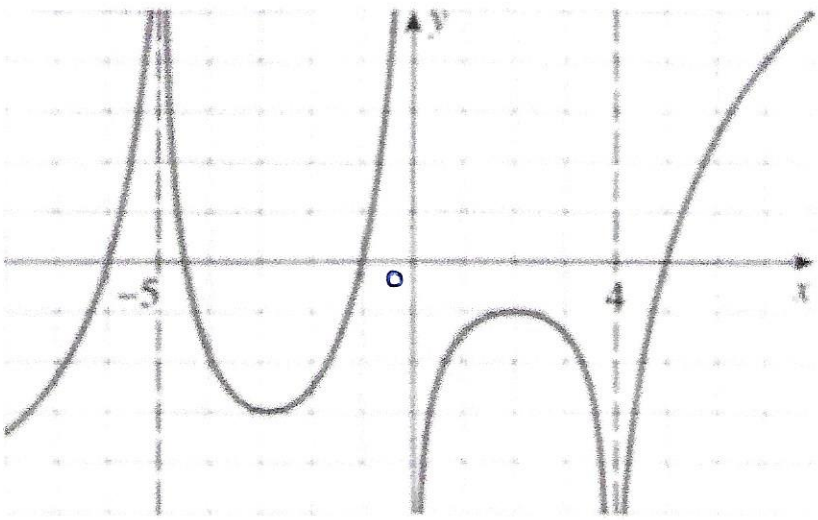
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Cálculo I – P1 (2015/2)
04/02/2016
Prof. Yoisell Rodríguez Núñez

Nome: Yoisell Rodríguez Núñez

Nº. Matrícula: – **Curso:** –

1. [2,5 *pontos*] O gráfico a seguir representa uma função real de variável real $y = f(x)$,



Classifique em Verdadeiro (V) ou Falso (F) cada uma das seguintes afirmações:

0,25 i. F A função $f(x)$ é decrescente no intervalo $(-\infty, -5)$.

0,25 ii. F Dom $f(x) = \mathbb{R}$.

0,25 iii. V A função $f(x) < 0$ $\forall x \epsilon (0,4)$.

0,25 iv. F $f(1) = 1$.

0,25 v. F A função $f(x)$ é contínua em $x = 4$.

0,25 vi. F A função $f(x)$ é derivável em $x = -5$.

0,25 vii. F $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

0,25 viii. F $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.

0,25 ix. V A reta $x = 4$ representa uma assíntota vertical para $f(x)$.

0,25 x. F A função $f(x)$ é constante no intervalo $(4, +\infty)$.

Justifique sua resposta para todas as afirmações acima.

2. [2,5 *pontos*] Determine (se possível) condições para as constantes α, β e γ, de forma que a função $y = g(x)$ a seguir seja contínua em $\mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan(\alpha x)}{x}, & \text{se } x < 0 \\ \alpha + \dfrac{\gamma}{2}, & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{\beta x}{sen(x)} + \dfrac{\gamma(e^x - 1)}{2x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

3. [2,5 *pontos*] Julgue as afirmações abaixo e marque com um X a alternativa correta:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[e^{2007} \cdot \left(1 + \frac{9}{x}\right)^x\right] = e^{2016}$

ii. $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\tan(\pi x)}{\tan(x)} = \pi$

iii. $\lim\limits_{x\to4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-4x} = 16$

a) ___ i, ii e iii são falsas.

b) ___ Apenas as afirmações i e ii são falsas.

c) ___ i, ii e iii são verdadeiras.

d) _X_ Apenas a afirmação iii é falsa.

e) ___ Apenas a afirmação ii é verdadeira.

f) ___ Apenas a afirmação i é falsa.

g) ___ Apenas as afirmações i e iii são verdadeiras.

h) ___ nenhuma das alternativas anteriores.

4. [2,5 *pontos*] Uma empresária estima que quando x quilos (Kg) de certo produto são vendidos, a receita bruta associada ao produto (em R$) é modelada pela função:

$$c(x) = \begin{cases} \ln(x) \cdot \cos(\pi(x+1)), & \text{se } 0 < x \le 1 \\ \frac{\tan(2x-4)+sen(\pi(x-2))}{5x-10}, & \text{se } 1 < x < 2 \\ \frac{x^2-7x+10}{x-2}, & \text{se } x > 2 \end{cases},$$

0,5 i. Qual a taxa de variação da receita quando 1 Kg for vendido?

0,5 ii. $\lim\limits_{x\to2^-} \frac{\tan(2x-4)+sen(\pi(x-2))}{5x-10}$?

0,5 iii. $\lim\limits_{x\to2^+} \frac{x^2-7x+10}{x-2}$?

