\big(x(p)\big) = xG(p) + F(p)$ obtida de (I), sendo p o parâmetro.

Se $p - G(p) = 0$, então cada solução $p = p_0$ dessa equação algébrica é também solução da EDO em (II), e a ela corresponderá a solução singular da EDO de Lagrange dada por $y(x) = p_0 x + F(p_0)$, obtida com a substituição de $p = p_0$ (lembrando que $G(p_0) = p_0$) em (I). Isso pode ser verificado diretamente substituindo essa solução singular na EDO:

$$y(x) - xG(y') - F(y') \;=\; p_0 x + F(p_0) - x\underbrace{G(p_0)}_{p_0} - F(p_0) \;=\; p_0 x + F(p_0) - xp_0 - F(p_0) \;=\; 0 \checkmark$$

<u>Exemplo 1</u> : $\quad y = -2 + \dfrac{3}{4}y'^{\,4} \quad$ [nesse caso, $G(y') \equiv 0$ e $F(y') = -2 + (3/4)y'^{\,4}$]

A EDO com $y' = p$ toma a forma

$$y = -2 + \frac{3}{4}p^4 \;, \qquad [a]$$

cuja derivada derivada em relação a x (lembrando que $y' = p$) produz

$$p = 3p^3\frac{dp}{dx} \;. \qquad [b]$$

Essa EDO é satisfeita por $p = 0$ (valor que anula o membro esquerdo dela), cuja substituição em [a] fornece a solução singular

$$y(x) = -2 \;\blacksquare$$

Resolvendo [b] para $p \neq 0$, obtemos

$$1 = 3p^2\frac{dp}{dx} \quad\Rightarrow\quad \int 3p^2 dp = \int dx \quad\Rightarrow\quad p = (x+c)^{1/3} \;,$$

resultado que, ao ser substituído em [a], fornece a solução mais geral numa forma explícita:

$$y = -2 + \frac{3}{4}(x+c)^{4/3} \;\blacksquare$$

<u>Exemplo 2</u> : $\quad y = \dfrac{x}{2}y'^{\,2} + y'^{\,3} - 1 \quad$ [nesse caso, $G(y') = (1/2)y'^{2}$ e $F(y') = y'^{\,3} - 1$]

A EDO com $y' = p$ toma a forma $\quad y = \dfrac{x}{2}p^2 + p^3 - 1 \;. \qquad$ [a]

Derivando em relação a x, obtemos $\quad p - \dfrac{p^2}{2} = (px + 3p^2)\dfrac{dp}{dx} \;. \qquad$ [b]

Essa EDO é satisfeita por $p = 0$ ou $p = 2$ (valores de p que anulam seu membro esquerdo), que, substituídos em [a], fornecem as soluções singulares

$$y(x) = -1 \quad \text{e} \quad y(x) = 2x + 7 \;\blacksquare$$

Resolvendo [b] para $p \neq 0$ e $p \neq 2$, obtemos

$$\cancel{p}\left(1 - \frac{p}{2}\right) = \cancel{p}\,(x + 3p)\frac{dp}{dx} \quad\Rightarrow\quad (2-p)\frac{dx}{dp} = 2x + 6p \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-2}\,x = \frac{6p}{2-p} \;.$$

O fator integrante dessa EDO de 1ª ordem linear é $e^{\int \frac{2}{p-2}\,dp} = e^{2\ln|p-2|} = (p-2)^2$; logo,

$$\frac{d}{dp}\big[(p-2)^2 x\big] = 6p(2-p) \quad\Rightarrow\quad (p-2)^2 x = 6p^2 - 2p^3 + c \quad\Rightarrow\quad x = \frac{6p^2 - 2p^3 + c}{(p-2)^2} \;.$$

Por fim, com essa expressão de x e a de y que se obtém com a substituição da de x em [a], chegamos à solução mais geral, numa forma paramétrica (parâmetro p):

$$x(p) = \frac{6p^2 - 2p^3 + c}{(p-2)^2} \qquad \text{e} \qquad y(p) = \frac{6p^4 - 2p^5 + cp^2}{2(p-2)^2} + p^3 - 1 \;\blacksquare$$

7.11 Aplicações

7.11.1 Crescimento Populacional e Decaimento Radioativo

Exemplo 1 : A taxa de crescimento da população de certa espécie animal é, em qualquer tempo, proporcional à população. Calcule essa população em função do tempo, sabendo que ela se duplica a cada três anos e que, no instante inicial $t = 0$, ela é composta de dez indivíduos.

Solução: Seja $N(t)$ a população no instante t. Temos que dN/dt é proporcional a $N(t)$, isto é, para alguma constante k (a ser determinada), temos que $dN/dt = k\,N(t)$, uma EDO linear cuja colução é $N(t) = c_1\, e^{kt}$. Note que $N(0) = c_1$; sendo c_1 igual à população inicial, ela é mais significativamente denotada por N_0(*) . Assim, $N(t) = N_0 e^{kt}$. Ora, é dado que $N_0 = 10$; logo, $N(t) = 10e^{kt}$.

Determinamos k usando a informação da duplicação da população a cada três anos:

$$\underbrace{N(3) = 2N_0}_{(\#)} \quad\Rightarrow\quad 10e^{3k} = 20 \quad\Rightarrow\quad e^{3k} = \ln 2 \quad\Rightarrow\quad k = (\ln 2)/3 \ .$$

Portanto, $N(t) = 10e^{kt} = 10e^{(\ln 2)\,t/3} = 10\big(e^{\ln 2}\big)^{t/3} = 10 \cdot 2^{t/3}$ ■

Observação: Na equação (#), que expressa matematicamente a duplicação populacional a cada três anos, a contagem dos três anos começa no instante $t = 0$, mas ela pode começar em qualquer tempo t; observe:

$$N(t+3) = 2N(t) \ \Rightarrow\ 10e^{k(t+3)} = 20e^{kt} \ \Rightarrow\ e^{3k}\cancel{e^{kt}} = 2\cancel{e^{kt}} \ \Rightarrow\ e^{3k} = \ln 2 \ \Rightarrow\ k = \frac{\ln 2}{3}\ .$$

Exemplo 2 : Num instante qualquer, a taxa de desintegração da substância X é proporcional à quantidade presente. Sabe-se que 36% dela desintegram-se em 1200 anos. Determine: (a) a constante radioativa(#), (b) a fração que se desintegra em 600 anos, (c) o tempo para que reste 1/50 da quantidade inicial, (d) a meia-vida(#).

[(#) Essas duas grandezas são definidas durante a solução do problema.]

Solução: A quantidade $Q(t)$ de X no instante t é descrita pela chamada *equação de decaimento radioativo*, dada por $dQ/dt = -\lambda Q(t)$, que expressa a proporcionalidade entre dQ/dt e $Q(t)$. A razão de se adotar $-\lambda$, em vez de λ, como sendo a constante de proporcionalidade é a de garantir um valor positivo para a *constante radioativa* λ. De fato, como dQ/dt é negativo (já que $Q(t)$, decaindo, é uma função decrescente) e $Q(t)$ é positivo, a equação de decaimento implica que λ é positivo.

(a) A solução da equação de decaimento (praticamente a mesma do Exemplo 1) é $Q(t) = Q_0 e^{-\lambda t}$, onde $Q_0 = Q(0)$, a quantidade inicial. É dado que $Q(1200) = Q_0 - 36\% Q_0 = 0,64 Q_0$, donde

$$\cancel{Q_0} e^{-1200\lambda} = 0,64\cancel{Q_0} \quad\Rightarrow\quad -1200\lambda = \ln 0,64 \quad\Rightarrow\quad \lambda = (-\ln 0,64)/1200 \ ■$$

(b) A quantidade que se desintegra desde $t = 0$ até $t = 600$ anos é

(*) Prática comum na Física; por exemplo, ao se integrar a EDO obtida com a aplicação da 2ª lei de Newton a uma partícula em queda livre, com o eixo y na vertical e direcionado para cima, obtemos

$$F = ma \ \Rightarrow\ -mg = m\frac{d^2y}{dt^2} \ \Rightarrow\ y''(t) = -g \ \Rightarrow\ y'(t) = -gt + c_1 \ \Rightarrow\ y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + c_1\,t + c_2\ .$$

Uma vez que a velocidade inicial é $y'(0) = c_1$ e a altura inicial é $y(0) = c_2$, as constantes c_1 e c_2 são respectivamente denotadas por v_0 e y_0, tomando a equação da velocidade e a da altura as formas mais significativas: $v(t) = v_0 - gt$ e $y(t) = y_0 + v_0 t - (1/2)gt^2$, respectivamente.

$$\Delta Q = Q_0 - Q(600) = Q_0 - Q_0 e^{-600\lambda} = Q_0(1 - e^{-600\lambda}) \ .$$

Mas

$$e^{-600\lambda} = e^{-600(-\ln 0{,}64)/1200} = e^{(1/2)\ln 0{,}64} = e^{\ln\sqrt{0{,}64}} = e^{\ln 0{,}8} = 0{,}8 \ .$$

Logo,

$$\Delta Q = Q_0(1 - 0{,}8) = 20\% Q_0 \ ,$$

donde se vê que a fração que se desintegra em 600 anos é 20% ■

(c) O tempo T desejado é tal que $Q(T) = Q_0/50$, donde

$$\cancel{Q_0} e^{-\lambda T} = \frac{\cancel{Q_0}}{50} \ \Rightarrow \ -\lambda T = -\ln 50 \ \Rightarrow \ T = \frac{\ln 50}{\lambda} = \frac{\ln 50}{(-ln 0{,}64)/1200} \simeq 10520 \text{ anos} \ \blacksquare$$

(d) A *meia-vida* $T_{1/2}$ é o tempo da desintegração da metade da substância; logo,

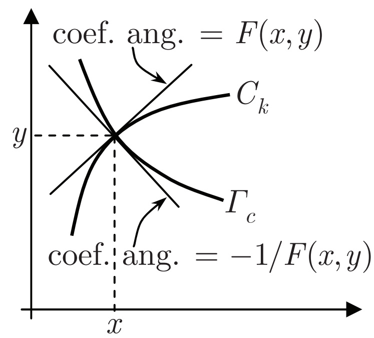
$$Q(T_{1/2}) = \cancel{Q_0} e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{\cancel{Q_0}}{2} \ \Rightarrow \ -\lambda T_{1/2} = -\ln 2 \ \Rightarrow \ T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{1200 \ln 2}{-\ln 0{,}64} \simeq 1864 \text{ anos} \ \blacksquare$$

7.11.2 Curvas Ortogonais

Suponha dada a equação $f(x,y,k) = 0$ de um família de curvas com um parâmetro $k \in I \subset \mathbb{R}$ definidas num domínio D_f do plano xy. A cada k corresponde uma curva da família, denotada por C_k, e em cada ponto (x,y) de D_f passa uma curva da família, correspondente a algum valor de k. Considere o problema de se determinar, no maior subdomínio possível $D_g \subset D_f$, a equação $g(x,y,c) = 0$ da família das curvas que, em cada ponto de D_g, cruzam ortogonalmente(*) as curvas da família dada. Trata-se do cálculo da chamada *família ortogonal* à família dada.

A principal restrição que geralmente se faz neste problema é a de a equação $f(x,y,k) = 0$ da família de curvas dadas ser a solução mais geral de uma EDO para $y(x)$ da forma $y'(x) = F(x,y)$ [de *primeira* ordem, pois sua solução é constituída por uma família de curvas com um parâmetro]. Note que essa EDO fornece o coeficiente angular $y'(x)$ da reta tangente à curva da família dada que passa pelo ponto (x,y). Além disso, essa EDO há de ser deduzida da equação $f(x,y,k) = 0$ eliminando-se o parâmetro k conforme explicado na seç. 6.3.2 (v., em particular, o Exemplo 1).

A formulação da solução do problema é simples. Sendo $F(x,y)$ o coeficiente angular da reta tangente no ponto (x,y) da curva C_k da família dada, então, neste ponto, o coeficiente angular da reta tangente à curva Γ_c ortogonal à C_k deve ser $-1/F(x,y)$, pois o produto dos coeficientes angulares (finitos) de duas retas ortogonais é igual a -1; a figura à direita ilustra geometricamente esse raciocínio. Portanto, a solução mais geral da EDO $y'(x) = -1/F(x,y)$ fornece a equação $g(x,y,c) = 0$ da família ortogonal desejada.



Em resumo:

i) É dada a equação $f(x,y,k) = 0$ da família de curvas com um parâmetro para a qual se deseja determinar a família ortogonal.

ii) Deduz-se uma EDO da forma $y'(x) = F(x,y)$ eliminando-se o parâmetro k da equação $f(x,y,k) = 0$ como explicado na seç. 6.3.2.

(*)uma curva é ortogonal a outra num certo ponto se, neste, as respectivas retas tangentes são ortogonais

iii) Resolve-se a EDO $y'(x) = -1/F(x,y)$ das curvas ortogonais, obtendo-se a equação desejada $g(x,y,c) = 0$ da família ortogonal.

[Note que a EDO $y'(x) = -1/F(x,y)$ indica, entre suas soluções, curvas ortogonais com reta tangente vertical (y' infinito) nos pontos em que $F(x,y) = 0$.]

Exemplo 1 : Um membro genérico da família de curvas com um parâmetro dada por

$$\boxed{x^2 + y^2 = k \ \ (k > 0)}$$

é uma circunferência de raio $\sqrt{k}$ centrada na origem, denotada por C_k. Derivando a equação acima em relação a x, nisso considerando y como função de x, obtemos $2x + 2yy' = 0$, donde $y' = -x/y$.

A função $F(x,y) = -x/y$ no lado direito dessa EDO se anula nos pontos de abscissa nula ($x = 0$) e, portanto, podem existir curvas ortogonais cuja reta tangente nesses pontos é vertical.

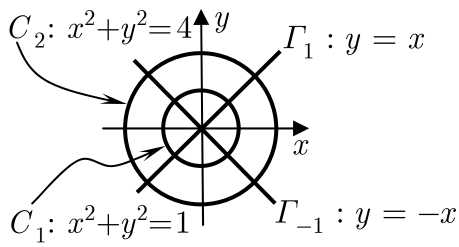
Para calcular as curvas ortogonais, devemos resolver a EDO $y' = y/x$, que é separável:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|x| + c_1 \quad \Rightarrow \quad y = \underbrace{\pm e^{c_1}}_{c} x = cx \ \ .$$

Ou seja, as curvas

$$\boxed{y = cx \ \ (c \in \mathbb{R})} \ ,$$

que são retas pela origem (de coeficiente angular c), formam a família (com um parâmetro) de curvas ortogonais à família dada. Qualquer uma dessas retas, designemo-la por Γ_c, é ortogonal a todas as circunferências C_k, e em qualquer ponto (x,y) existe um único par de curvas C_k e Γ_c que se cruzam ortogonalmente. Veja a figura à direita.



Observe que, da resposta acima, $y = cx \ \ (c \in \mathbb{R})$, está excluída a reta $x = 0$, que obviamente faz parte da família ortogonal; essa reta vertical não foi obtida em conformidade com o que foi dito acima: ela passa pelos pontos de abscissa nula. Obteríamos essa reta vertical se, nos cálculos acima, após integrarmos $\int dy/y = \int dx/x$, tivéssemos explicitado x em função de y, obtendo $x = by$, $b \in \mathbb{R}$ (mas, agora, dessa solução, é a reta $y = 0$ que está excluída). Mas, para os nosso propósitos, convém simplificar, não se preocupando em obter qualquer curva excepcional, isto é, que não se inclua na solução mais geral da EDO para "$y(x)$".

Exemplo 2 : Façamos o inverso do Exemplo 1, considerando as retas pela origem como a família de curvas dada.

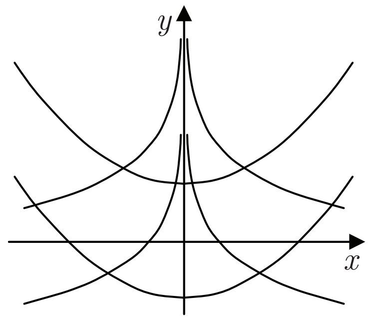
Família dada: as curvas $y = cx \ \ (c \in \mathbb{R}) \ \Rightarrow \ y' = c = y/x$.

Cálculo da *família ortogonal*: $y' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y} \ \Rightarrow \ \displaystyle\int y\,dy = -\int x\,dx \ \Rightarrow \ x^2 + y^2 = 2c_1 > 0$

$\overset{2c_1 \equiv k}{\Rightarrow} \ \boxed{x^2 + y^2 = k \ \ (k > 0)}$: circunferências de raio $\sqrt{k}$ centradas na origem.

Note que, na família dada, $y' = y/x = 0$ se $y = 0$ (o eixo x), indicando, nos pontos do eixo x, que as retas tangentes às curvas ortogonais obtidas são verticais, o que de fato acontece na família ortogonal formada pela circunferências acima.

Exemplo 3 : A família de curvas $y = x^2 + k$ são parábolas com vértices ao longo do eixo y. Derivando essa equação em relação a x, obtemos $y' = 2x$, donde obtemos a EDO $y' = -0,5/x$, cuja solução $y = -0,5\ln|x| + c$ fornece a família de curvas ortogonais àquelas parabolas. A figura à direita mostra duas curvas de cada família.



Caso se pergunte qual a curva que passa pela origem e cruza ortogonalmente as parábolas, notamos, por simples inspeção, que ela é a reta $x = 0$, que não está incluída na calculada família de curvas logarítmicas. Isso condiz com o exposto acima: como, na família de parábolas, $y' = 2x = 0$ se $x = 0$, a curva da família ortogonal tem $y'(0)$ infinito, que é o caso da reta $x = 0$, que nem aparece na família ortogonal calculada, porque essa reta vertical, não definindo y como função de x, não pode ser solução da EDO "para $y(x)$" que se resolveu para obter a família ortogonal.

Exemplo 4 : *Família dada:* $\boxed{\text{curva } C_k : (x-k)^2 + y^2 = k^2 \ \ (k \in \mathbb{R}^*)}$.

Derivando essa equação em relação a x , considerando y como função de x , obtemos

$$2(x-k) + 2yy' = 0 \quad y' = -\frac{x-k}{y} = -\frac{x}{y} + \frac{k}{y} \ .$$

Mas, desenvolvendo aquela mesma equação, vemos que

$$x^2 - 2kx + \cancel{k^2} + y^2 = \cancel{k^2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{x^2+y^2}{2x} \ .$$

Logo, substituindo esse resultado na equação anterior, obtemos

$$y' = -\frac{x}{y} + \frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{-2x^2+x^2+y^2}{2x} = \frac{y^2-x^2}{2xy} \ .$$

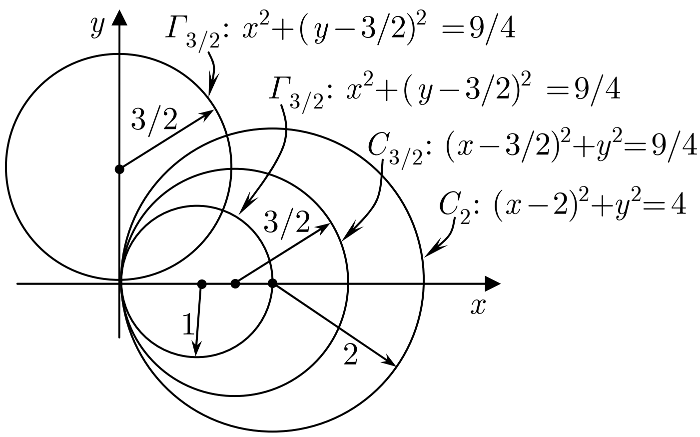
Portanto, a EDO da família ortogonal é

$$y' = -\frac{2xy}{y^2-x^2} = -\frac{2xy/x^2}{(y^2-x\ 2)/x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2(y/x)}{1-(y/x)^2} \ ,$$

uma EDO homogênea cuja solução (os cálculos são apresentados a seguir) é a família de curvas Γ_c com um parâmetro $c \in \mathbb{R}$ dada por

$\boxed{\text{curva } \Gamma_c : x^2 + (y-c)^2 = c^2 \ \ (c \in \mathbb{R}^*)}$.

A figura à direita mostra algumas curvas das famílias dada (C_k) e ortogonal (Γ_c) .