0,5 iv. Qual a taxa de variação da receita quando, pelo menos, 3 (três) Kg forem vendidos?

0,5 v. O que você pode concluir em relação à continuidade da função $c(x)$ em $x = 2$? Derivabilidade? **Justifique sua resposta**.

Não coloque limites em seus sonhos, coloque fé! **BOA PROVA!!!**

CÁLCULO - I (P1)

(2015/2)

1) i) Afirmação FALSA (F), pois $y=f(x)$ é crescente (estritamente) no intervalo $(-\infty,-5)$ já que: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in (-\infty,-5)$

ii) Observe no gráfico que a função $f(x)$ não está definida em $x=-5$, $x=0$ e $x=4$. Logo $\text{Dom} f(x) = \mathbb{R} \setminus \{-5,0,4\}$

Logo, a afirmação é FALSA (F).

iii) Afirmação VERDADEIRA (V), pois a função toma apenas valores negativos nesse intervalo (isto é, o gráfico da função no intervalo $(0,4)$ está abaixo do eixo dos x), ou seja:

$$f(x) < 0, \quad \forall x \in (0,4).$$

iv) Do gráfico, podemos observar facilmente que: $f(1) < 0$.

Logo, $f(1) \neq 1$ e podemos concluir que a afirmação é FALSA (F).

→ Observação: Note que $1 \in (0,4)$, intervalo no qual a função toma (apenas) valores negativos

v) $y=f(x)$ não pode ser contínua em $x=4$, já que mesmo que

$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$, a função não é definida nesse ponto. Logo, a afirmação é FALSA (F).

vi) $f(x)$ não é derivável em $x=5$ pelo fato dela não ser contínua nesse ponto. (Observe que $y=f(x)$ não está definida em $x=5$). Portanto, a afirmação é FALSA (F).

vii) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \Longrightarrow$ AFIRMAÇÃO **FALSA (F)**.

---

viii) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \Longrightarrow$ AFIRMAÇÃO **FALSA (F)**.

---

ix) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty \Longrightarrow x=4$ REPRESENTA UMA ASSÍNTOTA VERTICAL PARA $y=f(x)$

Logo, a AFIRMAÇÃO é **VERDADEIRA (V)**.

---

x) $y=f(x)$ é estritamente crescente em $(4,+\infty)$. Logo, NÃO pode ser constante nesse intervalo. Portanto, podemos concluir que a AFIRMAÇÃO é **FALSA (F)**.

---

2) Primeiramente, observemos que a função $y=g(x)$ será contínua em $\mathbb{R} \Longleftrightarrow$ ela é contínua em $x=0$.

Portanto, precisamos investigar a continuidade em $x=0$.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan(\alpha x)}{x}, & \text{se } x<0 \\ \alpha + \dfrac{\gamma}{2}, & \text{se } x=0 \\ \dfrac{\beta x}{\operatorname{sen}(x)} + \dfrac{\gamma(e^x-1)}{2x}, & \text{se } x>0. \end{cases}$$

Sabe-se que:

$g(x)$ é contínua em $x=0$ se:

i) $\exists \lim_{x\to 0} g(x)$;

ii) $\exists\, g(0)$

iii) $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$.

Primeiramente, para garantir que a condição i) seja satisfeita, devemos impor que os Limites Laterais (à direita e à esquerda de 0) sejam iguais:

Note que:

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\tan(\alpha x)}{x} = \lim_{x \to 0} \alpha \frac{\tan(\alpha x)}{\alpha x} = \alpha \cdot \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\tan(\alpha x)}{\alpha x}}_{\substack{= 1 \\ \text{(Limite Fundamental)}}}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0^-} g(x) = \alpha.}$$

Por outro lado,

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\beta x}{\operatorname{sen}(x)} + \frac{\gamma(e^x - 1)}{2x} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\beta x}{\operatorname{sen} x} + \lim_{x \to 0} \frac{\gamma(e^x - 1)}{2x}$$

$$= \beta \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\gamma}{2} \cdot \overbrace{\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)}^{= 1 \text{ (Limite Fundamental)}}$$

$$= \beta \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} \right) + \frac{\gamma}{2} \cdot (1)$$

$$= \beta \cdot \frac{\overbrace{\lim_{x \to 0} 1}^{= 1}}{\underbrace{\lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)}_{\substack{= 1 \text{ (Limite} \\ \text{Fundamental)}}}} + \frac{\gamma}{2}$$

Obs: Os Limites Fundamentais (acima) podem ser calculados usando a Regra de L'Hôpital

pois geram indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$.