Eis os cálculos de Γ_c :

$$y' = \frac{2(y/x)}{1-(y/x)^2} \ \underset{\substack{y=vx \\ y'=x+xv'}}{\overset{v=y/x}{\Rightarrow}} \ v + xv' = \frac{2v}{1-v^2} \ \Rightarrow \ x\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{1-v^2} - v = \frac{v^3+v}{1-v^2} \ .$$

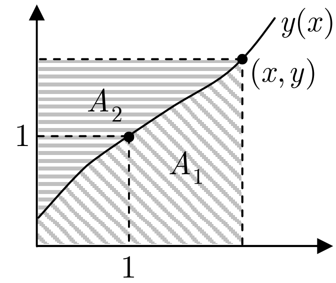
$$\frac{1-v^2}{v^3+v}=\frac{A}{v}+\frac{Bv+C}{v^2+1}=\frac{A(-v^2+1)+Bv^2+Cv}{v(v^2+1)}=\frac{(A+B)v^2+cv+A}{v(v^2+1)} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A=1 \\ B=-2 \\ C=0\,. \end{cases}$$

$$\therefore\ \int\left(\frac{1}{v}-\frac{2v}{v^2+1}\right)dv=\int\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \ln|v|-\ln|v^2+1|=\ln|x|+c_1 \quad\Rightarrow\quad |\frac{v}{v^2+1}|=|x|e^{c_1}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{v}{v^2+1}=\underbrace{\pm e^{c_1}}_{c_2}x \quad\Rightarrow\quad v=c_2x(v^2+1) \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{x}=c_2x\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) \quad\Rightarrow\quad y=c_2(y^2+x^2)$$

$$\Rightarrow\quad x^2+y^2-\underbrace{(1/c_2)}_{\equiv 2c}y=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+(y-c)^2=c^2\ \blacksquare$$

7.11.3 Aplicações diversas



Exemplo 1 : Calcule a função não negativa $y(x)$, com $x \geqslant 0$, cujo gráfico contém o ponto $(1,1)$ e é tal que, para todo ponto (x,y) dele, a área A_2 seja o dobro da área A_1, sendo essas áreas conforme mostra a figura à direita: limitadas pelo gráfico, pelos eixos e pelas retas pelo ponto (x,y).

Solução: As áreas citadas são funções de x: $A_1(x)$ e $A_2(x)$. Temos que

$$\left.\begin{array}{l} A_2=2A_1 \\ A_1+A_2=xy \end{array}\right\rangle \quad\Rightarrow\quad 3A_1=xy \quad\Rightarrow\quad 3\int_0^x y(t)dt=xy$$

$$\overset{d/dx}{\Rightarrow}\quad 3\frac{d}{dx}\int_0^x y(t)dt=\frac{d}{dx}(xy) \quad\Rightarrow\quad 3y(x)=y+xy'\ ,$$

uma EDO de 1ª ordem linear, com fat. integ. $f=e^{-\int(2/x)\,dx}=e^{-2\ln x}=x^{-2}$; logo,

$$(x^{-2}y)'=0 \ \Rightarrow\ x^{-2}y=c_1 \ \Rightarrow\ y=c_1x^2\ .$$

Determinamos c_1 exigindo que o gráfico de $y(x)$ contenha o ponto $(1,1)$: $y(1)=c_1=1$. Então a resposta é $y=x^2$ $\blacksquare$

Exemplo 2 : Resolvamos o problema em que se deseja calcular o volume de água $V(t)$, em litros [L], em função do tempo t, para $t \geqslant 0$, num tanque onde o volume de água no instante $t=0$ é 6L e que está sob as seguintes condições: água é adicionada à taxa (dependente do tempo) de $(8+9t^2e^{-2t})$ L/min nesse tanque, de onde, por sua vez, ela é retirada a uma taxa (em L/min) que, em qualquer instante, é numericamente igual a $2V(t)$.

Solução:

Preliminares: No instante t, $V(t)$ é igual ao volume de água inicial, $V(0)$, mais a água que entrou no tanque, $V_E(t)$, menos a que saiu, $V_S(t)$, desde o instante inicial até aquele instante:

$$V(t)=V(0)+V_E(t)-V_S(t)\ . \qquad \text{(I-a)}$$

Derivando essa equação, obtemos

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV_E}{dt}-\frac{dV_S}{dt}\ . \qquad \text{(I-b)}$$

Qualquer dessas equações é denominada *equação de balanço* de água no tanque.

A taxa temporal (ou taxa, simplesmente) do volume de água que atravessa uma superfície (imaginária, como, por exemplo, a seção reta de um cano d'água) é uma derivada dV/dt, denominada *vazão* (de água). Assim, no lado esquerdo de (I-b), dV_E/dt é a vazão de entrada (a taxa do volume de água através do orifício$^{(*)}$ de entrada), e dV_S/dt é a vazão de saída (a taxa de saída de água, mais resumidamente).

Ressalte-se que as equações de balanço acima são válidas para quaisquer grandezas, tais como massa, energia, etc.

Pelos dados do problema, a equação de balanço é dada por

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_E}{dt} - \frac{dV_S}{dt} = (8 + 9t^2e^{-2t}) - 2V(t) \quad \Rightarrow \quad V' + 2V(t) = 8 + 9t^2e^{-2t} \ ,$$

uma EDO de 1ª ordem linear, de fator integrante e^{2t}, cuja solução geral é assim calculada:

$$\big(e^{2t}V\big)' = 8e^{2t} + 9t^2 \quad \Rightarrow \quad Ve^{2t} = 4e^{2t} + 3t^3 + c_1 \quad \Rightarrow \quad V(t) = 4 + (c_1 + 3t^3)e^{-2t} \ .$$

Para determinar a constante de integração, impomos a condição inicial, finalizando o cálculo da solução do problema:

$$V(0) = 4 + c_1 = 6 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad V(t) = 4 + (2 + 3t^3)e^{-2t} \ \blacksquare$$

Exemplo 3 : Uma solução com concentração salina de 0,3 kg/L é adicionada à taxa de 10 L/min num tanque inicialmente contendo 60 L de água pura, de onde a solução, mantida misturada, é retirada à taxa de 5 L/min.

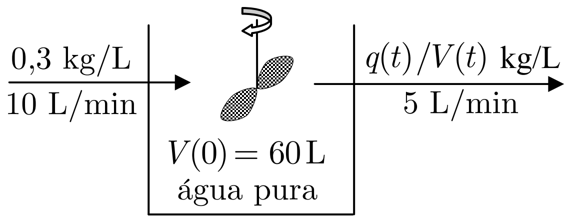
a) Calcule a quantidade de sal no tanque $q(t)$, em kg, no instante t, em min.

b) Calcule $q(t)$ e $\lim_{t\to\infty} q(t)$ com as seguintes modificações do problema: a solução salina entra e sai à mesma taxa de 10 L/min e a concentração salina inicial no tanque é 0,1 kg/L.

c) Considere outra modificação do problema: a concentração salina da solução que é adicionada varia com o tempo segundo a função $0,3e^{-t}$ kg/L, e a solução que é retirado do tanque se dá à taxa de 10 L/min. Qual o PVI que descreve o problema nesse caso?

Solução:

Item (a):



A equação de balanço do volume de água $V(t)$ no tanque e a sua solução, tendo em conta que $V(0) = 60$, são:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_E}{dt} - \frac{dV_S}{dt} = 10 - 5 = 5 \ [\text{L/min}] \quad \Rightarrow \quad V(t) = 5t + 60 \ [\text{L}] \ , \qquad \text{(I)}$$

e a equação de balanço da massa de sal no tanque é

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq_E}{dt} - \frac{dq_S}{dt} \ . \qquad \text{(II)}$$

Mas, aplicando a regra da cadeia na composição de funções $t \longrightarrow V_E \longrightarrow q_E$, obtemos

$$\frac{dq_E}{dt} = \frac{dq_E}{dV_E}\,\frac{dV_E}{dt} = \left(0,3\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(10\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = 3 \ [\text{kg/min}] \ , \qquad \text{(III-a)}$$

$^{(*)}$ mais precisamente, através de qualquer superfície cuja borda coincida com o perímetro do orifício pois dq_E/dV_E é a concentração salina e dV_E/dt é a vazão na entrada, que são dadas, iguais a 0,3 kg/L e 10 L/min, respectivamente (v. figura). Analogamente, na saída, temos

$$\frac{dq_S}{dt} = \frac{dq_S}{dV_S}\,\frac{dV_S}{dt} = \left(\frac{q(t)}{V(t)}\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(5\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = \frac{5q(t)}{V(t)}\ [\text{kg/min}]\ , \qquad \text{(III-b)}$$

onde se substituiu a vazão na saída dV_S/dt pelo valor dado, 5 L/min. Já a concentração na saída, dq_S/dV_E, é a mesma dentro do tanque, igual a $q(t)/V(t)$ (v. figura).

Logo, substituindo (I) em (III-b) e, em seguida, (III-a) e (III-b) em (II), obtemos uma EDO para a grandeza $q(t)$ desejada:

$$\frac{dq}{dt} = 3 - \frac{5q(t)}{5t+12} \quad \Rightarrow \quad q' + \frac{1}{t+12}\,q(t) = 3\ ,$$

uma EDO de 1ª ordem linear a ser resolvida sob a condição inicial $q(0) = 0$, pois não há sal inicialmente no tanque, só água pura. Usando o fator integrante

$$e^{\int dt/(t+12)} = e^{\ln(t+12)} = t+12\ ,$$

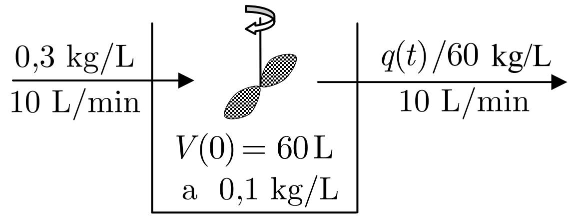
podemos escrever

$$\big[(t{+}12)q\big]' = 3(t{+}12) \quad \Rightarrow \quad (t{+}12)q = (3t^2/2){+}36t{+}c_1 q(t) \quad \Rightarrow \quad q(t) = \frac{(3t^2/2)+36t+c_1}{t+12}\ .$$

Impondo a condição inicial para determinar c_1, terminamos o cálculo de $q(t)$:

$$q(0) = \frac{c_1}{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \quad \Rightarrow \quad q(t) = \frac{(3t^2)+72t}{2t+24}\ \blacksquare$$

<u>Item (b):</u>



$$\frac{dV}{dt} = 10 - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad V(t) = \text{const.} = 60\ [\text{L}]\ .$$

$$\frac{dq}{dt} = 10(0,3) - 10(q/60) \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} + \frac{1}{6}\,q(t) = 3\ .$$

Cond. inicial: $q(0) = \{60\text{L}\}\,\{0,1\ \text{kg/L}\} = 6\ [\text{kg}]$.

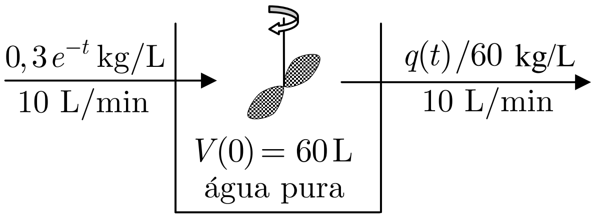
Logo, resolvendo o PVI composto por $q' + q(t)/6 = 3$ e $q(0) = 6$ obtemos

$$q(t) = 18 - 12e^{-t/6} \quad \text{e} \quad \lim_{t\to\infty} q(t) = 18\ [\text{kg}]\ \blacksquare$$

Note que esse valor limite de 18 kg para a massa m_∞ de sal no tangue pode ser inferido sem a necessidade de formar o PVI. À medida que o tempo passa, o conteúdo do tanque tende a ser todo composto pela solução que é adicionada, ou seja, a concentração de sal no tanque tende a ser igual a 0,3 kg/L e, portanto, a massa de sal no tanque tende a ser igual a esse valor assintótico da concentração vezes o volume de solução (que é constante, igual a 60 L): $m_\infty = (0,3\ \text{kg/L})(60\ \text{L}) = 18$ kg .

Item (c):

$$\frac{dV}{dt} = 10 - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad V(t) = \text{const.} = 60 \text{ [L]} \ .$$



$$\frac{dq}{dt} = 10(0,3e^{-t}) - 10(q/60) \ .$$

$$\therefore \ \frac{dq}{dt} + \frac{1}{6}q(t) = 3e^{-t} \ , \quad \text{com} \ \ q(0) = 0 \ \blacksquare$$

Exemplo 4 : Uma bola de madeira de massa m movimenta-se verticalmente sofrendo uma força de atrito com o ar que é proporcional à magnitude da sua velocidade. Considerando constante a aceleração g da gravidade, calcule a magnitude máxima v_{lim} que a velocidade da bola atinge numa queda livre, e, denotando por v_0 a velocidade da bola no instante $t = 0$, esboce o gráfico de $v(t)$ para quatro situações: $v_0 > v_{\text{lim}}$, $v_0 = v_{\text{lim}}$, $0 < v_0 < v_{\text{lim}}$ e $v_0 < 0$.

Solução:

Considerando o eixo y para baixo, de modo que a velocidade da bola é $v = dy/dt$ (positiva quando a bola desce e negativa quando sobe), e usando a 2ª lei de Newton, $F = ma$, com $a = dv/dt$ e $F = mg - bv$ ($-bv$ é a força de atrito, sempre com direção contrária à da velocidade, sendo b a constante que expressa sua proporcionalidade à magnitude de v), podemos escrever

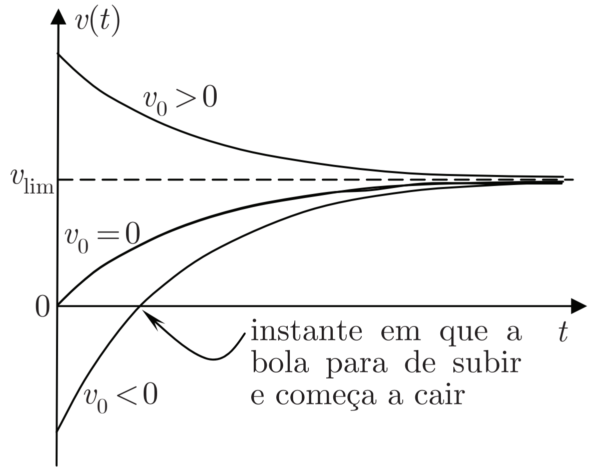
$$F = ma \quad \Rightarrow \quad mg - bv(t) = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad v' + \frac{b}{m}v(t) = g \quad \overset{(*)}{\Rightarrow} \quad v(t) = \frac{mg}{b} + c\,e^{-(b/m)t} \ ,$$

sendo omitida, na passagem $^{(*)}$, a resolução da EDO linear de 1ª ordem, muito simples. Logo,

$$v_{lim} = \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{mg}{b} + \ c\,e^{-(b/m)t} \to 0\right] \quad \Rightarrow \quad v_{\text{lim}} = \frac{mg}{b} \ \blacksquare$$

Impondo a condição inicial, $v(0) = v_0$, obtemos

$$v(0) = \underbrace{mg/b}_{v_{\text{lim}}} + c = v_0 \quad \Rightarrow \quad c = v_0 - v_{lim} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t) = \ v_{\text{lim}} + (v_0 - v_{\text{lim}})\,e^{-(b/m)t}} \ .$$



O segundo termo no lado direito desse resultado sempre decresce com o passar do tempo, então tendendo sempre a velocidade ao valor v_{lim} , mas atingindo-o por valores maiores ou menores, conforme se tenha $v_0 > v_{\text{lim}}$ ou $v_0 < v_{\text{lim}}$, respectivamente. Isso é o que mostra a figura à direita. Ressalte-se que inicialmente a bola está descendo se $v_0 > 0$ e subindo se $v_0 < 0$, por causa da direção escolhida para o eixo y : para baixo.

Discutamos os gráficos na figura à direita seguindo a ordem de cima para baixo. O primeiro, mais acima, corresponde a um caso em que $v_0 > v_{\text{lim}}$, ou seja, a bola é lançada para baixo com uma velocidade maior que v_{lim}, sendo então freada pelo atrito e tendendo a v_{lim} por valores maiores. O segundo gráfico, tracejado, corresponde ao caso em que a bola é lançada para baixo já com $v_0 = v_{\text{lim}}$, permanecendo com essa velocidade. O terceiro gráfico é o caso em que a bola é largada do repouso, sendo então acelerada e tendendo à velocidade limite por valores menores. O quarto gráfico corresponde à situação em que a bola é lançada para cima (velocidade inicial negativa), é desacelerada até parar e começar a cair aceleradamente, tendendo à velocidade limite por valores menores.

Exemplo 5 : Considere um corpo cuja superfície está sob a ação de correntes de convecção de um fluido que o envolve. Pela *lei de Newton para o resfriamento*, a taxa de variação temporal da temperatura T nessa superfície é proporcional à diferença entre essa temperatura e a temperatura T_f do fluido, o que matematicamente pode ser assim expresso:

$$\frac{dT}{dt} = -\gamma\,[\,T(t) - T_f\,] \ .$$

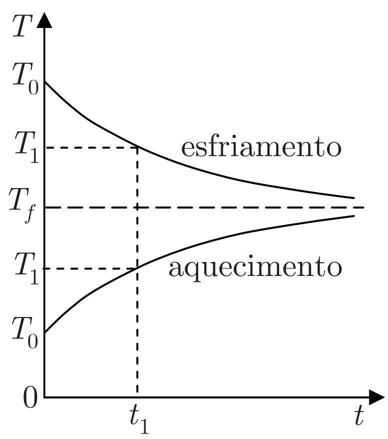
Essa lei também se aplica quando o corpo é aquecido por convecção num fluido mais quente. Quanto ao sinal sinal negativo antes de γ, ele garante, para essa grandeza, valores positivos, uma vez que o corpo se resfria ($dT/dt < 0$) quando sua temperatura é maior que a do fluido ($T - T_f > 0$), e, vice-versa, se esquenta ($dT/dt > 0$) quando sua temperatura é menor ($T - T_f < 0$).

Consideraremos γ e T_f constantes (embora isso nem sempre se justifique). Nesse caso, a equação acima é uma simples EDO de 1ª ordem linear; pondo-a na forma padrão, vemos que o fator integrante é $e^{\gamma t}$ e a sua solução é rapidamente calculada:

$$T' + \gamma\,T(t) = \gamma\,T_f \quad\Rightarrow\quad \left(e^{\gamma t}T\right)' = \gamma\,T_f\,e^{\gamma t} \quad\Rightarrow\quad e^{\gamma t}T = T_f\,e^{\gamma t} + c \quad\Rightarrow\quad \boxed{T(t) = T_f + c\,e^{-\gamma t}} \ .$$

Se duas condições do problema são conhecidas, a constante de integração c e a constante γ podem ser determinadas. Por exemplo, se $T(0) = T_0$ (temperatura inicial conhecida) e $T(t_1) = T_1$ (temperatura conhecida noutro instante t_1), temos que

$$\begin{aligned} &T(0) = T_f + c = T_0 \quad\Rightarrow\quad c = T_0 - T_f \\ &\Rightarrow\quad T(t) = T_f + (T_0 - T_f)\,e^{-\gamma t} \ \blacksquare \end{aligned}$$



onde γ é dado por

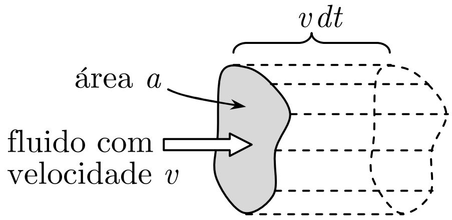
$$\begin{aligned} &T(t_1) = T_f + (T_0 - T_f)\,e^{-\gamma t_1} = T_1 \quad\Rightarrow \\ &e^{-\gamma t_1} = \frac{T_1 - T_f}{T_0 - T_f} \quad\Rightarrow\quad \gamma = \frac{1}{t_1}\ln\frac{T_0 - T_f}{T_1 - T_f} \ \blacksquare \end{aligned}$$

Nesse resultado, note que $\gamma > 0$, pois, como mostra a figura acima, sob resfriamento ($T_0 > T_1 > T_f$) ou aquecimento ($T_0 < T_1 < T_f$), temos que o argumento do logaritmo $(T_0 - T_f)/(T_1 - T_f)$ é maior do que 1.

Exemplo 6 : Um reservatório d'água de volume AH (A é a área da base plana e H é a altura) possui, na parede lateral, um orifício de área a bem próximo à base. Sabendo que, quando o nível d'água em relação à base é h, a velocidade com que a água vaza pelo orifício é, segundo Torricelli, dada por $v = \sqrt{2gh}$ (g é a aceleração da gravidade), calcule o tempo t_e para o reservatório cheio esvaziar-se. Calcule esse tempo no caso de um reservatório de 1000 litros com $H = 1$ m, $A = 1$ m^2 e $a = 2{,}3$ cm^2 (a área interna de um tubo de PVC de 20 mm), considerando $g = 9{,}81$ m/s.

Solução:

Um fluido que atravessa perpendicularmente uma seção plana de área a com velocidade v num intervalo de tempo infinitesimal dt ocupa o volume dV de um cilindro de área da base a e comprimento $v\,dt$ (como se ilustra à direita), dado por $dV = a\,v\,dt$, donde concluímos que a vazão$^{(*)}$ através dessa seção plana é $dV/dt = av$. Com essa informação, tendo em conta que o volume do reservatório é, num instante t, igual a $V(t) = A\,h(t)$, e considerando o exposto no Exemplo 2, podemos escrever



$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\big[A\,h(t)\big] = A\,\frac{dh}{dt} = \underbrace{\frac{dV_E}{dt}}_{0} - \underbrace{\frac{dV_S}{dt}}_{av} \quad \Rightarrow \quad A\,\frac{dh}{dt} = -a\,v \ \ .$$

Uma vez que $v = \sqrt{2gh(t)}$, obtemos

$$A\,\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2g\,h(t)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{2\sqrt{h}} = -\underbrace{\frac{a}{A}\sqrt{\frac{g}{2}}}_{\equiv\,\gamma}\,dt \quad \Rightarrow \quad \sqrt{h(t)} = -\gamma t + c_1 \ \ .$$

Impondo a condição inicial $h(0) = H$, determinamos $c_1 = \sqrt{H}$. Logo, $\sqrt{h(t)} = \sqrt{H} - \gamma t$.

Dessa última equação calculamos $\sqrt{H} - \gamma t_e = \sqrt{h(t_e)} = \sqrt{0} = 0$, donde $t_e = \sqrt{H}\,/\gamma$. Nesse resultado, substituindo o valor de g e os dados do reservatório, obtemos $t_e \simeq\ 33$ min ■

$^{(*)}$grandeza definida no Exemplo 2 acima

Capítulo 8

EDO Linear de Ordem N

8.1 Noções Preliminares

Estudaremos neste capítulo a EDO linear de ordem n, isto é, a EDO $\hat{L}y(x) = h(x)$, usando a notação descrita na seç. 6.2. O problema de resolver essa EDO consiste em determinar a expressão mais geral de $y(x)$ que, ao ser substituída no lado esquerdo da EDO (ou se operado por $\hat{L}$), forneça o lado direito, $h(x)$.

Se $h(x)$ e todos os coeficientes, exceto $a_n(x)$, são nulos (i.e., se a EDO é simplesmente $y^{(n)}(x) = 0$), a solução mais geral da EDO é obtida diretamente com n integrações sucessivas, cada integração introduzindo uma constante arbitrária independente. Por isso, é de se esperar que a *solução mais geral* de qualquer EDO linear de ordem n também contenha n constantes arbitrárias. E, mais ainda, a *solução geral* é qualquer solução apresentando n constantes arbitrárias independentes; é o que será estabelecido no Teorema 8.5 [(†)]. Essa não é uma propriedade genérica de EDOs que não são lineares, as quais podem admitir as chamadas soluções singulares [v. o último parágrafo da seç. 6.3.1, bem como os exemplos de soluções das equações de Riccati e de Clairaut.]

Como dito na seção 6.4, as constantes arbitrárias são especializadas exigindo-se que a solução mais geral da EDO satisfaça certas condições, que, se forem as chamadas condições iniciais, forma-se um problema de valor inicial (PVI). O seguinte teorema versa sobre a solução do PVI formado com uma EDO linear de ordem n:

Teorema 8.1

Considere o PVI formado pela EDO $\hat{L}y(x) = h(x)$ e pelas n condições iniciais

$$y(x_0) = y_0\,, \quad y'(x_0) = y'_0\,, \quad y''(x_0) = y''_0\,, \quad \text{e} \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad .$$

Se x_0 é um ponto interior de um intervalo $[\alpha, \beta]$ onde

- $a_n(x)\,,\ a_{n-1}(x)\,, \cdots\,,\ a_1(x)\,,\ a_0(x)$ e $h(x)$ são funções contínuas
- $a_n(x) \neq 0 \ \ \forall\, x \in [\alpha, \beta]$

então esse PVI tem uma única solução $y(x)$ satisfazendo a EDO em (α, β) e as condições iniciais.

Não provaremos esse teorema.

Daqui por diante, admitimos que as duas condições no teorema acima (continuidade dos coeficientes e do termo independente $h(x)$ da EDO, bem como a não existência de zeros de $a_n(x)$ em I) são satisfeitas, a não ser que se diga expressamente o contrário.

(†) Estamos adotando a terminologia definida na seç. 6.3.1.

8.2 Conceitos Básicos

8.2.1 Independência e dependência linear de funções

Define-se *combinação linear* de n funções $u_1(x), \cdots, u_n(x)$ como uma expressão da forma

$$c_1 u_1(x) + \cdots + c_n u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x) \quad [c_1, \cdots c_n \ \rightarrow \ \text{constantes}] \ .$$

Se $c_1 = c_2 = \cdots c_n = 0$ temos *combinação linear trivial.*

Se ao menos uma das constantes c_k não é 0, a combinação linear *não trivial.*

As funções $u_1(x), \cdots, u_n(x)$ são ditas *linearmente dependentes* (l.d.) (ou formam um conjunto l.d) num intervalo (a, b) se é possível expressar uma delas como combinação linear das outras naquele intervalo.

Se ao menos uma das constantes c_k não é 0, a combinação linear *não trivial.*

As funções $u_1(x), \cdots, u_n(x)$ são ditas *linearmente dependentes* (l.d.) (ou formam um conjunto l.d) num intervalo (a, b) se é possível expressar uma delas como combinação linear das outras naquele intervalo.

A definição acima também pode ser enunciada noutra forma equivalente: $u_1(x), \cdots, u_n(x)$ são funções l.d. se existir uma combinação linear não trivial delas que se anule identicamente[(*)] no intervalo considerado. De fato, se, em tal intervalo, $c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots + c_n u_n(x) = 0$ com, digamos $c_1 \neq 0$, então, dividindo essa equação por c_1, obtemos $u_1(x) = (-c_2/c_1)u_2(x) + (-c_3/c_1)u_3(x) + \cdots + (-c_n/c_1)u_2(x)$ mostrando que $u_1(x)$ é uma combinação linear das demais funções. Reciprocamente, se, digamos $u_1(x)$ é uma combinação linear das demais funções, isto é, $u_1(x) = c_2 u_2(x) + c_3 u_3(x) + \cdots + c_n u_n(x)$, então temos $(-1)u_1(x) + c_2 u_2(x) + c_3 u_3(x) + \cdots + c_n u_n(x) = 0$, uma combinação linear não trivial que se anula identicamente.

Funções que não são l.d. são ditas *linearmente independentes* (l.i). Portanto, com tais funções não é possível formar uma combinação linear não trivial que se anule identicamente, isto é, para elas vale o seguinte:

$$\boxed{\text{Se } c_1 u_1(x) + \cdots + c_n u_n(x) \equiv 0 \text{ e essas funções são l.i., então } c_1 = \cdots = c_n = 0 \ .}$$

<u>Exemplo 1</u> : As funções $\cos 2x$, $\cos^2 x$ e 1 são l.d. em $\mathbb{R}$. Note que há entre elas a seguinte *relação de dependência*:

$$\cos 2x - 2\cos^2 x + 1 \ = \ 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

<u>Exemplo 2</u> : São l.d. em $\mathbb{R}$ as funções $2x^2 + 1$, $-4x + 2$ e $x^2 - x + 1$. Eis uma relação de dependência entre elas:

$$-2(2x^2 + 1) - (-4x + 2) + 4(x^2 - x + 1) \ = \ 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

<u>Exemplo 3</u> : As funções 1, x e x^2 são l.i. em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\text{Se } \ c_0(1) + c_1 x + c_2 x^2 = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{então} \quad c_0 = c_1 = c_2 = 0 \ .$$

De fato, como essa combinação linear deve se anular para todo x real, isso deve ocorrer, em

[(*)] Diz-se que uma função $f(x)$ anula-se identicamente num intervalo I se ela se anula em cada ponto desse intervalo. Isso pode se expressar matematicamente assim: $f(x) = 0 \ \forall x \in I$, ou $f(x) = 0$ em I, ou ainda $f(x) \equiv 0$ (num intervalo subentendido.)

particular, para $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$:

$$\big[c_0(1) + c_1 x + c_2 x^2\big]_{x\,=\,0} \;=\; c_0 = 0 \checkmark$$

$$\left.\begin{aligned}\big[\underbrace{c_0}_{0}(1) + c_1 x + c_2 x^2\big]_{x\,=\,1} &= c_1 + c_2 = 0 \\ \big[\underbrace{c_0}_{0}(1) + c_1 x + c_2 x^2\big]_{x\,=\,-1} &= -c_1 + c_2 = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow\; c_1 = c_2 = 0 \checkmark$$

<u>Exemplo 4</u> : As funções $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ e $\tan x$ são l.i. em $(-\pi/2\,,\,\pi/2)$, isto é,

$$\text{Se}\;\; c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \tan x = 0\;\; \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{então} \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0\;.$$

Realmente, com $x = 0$ obtemos $c_1 = 0$, e considerando $x = \pi/4$ e $x = \pi/3$ obtemos

$$\left.\begin{aligned}\big[c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \tan x\big]_{x\,=\,\pi/4} &= (\sqrt{2}/2)\, c_2 + c_3 = 0 \\ \big[c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \tan x\big]_{x\,=\,\pi/3} &= (\sqrt{3}/2)\, c_2 + \sqrt{3}\; c_3 = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow\; c_2 = c_3 = 0 \checkmark$$

O próximo exemplo mostra a necessidade de se especificar o intervalo onde se questiona a independência linear das funções.

<u>Exemplo 5</u> : As funções x e $|x|$ são l.i. em $\mathbb{R}$, isto é

$$\text{Se}\;\; c_1 x + c_2 |x| = 0\;\; \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{então} \quad c_1 = c_2 = 0\;.$$

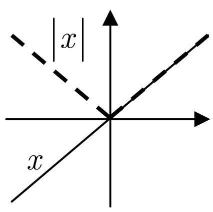
De fato, com $x = 1$ e $x = -1$ obtemos

$$\left.\begin{aligned}\big[c_1 x + c_2 |x|\big]_{x\,=\,1} &= c_1 + c_2 = 0 \\ \big[c_1 x + c_2 |x|\big]_{x\,=\,-1} &= c_1 - c_2 = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow\; c_1 = c_2 = 0 \checkmark$$

Essas funções, entretanto, são l.d. em qualquer intervalo que não inclua $x = 0$, pois

$$x - |x| = 0 \quad \forall x > 0\,, \qquad \text{e} \qquad x + |x| = 0 \quad \forall x < 0\;.$$

Mas elas são l.i. em qualquer domínio incluindo $x = 0$, como $\mathbb{R}$, conforme demonstrado acima.



Graficamente, isso se torna evidente. Primeiramente, observe que, no caso de apenas duas funções, quando elas são l.d., uma é múltipla da outra. De fato, se $c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) = 0$ com uma das constantes diferentes de zero, digamos $c_1 \neq 0$, então $u_1(x) = (-c_2/c_1)\, u_2(x)$. Pois bem, note na figura à direita que x e $|x|$ são múltiplas no intervalo $(0, \infty)$, onde $|x| = x$, e no intervalo $(-\infty, 0)$, onde $|x| = -x$.

8.2.2 Wronskiano

Considere funções $u_1(x), \cdots, u_n(x)$ que sejam diferenciáveis pelo menos $n-1$ vezes em todos os pontos de um intervalo aberto I. Se exigirmos

$$c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \cdots + c_n u_n(x) = 0$$

em todos os pontos desse intervalo então, por diferenciação sucessiva, obtemos as seguintes equações, válidas em I:

$$c_1 u_1'(x) + c_2 u_2'(x) + \cdots + c_n u_n'(x) = 0 \; ,$$
$$c_1 u_1''(x) + c_2 u_2''(x) + \cdots + c_n u_n''(x) = 0 \; ,$$
$$\vdots$$
$$c_1 u_1^{(n-1)}(x) + c_2 u_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n u_n^{(n-1)}(x) = 0 \; ,$$

ou seja, as n constantes c_k satisfazem n equações algébricas. Logo, se para algum $x_0 \in I$, o determinante

$$W\big\{u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)\big\} \equiv \begin{vmatrix} u_1'(x) & u_2'(x) & \cdots & u_n'(x) \\ u_1''(x) & u_2''(x) & \cdots & u_n''(x) \\ & \vdots & & \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

[chamado *wroskiano* das funções $u_1(x), \cdots, u_n(x)$] não se anula, então, neste ponto x_0 de I, o sistema algébrico acima tem (de acordo com um conhecido teorema da Álgebra Linear) a única solução $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Ou seja, se tal wronskiano diferir de zero num único ponto de I então só se consegue a combinação linear nula delas anulando-se todos os coeficientes da combinação linear, significando que aquelas funções são l.i. em I. Está assim estabelecido o seguinte teorema:

Teorema 8.2

Para n funções $u_1(x), \cdots, u_n(x)$ diferenciáveis pelo menos $n-1$ vezes num intervalo aberto I, vale a seguinte proposição:

$$\boxed{\begin{array}{c} W\big\{u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)\big\} \neq 0 \text{ em pelo menos um ponto } x \text{ de } I \\ \Rightarrow \quad \big\{u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)\big\} \text{ é l.i. em } I \; . \end{array}}$$

ou, equivalentemente,

$$\big\{u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)\big\} \text{ é l.d. em } I \;\; \Rightarrow \;\; W\big\{u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)\big\} = 0 \;\; \forall x \in I \; .$$

Exemplo 1 :

$$W\{1, x, x^2, \cdots, x^n\} = \begin{vmatrix} 0! & x & x^2 & x^3 & \cdots & x^n \\ 0 & 1! & 2x & 3x^2 & \cdots & n\,x^{n-1} \\ 0 & 0 & 2! & 6x & \cdots & n(n-1)\,x^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 3! & \cdots & n(n-1)(n-2)\,x^{n-3} \\ & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n! \end{vmatrix}$$

$$= 0!\,1!\,2!\,3!\cdots n! \;\neq\; 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \{1, x, x^2, \cdots, x^n\} \text{ é l.i. em qualquer intervalo.}$$

Exemplo 2 :

$$W\{e^{ax}, e^{bx}\} = \begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} \\ a\,e^{ax} & b\,e^{bx} \end{vmatrix} = e^{ax}e^{bx}(b-a) \neq 0 \;\text{ se } b \neq a$$

$$\Rightarrow \{e^{ax}, e^{bx}\} \;\text{ é l.i. em qualquer intervalo se } b \neq a \,.$$

Exemplo 3 : $\{1\,,\ \cos 2x\,,\ \cos^2 x\}$ é l.d., pois $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$; logo, pelo Teorema 8.2,

$$W\{1, \cos 2x, \cos^2 x\} = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & \cos^2 x \\ 0 & -2\,\mathrm{sen}\,2x & \underbrace{-2\cos x\,\mathrm{sen}\,x}_{-\,\mathrm{sen}\,2x} \\ 0 & -4\cos 2x & -2\cos 2x \end{vmatrix}$$

$$= (2\,\mathrm{sen}\,2x)(2\cos 2x) - (\,\mathrm{sen}\,2x)(4\cos 2x) \;=\; 0 \checkmark$$

Exemplo 4 : Usando o Teorema 8.2, vamos verificar o Exemplo 4 da seç. 8.2.1:

$$W\{\cos x,\,\mathrm{sen}\,x, \tan x\} = \begin{vmatrix} \cos x & \mathrm{sen}\,x & \tan x \\ -\,\mathrm{sen}\,x & \cos x & \sec^2 x \\ -\cos x & -\,\mathrm{sen}\,x & \dfrac{2\,\mathrm{sen}\,x}{\cos^3 x} \end{vmatrix} = \cdots = 3\,\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}^3 x \;\;.$$

Esse resultado, no intervalo $I = (-\pi/2\,,\,\pi/2)$, só se anula em $x = 0$, havendo, portanto, uma infinidade de pontos de I onde o wronskiano é diferente de zero, o que, pelo Teorema 8.2, garante que $\{\cos x,\,\mathrm{sen}\,x, \tan x\}$ é um conjunto l.i. em I.

Infelizmente, a recíproca do Teorema 8.2 não é sempre verdadeira; i.e.,

$$W\big\{u_1(x), \cdots, u_n(x)\big\} = 0 \;\text{ em } I \quad \not\Rightarrow \quad \big\{u_1(x), \cdots, u_n(x)\big\} \;\text{ é l.d. em } I \;\;,$$

ou, equivalentemente,

$$\big\{u_1(x), \cdots, u_n(x)\big\} \;\text{ é l.i em } I \quad \not\Rightarrow \quad W\big\{u_1(x), \cdots, u_n(x)\big\} \neq 0 \;\text{ em } I \;\;,$$

onde $\not\Rightarrow$ significa "não implica que". Há funções l.i. com wronskiano nulo. Por exemplo, no intervalo $(-1, 1)$, as funções diferenciáveis x^3 (ímpar) e $x^2|x|$ (par) têm wronskiano nulo (verifique isso!), mas são obviamente l.i. nesse intervalo, pois uma não é a outra multiplicada por uma constante.

8.3 Solução Geral de uma EDO Linear Homogênea

Estabelecemos nesta seção importantes teoremas (provados na seções 10.2, 10.3 e 10.4) sobre as soluções de uma EDO linear homogênea de ordem n, $\hat{L}y(x) = 0$, num intervalo I aberto.

Teorema 8.3

Se $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ são n soluções de $\hat{L}y(x) = 0$ em I, então temos a proposição:

$$\{y_1(x), \cdots, y_n(x)\} \;\text{ é l.i. em } I \quad \Rightarrow \quad W\{y_1(x), \cdots, y_n(x)\} \neq 0 \;\; \forall x \in I \;.$$

Por esse teorema, a recíproca do Teorema 8.2 é verdadeira quando as funções consideradas são n soluções l.i. de uma EDO linear de ordem n. (Ele é usado na demonstração do teorema seguinte.)

<u>Teorema 8.4</u>

Se $y_1(x)\,,\cdots,y_n(x)$ são n soluções l.i. de $\hat{L}y(x)=0$ em I, então qualquer outra solução $Y(x)$ é uma combinação linear dessas n soluções, isto é, $Y(x) = c_1y_1(x)+\cdots+ c_ny_n(x)$ é a solução geral dessa EDO.

Esse teorema enseja dizer que quaisquer n soluções $y_1(x),\cdots,y_n(x)$ l.i. de $\hat{L}y(x)=0$ em I formam, para essa EDO em I, um *conjunto fundamental de soluções*, uma vez que a combinação linear delas com n constantes arbitrárias fornece a solução geral.

<u>Teorema 8.5</u>

Existe um conjunto fundamental de soluções para $\hat{L}y(x)=0$ em I .

Em resumo, os Teoremas 8.4 e 8.5 expressam que a *solução geral* de $\hat{L}y(x)=0$ (sob as condições do Teorema 8.1) num intervalo aberto I existe e é dada por $y(x)=c_1y_1(x)+\cdots+c_ny_n(x)$, onde $y_1(x)\,,\cdots,y_n(x)$ são n soluções dessa EDO que são l.i. em I, e $c_1\,,\cdots,c_n$ são n constantes arbitrárias.

8.4 EDO Linear de Ordem N Homogênea de Coeficientes Constantes

O Teorema 8.5 garante a existência de um conjunto fundamental de soluções para qualquer EDO linear de ordem n homogênea, $\hat{L}y(x)=0$, e, pelo Teorema 8.4, basta formar a combinação linear (com constantes arbitrárias) dessas soluções para obter a solução geral. A questão agora é *como calcular* essas soluções fundamentais, e a EDO $\hat{L}y(x)=0$ ainda é por demais complicada para que essa questão possa ser respondida genericamente. Precisamos, portanto, introduzir simplificações; uma grande é agora implementada: admitimos que os coeficientes dessa EDO sejam todos constantes. Com isso, conseguiremos resolver a EDO

$$\hat{L}y \;=\; a_ny^{(n)}+\;a_{n-1}y^{(n-1)}+\;\cdots+a_2y''+\;a_1y'+\;a_0y(x)\;=\;0\quad(\text{todo } a_k \text{ constante})\ .$$

Como para $n=1$ essa equação se reduz à EDO linear de 1ª ordem $a_1y'+a_0y(x)=0$ já estudada, com a solução $y(x)=e^{rx}$, com $r=-a_0/a_1$, temos a pista de tentar uma solução da forma $y=e^{rx}$ para a EDO de ordem n acima. Notando que $(e^{rx})^{(m)}=r^me^{rx}$ e, portanto, que

$$\hat{L}e^{rx} \;=\; a_n\underbrace{(e^{rx})^{(n)}}_{r^ne^{rx}}+a_{n-1}\underbrace{(e^{rx})^{(n-1)}}_{r^{n-1}e^{rx}}+\;\cdots+\;a_2\underbrace{(e^{rx})''}_{r^2e^{rx}}+a_1\underbrace{(e^{rx})'}_{re^{rx}}+a_0\,(e^{rx})\quad,$$

ou,

$$\hat{L}e^{rx} \;=\; (a_nr^n+\;a_{n-1}e^{n-1}+\;\cdots+a_2r^2+\;a_1r+a_0)\,e^{rx}\;=\;P(r)e^{rx}\quad, \tag{8.1}$$

onde

$$P(r)\;\equiv\;a_nr^n+\;a_{n-1}e^{n-1}+\;\cdots+\;a_2r^2+\;a_1r+\;a_0 \tag{8.2}$$

é o chamado *polinômio característico*, percebemos que $\hat{L}e^{rx}=0$, isto é, que $y=e^{rx}$ é solução de $\hat{L}y=0$ desde que r seja uma das n raízes da chamada *equação característica* $P(r)=0$. Observe que essa equação é obtida da EDO pela substituição formal de $y^{(k)}$ por r^k (e, em particular, de $y = y^{(0)}$ por $r^0 = 1$). Por exemplo, a equação característica da EDO $4y''' - 3y'' + 5y(x) = 0$ é $4r^3 - 3r^2 + 5 = 0$.

Passamos a examinar os casos de equações características com raízes distintas ou repetidas, sejam elas reais ou imaginárias (recorde-se de que um número complexo $a + bi$ é dito imaginário se $b \neq 0$).