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to 0^+} g(x) = \beta + \frac{\gamma}{2}.}$$

Além disso, $\boxed{g(0) = \alpha + \frac{\gamma}{2}.}$

Portanto, para que $y = g(x)$ seja contínua em $x = 0$:

$$\underbrace{\alpha = \beta + \frac{\gamma}{2}}_{\text{Limites Laterais iguais}} = \underbrace{\alpha + \frac{\gamma}{2}}_{= g(0)}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha + \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \\ \beta + \cancel{\frac{\gamma}{2}} = \alpha + \cancel{\frac{\gamma}{2}} \Rightarrow \beta = \alpha \end{cases}$$

Resposta: $\boxed{\alpha = \beta \in \mathbb{R} \text{ e } \gamma = 0}$

3) i) $\lim_{x \to +\infty} \left[e^{2007} \cdot \left(1 + \frac{9}{x}\right)^{x} \right]$

$$= \left(\lim_{x \to +\infty} e^{2007}\right) \cdot \left(\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{9}{x}\right)^{x}\right)$$

Limite do produto = prod. dos Limites

$$= e^{2007} \cdot \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{9}{x}\right)^{x}$$

Limite de uma constante é a própria constante

$$= e^{2007} \cdot \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{9}{x}\right)^{\frac{x}{9} \cdot 9}$$

$$= e^{2007} \cdot \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{9}{x}\right)^{\frac{x}{9}}\right)^{9}$$

$$= e^{2007} \cdot \Bigg(\underbrace{\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{9}{x}\right)^{\frac{x}{9}}}_{= e \text{ (Limite Fundamental)}}\Bigg)^{9}$$

Limite do produto = produto dos Limites

$$= e^{2007} \cdot e^{9}$$

$$= e^{2007+9}$$

$$= e^{2016}$$

Logo,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left[e^{2007} \cdot \left(1 + \frac{9}{x}\right)^{x} \right] = e^{2016}}$$

(1ª via)

3) ii) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\tan(\pi x)}{\tan x} \rightsquigarrow \frac{\tan(\pi \cdot 0)}{\tan 0} = \frac{\tan 0}{\tan 0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{(\tan(\pi x))'}{(\tan x)'}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\pi \sec^2(\pi x)}{\sec^2 x}$$

$$= \pi \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{\sec^2(\pi x)}{\sec^2(x)}$$

$$= \pi \cdot \frac{\sec^2(\pi \cdot 0)}{\sec^2 0}$$

$$= \pi \cdot \frac{\sec^2(0)}{\sec^2(0)}$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{1}$$

$$= \pi$$

Obs: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, Logo:

$$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Uma segunda forma de calcular o Limite é a seguinte:

(2ª via)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\tan(\pi x)}{\tan x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\tan(\pi x)}{\tan x} \cdot \overbrace{\frac{\pi x}{\pi x}}^{=1}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \pi \frac{\tan(\pi x)}{\pi x} \cdot \frac{x}{\tan x}$$

$$= \pi \underbrace{\left(\lim_{x \to 0^+} \frac{\tan \pi x}{\pi x}\right)}_{=1 \text{ (Limite fundamental)}} \cdot \underbrace{\left(\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\tan x}\right)}_{=1}$$

Limite do produto é o produto dos Limites

$$= \pi \cdot (1) \cdot (1) = \pi.$$

Portanto, $\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{\tan(\pi x)}{\tan x} = \pi}$

(1ª via) ~ L'Hôpital

3) iii) $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-4x} \rightsquigarrow \dfrac{\sqrt{4}-2}{4^2-4\cdot 4} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)'}{(x^2-4x)'} = \lim_{x\to 4} \frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}}{2x-4}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2x-4} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 4}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(2x-4)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}(2x-4)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4}(2\cdot(4)-4)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot(8-4)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 4}$$

$$= \boxed{\frac{1}{16}}$$

(2ª via) ~ Multiplicando e dividindo pelo conjugado

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-4x} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-4x}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x^2-4x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4}\frac{\cancel{x-4}}{x\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{1}{x(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{4(\sqrt{4}+2)} = \frac{1}{4\cdot(2+2)} = \frac{1}{4\cdot 4} = \frac{1}{16}$$

Logo,

$$\boxed{\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-4x} = \frac{1}{16}}$$

(3ª via) $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-4x} = \lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x(x-4)}$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{\cancel{\sqrt{x}-2}}{x(\sqrt{x}+2)\cancel{(\sqrt{x}-2)}} = \lim_{x\to 4}\frac{1}{x(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{1}{4\cdot(\sqrt{4}+2)} = \frac{1}{4(2+2)} = \frac{1}{4\cdot 4} = \boxed{\frac{1}{16}}$$

Portanto, a alternativa correta corresponde à Letra d), ou seja, apenas a afirmação iii) é falsa.