8.4.1 Raízes distintas

Se as n raízes $r_1, \cdots, r_n$ da equação característica são distintas, então a EDO tem as n soluções l.i. (de wronskiano diferente de zero) $e^{r_1 x}, \cdots, e^{r_n x}$, tendo, portanto, segundo o Teorema 8.4, a solução geral

$$y = c_1 e^{r_1 x} + \cdots + c_n e^{r_n x} \quad .$$

<u>Exemplos</u>

i) $y'' - 5y' + 6y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 5r + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 2 \text{ ou } 3 \quad \Rightarrow \quad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$.

ii) $y^{(4)} - 13y'' + 36y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^4 - 13r^2 + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 4 \text{ ou } 9 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 2 \text{ ou } \pm 3$
$$\Rightarrow \quad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x} + c_4 e^{-3x} \; .$$

iii) $y'' - 7y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 7r = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0 \text{ ou } 7 \quad \Rightarrow \quad y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{7x} = c_1 + c_2 e^{7x}$.

8.4.2 Raízes repetidas

Se as n raízes da equação característica não são distintas, isto é, se uma ou mais delas se repetem (raízes múltiplas), menos que n soluções l.i. são obtidas pelo método acima. Para determinar as soluções que faltam, usamos a seguinte regra, deduzida na seç. 10.5:

> No caso de $r_1 = r_2 = \cdots = r_m$ ser uma raiz de multiplicidade m (repetida m vezes) da equação característica, a essa raiz estão associadas as m soluções l.i. $e^{r_1 x}$, $xe^{r_1 x}$, $x^2 e^{r_1 x}$, $\cdots$, $x^{m-1} e^{r_1 x}$ da EDO, e <u>a parte da solução correspondente a essa raiz é dada por</u>
>
> $$c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} + c_3 x^2 e^{r_1 x} + \cdots + c_m x^{m-1} e^{r_1 x} = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_m x^{m-1} \right) e^{r_1 x} \; . \qquad (8.3)$$

<u>Exemplos</u>

i) $y'' - 6y' + 9y(x) = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0 \;\Rightarrow\; r = 3 \text{ (dupla)} \;\Rightarrow\; y = (c_1 + c_2 x) e^{3x}$.

ii) $y^{(5)} + y^{(4)} - 3y''' - 5y'' - 2y'(x) = 0 \;\Rightarrow\; r^5 + r^4 - 3r^3 - 5r^2 - 2r = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} r_1 = -1 \text{ (tripla)} \\ r_2 = 2 \, , \; r_3 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{-x} + c_4 e^{2x} + c_5 e^{0x} \quad [e^{0x} = 1] \; .$$

8.4.3 Raízes imaginárias

Se a equação característica possui raízes imaginárias, e como os coeficientes dessa equação são reais por hipótese, tais raízes ocorrem em pares conjugados. Assim, se $r_1 = a + bi$ é uma raiz imaginária (i.e, com $b \neq 0$), uma segunda deve ser $r_2 = a - b\mathrm{i}$. Nesse caso, escrevendo a parte da solução correspondente a essas duas raízes $a \pm b\mathrm{i}$ como na seç. 8.4.1, mas com duas constantes complexas κ_1 e κ_2, obtemos

$$\kappa_1 e^{r_1 x} + \kappa_2 e^{r_2 x} = \kappa_1\, e^{(a+b\mathrm{i})x} + \kappa_2\, e^{(a-b\mathrm{i})x} = e^{ax}[\kappa_1\, e^{\mathrm{i}bx} + \kappa_2\, e^{-\mathrm{i}bx}] =$$
$$e^{ax}[\kappa_1(\cos bx + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, bx) + \kappa_2(\cos bx - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, bx)] = e^{ax}[\underbrace{(\kappa_1 + \kappa_2)}_{c_1}\cos bx + \underbrace{\mathrm{i}(\kappa_1 - \kappa_2)}_{c_2}\,\mathrm{sen}\, bx] \ ,$$

ou seja,

$$\kappa_1\, e^{(a+b\mathrm{i})x} + \kappa_2\, e^{(a-b\mathrm{i})x} = e^{ax}\,(c_1 \cos bx + c_2\,\mathrm{sen}\, bx) \ , \tag{8.4}$$

uma expressão sem qualquer função que exiba o número i explicitamente e sem constantes imaginárias (mostra-se, na seç. 10.6, que as duas novas constantes $c_1 \equiv \kappa_1 + \kappa_2$ e $c_2 \equiv \mathrm{i}(\kappa_1 - \kappa_2)$ são reais e arbitrárias, o que se consegue deixando arbitrária a constante complexa κ_1 e tomando κ_2 como sendo o complexo conjugado de κ_1).

Observação: Vale a pena, nesse momento, traçar um paralelo com o exposto acima e acrescentar a seguinte informação, útil em algumas aplicações: A parte da solução geral correspondente a um par de zeros reais e distintos, r_1 e r_2, de um fator quadrático $Ar^2 + Br + C$ do polinômio característico, isto é, $r_1 = a + b$ e $r_1 = a - b$, com $a = -B/(2A)$ e $b = (\sqrt{B^2 - 4AC})/(2A) \neq 0$, pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} k_1\, e^{(a+b)x} + k_2\, e^{(a-b)x} &= e^{ax}\,[k_1 e^{bx} + k_2 e^{-bx}] \\ &= e^{ax}\,[k_1(\cosh bx + \,\mathrm{senh}\, bx) + (\cosh bx - \,\mathrm{senh}\, bx)e^{-bx}] \\ &= e^{ax}\,[\underbrace{(k_1 + k_2)}_{c_1}\cosh bx + \underbrace{(k_1 - k_2)}_{c_2}\,\mathrm{senh}\, bx\,] \\ &= e^{ax}\,(c_1 \cosh bx + c_2\,\mathrm{senh}\, bx) \ . \end{aligned} \tag{8.5}$$

Assim, na seç. 8.4.1, as soluções das EDOs nos Exemplos (i) [onde $r = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$] e (ii) [em que $r^4 - 13r^2 + 36 = (r^2-4)(r^2-9) = 0$ e, portanto, $r = 0 \pm 2$ ou $r = 0 \pm 3$] poderiam ter sido respectivamente escritas nas formas

$$y = e^{5x/2}\,[c_1 \cosh(x/2) + c_2\,\mathrm{senh}\,(x/2)] \qquad \text{e} \qquad y = c_1 \cosh 2x + c_2\,\mathrm{senh}\, 2x + c_3 \cosh 3x + c_4\,\mathrm{senh}\, 3x \ .$$

<u>Exemplos</u>

i) $y'' + y(x) = 0 \;\Rightarrow\; r^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; r = \pm\,\mathrm{i} \;\Rightarrow\; y = e^{0x}(c_1 \cos x + c_2\,\mathrm{sen}\, x) = c_1 \cos x + c_2\,\mathrm{sen}\, x$.

ii) $y^{(4)} - y(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad r^4 - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad (r^2)^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad r^2 = \begin{cases} \ \ 1 \ \Rightarrow \ r = \pm 1 \\ \text{ou} \\ -1 \ \Rightarrow \ r = \pm\,\mathrm{i} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4\,\mathrm{sen}\, x \ .$$

iii) $y''' - 4y'' + 5y'(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad r^3 - 4r^2 + 5r = 0 \quad\Rightarrow\quad r = 0 \ \text{ ou } \ 2 \pm \mathrm{i}$

$$\Rightarrow \quad y = c_1 + e^{2x}(c_2 \cos x + c_3\,\mathrm{sen}\, x) \ .$$

iv) $y''' - 5y'' + 7y'(x) = 0 \;\Rightarrow\; r = 0 \ \text{ ou } \ \dfrac{5 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; y = c_1 + e^{5x/2}\Big(c_2 \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,x + c_3\,\mathrm{sen}\, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,x\Big)$.

8.4.4 Raízes imaginárias repetidas

Se $a \pm b\mathrm{i}$ são (ambas) raízes duplas, então, conforme a equação 8.3, a parte da solução correspondente a elas é dada por $y_{ab}(x) = (A_1 + A_2 x)e^{(a+b\mathrm{i})x} + (B_1 + B_2 x)e^{(a-b\mathrm{i})x}$, em que o primeiro termo deve-se à repetição de $a + bi$, e o segundo, à repetição de $a - bi$. Logo adiante mostramos que $y_{ab}(x)$ pode ser escrito apenas com funções e constantes reais na forma

$$e^{ax}(c_1 \cos bx + d_1 \operatorname{sen} bx) + x\, e^{ax}(c_2 \cos bx + d_2 \operatorname{sen} bx) \quad . \tag{8.6}$$

Mais genericamente, se as raízes $a \pm bi$ tiverem multiplicidade m, a elas corresponde a seguinte parte da solução:

$$e^{ax}(c_1 \cos bx + d_1 \operatorname{sen} bx) + x\, e^{ax}(c_2 \cos bx + d_2 \operatorname{sen} bx) + \cdots + x^{m-1} e^{ax}(c_m \cos bx + d_m \operatorname{sen} bx)\,. \tag{8.7}$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} y^{(4)} + 2y'' + y(x) \quad &\Rightarrow \quad r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm\,\mathrm{i} \text{ (duplas)} \\ &\Rightarrow \quad y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x(c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x)\ . \end{aligned}$$

Usando a equação (8.4) duas vezes, demonstramos a equação (8.6):

$$\begin{aligned} y_{ab}(x) &= (A_1 + A_2 x)e^{(a+b\mathrm{i})x} + (B_1 + B_2 x)e^{(a-b\mathrm{i})x} \\ &= \left[\, A_1 e^{(a+b\mathrm{i})x} \ + \ B_1 e^{(a-b\mathrm{i})x} \,\right] + \ x\left[A_2\, e^{(a+b\mathrm{i})x} \ + \ B_2\, e^{(a-b\mathrm{i})x}\right] \\ &= \left[e^{ax}(c_1 \cos bx + d_1 \operatorname{sen} bx)\right] + \ x\left[e^{ax}(c_2 \cos bx + d_2 \operatorname{sen} bx)\right] \checkmark \end{aligned}$$

8.5 Equação de Euler-Cauchy

Essa, no caso homogêneo, é a EDO linear de coeficientes variáveis

$$\alpha_n x^n y^{(n)} + \cdots + \alpha_2 x^2 y'' + \alpha_1 x y' + \alpha_0 y(x) = 0 \quad (x > 0) \quad , \tag{8.8}$$

onde α_0, α_1, $\cdots$, α_n constantes. Para resolvê-la, mudamos para a variável $t = \ln x$ [definiríamos $t = \ln(-x)$ se $x < 0$]. Temos que

$$t = \ln x \quad \Rightarrow \quad x = e^t \quad \text{e} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \quad , \tag{8.9}$$

donde

$$y'(x) = \frac{d}{dx}\, y = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x} = e^{-t}\frac{d}{dt}\, y \quad ,$$

um resultado que evidencia a seguinte relação entre os operadores d/dx e d/dt :

$$\boxed{\frac{d}{dx} = e^{-t}\frac{d}{dt}} \quad .$$

Com essa notação temos que

$$xy'(x) = x\Big(\frac{d}{dx}\Big)y = e^t\Big(e^{-t}\frac{d}{dt}\Big)y \quad \Rightarrow \quad \boxed{xy'(x) = \frac{d}{dt}\, y} \quad .$$

$$\begin{aligned} \therefore\ y''(x) &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{d}{dx}\Big)y = e^{-t}\frac{d}{dt}\Big(e^{-t}\frac{d}{dt}\Big)y = e^{-t}\Big(-\,e^{-t}\frac{d}{dt} + e^{-t}\frac{d^2}{dt^2}\Big)y = e^{-2t}\frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt} - 1\Big)y \\ \Rightarrow \quad x^2 y''(x) &= e^{2t}e^{-2t}\frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt} - 1\Big)y \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2 y''(x) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt} - 1\Big)y} \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ y'''(x) &= \Big(\frac{d}{dx}\Big)\big[y''(x)\big] = \Big(e^{-t}\frac{d}{dt}\Big)\Big[e^{-2t}\frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt}-1\Big)y\Big]\\ &= e^{-t}\Big[-2e^{-2t}\frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt}-1\Big)y + e^{-2t}\frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{d}{dt}-1\Big)y\Big]\\ &= e^{-3t}\frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt}-1\Big)\Big(\frac{d}{dt}-2\Big)y \quad\Rightarrow\quad \boxed{x^3y''' = \frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt}-1\Big)\Big(\frac{d}{dt}-2\Big)y}\ .\end{aligned}$$

$$\vdots$$

A equação (8.8) então toma a forma

$$\alpha_0 y(t) + \alpha_1\frac{d}{dt}\,y + \alpha_2\frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt}-1\Big)y + \alpha_3\frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt}-1\Big)\Big(\frac{d}{dt}-1\Big)y + \cdots = 0\ , \tag{8.10}$$

uma EDO linear não homogênea de coeficientes constantes, que já sabemos resolver, cuja equação característica é

$$\boxed{\alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r(r-1) + \alpha_3 r(r-1)(r-2) + \cdots = 0}\ . \tag{8.11}$$

Em suma, para resolver a EDO de Euler-Cauchy, basta lembrar que, sob a mudança de variável $t = \ln x$, ela se transforma na EDO linear de coeficientes constantes na forma de (8.10). Quem memoriza esta equação também memoriza a equação característica (8.11), pois de uma delas obtém-se a outra permutando r e d/dt . Na verdade, se precisa de (8.10) apenas para resolver uma equação de Euler-Cauchy não homogênea por certos métodos; se for homogênea, basta escrever diretamente (8.11), calcular as raízes dessa equação e, destas, obter-se rapidamente a solução geral, como exemplificado abaixo.

Exemplo: $x^3y''' + 2x^2y'' - 8xy' + 12y(x) = 0 \quad (x > 0)$

$$r(r-1)(r-2) + 2r(r-1) - 8r + 12 \ = \ (r-2)^2(r+3) \ = \ 0 \quad\Rightarrow\quad r = 2;\, 2;\, -3\ .$$

Portanto, $y = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + c_3e^{-3t}$, que, com $t = \ln x$ (ou $x = e^t$), torna-se

$$y = c_1x^2 + c_2x^2\ln x + \frac{c_3}{x^3}\ \blacksquare$$

8.6 Solução Geral de uma EDO Linear não homogênea

Suponha que uma solução particular $y_P(x)$ de $\hat{L}y(x) = h(x) \neq 0$ possa ser obtida, por simples inspeção ou por qualquer outro modo (adiante estudaremos alguns métodos de cálculo de tal solução particular), e seja $Y(x)$ uma solução qualquer dessa EDO. Temos então que

$$\hat{L}(Y - y_P) \ = \ \hat{L}Y - \hat{L}y_P \ = \ h - h \ = \ 0\ ,$$

donde concluímos que $Y - y_P$ é uma solução y_{hom} da EDO homogênea associada: $Y(x) - y_P(x) = y_{hom}(x)$. Em outras palavras temos que certa solução $Y(x)$ da EDO é sempre a soma de alguma solução y_{hom} da EDO homogênea associada com a solução particular $y_P(x)$ considerada. Genericamente isso significa que a solução *geral* $Y(x)$ da EDO é a soma da solução *geral* $y_H(x)$ da EDO homogênea associada com a solução particular $y_P(x)$ considerada:

$$Y(x) = y_H(x) + y_P(x)\ :\quad \text{solução geral de}\ \ \hat{L}y(x) = h(x)\ .$$

Portanto, o processo de se calcular a solução geral $y(x)$ de uma EDO linear de ordem n não homogênea, $\hat{L}y(x) = h(x)$, pode ser convenientemente dividido em duas etapas. Na primeira, determina-se a solução geral $y_H(x)$ da EDO homogênea associada (que, conforme já vimos, é dada por $y_H(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + y_n(x)$, uma combinação linear de um conjunto fundamental $\{y_1(x), \cdots, y_n(x)\}$ de soluções de $\hat{L}y(x) = 0$), e, na segunda etapa, determina-se uma solução particular $y_P(x)$ da EDO não homogênea. Tem-se assim a solução geral $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ de $\hat{L}y(x) = h(x)$.

8.7 Solução Particular pelo Método dos Coeficientes a Determinar (ou Método das Famílias)

Esse método, também chamado de *método dos coeficientes a determinar*, serve para se obter uma solução particular de uma EDO linear não homogênea de coeficientes constantes quando o seu lado direito, o termo independente $h(x)$, for uma combinação linear das funções ditas *admissíveis*: polinômios, $\operatorname{sen} px$, $\cos qx$, e^{rx}, ou de produtos dessas funções. O método funciona com essas funções porque elas têm um número finito de derivadas l.i. (o que não ocorre, por exemplo, com $\ln x$, que tem uma infinidade de derivadas l.i.: $1/x$, $-1/x^2$, $2/x^3$, $\cdots$).

A função $h(x)$ e o maior número de derivadas h', h'', $\cdots$ que formam um conjunto l.i. é uma família de $h(x)$; essa família (que não é a única, como se depreende da definição a seguir) quase nunca é a mais apropriada. Por *família* de uma função $h(x)$ entende-se qualquer conjunto de funções l.i. (sendo conveniente, entretanto, escolher o mais simples deles) que tenha a propriedade de gerar, por meio de combinações lineares, a função $h(x)$ e as suas derivadas. Para cada função $h(x)$ exemplificada a seguir, observe que a família apresentada é a mais simples:

$$h(x) = 5x^2 - 4x + 3 \xrightarrow{\text{família}} \{x^2, x, 1\}$$
$$h(x) = -6\cos\pi x \text{ (ou } 5\operatorname{sen}\pi x) \xrightarrow{\text{família}} \{\cos\pi x,\ \operatorname{sen}\pi x\}$$
$$h(x) = 7e^{3x/2} \xrightarrow{\text{família}} \{e^{3x/2}\}$$

Observe, nesses exemplos, que cada $h(x)$ e suas derivadas são combinações lineares dos membros da família escolhida.

Se $h(x)$ consiste num único termo que é o produto de funções admissíveis, não é difícil concluir que convém tomar a família de $h(x)$ que é dada pelo produto cartesiano das famílias das funções admissíveis que formam o produto:

$$\begin{aligned} h(x) = (-3x^2+5)\operatorname{sen}8x \quad &\xrightarrow{\text{família}} \quad \{x^2, x, 1\} \times \{\cos 8x,\ \operatorname{sen}8x\} \\ &\qquad\quad = \{x^2\cos 8x, x^2\operatorname{sen}8x, x\cos 8x, x\operatorname{sen}8x, \cos 8x,\ \operatorname{sen}8x\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) = 9xe^{2x}\cos 3x \quad &\xrightarrow{\text{família}} \quad \{x, 1\} \times \{e^{2x}\} \times \{\cos 3x,\ \operatorname{sen}3x\} \\ &\qquad\quad = \{xe^{2x}\cos 3x, xe^{2x}\operatorname{sen}3x, e^{2x}\cos 3x, xe^{2x}\operatorname{sen}3x\} \end{aligned}$$

Agora, se $h(x)$ consiste em dois ou mais termos aditivos, convém escolher a família de $h(x)$ que é a união das famílias desses termos. Eis um exemplo com dois termos aditivos:

$$\begin{aligned} h(x) = -8x^2e^{-x} + 4\cos 3x \quad &\xrightarrow{\text{família}} \quad \{x^2, x, 1\} \times \{e^{-x}\} \cup \{\cos 3x,\ \operatorname{sen}3x\} \\ &= \underbrace{\{x^2e^{-x}, xe^{-x}, e^{-x}\}}_{\text{família de } -8x^2e^{-x}} \cup \underbrace{\{\cos 3x,\ \operatorname{sen}3x\}}_{\text{família de } 4\cos 3x} = \{x^2e^{-x}, xe^{-x}, e^{-x}, \cos 3x,\ \operatorname{sen}3x\} \end{aligned}$$

Mas há uma ressalva: a família *de um termo aditivo* de $h(x)$ que tenha algum membro que seja solução da EDO homogênea associada deve ser modificada, consistindo a modificação em multiplicar todos os membros da família desse termo pela menor potência x de modo que resulte numa nova família que não mais apresente entre seus membros alguma solução da EDO homogênea associada. Por "menor potência de x que implique..." entenda-se a potência x^k com o menor k natural que produza o resultado descrito.

Exemplo de modificação de família : Considere a seguinte EDO, cuja solução da EDO homogênea associada já foi calculada no exemplo único da seç. 8.4.4:

$$\begin{gathered} y^{(4)} + 2y'' + y(x) = \operatorname{sen}x + e^{-2x}\cos x\ , \\ \therefore\ y_H(x) = c_1\cos x + d_1\operatorname{sen}x + c_2 x\cos x + d_2 x\operatorname{sen}x\ . \end{gathered}$$

A família de $h(x) = \operatorname{sen}x + e^{-2x}\cos x$ é assim calculada:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}x + e^{-2x}\cos x \quad \xrightarrow{\text{família}} \quad & \cancel{\{\cos x,\ \operatorname{sen}x\}}^{\,\cdot x^2} \ \cup\ \{e^{-2x}\}\times\overbrace{\{\cos x,\ \operatorname{sen}x\}}^{*} \\ & = \{x^2\cos x,\ x^2\operatorname{sen}x\}\ \cup\ \{e^{-2x}\cos x,\ e^{-2x}\operatorname{sen}x\} \\ & = \{x^2\cos x,\ x^2\operatorname{sen}x,\ e^{-2x}\cos x,\ e^{-2x}\operatorname{sen}x\}\ . \end{aligned}$$

Note que a família do termo aditivo $\operatorname{sen}x$, que é $\{\cos x,\ \operatorname{sen}x\}$, foi multiplicada por x^2, resultando em $\{x^2\cos x, x^2\operatorname{sen}x\}$, que não tem como membro nenhuma das soluções da EDO homogênea associada, isto é, essa nova família não contém $\cos x$, $\operatorname{sen}x$, $x\cos x$ e $x\operatorname{sen}x$.

A família do 2º termo aditivo $e^{-2x}\cos x$, que é $\{e^{-2x}\cos x,\ e^{-2x}\operatorname{sen}x\}$ não teve de ser modificada, pois não apresenta nenhuma solução da EDO homogênea associada. Só se modifica família de termo *aditivo*! Por isso a família $\{\cos x,\ \operatorname{sen}x\}$ marcada com $*$ acima não foi modificada; ela é a família do termo multiplicativo $\cos x$ no 2º termo aditivo $e^{-2x}\cos x$.

Eis uma regra mnemônica: nunca se modifica uma família que faz parte de um produto cartesiano (tal qual aquela marcada com $*$). Só pode ser modificada uma família que é um dos conjuntos na operação de união dos conjuntos associados às famílias de termos aditivos.

Muito bem, então para que serve a família de $h(x)$? Resposta: para determinar uma solução particular da EDO na forma de uma combinação linear dos membros dela. Assim, por exemplo, no caso da EDO logo acima, formaríamos a solução particular $y_P(x) = Ax^2\cos x + Bx^2\operatorname{sen}x + Ce^{-2x}\cos x + De^{-2x}\operatorname{sen}x$ e determinaríamos os coeficientes A, B, C e D substituindo essa expressão de $y_P(x)$ na EDO (daí o nome desse método também ser *método dos coeficientes a determinar*). Eis um resumo do método:

O método consiste em tentar como solução particular de $\hat{L}y(x) = h(x)$ uma combinação linear dos membros da família de $h(x)$ e, então, determinar as constantes dessa combinação linear por substituição na EDO. Se acontecer que um dos membros da família de algum termo aditivo que compõe $h(x)$ seja solução da EDO homogênea associada, a família desse termo deve ser substituída por outra cujos membros são os da antiga família multiplicados por x^k, sendo k o menor natural que implique numa nova família que não tenha mais nenhum membro que seja solução da EDO homogênea associada.

Vejamos alguns exemplos:

1) $y'' - 5y' + 6y = 18x^2 - 1 \;\;\Rightarrow\;\; r^2 - 5r + 6 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; r = 2;\, 3 \;\;\Rightarrow\;\; y_H = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$.
$18x^2 - 1 \;\xrightarrow{\text{família}}\; \{x^2, x, 1\} \;\Rightarrow\; y_P = Ax^2 + Bx + C\,, \;\; y'_P = 2Ax + B\,, \;\; y''_P = 2A$.
$y''_P - 5y'_P + 6y_P = 18x^2 - 1 \;\;\Rightarrow\;\; 2A - 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) = 18x^2 - 1$

$$\underbrace{(6A)}_{18}\, x^2 + \underbrace{(-10A + 6B)}_{0}\, x + \underbrace{(2A - 5B + 6C)}_{-1} = 18x^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ 6B = 10A = 30 \Rightarrow B = 5 \\ 6C = -1 - 2A + 5B = 18 \Rightarrow C = 3 \end{cases}$$

$y = y_H(x) + y_P(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + 3x^2 + 5x + 3$ ■

2) $y'' - 7y' + 12y = 3e^{-x} \;\;\Rightarrow\;\; r^2 - 7r + 12 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; r = 3;\, 4 \;\;\Rightarrow\;\; y_H = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$.
$3e^{-x} \;\xrightarrow{\text{família}}\; \{e^{-x}\} \;\Rightarrow\; y_P = Ae^{-x}\,, \;\; y'_P = -Ae^{-x}\,, \;\; y''_P = Ae^{-x}$.
$y''_P - 7y'_P + 12y_P = Ae^{-x} - 7(-Ae^{-x}) + 12(Ae^{-x}) = 3e^{-x} \;\;\Rightarrow\;\; 20Ae^{-x} = 3e^{-x} \;\;\Rightarrow\;\; A = 3/20$.
$y = y_H(x) + y_P(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x} + (3/20)e^{-x}$ ■

3) $y'' - 4y' + 3y = 65 \operatorname{sen} 2x \;\;\Rightarrow\;\; r^2 - 4r + 3 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; r = 1;\, 3 \;\;\Rightarrow\;\; y_H = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}$.
$65 \operatorname{sen} 2x \;\xrightarrow{\text{família}}\; \{\cos 2x,\, \operatorname{sen} 2x\} \;\Rightarrow\; y_P = A\cos 2x + B \operatorname{sen} 2x\,,$
$y'_P = -2A \operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x\,, \;\; y''_P = -4A\cos 2x - 4B \operatorname{sen} 2x$.
$(-4A\cos 2x - 4B \operatorname{sen} 2x) - 4(-2A \operatorname{sen} 2x + 2B\cos 2x) + 3(A\cos 2x + B \operatorname{sen} 2x) = 3 \operatorname{sen} 2x$.

$$(-A - 8B)\cos 2x + (8A - B)\operatorname{sen} 2x = 65 \operatorname{sen} 2x \Rightarrow \begin{cases} -A - 8B = 0 \\ 8A - B = 65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 8 \\ B = -1 \end{cases}$$

$y = y_H(x) + y_P(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} + 8\cos 2x - \operatorname{sen} 2x$ ■

4) $y''' - y' = 1 - 4x \;\;\Rightarrow\;\; r^3 - r = r(r^2 - 1) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; r = 0;\, 1;\, -1 \;\;\Rightarrow\;\; y_H = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}$.
$1 - 4x \;\xrightarrow{\text{família}}\; \{x, 1\} \xrightarrow{\cdot x} \{x^2, x\} \;\;\Rightarrow\;\; y_P = Ax^2 + Bx\,,$
$y'_P = 2Ax + B\,, \;\; y''_P = 2A\,, \;\; y'''_P = 0$.
$y''_P - 5y'_P + 6y_P = 18x^2 - 1 \;\;\Rightarrow\;\; 2A - 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) = 18x^2 - 1$

$$y'''_P - 4y'_P = 1 - 4x \;\;\Rightarrow\;\; 0 - 4(2Ax + B) = 1 - 3x \;\;\Rightarrow\;\; \begin{cases} -B = 1 \Rightarrow B = -1 \\ -2A = -4 \Rightarrow A = 2 \end{cases}$$

$y = y_H(x) + y_P(x) = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + 2x^2 - x$ ■

5) $y''' - y'' = -12x^2 + 6x + 12 \;\;\Rightarrow\;\; r^3 - r^2 = r^2(r - 1) = 0$
$\Rightarrow\;\; r = 0;\, 0;\, 1 \;\;\Rightarrow\;\; y_H = c_1 + c_2 x + c_3 e^{x}$.
$-12x^2 + 6x + 1 \;\xrightarrow{\text{família}}\; \{x^2, x, 1\} \xrightarrow{\cdot x^2} \{x^4, x^3, x^2\} \;\;\Rightarrow\;\; y_P = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$,
$y''_P = 12Ax^2 + 6Bx + 2C\,, \;\; y'''_P = 24Ax + 6B$.
$y'''_P - y''_P = -12x^2 + 6x + 12 \;\;\Rightarrow\;\; 24Ax + 6B - (12Ax^2 + 6Bx + 2C) = -12x^2 + 6x + 12$.

$$-12Ax^2 + (24A - 6B)x + (6B - 2C) = -12x^2 + 6x + 12 \Rightarrow \begin{cases} -12A = -12 \\ 24A - 6B = 6 \\ 6B - 2C = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \\ C = 2 \end{cases}$$

$y = y_H(x) + y_P(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{x} + x^4 + 3x^3 + 2x^2$ ■

6) $y'' - 4y' + 3y = 8e^{x} + 6x + 4 \;\;\Rightarrow\;\; r^2 - 4r + 3 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; r = 1;\, 3 \;\;\Rightarrow\;\; y_H = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}$.
$8e^{x} + (6x + 4) \;\xrightarrow{\text{família}}\; \cancel{\{e^{x}\}}^{\,\cdot x} \cup \{x, 1\} \;=\; \{xe^{x}, x, 1\} \;\;\Rightarrow\;\; y_P = Axe^{x} + Bx + C$
$y'_P = Ae^{x} + Axe^{x} + B\,, \;\; y''_P = 2Ae^{x} + Axe^{x}$.
$y''_P - 4y'_P + 3y_P = 2Ae^{x} + Axe^{x} - 4(Ae^{x} + Axe^{x} + B) + 3(Axe^{x} + Bx + C) = (-2A)e^{x} + (3B)x + (-4B + 3C) = 8e^{x} + 6x + 4 \;\;\Rightarrow\;\; A = -4\,, \;\; B = 2 \;\; C = 4$.
$y = y_H(x) + y_P(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} - 4xe^{x} + 2x + 4$ ■

7) $y'' - y' = 2xe^x \;\;\Rightarrow\;\; r^2 - r = r(r-1) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; r = 0;\, 1 \;\;\Rightarrow\;\; y_H = c_1 + c_2 e^x\,.$
$2xe^x \;\xrightarrow{\text{família}}\; \{x, 1\} \times \{e^x\} = \{xe^x, e^x\} \xrightarrow{\cdot x} \{x^2e^x, xe^x\}\,.$
$\Rightarrow \quad y_P = Ax^2e^x + Bxe^x = \; e^x(Ax^2 + Bx)\,,$
$\qquad\quad y'_P = e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(2Ax + B) = Ax^2e^x + (2A + B)xe^x + Be^x\,,$
$\qquad\quad y''_P = e^x(Ax^2 + Bx) + e^x 2(2Ax + B) + e^x(2A) = Ax^2e^x + (B + 4A)xe^x + (2B + 2A)\,.$
$y''_P - y'_P = 2Axe^x + (B + 2A)e^x = 2xe^x \;\;\Rightarrow\;\; A = 1\,,\;\; B = -2\,.$
$y = y_H(x) + y_P(x) = c_1 + c_2e^x + e^x(x^2 - 2x)$ ■

8) $y'' + y = 4\,\mathrm{sen}\,x \;\;\Rightarrow\;\; r^2 + 1 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; r = \pm\mathrm{i} \;\;\Rightarrow\;\; y_H = c_1\cos x + c_2\,\mathrm{sen}\,x\,.$
$4\,\mathrm{sen}\,x \;\xrightarrow{\text{família}}\; \{\cos x,\, \mathrm{sen}\,x\} \xrightarrow{\cdot x} \{x\cos x, x\,\mathrm{sen}\,x\}\,.$
$\therefore\; y_P = x(A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x) \;\;\Rightarrow\;\; y''_P = 2(-A\,\mathrm{sen}\,x + B\cos x) + x(-A\cos x - B\,\mathrm{sen}\,x)\,.$
$\big[2(-A\,\mathrm{sen}\,x + B\cos x) + x(-A\cos x - B\,\mathrm{sen}\,x)\big] + \big[x(A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x)\big] = 4\,\mathrm{sen}\,x\,.$
$\underbrace{-2A}_{4}\,\mathrm{sen}\,x + \underbrace{2B}_{0}\cos x = 4\,\mathrm{sen}\,x \;\;\Rightarrow\;\; A = -2\,,\;\; B = 0\,.$
$y = y_H(x) + y_P(x) = c_1\cos x + c_2\,\mathrm{sen}\,x - 2x\cos x$ ■

> *Observação:* Segue um raciocínio que é válido sempre que, numa EDO $\hat{L}y(x) = h(x)$, $h(x)$ possuir paridade (isto é, ser par ou ímpar) e só houver derivadas de ordem par no lado esquerdo dela. Explicaremos isso usando o exemplo que acabamos de estudar.
>
> O lado esquerdo da EDO acima, $y'' + y$, deve ser ímpar, porque o lado direito é a função ímpar $4\,\mathrm{sen}\,x$. Mas y'' tem a mesma paridade de y, porque as derivadas $y^{(n)}$ com n par conservam a paridade de y. Logo, y não pode ser par, porque, se fosse, o lado esquerdo seria par, em vez de ímpar (tal qual o lado direito). Assim se prevendo que y_P deve ser ímpar, não havia a necessidade de, na expressão de y_P acima, ter posto o termo $Bx\,\mathrm{sen}\,x$, que é par; sem esse termo, muito menos cálculos seriam realizados.

No próximo exemplo empregamos o método das famílias para resolver uma equação de Euler-Cauchy não homogênea. Sendo essa uma EDO de coeficientes variáveis, talvez o aluno questione o uso desse método, cuja validade, como se afirmou, é restrita a EDOs lineares de coeficientes constantes. Além disso, nota-se $\ln x$ no lado direito da EDO, uma função que não é admitida no método. Realmente possuir coeficientes constantes e apenas as funções admissíveis no termo independente são restrições à aplicabilidade do método, mas há de se lembrar que a EDO de Euler-Cauchy em (8.8) se transforma na EDO de coeficientes constantes em (8.10) mediante a mudança de variável $t = \ln x$, a qual também pode transformar funções de x que não sejam admissíveis em funções de t que sejam. Vejamos.

9) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 + 1 + 6\ln x\;\;.$

$$t = \ln x\;(x = e^t) \quad\Rightarrow\quad \underbrace{\frac{d}{dt}\overbrace{\Big(\frac{d}{dt} - 1\Big)y}^{y'-y}}_{y''-y'} - 2\frac{d}{dt}\,y + 2y = \big(e^t\big)^2 + 1 + 6t\;\;.$$

$$y'' - y' - 2y' + 2y = e^{2t} + 2 + 6t \quad\Rightarrow\quad \boxed{y'' - 3y' + 2y = e^{2t} + 1 + 6t}\;\;,$$

que é uma EDO linear de coeficientes constantes não homogênea que pode ser resolvida como nos exemplos anteriores:

$r^2 - 3r + 2 = 0 \quad\Rightarrow\quad r = 1;\, 2 \quad\Rightarrow\quad y_H = c_1e^t + c_2e^{2t}\;\;.$

$e^{2t} + (1 + 6t) \;\;\xrightarrow{\text{família}}\;\; \cancel{\{e^{2t}\}}^{\,\cdot t} \cup \{t, 1\} \;=\; \{te^{2t}, t, 1\}\;\;.$

$\therefore\; y_P = Ate^{2t} + Bt + C \;\;\Rightarrow\;\; y'_P = Ae^{2t}(2t + 1) + B \;\;\Rightarrow\;\; y''_P = 4Ae^{2t}(t + 1)\;\;.$

$$\begin{aligned}\therefore\ y_P'' - 3y_P' + 2y_P &= 4Ae^{2t}(t+1) - 3\big[Ae^{2t}(2t+1) + B\big] + 2\big[Ate^{2t} + Bt + C\big]\\ &= te^{2t}(\underbrace{4A - 6A + 2A}_{0}) + e^{2t}(\underbrace{4A - 3A}_{A=1}) + \underbrace{2B}_{6}\,t + (\underbrace{-3B + 2C}_{1})\\ &= e^{2t} + 6t + 1 \quad\Rightarrow\quad A = 1\,,\quad B = 3\,,\quad C = 5\ .\end{aligned}$$

$\therefore\ y(t) = y_H(t) + y_P(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + te^{2t} + 3t + 5$

$\therefore\ y(x) = c_1x + c_2x^2 + (\ln x)(x^2) + 3\ln x + 5$ ■

10) Vamos exercitar a construção da solução particular $y_P(x)$ de uma EDO a partir da sua solução homogênea $y_H(x)$ e do seu termo independente $h(x)$. Abaixo, cada $y_H(x)$ e $h(x)$ fornecidos correspondem a uma EDO.

a) $y_H(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$ e $h(x) = x^2e^x + 2 - 3x$

família de $h(x)$: $\{x^2, x, 1\} \times \{e^x\} \cup \{x, 1\} = \{x^2e^x, xe^x, e^x\} \cup \{x, 1\} = \{x^2e^x, xe^x, e^x, x, 1\}$

$\therefore\ y_P(x) = Ax^2e^x + Bxe^x + Ce^x + Dx + E$ ■

b) $y_H(x) = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x}$ e $h(x) = 2x + 1 - 4\cos x + 2e^x$

família de $h(x)$: $\cancel{\{x, 1\}}^{\,\cdot x} \cup \{\cos x,\ \mathrm{sen}\,x\} \cup \cancel{\{e^x\}}^{\,\cdot x} = \{x^2, x, \cos x,\ \mathrm{sen}\,x, xe^x\}$

$\therefore\ y_P(x) = Ax^2 + Bx + C\cos x + D\,\mathrm{sen}\,x + Exe^x$ ■

c) $y_H(x) = c_1 + c_2\cos 2x + c_3\,\mathrm{sen}\,2x$ e $h(x) = 3e^{2x} - x - 2\,\mathrm{sen}\,2x$

família de $h(x)$: $\{e^{2x}\} \cup \cancel{\{x, 1\}}^{\,\cdot x} \cup \cancel{\{\cos 2x,\ \mathrm{sen}\,2x\}}^{\,\cdot x} = \{e^{2x}, x^2, x, x\cos 2x, x\,\mathrm{sen}\,2x\}$

$\therefore\ y_P(x) = Ae^{2x} + Bx^2 + Cx + Dx\cos 2x + Ex\,\mathrm{sen}\,2x$ ■

d) $y_H(x) = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$ e $h(x) = xe^{3x} + \mathrm{sen}\,x$

$$\begin{aligned}\text{família de } h(x):\quad \{x, 1\} \times \{e^{3x}\} \cup \{\cos x,\ \mathrm{sen}\,x\} &= \cancel{\{xe^{3x}, e^{3x}\}}^{\,\cdot x^2} \cup \{\cos x,\ \mathrm{sen}\,x\}\\ &= \{x^3e^{3x}, x^2e^{3x}, \cos x,\ \mathrm{sen}\,x\}\end{aligned}$$

$\therefore\ y_P(x) = Ax^3e^{3x} + Bx^2e^{3x} + C\cos x + D\,\mathrm{sen}\,x$ ■

8.8 Solução Particular pelo Método da Variação dos Parâmetros (ou das Constantes)

a) Considere uma EDO linear de 2ª ordem de coeficientes variáveis,

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y(x) = h(x)\ , \qquad \text{(I)}$$

para a qual se conhece a solução geral da equação homogênea associada:

$$y_H(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\ . \qquad \text{(II)}$$

Para determinar uma solução particular, tentamos a expressão

$$y_P(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x) \qquad \text{(III)}$$

obtida variando as constantes c_1 e c_2 em (II), isto é, tornando-as funções $A(x)$ e $B(x)$.

Derivando (III), obtemos

$$y'_P = \underbrace{A'y_1 + B'y_2}_{=0\text{ exigimos!}} + Ay'_1 + By'_2 \ , \qquad \text{(IV)}$$

onde, conforme indicado, exigimos que

$$A'y_1 + B'y_2 = 0 \ . \qquad \text{(V)}$$

Derivando (IV), tendo em conta (V), obtemos

$$y''_P = A'y'_1 + B'y'_2 + Ay''_1 + By''_2 \ . \qquad \text{(VI)}$$

Agora exigimos que $y_P(x)$ satisfaça (I), nesta equação substituindo (III), (IV) e (VI):

$$a(x)\big[A'y'_1 + B'y'_2 + Ay''_1 + By''_2\big] + b(x)\big[Ay'_1 + By'_2\big] + c(x)\big[Ay_1 + By_2\big] = h(x) \ ,$$

donde, rearranjando e tendo em conta que y_1 e y_2 são soluções da EDO homogênea associada a (I), obtemos

$$a(x)[A'y'_1 + B'y'_2] + A[\underbrace{ay''_1 + by'_1 + cy_1}_{0}] + B[\underbrace{ay''_2 + by'_2 + cy_2}_{0}] = h \ ,$$

ou

$$A'y'_1 + B'y'_2 = h/a \ . \qquad \text{(VII)}$$

Observe que (V) e (VII), isto é,

$$\boxed{\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) = 0 \\ A'(x)y'_1(x) + B'(x)y'_2(x) = h(x)/a(x) \ , \end{cases}} \qquad \text{(VIII)}$$

formam um sistema linear de duas equações que pode ser resolvido para se obterem $A'(x)$ e $B'(x)$. Note que esse sistema tem sempre solução, pois seu determinante principal é

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = W\big\{y_1(x), y_2(x)\big\} \neq 0 \quad [\text{por serem } y_1(x) \text{ e } y_2(x) \text{ l.i.}] \ .$$

b) No caso de uma EDO linear de 3ª ordem

$$a(x)y''' + b(x)y'' + c(x)y' + d(x)y(x) = h(x)$$

com a solução seral da EDO homogênea associada

$$y_H(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x)$$

conhecida, determinamos uma solução particular com a forma

$$y_H(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x) + C(x)y_3(x) \ ,$$

sendo as derivadas das funções $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ calculadas resolvendo-se o sistema linear

$$\boxed{\begin{cases} A'(x)y_1(x) + B'(x)y_2(x) + C'(x)y_3(x) = 0 \\ A'(x)y'_1(x) + B'(x)y'_2(x) + C'(x)y'_3(x) = 0 \\ A'(x)y''_1(x) + B'(x)y''_2(x) + C'(x)y''_3(x) = h(x)/a(x) \ . \end{cases}} \qquad \text{(IX)}$$

No caso de EDOs lineares de 4ª, 5ª, $\cdots$ ordens, o procedimento pode ser facilmente inferido por indução.