4)
$$C(x) = \begin{cases} \ln(x)\cdot\cos(\pi(x+1)), & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{\tan(2x-4) + \operatorname{sen}(\pi(x-2))}{5x+10}, & \text{se } 1 < x < 2 \\ \dfrac{x^2-7x+10}{x-2}, & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

i) Observe que quando $x=1$:

$$C(x) = \ln(x)\cdot\cos(\pi(x+1))$$

$$\Longrightarrow C'(x) = \frac{1}{x}\cdot\cos(\pi(x+1)) + \ln(x)\cdot(-\operatorname{sen}(\pi(x+1)))\cdot\pi$$

Regra de derivação do produto

$$\Longrightarrow C'(x) = \frac{\cos(\pi(x+1))}{x} - \pi\ln(x)\cdot(\operatorname{sen}(\pi(x+1))).$$

$$\Longrightarrow C'(1) = \frac{\cos(\pi(1+1))}{1} - \pi\cdot\ln(1)\cdot(\operatorname{sen}(\pi(1+1)))$$

$$= \underbrace{\cos(2\pi)}_{1} - \underbrace{\pi\cdot\cancel{\ln(1)}^{0}\cdot\cancel{\operatorname{sen}(2\pi)}^{0}}_{0}$$

$$= 1$$

Assim, a taxa de variação da receita bruta quando 1 Kg for vendido, será de R\$ 1,00.

ii)
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\tan(2x-4)+\operatorname{sen}(\pi(x-2))}{5x-10}$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{\tan(2(x-2))+\operatorname{sen}(\pi(x-2))}{5(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{\tan(2(x-2))}{5(x-2)} + \lim_{x\to 2^-}\frac{\operatorname{sen}(\pi(x-2))}{5(x-2)}$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{x\to 2^-}\frac{2\tan(2(x-2))}{2(x-2)} + \frac{1}{5}\lim_{x\to 2^-}\frac{\pi\operatorname{sen}(\pi(x-2))}{\pi(x-2)}$$

Cont... 4) ii) ...

$$= \frac{2}{5}\underbrace{\lim_{x\to 2^-}\frac{\tan(2(x-2))}{2(x-2)}}_{=1} + \frac{\pi}{5}\underbrace{\lim_{x\to 2^-}\frac{\operatorname{sen}(\pi(x-2))}{\pi(x-2)}}_{=1}$$

$1 \rightarrow$ (Limite Fundamental) $\leftarrow 1$

$$= \frac{2}{5}\cdot(1) + \frac{\pi}{5}\cdot(1)$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{\pi}{5}$$

$$= \frac{\pi+2}{5} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 2^-} c(x) = \frac{\pi+2}{5}}$$

iii) $$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-7x+10}{x-2}$$

$x^2 \quad +10$

$x \quad -5$

$x \quad -2$

$-5x-2x=-7x$

$$= \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-5)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}$$

$$= \lim_{x\to 2^+}(x-5)$$

$$= 2-5$$

$$= -3 \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 2^+} c(x) = -3}$$

Obs: Os Limites em ii) e iii) geram indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$. Portanto, também podem ser calculados usando a regra de L'Hôpital.

4) iv) Quando $x \geq 3$, temos que:

$$C(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$$

$$\Longrightarrow C'(x) = \frac{(2x-7)(x-2) - (x^2-7x+10).(1)}{(x-2)^2}$$

Regra de derivação do quociente

$$= \frac{(2x-7)(x-2) - (x-5)(x-2)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{\cancel{(x-2)}\left[(2x-7) - (x-5)\right]}{(x-2)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{(2x-7) - (x-5)}{x-2}$$

$$= \frac{2x - 7 - x + 5}{x-2}$$

$$= \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-2}}$$

$$= 1$$

Portanto, a taxa de variação da receita será de R\$ 1,00 quando, pelo menos, 3 (três) Kg do produto forem vendidos.

v) A partir dos limites calculados nos itens ii) e iii), podemos concluir que a função $C(x)$ <u>não</u> é contínua em $x = 2$. Já que:

$$\lim_{x \to 2^-} C(x) = \frac{\pi + 2}{5} \neq -3 = \lim_{x \to 2^+} C(x).$$ (ou seja, os limites laterais são diferentes)

Assim, como $C(x)$ <u>não</u> é <u>contínua</u> em $x = 2$

$\Longrightarrow C(x)$ <u>não</u> é <u>derivável</u> em $x = 2$.