Ao resolvermos o sistema para as funções $A(x)$, etc., as constantes de integração que surgem podem ser igualadas a zero, pois desejamos apenas *uma* solução particular $y_P(x)$, sem qualquer constante arbitrária.

Exemplo 1 : $y'' + y(x) = \csc x\ , \quad x \in (0, \pi/2)$

$$r^2+1=0 \ \Rightarrow\ r = \pm\mathrm{i} \ \Rightarrow\ y_H(x) = c_1\cos x + c_2 \operatorname{sen} x \xrightarrow[\text{constantes}]{\text{variação das}} y_P(x) = A(x)\cos x + B(x)\operatorname{sen} x\ .$$

A partir deste ponto chega-se mais rapidamente à solução empregando diretamente o sistema de equações em (VIII), obtendo:

$$(\#)\left\{\begin{aligned} A'\cos x + B'\operatorname{sen} x &= 0 \xrightarrow{\times \operatorname{sen} x} \\ -A'\operatorname{sen} x + B'\cos x &= \csc x \xrightarrow{\times \cos x} \end{aligned}\right\rangle \overset{+}{\Rightarrow} (B')(\underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1}) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \ \Rightarrow\ B(x) = \ln\, \operatorname{sen} x\ .$$

$$A' = -B'\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -1 \ \Rightarrow\ A(x) = -x\ .$$

Logo, $y_P(x) = -x\cos x + (\ln\, \operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x$, e a solução geral é $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ ■

Caso não se deseje decorar (VIII), repete-se o procedimento que leva a esse sistema; observe:

$$y_P' = \underbrace{A'\cos x + B'\operatorname{sen} x}_{=\,0\ (*)} - A\operatorname{sen} x + B\cos x\ .$$

$$y_P'' = -A'\operatorname{sen} x + B'\cos x - A\cos X - B\operatorname{sen} x\ .$$

$$y_P'' + y_P = \csc x \ \Rightarrow\ -A'\operatorname{sen} x + B'\cos x - \cancel{A\cos x} - \cancel{B\operatorname{sen} x} + \cancel{A\cos x} + \cancel{B\operatorname{sen} x} = \csc x\ . \ (**)$$

As equações indicadas por $(*)$ e $(**)$ formam o mesmo sistema (#) acima, cuja solução leva, obviamente, à mesma expressão de y_P obtida.

Vamos comprovar que a expressão de y_P calculada de fato satisfaz a EDO:

$$y_P = -x\cos x + \ln(\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x\ .$$

$$y_P'' = 2\operatorname{sen} x + x\cos x - \csc^2 x \operatorname{sen} x + 2\cot x\cos x - \ln(\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x\ .$$

$$\begin{aligned} y_P'' + y_P &= 2\operatorname{sen} x + \cancel{x\cos x} - \overbrace{\csc^2 x\operatorname{sen} x}^{\csc x} + 2\overbrace{\cot x\cos x}^{\cos^2 x\cos x} - \cancel{\ln(\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x} \\ &\quad - \cancel{x\cos x} + \cancel{\ln(\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x} \\ &= 2\operatorname{sen} x - \csc x + 2(1 - \operatorname{sen}^2 x)\csc x \\ &= \cancel{2\operatorname{sen} x} - \csc x + 2\csc x - \cancel{2\underbrace{\operatorname{sen}^2 x\csc x}_{\operatorname{sen} x}} \quad = \quad \csc x \ ■ \end{aligned}$$

Exemplo 2 : $y'' - 2y' + 2y(x) = e^x\tan x\ , \quad x \in (0, \pi/2)$

$$r^2 - 2r + 2 = 0 \ \Rightarrow\ r = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2\mathrm{i}}{2} = 1 \pm \mathrm{i}\ .$$

$$y_H(x) = e^x(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) \xrightarrow[\text{constantes}]{\text{variação das}} y_P(x) = A(x)e^x \cos x + B(x)e^x \operatorname{sen} x \ .$$

Empregando diretamente o sistema de equações em (VIII), obtemos

$$(\#) \left\{ \begin{aligned} A'e^x \cos x + B'e^x \operatorname{sen} x = 0 \xrightarrow{\times(\operatorname{sen} x + \cos x)} \\ A'e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x + B'e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) = e^x \tan x \xrightarrow{\times(-\operatorname{sen} x)} \end{aligned} \right\rangle \overset{+}{\Longrightarrow}$$

$$A'e^x = -e^x \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad A' = \cos x - \sec x \quad \Rightarrow \quad A(x) = \operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \tan x) \ .$$

$$B' = -A' \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad B(x) = -\cos x \ .$$

$$\begin{aligned} \therefore \ \text{solução geral } y(x) &= y_H(x) + y_P(x) \\ &= e^x(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + [\operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \tan x)]e^x \cos x + [-\cos x]e^x \operatorname{sen} x \\ &= e^x[c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \cancel{\operatorname{sen} x \cos x} - \ln(\sec x + \tan x) - \cancel{\cos x \operatorname{sen} x}] \\ &= e^x[c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \tan x)] \ \blacksquare \end{aligned}$$

Sem usar a forma decorada do sistema em (VIII), este deve ser obtido como segue:

$$y'_P = \underbrace{A'e^x \cos x + B'e^x \operatorname{sen} x}_{=0\ (*)} + Ae^x(\cos x - \operatorname{sen} x) + Be^x(\operatorname{sen} x + \cos x) \ .$$

$$y''_P = A'e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) + B'e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + \cdots$$

$$y''_P - 2y'_P + 2y_P = e^x \tan x \ \Rightarrow \ A'e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) + B'e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) = e^x \tan x \ . \ (**)$$

As equações indicadas por $(*)$ e $(**)$ formam o mesmo sistema $(\#)$ acima.

Expliquemos as reticências na penúltima linha dos cálculos acima. Ganha-se tempo levando em conta que, no sistema (VIII), estão ausentes as funções $A(x)$ e $B(x)$ e, por isso, no cálculo da última equação desse sistema, não é necessário escrever qualquer termo envolvendo essas funções.

Exemplo 3 : $x^2y'' - 2xy' + 2y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ $(x > 0)$ $\Rightarrow$ solução geral $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$.

Vamos calcular a solução da EDO homogênea associada $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ (eq. de Euler-Cauchy):

$$r(r-1) - 2r + 2 = r^2 - 3r + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 1 \text{ ou } 2$$

$$\Rightarrow \quad y_H(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} \overset{t = \ln x}{\Rightarrow} y_H(x) = c_1x + c_2x^2 \ \blacksquare$$

Logo, a forma da solução particular é $y_P(x) = A(x)x + B(x)x^2$. Agora resolvemos o sistema de equações (VIII):

$$\therefore \left\{ \begin{aligned} A'x + B'x^2 = 0 \xrightarrow{\cdot(-1)} \\ A' + 2B'x = \frac{x^3/(x^2+1)}{x^2} = \frac{x}{x^2+1} \xrightarrow{\cdot x} \end{aligned} \right\rangle \overset{+}{\Rightarrow}$$

$$B'\cancel{x^2} = \frac{\cancel{x^2}}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad B' = \frac{1}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad A' = -xB' = -\frac{x}{x^2+1} \ .$$

Finalmente,

$$A(x) = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) \ , \quad B(x) = \arctan x \quad \Rightarrow \quad y_P(x) = -\frac{x}{2}\ln(x^2+1) + x^2 \arctan x \ \blacksquare$$

Exemplo 4 : $y'' + y = \cos^4 x \;\Rightarrow$ solução geral $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$.

$$r^2 + 1 \quad\Rightarrow\quad r = \pm\mathrm{i} \quad\Rightarrow\quad y_H = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x \quad\Rightarrow\quad y_P = A(x)\cos x + B(x)\operatorname{sen} x \ .$$

$$\begin{cases} A'\cos x + B'\operatorname{sen} x = 0 \\ -A'\operatorname{sen} x + B'\cos x = \cos^4 x \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A' = -\cos^4 x \operatorname{sen} x \quad\Rightarrow\quad A = (\cos^5 x)/5 \\ B' = \cos^5 x \quad\Rightarrow\quad B = \int \cos^5 x\, dx \end{cases}$$

$$B = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x\, dx \overset{u\,=\,\operatorname{sen} x}{=} \int \overbrace{(1-u^2)^2}^{1-2u^2+u^4} du = u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} = \operatorname{sen} x - \frac{2\operatorname{sen}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{sen}^5 x}{5} \ .$$

$$y_P(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x = \frac{\cos^6 x}{5} + \operatorname{sen}^2 x - \frac{2\operatorname{sen}^4 x}{3} + \frac{\operatorname{sen}^6 x}{5} \ \blacksquare$$

Exemplo 5 : $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = \dfrac{2x^4}{x^2+1} \quad (x > 0)$.

Solução geral $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$.

Trata-se de uma EDO de Euler-Cauchy. A solução da EDO homogênea associada e a forma da solução particular são

$$y_H(x) = c_1 x + c_x x^2 + c_3 x^3 \ \blacksquare \quad\Rightarrow\quad y_P(x) = A(x)x + B(x)x^2 + C(x)x^3 \ .$$

$$\begin{cases} A'x + B'x^2 + C'x^3 = 0 & \text{(I)} \\ A' + 2B'x + 3C'x^2 = 0 & \text{(II)} \\ 2B' + 6C' = \dfrac{2x}{x^2} + 1 & \text{(III)} \end{cases}$$

Eliminando A' de (I) e (II): $B' = -2xC'$. (IV)

Substituindo (IV) em (III): $C' = \dfrac{1}{x^2+1}$. (V)

Substituindo (V) em (IV): $B' = -\dfrac{2x}{x^2+1}$. (VI)

Substituindo (V) e (VI) em (I): $A' = -xB' - x^2 C' = \dfrac{2x^2}{x^2+1} - \dfrac{x^2}{x^2+1}$

$$= \frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1} \ . \qquad \text{(VII)}$$

As expressões em (V), (VI) e (VII) são simples de integrar para obter $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$; fazendo isso, temos finalmente que

$$y_H(x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 = x(x - \arctan x) + x^2 \ln(x^2+1) + x^3 \arctan x \ \blacksquare$$

8.9 Redução de Ordem

8.9.1 Considerações iniciais

Se uma EDO de ordem n não exibe a variável dependente y, mas apenas derivadas dela, então, com a definição $y^{(k)} = w$, onde $y^{(k)}$ é a derivada de menor ordem, obtém-se uma EDO de ordem $n-k$ para w. No caso das EDOs lineares homogêneas que já aprendemos a resolver, essa redução de ordem não traz vantagem apreciável, como mostram os exemplos que seguem:

Exemplo 1 : $y^{(5)} - 5y^{(4)} + y''' = 0$

Com $y''' = w$ (redução de ordem), temos que

$$w'' - 5w' + w(x) = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - 5r + 6 = 0 \;\Rightarrow\; r = 2 \text{ ou } 3 \;\Rightarrow\; w = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} = y'''$$

$$\Rightarrow\; y'' = (c_1/2)e^{2x} + (c_2/3)e^{3x} + c_3 \;\Rightarrow\; y' = (c_1/4)e^{2x} + (c_2/9)e^{3x} + c_3x + c_4$$

$$\Rightarrow\; y = \underbrace{(c_1/8)}_{k_4}e^{2x} + \underbrace{(c_2/27)}_{k_5}e^{3x} + \underbrace{(c_3/2)}_{k_3}x^2 + \underbrace{c_4}_{k_2}x + \underbrace{c_5}_{k_1} \;\blacksquare$$

Resolvendo normalmente:

$$r^5 - 5r^4 + 6r^3 = 0 \;\Rightarrow\; r = 0\,,;0\,;0\,,;2\,;3 \;\Rightarrow\; y = k_1 + k_2x + k_3x^2 + k_4e^{2x} + k_5e^{3x} \;\blacksquare$$

Exemplo 2 : $x^3y''' - 4x^2y'' + 6xy' = 0 \;\; (x > 0)$

Com $y' = w$ (redução de ordem) e dividindo a EDO por x, temos que

$$x^2w'' - 4xw' + 6w(x) = 0 \;\xrightarrow[x = e^t]{t = \ln x}\; r(r-1) - 4r + 6 = r^2 - 5r + 6 = 0 \;\Rightarrow\; r = 2 \text{ ou } 3$$

$$\Rightarrow\; w = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} = c_1x^2 + c_2x^3 = y'(x) \;\Rightarrow\; y = \underbrace{(c_1/3)}_{k_2}x^3 + \underbrace{(c_2/4)}_{k_3}x^4 + k_1 \;\blacksquare$$

Resolvendo normalmente:

$$r(r-1)(r-2) - 4r(r-1) + 6r = r[r^2 - 3r + 2 - 4r + 4 + 6] = r[r^2 - 7r + 12] = 0$$

$$\Rightarrow\; r = 0\,,;3\,,;4 \;\Rightarrow\; y = k_1 + k_2e^{3t} + k_3e^{4t} \;\xrightarrow[x = e^t]{t = \ln x}\; y = k_1 + k_2x^3 + k_3x^4 \;\blacksquare$$

Na verdade, a redução de ordem pode ser bem mais trabalhosa; observe:

Exemplo 3 : $y''' - 2y'' + 2y' = 0$

Com $y' = w$ (redução de ordem), temos que

$$w'' - 2w' + 2w(x) = 0 \;\Rightarrow r^2 - 2r + 2 = 0 \;\Rightarrow r = 1 \pm \mathrm{i} \;\Rightarrow\; w = e^x(c_1\cos x + c_2\,\mathrm{sen}x) = y'$$

$$\Rightarrow\; y = \int e^x(c_1\cos x + c_2\,\mathrm{sen}x)dx \;\overset{p.p}{=}\; e^x\Big\{\underbrace{[(c_1 + c_2)/2]}_{k_2}\cos x + \underbrace{[(c_1 - c_2)/2]}_{k_2}\,\mathrm{sen}x\Big\} + k_1 \;\blacksquare$$

Resolvendo normalmente:

$$r^3 - 2r^2 + 2r = 0 \;\Rightarrow\; r = 0\,;1 \pm \mathrm{i} \;\Rightarrow\; y = k_1 + e^x\{k_2\cos x + k_3\,\mathrm{sen}x\} \;\blacksquare$$

Exemplo 4 : $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' = 0 \;\; (x > 0)$

Com $y' = w$ (redução de ordem) e dividindo a EDO por x, temos que

$$x^2w'' - xw' + 2w(x) = 0 \;\xrightarrow[x = e^t]{t = \ln x}\; r(r-1) - r + 2 = r^2 - 2r + 2 = 0 \;\Rightarrow\; r = 1 \pm \mathrm{i}$$

$$w = e^t(c_1\cos t + c_2\,\mathrm{sen}t) = x(c_1\cos\ln x + c_2\,\mathrm{sen}\ln x) = y'(x) \;\Rightarrow$$

$$y = \int x(c_1\cos\ln x + c_2\,\mathrm{sen}\ln x)dx \;\overset{p.p}{=}\; x^2\Big\{\underbrace{\left[\frac{2c_1 - c_2}{5}\right]}_{k_2}\cos\ln x + \underbrace{\left[\frac{c_1 + 2c_2}{5}\right]}_{k_3}\,\mathrm{sen}\ln x\Big\} + k_1 \;\blacksquare$$

Resolvendo normalmente:

$$r(r-1)(r-2)-r(r-1)+2r=r[r^2-3r+2-r+1+2]=r[r^2-4r+5]=0 \quad\Rightarrow$$
$$r=0\,,\ 2\pm \mathrm{i} \quad\Rightarrow\quad y=k_1+e^{2t}\{k_2\cos t+c_3\,\mathrm{sen}\,t\} \overset{t=\ln x}{=} k_1+x^2\{k_2\cos\ln x+k_3\,\mathrm{sen}\ln x\}\ \blacksquare$$

Os exemplos acima não mostram muita vantagem em reduzir a ordem de uma EDO, mas o seguinte mostra que esse método pode ser importante:

Exemplo 5 : $y''-(2\tan x)\,y'=\sec x$

Com $y'=w$ (redução de ordem), obtemos a EDO linear de 1ª ordem $w'-\tan x\,w=\sec x$, resolvível pelo fator integrante $f \;=\; e^{-2\int \tan x\,dx}=e^{2\ln|\cos x|} \;=\; \cos^2 x$:

$$(w\cos^2 x)'=\cos x \quad\Rightarrow\quad w\cos^2 x=\ \mathrm{sen}\,x+c_1 \quad\Rightarrow\quad w=\frac{\overbrace{\mathrm{sen}\,x}^{\sec x\tan x}}{\cos^2 x}+c_1\sec^2 x=y'$$
$$\Rightarrow\quad y=\sec x+c_1\tan x+c_2\ \blacksquare$$

Com esses exemplos, adquire-se não só a noção do que é a redução de ordem, mas também a de que ela é possível quando na EDO linear não aparece a variável dependente, mas apenas derivadas dela; nessa forma, a EDO está pronta para ter sua ordem reduzida. Mas mesmo não estando a EDO nessa forma pronta para a redução de ordem, ela pode ser transformada noutra que tenha tal forma; a questão é saber quando isso é possível. A seguir tratamos disso.

8.9.2 O método da redução de ordem

Qualquer EDO linear de ordem n homogênea $\hat{L}y(x)=0$ pode ser transformada noutra de ordem menor sempre que for conhecida uma solução $y_1(x)$ dela. De fato, com a mudança da variável dependente mediante a substituição $y(x)=y_1(x)v(x)$, obtém-se uma EDO linear para $v(x)$, $\hat{K}v(x)=0$ (também de ordem n), que deve apresentar, entre suas soluções, a solução constante $v(x)=1$, correspondente à solução $y_1(x)$ da EDO original, o que se vê claramente com o seguinte esquema:

$$\underbrace{\overbrace{\hat{L}y(x)=0}^{\text{EDO para } y(x)}}_{\substack{\downarrow\\ y_1(x)\text{ é solução}}} \quad \xrightarrow{\text{subst. } y(x)=y_1(x)v(x)} \quad \hat{L}\big[y_1(x)v(x)\big]=\underbrace{\overbrace{\hat{K}v(x)=0}^{\text{EDO para } v(x)}}_{\substack{\downarrow\\ v(x)=1\text{ é solução}^{[*]}}}$$

[*] pois com $v(x)=1$ obtém-se $\hat{K}[1]=\hat{L}[y_1(x)]=0$

Mas se a equação

$$\hat{K}v(x)=b_n(x)v^{(n)}+\cdots+b_2(x)v''+b_1(x)v'+b_0(x)v(x)=0$$

é satisfeita por $v(x)=1$ (no intervalo considerado) então a substituição de $v=1$ nessa equação fornece $b_0(x)\cdot 1\equiv 0$, ou seja, a EDO acima não exibe $v(x)$, mas apenas derivadas de v, e, portanto, está pronta para sofrer redução de ordem, de uma unidade pelo menos, com a definição $v'=w$, assim se obtendo uma EDO para $w(x)$ de ordem $n-1$. Se, além de $b_0(x)$, também $b_1(x)$ se anulasse, então com $v''=w$ obteríamos uma EDO para $w(x)$ de ordem $n-2$.

Obviamente, também uma EDO linear não homogênea $\hat{L}y(x) = h(x)$ pode sofrer redução de ordem se for conhecida uma solução $y_1(x)$ *da EDO homogênea associada*, pois a substituição $y = y_1 v$ não afeta o lado direito, mas transforma o lado esquerdo de modo que a nova EDO $\hat{K}v = h$ esteja pronta para ter sua ordem reduzida.

Diga-se também que a redução de ordem não é um método de solução de EDOs lineares, apenas excepcionalmente, como, por exemplo, no caso de EDOs lineares de 2ª ordem, que, depois de reduzidas a EDOs lineares de 1ª ordem, estas, como vimos, sempre podem ser resolvidas. Mas nada garante que, ao se reduzir uma EDO de ordem 3 para uma de ordem 2, esta possa ser resolvida analiticamente.

Vejamos alguns exemplos de aplicação do método da redução de ordem.

<u>Exemplo 1</u> : $\hat{L}y(x) = xy'' - y' + (1-x)y = x^2 e^x \ , \ x > 0 \ .$

É fácil verificar que $y_1(x) = e^x$ é solução da EDO homogênea associada. Façamos então como explicado acima:

$$y = vy_1 = ve^x \quad \Rightarrow \quad y' = v'e^x + ve^x \quad \Rightarrow \quad y'' = v''e^x + 2v'e^x + ve^x \quad .$$

A substituição dessas expressões de y, y' e y'' na EDO fornece

$$\begin{aligned} \hat{K}v(x) &= x(v''e^x + 2v'e^x + ve^x) - (v'e^x + ve^x) + (1-x)ve^x \\ &= \big[xv'' + (2x-1)v' + (\overbrace{x - 1 + 1 - x}^{0})v\big]\cancel{e^x} \quad = \quad x^2\cancel{e^x} \quad , \end{aligned}$$

que, com $w = v'$, se transforma em

$$xw' + (2x-1)w = x^2 \quad \Rightarrow \quad w' + \Big(2 - \frac{1}{x}\Big)w = x \quad ,$$

uma EDO linear de 1ª ordem, cuja solução $w(x)$ pode ser calculada por meio do fator integrante

$$f = e^{\int (2-\frac{1}{x})dx} = e^{2x - \ln x} = \frac{e^{2x}}{x} \quad .$$

$$\therefore \ \Big(\frac{we^{2x}}{x}\Big)' = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{we^{2x}}{x} = e^{2x}/2 + c_1 \quad \Rightarrow \quad w = v' = \frac{x}{2} + c_1 x e^{-2x}$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{x^2}{4} + c_1 \int xe^{-2x}dx + c_2 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^2}{4} + c_1 \frac{-1}{4} e^{-2x}(2x+1) + c_2 \ .$$

$$\therefore \ y = ve^x = \frac{x^2 e^x}{4} + \underbrace{c_1 \frac{-1}{4}}_{k_1} e^{-x}(2x+1) + c_2 e^x \ , \quad \text{ou} \ \ y(x) = \underbrace{x^2 e^x/4}_{y_P} + k_1 \underbrace{e^{-x}(2x+1)}_{y_2} + c_2 \underbrace{e^x}_{y_1} \quad \blacksquare$$

que é a solução geral da EDO. Observe que nela aparecem a já conhecida solução $y_1 = e^x$ da EDO homogênea associada, a solução particular $y_P = x^2 e^x/4$ e outra solução da EDO homogênea associada, dada por $y_2 = e^{-x}(2x+1)$.

<u>Exemplo 2</u> : $\begin{cases} y'' \cos^2 x = 2y \\ y = \tan x \text{ é solução da EDO homog. assoc.} \end{cases}$

$$y = v \tan x \quad \Rightarrow \quad y' = v' \tan x + v \sec^2 x \quad \Rightarrow \quad y'' = v'' \tan x + 2v' \sec^2 x + 2v \sec^2 x \tan x \quad ,$$

expressões que, substituídas na EDO, fornecem

$$(v'' \tan x + 2v' \sec^2 x + 2v \sec^2 x \tan x) \cos^2 x = 2v \tan x \ .$$

$$v''(\underbrace{\tan x \cos^2 x}_{(1/2)\,\mathrm{sen}\,2x}) + v'(2) + v(\underbrace{2\tan x - 2\tan x}_{0}) = 0 \ \overset{w\,=\,v'}{\Rightarrow} \ w' + (4\csc 2x)w = 0 \ .$$

$$f = e^{\,4\int \csc 2x\, dx} = e^{-2\ln|\csc 2x + \cot 2x|} = (\csc 2x + \cot 2x)^{-2} \ .$$

$$v' = w = \frac{c_1}{f} = c_1(\csc 2x + \cot 2x)^2 = c_1(\csc^2 2x + 2\csc 2x \cot 2x + \underbrace{\cot^2 2x}_{\csc^2 x - 1}) \ .$$

$$v' = c_1(2\csc^2 2x + 2\csc 2x \cot 2x - 1) \ \Rightarrow \ v = \underbrace{(-c_1)}_{c_2}(\cot 2x + \csc 2x + x) + c_3 \ .$$

$$y = \big[c_2(\cot 2x + \csc 2x + x) + c_3\big] \tan x = c_3 \tan x + c_2\big[\underbrace{(\cot 2x + \csc 2x)\tan x}_{\gamma} + x\tan x\big] \ .$$

Mas $\gamma = (\cot 2x + \csc 2x)\tan x = \Big[\dfrac{(\cos 2x)}{\mathrm{sen} 2x} + \dfrac{1}{\mathrm{sen} 2x}\Big]\tan x = \dfrac{(2\cos^2 x - 1) + 1}{2\,\cancel{\mathrm{sen} x}}\ \dfrac{\cancel{\mathrm{sen} x}}{\cos x} = 1 \ .$

$$\therefore \ y = c_3 \tan x + c_2(1 + x\tan x) \ \blacksquare$$

Exemplo 3 : $y'' + y = \cos^4 x$

Essa EDO já foi resolvida por variação das constantes no Exemplo 4 da seç. 8.8, onde vimos que a solução da EDO homogênea associada é $y_H(x) = c_1 \cos x + c_2\,\mathrm{sen}\, x$. Para aplicar o método da redução de ordem, dentre as duas soluções $\cos x$ e $\mathrm{sen} x$ da EDO homogênea associada, escolhamos $\mathrm{sen} x$. Assim, substituindo $y = v\,\mathrm{sen} x$ na EDO, obtemos

$$(v''\,\mathrm{sen} x + 2v'\cos x - \cancel{v\,\mathrm{sen} x}) + (\cancel{v\,\mathrm{sen} x}) = \cos^4 x \ \overset{w\,=\,v'}{\Rightarrow} \ w' + \frac{2\cos x}{\mathrm{sen} x}\, w = \frac{\cos^4 x}{\mathrm{sen} x} \ .$$

$$f = e^{\,2\int \frac{2\cos x}{\mathrm{sen}\, x} dx} = e^{2\ln|\mathrm{sen}\, x|} = \mathrm{sen}^2 x \ \Rightarrow \ (w\,\mathrm{sen}^2 x)' = \cos^4 x\,\mathrm{sen} x \ \Rightarrow \ w\,\mathrm{sen}^2 x = -\frac{\cos^5 x}{5}$$

$$\Rightarrow \ w = v' = -\frac{\cos^5 x}{5\,\mathrm{sen}^2 x} \ \Rightarrow \ v = -\frac{1}{5}\int \frac{\cos^5 x}{5\,\mathrm{sen}^2 x}\, dx \ . \qquad (\#)$$

Note que ignoramos as duas constantes de integração, assim evitando cálculos desnecessários que nos levariam a novamente obter as duas soluções já conhecidas da EDO homogênea associada. Prosseguindo com o cálculo da integral em (#), já estudada na seç. 2.3.1.1, obtemos

$$v = -\frac{1}{5}\int \frac{\cos^5 x}{5\,\mathrm{sen}^2 x}\, dx = -\frac{1}{5}\int \frac{(\cos^2 x)^2}{5\,\mathrm{sen}^2 x}\cos x\, dx \overset{u\,=\,\mathrm{sen}\, x}{=} -\frac{1}{5}\int \frac{\overbrace{(1-u^2)^2}^{1-2u^2+u^4}}{u^2}\, du$$

$$= -\frac{1}{5}\int (u^{-2} - 2 + u^2)\, du = -\frac{1}{5}\Big(-u^{-1} - 2u + \frac{u^3}{3}\Big) = \frac{1}{5\,\mathrm{sen} x} + \frac{2\,\mathrm{sen} x}{5} - \frac{\mathrm{sen}^3 x}{15}$$

$$\Rightarrow \ y_P(x) = v\,\mathrm{sen} x = \frac{1}{5} + \frac{2\,\mathrm{sen}^2 x}{5} - \frac{\mathrm{sen}^4 x}{15} \ \blacksquare$$

sendo a solução geral dada por $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ ■

A solução particular $y_P(x)$ também pode ser obtida com a substituição, na EDO, de $y = v\cos x$ (em vez de $y = v\,\mathrm{sen} x$), mas com um pouco mais de trabalho (surgem mais integrais, todas do tipo estudado na seç. 2.3.1.1). Se a EDO fosse $y'' + y = \mathrm{sen}^4 x$, isso se inverte: a obtenção de y_P com a substituição de $y = v\cos x$ é menos trabalhosa. Ressalte-se, entretanto, que o método da variação das constantes é o menos trabalhoso para resolver essas EDOs (na seç. 9, de Exercícios, pede-se para resolvê-la por esse método).

Exemplo 4 : $\begin{cases} x^3y''' - (x^3+3x^2)y'' + (-2x^3+2x^2+6x)y' + (2x^2-2x-6)y = 0 \\ y = x \text{ é solução dessa EDO} \end{cases}$

$y = v(x)x$

$x^3(v'''x+3v'') - (x^3+3x^2)(v''x+2v') + (-2x^3+2x^2+6x)(v'x+v) + (2x^2-2x-6)vx = 0$

$$x^4v''' + (\cancel{3x^3} - x^4 - \cancel{3x^3})v'' + (-2x^4 + \cancel{2x^3} + \cancel{6x^2} - \cancel{2x^3} - \cancel{6x^2})v' + (\underbrace{-2x^3+2x^2+6x+2x^3-2x^2-6x}_{0})v = 0$$

$x^4v''' - x^4v'' - 2x^4v' = 0 \quad \Rightarrow \quad v''' - v'' - 2v'(x) = 0$,

que é uma EDO linear de coeficientes constantes de 3ª ordem (a qual, com $w = v'$, reduz-se à EDO de 2ª ordem $w'' - w' - 2w = 0$, mas isso não é necessário, por ser fácil de ser resolvida a EDO acima como se encontra). Da sua equação característica associada, obtemos sua solução imediatamente:

$$r(r^2-r-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0\,,\ -1 \text{ ou } 2 \quad \Rightarrow \quad v(x) = c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} \quad .$$

Portanto,

$$y = v(x)x = c_1x + c_2e^{-x}x + c_3e^{2x}x \ \blacksquare \ \text{[solução geral da EDO (homogênea) dada]}$$

Exemplo 5 : $\begin{cases} x^2y''' - 3x^2y'' + (3x^2-2)y' + (2-x^2)y = 0\,, \quad x > 0 \\ y = e^x \text{ é solução dessa EDO} \end{cases}$

$y = v(x)e^x$

$x^2(v'''+3v''+3v'+v)\cancel{e^x} - 3x^2(v''+2v'+v)\cancel{e^x} + (3x^2-2)(v'+v)\cancel{e^x} + (2-x^2)v\cancel{e^x} = 0$

$x^2v''' + (\underbrace{3x^2-3x^2}_{0})v'' + (\underbrace{3x^2-6x^2+3x^2}_{0}-2)v' + (\underbrace{x^2-3x^2+3x^2-2+2-x^2}_{0})v = 0$

$$x^2v''' - 2v' = 0 \xrightarrow{v' = w(x)} \underbrace{x^2w'' - 2w(x) = 0}_{\text{eq. de Euler-Cauchy}} \xrightarrow{\text{eq. caract.}} (r-1)r - 2 = r^2 - r - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = -1 \text{ ou } 2 \quad \Rightarrow \quad w(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} \quad \overset{t = \ln x}{\Rightarrow} \quad w(x) = v'(x) = c_1/x + c_2x^2$$

$$\Rightarrow \quad v(x) = c_1\ln x + (\underbrace{c_2/3}_{k_2})x^3 + k_3 \quad \Rightarrow \quad y(x) = v(x)e^x = c_1e^x\ln x + k_2e^xx^3 + k_3e^x \ \blacksquare$$

Capítulo 9

Exercícios

1] Resolva as seguinte EDOs de 1ª ordem (de um dos tipos estudados nas seções 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 e 7.7):

a) $2\sqrt{x}\, y' + y = 1$

b) $-x - y + (x - y)\, y' = 0$

c) $xy' = y\,(\ln y - \ln x) + y$

d) $3xy^2 dy = (4y^3 + x^3)\, dx$

e) $(\cos y)\, dx + (2x \operatorname{sen} y - y \cos y)\, dy\ , \quad 0 \leqslant y < \pi\,/\,2$

f) $2x + y^2 + 2xyy' = 0$

g) $2xy - 3x^2 + (x^2 - 2y)\, y' = 0$

h) $\operatorname{sen} xy + xy \cos xy + (x^2 \cos xy)\, y' = 0$

i) $x\, dx + (x^2 \cot y - \csc^2 y)\, dy = 0$

j) $(3xy^2 - 4y^2 + 2)\, dx + (2x^2 y - 4xy)\, dy = 0$

k) $(x^2 y - xy^2)\, dx + (x^3 - 2x^2 y)\, dy = 0$

l) Calcule $y(-1)$, sendo $y(x)$ a solução da EDO $g(x)y' + g'(x)y(x) = h(x)$ com $x \in I \subset \mathbb{R}$ e sob a condição $y(0) = 0$, sabendo que $g(x) > 0$ em I, $g(0) = 1$, $g(1) = 2$ e que $e^{x^2} \arccos x$ é uma primitiva de $h(x)$.

2] Resolva as seguintes EDOs de 1ª ordem (de um dos tipos estudados nas seções 7.8 e 7.9):

a) $\sqrt{y}\; y' + (1/x)\, \sqrt{y^3} = x\ , \quad x > 0$

b) $y' - xy^6 = y\ , \quad y(0) = 1\ ,$ explicitando $y(x)$

c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x + 2y^2}{2xy}\ , \quad y(1) = 1,\ \ x > 0\ ,$ explicitando $y(x)$

d) $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$

e) $y' = (-2\cos x)y^2 + (4\cos x + x^{-1})\, y - 2\cos x - x^{-1}\ , \quad 0 < x < \pi\,/\,2$

f) $x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$

g) $y = xy' + a\,\sqrt{1 + y'^2} \ \ (a > 0)$

3] Resolva as seguintes EDOs lineares homogêneas de coeficientes constantes:

a) $y' + 8y = 0$

b) $y'' - 5y' + 6y = 0$

c) $\hat{D}^2(\hat{D} - 2)y = 0$

d) $y^{(4)} - 9y''' + 30y'' - 44y' + 24y = 0$

e) $y'' - 4y' + 13y = 0$

f) $y^{(5)} - y^{(4)} - y'' + y' = 0$

g) $(\hat{D}^2 - 4\hat{D} + 13)^2(\hat{D} - 5)y = 0$

h) $\dfrac{d^7y}{dx^7} - 2\dfrac{d^6y}{dx^6} - 2\dfrac{d^5y}{dx^5} + 6\dfrac{d^4y}{dx^4} + 5\dfrac{d^3y}{dx^3} = 0$

4] Considere a EDO

$$y''' + (3 - 5p)\, y'' + (6p^2 - 7p + 2)\, y'(x) = 0 \ .$$

(a) Para que valores da constante p todas as soluções permanecem finitas quando $x \to \infty$.
(b) Idem, quando $x \to -\infty$.

5] Resolva as seguintes EDOs de Euler-Cauchy para $x > 0$:

a) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$

b) $4x^2y'' + 3xy' - 5y = 0$

c) $x^3y''' + 4x^2y'' + 5xy' - 5y = 0$

d) $4x^2y^{(4)} + 3xy''' - 5y'' = 0$

6] Resolva as seguinte EDOs não homogêneas obtendo a solução particular pelo método das famílias (ou dos coeficientes a determinar):

a) $y''' - 4y' = e^x + 3x\, e^x$

b) $y''' - y' = 12x\, e^x + 5$

c) $y''' - 3y' + 2y = 6x - 12\, e^x$

d) $2x^2y'' + 4xy' + 5y = \ 25 \ln^2 x + 18x + 17 \ , \quad x > 0$

e) $y'' + 2xy' - 6y = \ 8x^5 + 2\,/\,x \ , \quad x > 0$

f) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 1\,/\,x \ , \quad x > 0$

g) $y^{(4)} - 3y''' + 2y'' = -12x + 20$

7] Resolva as seguintes EDOs não homogêneas obtendo a solução particular por dois métodos: variação das constantes e redução de ordem:

a) $y'' + y = \sec^2 x \ , \quad x \in (0, \pi\,/\,2)$

b) $y'' - 2y' + y = e^x \ln x \ , \quad x > 0$

c) a EDO no Prob. 5(e) acima

d) a EDO no Prob. 5(f) acima

8] Usando agora o método da redução de ordem, resolva as EDOs nos Exemplos 1 a 3 da seç. 8.8 novamente e também as seguintes (notando que a EDO homogênea associada admite a solução $y_1(x) = e^x$ ou $y_1(x) = x$):

a) $x^3y''' - 3x^2y'' + (x^3 + 6x)\,y' - (x^2 + 6)\,y = 0$

b) $x^2y''' + (3x - 3x^2)\,y'' + (2 - 6x + 3x^2)y' + (-x^2 + 3x - 2)y = 0\,,\ x > 0$

c) $x\,y''' + (2 - 3x)\,y'' + (3x - 4)\,y' + (2 - x)\,y = 3x\,e^x\ ,\ \ x > 0$

d) $-(4x^3 + 3x^2)\,y'' + (12x^2 + 6x)\,y' - (12x + 6)\,y = 0\ ,$
sob as condições iniciais $y(1) = 0$ e $y'(1) = 14$

9] Resolva as seguintes EDOs de 2a ordem pelo método que desejar:

a) $y''' + y' = \tan x\ ,\ \ x \in (0, \pi/2)$

b) $(x - 1)y'' + (3 - 2x)y' + (x - 2)y = e^x\ ,\ \ x > 1$

c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = -2e^x/x^2\ ,\ \ x > 0$

d) $x^3y''' - 3x^2y'' + (6x - x^3)\,y' + (x^2 - 6)\,y = x^6\ ,\ \ [y = x$ é solução$]$

10] Resolva os seguintes PVIs:

a) $y' = e^x/y\ ,\quad y(0) = 1$

b) $(1 + y^2)\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0\ ,\quad y(1) = 1$

c) $dy/dx + y - y^2 = 0\ ,\quad y(0) = 2$

d) $dy/dx + y - y^2 = 0\ ,\quad y(0) = 0$

e) $y' = y^{-1}\arctan x\ ,\quad y(-1) = -\sqrt{\pi/2}$

f) $(1 - \cos y)\,dx + x\,\mathrm{sen}\,y\,dy = 0\ ,\quad y(1) = \pi$

g) $y''' - 12y'' + 36y' = 0\ ,\quad y(0) = 0\ ,\quad y'(0) = 3\ ,\quad y''(0) = 0$

h) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0\ ,\quad y(1) = 0\ ,\quad y'(1) = 3$

11] Encontre uma EDO:

a) com a solução geral $y = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{3x}$

b) com a solução geral $y = c_1 + c_2\,e^{3x} + c_2\,x\,e^{3x}$

c) com a solução geral $y = c_1 + c_2\,e^{-3x}\cos 2x + c_3\,e^{-3x}\,\mathrm{sen}\,2x$

d) com a solução geral $y = c_1 + c_2\cos bx + c_3\,\mathrm{sen}\,bx + c_4\,x\cos bx + c_5\,x\,\mathrm{sen}\,bx\ \ (b > 0)$

e) com a solução geral $y = c_1\,e^x + c_2\,x\,e^x + 2 + x\ln x$

f) com a solução geral $y = c_1 + c_2e^{-x}\cos 2x + c_3e^{-x}\,\mathrm{sen}\,2x + \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$

g) homogênea de 2ª ordem com as soluções $y_1 = e^x$ e $y_2 = x^2$

12] Uma colônia de bactérias aumenta sua população a uma taxa proporcional à quantidade de bactérias presentes em cada instante de tempo. Se em quatro horas a população triplica, em quanto tempo ela será 27 vezes a quantidade inicial?

13] Calcule uma família ortogonal à seguinte família de curvas com um parâmetro, em que

$k \in \mathbb{R}$:

a) $y = kx^2$

b) $xy = k$

c) $x^2 y = k$

d) $y^3 = kx$

e) $y = e^{kx}$

14] Determine a curva C que passa pelo ponto $(3,2)$ e que tem a seguinte propriedade:

a) uma reta normal a ela intercepta o eixo y na ordenada $y = 6$.

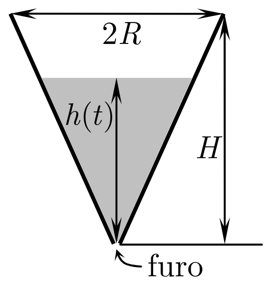
b) uma reta normal a ela intercepta os eixos x e y em pontos X e Y respectivos tais que $\overline{XY} = \overline{YP}$ (uma igualdade de distâncias), onde P é o ponto na interseção da curva com a reta normal.

c) uma reta tangente a ela tem o seu segmento que está no primeiro quadrante dividido ao meio no ponto de tangência.

15] Faça novamente o Exemplo 3 da seç. 7.11.3 considerando genericamente as seguintes grandezas (t é o tempo, em minutos, transcorrido desde o instante inicial $t = 0$):

V_0 [L] é o volume inicial de solução no tanque
C_0 [kg/L] é a concentração inicial da solução
$\dot{V}_E(t)$ [L/min] é a vazão de entrada de solução no tanque
$\dot{V}_S(t)$ [L/min] é a vazão de saída de solução do tanque
$C_E(t)$ [kg/L] é a concentração da solução que entra no tanque
$C_S(t)$ [kg/L] é a concentração da solução que sai do tanque

16] Considere o problema descrito no Exemplo 4 da seç. 7.11.3, mas admita que o reservatório d'água seja cônico, como ilustrado à direita. Calcule o nível d'água em função do tempo, $h(t)$, considerando o reservatório cheio no instante $t = 0$, bem como o tempo t_e para o reservatório cheio esvaziar-se. Trata-se de um exercício literal; ignore, portanto, os dados numéricos fornecidos naquele exemplo.



17] Resolva novamente a EDO $(y - x)y' = 1$ por um modo diferente daquele na seç. 7.4.

Respostas

1] a) $y = 1 + c\,e^{-\sqrt{x}}$ ...... separável e linear
b) $\arctan(y/x) - \ln\sqrt{x^2 + y^2} = c$ ...... homogênea
c) $y = xe^{cx}$ ...... homogênea
d) $y = x\sqrt[3]{cx - 1}$ ...... homogênea
e) $x(y) = y \operatorname{sen} y \cos y + (\cos^2 y) \ln \cos y + c \cos^2 y$ ...... linear para $x(y)$
f) $x^2 + xy^2 = c$ ...... exata
g) $x^2 y - x^3 - y^2 = c$ ...... exata
h) $x \operatorname{sen} xy = c$ ou $y = x^{-1} \operatorname{arcsen}(cx^{-1})$ ...... exata
i) $x^2 \operatorname{sen}^2 y - 2y = c$ ...... redutível à exata
j) $x^3 y^2 - 2x^2 y^2 + x^2 = c$ ...... redutível à exata
k) $2x^3 y^3 - 3x^2 y^4 = c$ ...... redutível à exata
l) $y(-1) = (e\pi - 1)/2$ ...... linear

2] a) $y=\left(3x^2/7+c_1x^{-3/2}\right)^{2/3}$ .... eq. de Bernoulli
b) $y=y(x)=(4e^{-5x}/5-x+1/5)^{-1/5}$ .... eq. de Bernoulli
c) $y=\sqrt{2x^{-2}-x}$ .... eq. de Bernoulli
d) $y=x+1/v$, com $v=c-x$, e a solução singular $y=x$ .... eq. de Riccati
e) $y=1+1/v$, com $v=2\operatorname{sen}x+(2\cos x+c)/x$ e a solução singular $y=1$ .... eq. de Riccati
f) $y=cx+1/c^2$ e a solução singular $4y^3=27x^2$, ou $y=3\sqrt[3]{x^2/4}$ .... eq. de Clairaut
g) $y=cx+a\sqrt{1+c^2}$ e a solução singular $x^2+y^2=a^2$ .... eq. de Clairaut

3] a) $r=-8 \quad\Rightarrow\quad y=c_1e^{-8x}$
b) $r=2;\ 3 \quad\Rightarrow\quad y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$
c) $r=0;0;\ 2 \quad\Rightarrow\quad y=c_1+c_2x+c_3e^{2x}$
d) $r=2;\ 2;\ 2;\ 3 \quad\Rightarrow\quad y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{2x}+c_4e^{3x}$
e) $r=2\pm 3\mathrm{i} \quad\Rightarrow\quad y=e^{2x}(c_1\cos 3x+c_2\operatorname{sen}3x)$
f) $r=0;\ 1;\ 1;\ -1/2\pm \mathrm{i}\sqrt{3}/2 \quad\Rightarrow\quad y=c_1+e^x(c_2+c_3x)+e^{-x/2}[c_4\cos(x\sqrt{3}/2)+c_5\operatorname{sen}(x\sqrt{3}/2)]$
g) $r=2\pm 3\mathrm{i};\ 2\pm 3\mathrm{i};\ 5 \quad\Rightarrow\quad y=e^{2x}(c_1\cos 3x+d_1\operatorname{sen}3x)+x\,e^{2x}(c_2\cos 3x+d_2\operatorname{sen}3x)+c_3e^{5x}$
h) $r=0;\ 0;\ 0;\ -1;\ -1;\ 2\pm \mathrm{i} \quad\Rightarrow\quad y=c_1+c_2x+c_3x^2+(c_4+c_5x)\,e^{-x}+(c_6\cos x+c_7\operatorname{sen}x)\,e^{2x}$

4] a) $p\leqslant 1/2$
b) $p\geqslant 2/3$

5] a) $y=(c_1+c_2\ln x)/x$
b) $y=c_1x^{5/4}+c_2/x$
c) $y=c_1x+\left[c_2\cos(2\ln x)+c_3\operatorname{sen}(2\ln x)\right]/x$
d) $y=c_1x^{13/4}+c_2x\ln x+c_3x+c_4$

6] a) $y=c_1+c_2e^{2x}+c_3e^{-2x}-xe^x$
b) $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}+3e^xx^2-9e^xx-5x$
c) $y=c_1e^x+c_2e^xx+c_3e^{-2x}-2x^2e^x+3x+9/2$
d) $y=(c_1\cos\frac{3\ln x}{2}+c_2\operatorname{sen}\frac{3\ln x}{2})/\sqrt{x}\ +5\ln^2 x-4\ln x+2x+1$
e) $y=c_1x^2+c_2x^{-3}+x^5/3-x^{-1}/3$
f) $y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3-(24x)^{-1}$
g) $y=c_1+c_2x+c_3e^x+c_4e^{2x}-x^3+(1/2)x^2$

7] a) $y=c_1\cos x+c_2\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}x\cdot\ln(\sec x+\tan x)-1$
b) $y=c_1e^x+c_2xe^x+x^2e^x(2\ln x-3)/4$
c) $y=c_1x^2+c_2x^{-3}+x^5/3-x^{-1}/3$
d) $y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3-(24x)^{-1}$

8] a) $y=c_1x\operatorname{sen}x+c_2x\cos x+c_3x$
b) $y=c_1e^x\operatorname{sen}\ln x+c_2e^x\cos\ln x+c_3e^x$
c) $y=c_1e^x\ln x+c_2e^xx+c_3e^x+(x^3/6)e^x$
d) $y=4x^3+6x^2-10x$

9] a) $y=c_1+c_2\cos x+c_3\operatorname{sen}x-\ln\cos x-\operatorname{sen}x\ln(\sec x+\tan x)$
b) $y=xe^x+c_1e^x\ln(x-1)+c_2e^x$
c) $y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x+2e^xx\ln x$
d) $y=c_1xe^x+c_2xe^{-x}+c_3x-2x^2-x^4/3$

10] a) $y=\sqrt{2e^x-1}$
b) $y=1/x$
c) $y=1/(1-e^x/2)$
d) $y=0\ \forall x\in\mathbb{R}$
e) $y=-\sqrt{2x\arctan x-\ln(1+x^2)+\ln 2}$
f) $y=\arccos[1-(2/x)]$
g) $(1-3x)e^{6x}-1$
h) $y=-3x^2+3x^3$

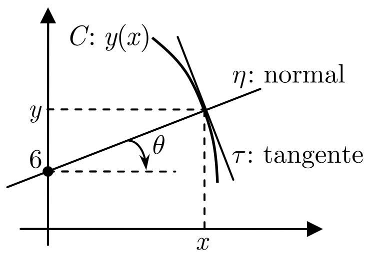
11] a) $y''-5y'+6y=0$
b) $y'''-6y''+9y(x)=0$
c) $y'''+6y''+13y(x)=0$
d) $y^{(4)}+2b^2y''+b^4y(x)=0$
e) $y''-2y'+y=x^{-1}-2\ln x+x\ln x$

f) $y''' + 2y'' + 5y' = e^{x^2}(4x^2 + 4x + 7)$
g) $(x^2 - 2x)y'' + (2 - x^2)y' + (2x - 2)y = 0$

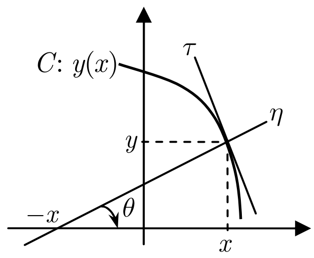
12] 12 horas

13] a) $\left(\dfrac{x}{c\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{c}\right)^2 = 1$ $(c > 0)$ [elipses: v. Nota 1]
b) $x^2 - y^2 = c$ [retas se $c = 0$ e hipérboles se $c \neq 0$: v. Nota 2]
c) $x^2 - y^2/2 = c$ [retas se $c = 0$ e hipérboles se $c \neq 0$: v. Nota 2]
d) $\left(\dfrac{x}{c/\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{c}\right)^2 = 1$ $(c > 0)$ [elipses: v. Nota 1]
e) $2x^2 - y^2 + 2y^2 \ln y = c$
Nota 1: a família ortogonal não contém uma curva pela origem.
Nota 2: a ortogonalidade falha na origem do plano xy

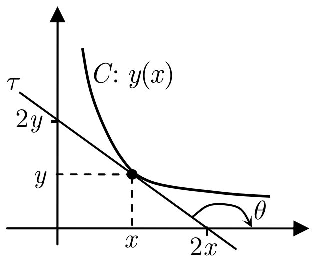
14]



a) $\tan\theta = (y-6)/x$
$y' = -x/(y-6)$
$C:\ x^2 + (y-6)^2 = 25$



b) $\tan\theta = y/(2x)$
$y' = -2x/y$
$C:\ x^2/11 + y^2/22 = 1$



c) $\tan\theta = y' = -2y/(2x)$
$C:\ y = 6/x$

15] $$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} - \dfrac{\dot V_S(t)}{V(t)} q(t) = \dot V_E(t) C_E(t)\ , \quad \text{onde}\ \ V(t) = V_0 + \displaystyle\int_0^t (\dot V_E - \dot V_S)dt \\ q(0) = C_0 V_0 \end{cases}$$

16] $h(t) = \sqrt[5]{(H^{5/2} - \gamma t)^2}$ e $t_e = H^{5/2}/\gamma$, onde $\gamma \equiv 5aH^2\sqrt{2g}/(2\pi R^2)$

Capítulo 10

Apêndice

10.1 Fórmula de Leibniz para as Derivadas de um Produto

É fácil constatar que, para duas funções $u(x)$ e $v(x)$, a fórmula de $\dfrac{d^n}{dx^n}\big[u(x)v(x)\big] = (uv)^{(n)}$ para $n = 1, 2, 3, 4, \cdots$ é

$$\begin{aligned}
(uv)' &= u'v + uv' \\
(uv)'' &= u''v + 2u'v' + uv'' \\
(uv)''' &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' \\
(uv)^{(4)} &= u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)} \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Ou seja, a fórmula de $(uv)^{(n)}$ é como a de $(u+v)^n$ com cada termo $u^k v^l$ trocado por $u^{(k)}v^{(l)}$.

10.2 Prova do Teorema 8.3

A hipótese do teorema é a independência linear no intervalo I das n soluções $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ da EDO

$$\hat{L}y(x) = 0 \quad (x \in I) \ . \qquad \text{(I)}$$

Vamos mostrar que, ao se admitir a existência de pelo menos um ponto x_0 de I onde $W\{y_1(x_0), \cdots, y_n(x_0)\} = 0$, obtém-se uma contradição, assim provando o teorema. De fato, existindo tal x_0, o sistema linear de n equações algébricas e n incógnitas $c_1, \cdots, c_n$,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1) \ , \qquad \text{(II)}$$

cujo determinante principal é aquele wronskiano nulo, tem uma infinidade de soluções não nulas, formadas por constantes $c_1, \cdots, c_n$ que não são todas nulas. Se $(c_1, \cdots, c_n) = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$ é uma dessas soluções não nulas desse sistema, podemos formar uma função $Y(x)$ como sendo a combinação linear não trivial de $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ dada por

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i y_i^{(k)}(x) = 0 \ , \qquad \text{(III)}$$

e, uma vez que $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i y_i^{(k)}(x_0)=0$ (que é o sistema (II) com $c_i=\gamma_i$), escrever

$$Y^{(k)}(x_0)=0 \quad (k=0,1,\cdots,n-1)\ . \qquad\qquad \text{(IV)}$$

Assim, (III) e (IV) mostram que $Y(x)$ [uma combinação linear de soluções da EDO (I) e, consoante o princípio da superposição, também uma solução dessa EDO] satisfaz o PVI formado pela EDO (I) e pelas condições iniciais em (IV). Mas a função identicamente nula em I também satisfaz esse PVI. Portanto, pelo Teorema 8.1, sendo única a solução desse PVI, concluímos que $Y(x)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i y_i^{(k)}(x)\equiv 0$ em I com algum $\gamma_i\neq 0$, isto é, que a funções $y_1(x),\cdots,y_n(x)$ são l.d. em I, contrariando a hipótese. CQD.

10.3 Prova do Teorema 8.4

Seja x_0 um ponto qualquer do intervalo aberto I, e considere o PVI formado pela EDO $\hat{L}y(x)=0$ em I e pelas condições iniciais $y^{(k)}(x_0)=Y^{(k)}(x_0)$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$. Esse PVI é obviamente satisfeito pela função $Y(x)$.

Considere, por outro lado, a função $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i y_i(x)$, onde $c_1,\cdots,c_n$ são constantes tais que as condições iniciais do PVI sejam satisfeitas por essa função, isto é,

$$\varphi^{(k)}(x_0)=\sum_{i=1}^{n}c_i y_i(x_0)=Y^{(k)}(x_0) \quad (k=0,1,\cdots,n-1)\ . \qquad\qquad \text{(I)}$$

Note que, acima, temos um sistema linear de n equações algébricas que sempre pode ser resolvido para se obterem valores únicos de $c_1,\cdots,c_n$, pois o determinante principal desse sistema é o wronskiano $W\{y_1(x),\cdots,y_n(x)\}$ em x_0, que é diferente de zero (como consequência da independência linear de $y_1(x),\cdots,y_n(x)$ e do Teorema 8.3).

Pois bem, (I) e o fato de $\varphi(x)$ também satisfazer a EDO do PVI considerado (por essa função ser uma combinação linear das soluções $y_1(x),\cdots,y_n(x)$ dessa EDO) implicam que, tal qual $Y(x)$, também $\varphi(x)$ é solução do PVI. Como, de acordo com o Teorema 8.1, a solução do PVI é única, obtermos o que se deseja provar: $Y(x)=\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i y_i(x)$. CQD.

10.4 Prova do Teorema 8.5

Para certo x_0 em I (aberto), sempre podemos formar n PVIs distintos, todos com a exigência de que a EDO $\hat{L}y(x)=0$ seja satisfeita em I, mas diferindo nas condições iniciais, as quais, para o i-ésimo PVI (numerados com $i=0,1,\cdots,n-1$), seriam formadas pelas n seguintes equações: $y^{(i)}(x_0)=1$ e $y^{(k)}(x_0)=0$ se $k\neq i$, onde $k=0,1,\cdots,n-1$. De acordo com o Teorema 8.1, o i-ésimo PVI admite uma única solução $y_i(x)$, que satisfaz a EDO e as condições iniciais

$$y_i^{(k)}(x_0)\Big|_{k\,=\,0,1,\cdots,n-1}=\begin{cases}0 \text{ se } i\neq k\\ 1 \text{ se } i=k\end{cases}\ .$$

Só resta mostrar que essas n soluções desses n PVIs (e também soluções da EDO, portanto) são l.i., o que de fato acontece. Para $k=0,1,\cdots,n-1$, usando a equação acima, obtemos

$$\text{Se } \sum_{i=0}^{n}c_i y_i(x)=0 \quad \xrightarrow[\text{no ponto } x_0]{\text{derivando } k \text{ vezes}} \quad \sum_{i=0}^{n}c_i\,\underbrace{y_i^{(k)}(x_0)}_{\begin{cases}0 \text{ se } i\neq k\\ 1 \text{ se } i=k\end{cases}}=0 \quad\Rightarrow\quad c_k=0\ \text{. CQD.}$$

10.5 Prova da Equação (8.3)

Estabeleçamos antes o seguinte lema:

> Se x_0 é um zero de multiplicidade m de um polinômio $P(x)$, isto é,
>
> $$P(x) = (x - x_0)^m Q(x)\ , \quad \text{com } \ Q(x_0) \neq 0\ \ ,$$
>
> então
>
> $$P(x_0) = P'(x_0) = \cdots = P^{(m-1)}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad P^{(m)}(x_0) \neq 0\ \ ,$$
>
> isto é, não só $P(x)$ se anula em x_0, mas também as suas derivadas de ordem até $m - 1$.

Vamos verificar isso para $m = 1, 2, 3$:

• se $m = 1$ então $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ com $Q(x_0) \neq 0$, donde
$P(x_0) = 0$, e $P'(x_0) = \big[Q(x) + (x - x_0)Q'(x)\big]_{x=x_0} = Q(x_0) \neq 0$.

• se $m = 2$ então $P(x) = (x - x_0)^2 Q(x)$ com $Q(x_0) \neq 0$, donde
$P(x_0) = 0$, $P'(x_0) = \big[2(x - x_0)Q(x) + (x - x_0)^2 Q'(x)\big]_{x=x_0} = 0$, e
$P''(x_0) = \big[2Q(x) + 2(x - x_0)Q'(x) + (x - x_0)^2 Q''(x)\big]_{x=x_0} = 2Q(x_0) \neq 0$.

• se $m = 3$ então $P(x) = (x - x_0)^3 Q(x)$ com $Q(x_0) \neq 0$, donde
$P(x_0) = 0$, $P'(x_0) = \big[3(x - x_0)^2 Q(x) + (x - x_0)^3 Q'(x)\big]_{x=x_0} = 0$,
$P''(x_0) = \big[6(x - x_0)Q(x) + 6(x - x_0)^2 Q'(x) + (x - x_0)^3 Q''(x)\big]_{x=x_0} = 0$, e
$P'''(x_0) = \big[6Q(x) + 18(x - x_0)Q'(x) + 9(x - x_0)^2 Q''(x) + (x - x_0)^3 Q'''(x)\big]_{x=x_0} = 6Q(x_0) \neq 0$.

Pois bem, agora tomemos a equação (8.1) e calculemos sequencialmente as suas derivadas superiores em relação a r, notando, nesses cálculos, que

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\hat{L}\, e^{rx}\right] = \hat{L}\left[\frac{\partial\, e^{rx}}{\partial r}\right] = L\left[x\, e^{rx}\right] \quad ,$$

isto é, que podemos comutar os operadores $\hat{L}$ (contendo derivadas em relação a x) e $\partial/\partial r$:

$$\left.\begin{array}{lcl} \hat{L}[e^{rx}] & = & P(r)\, e^{rx} \\ \hat{L}[x\, e^{rx}] & = & [P'(r) + xP(r)]\, e^{rx} \\ \hat{L}[x^2 e^{rx}] & = & [P''(r) + 2xP'(r) + x^2 P(r)]\, e^{rx} \\ \hat{L}[x^3 e^{rx}] & = & [P'''(r) + 3xP''(r) + 3x^2 P'(r) + x^3 P(r)]\, e^{rx} \\ & \vdots & \end{array}\right\} \quad (\#)$$

Logo, tendo em conta o lema escrito acima, temos o seguinte:

Se r for um zero simples de $P(r)$, então $P(r) = 0$ e $P'(r) \neq 0$, ou seja, apenas na primeira equação em (#) o membro direito se anula identicamente (para todo x), mostrando que, associada a essa raiz r da equação característica, há a solução $y = e^{rx}$ da EDO $\hat{L}y(x) = 0$.

Se r for um zero duplo, então $P(r) = P'(r) = 0$ e $P''(r) \neq 0$, ou seja, apenas nas duas primeiras equações em (#) o membro direito se anula identicamente, mostrando que, associada a essa raiz r, há as soluções e^{rx} e $x\, e^{rx}$.

Se r for um zero triplo, então $P(r) = P'(r) = P''(r) = 0$ e $P'''(r) \neq 0$, ou seja, apenas nas três primeiras equações em (#) o membro direito se anula identicamente, mostrando que, associada a essa raiz r, há as soluções e^{rx}, $x\, e^{rx}$ e $x^2 e^{rx}$.

E assim por diante. CQD.

10.6 Equação (8.4) – complementando a prova

Vamos mostrar que as constantes c_1 e c_2 na equação (8.4) podem sempre ser consideradas constantes reais e arbitrárias. Explicitando as partes reais e imaginárias de κ_1 e κ_2,

$$\kappa_1 \equiv a_1 + b_1\mathrm{i} \quad \text{e} \quad \kappa_2 \equiv a_2 + b_2\mathrm{i} \ ,$$

vemos que as constantes c_1 e c_2, dadas por

$$c_1 = \kappa_1 + \kappa_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathrm{i} \quad \text{e} \quad d_1 = \mathrm{i}(\kappa_1 - \kappa_2) = \mathrm{i}[(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\,\mathrm{i}] \ ,$$

podem ser escolhidas como sendo reais e ainda arbitrárias. Por exemplo, basta tomar κ_1 e κ_2 tais que $b_2 = -b_1$ e $a_2 = a_1$; nesse caso,

$$c_1 = 2a_1 \quad \text{e} \quad c_2 = -2b_1 \ ,$$

que são constantes arbitrárias (reais), pois não há restrições sobre a_1 e b_1. Note que $\kappa_2 = a_1 - b_1\mathrm{i}$ é o complexo conjugado a κ_1 (ou seja, na equação (I) acima, uma condição para que as constantes c_1 e c_2 sejam reais e arbitrárias é a de a constante complexa κ_1 permanecer arbitrária e tomar κ_2 como sendo o complexo conjugado a κ_1).