Eletromagnetismo I (2024.1)
GFI00220

Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense

Potenciais magnéticos

Professor: Carlos Eduardo Souza (Cadu)

Uma das finalidades do uso dos ***potenciais elétricos*** *na eletrostática é o* ***cálculo*** *mais simplificado* ***do campo elétrico***

$$\vec{E} = -\nabla V$$

tendo em vista que o potencial elétrico é uma função escalar...

Uma das finalidades do uso dos ***potenciais elétricos*** *na eletrostática é o* ***cálculo*** *mais simplificado* ***do campo elétrico***

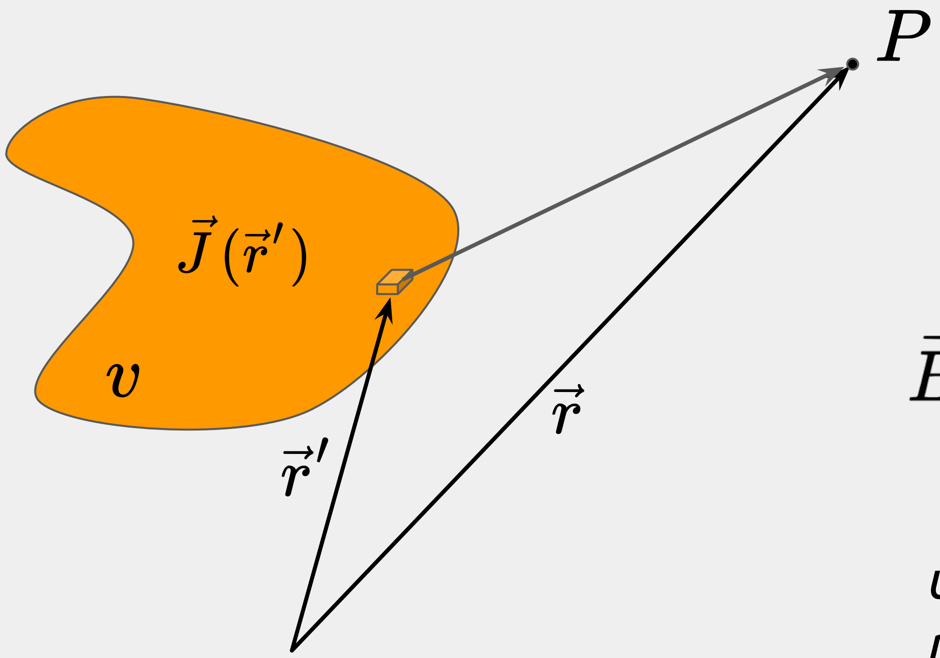
$$\vec{E} = -\nabla V$$

tendo em vista que o potencial elétrico é uma função escalar…

Pergunta

e no Magnetismo: ***seria possível definirmos um potencial magnético?***

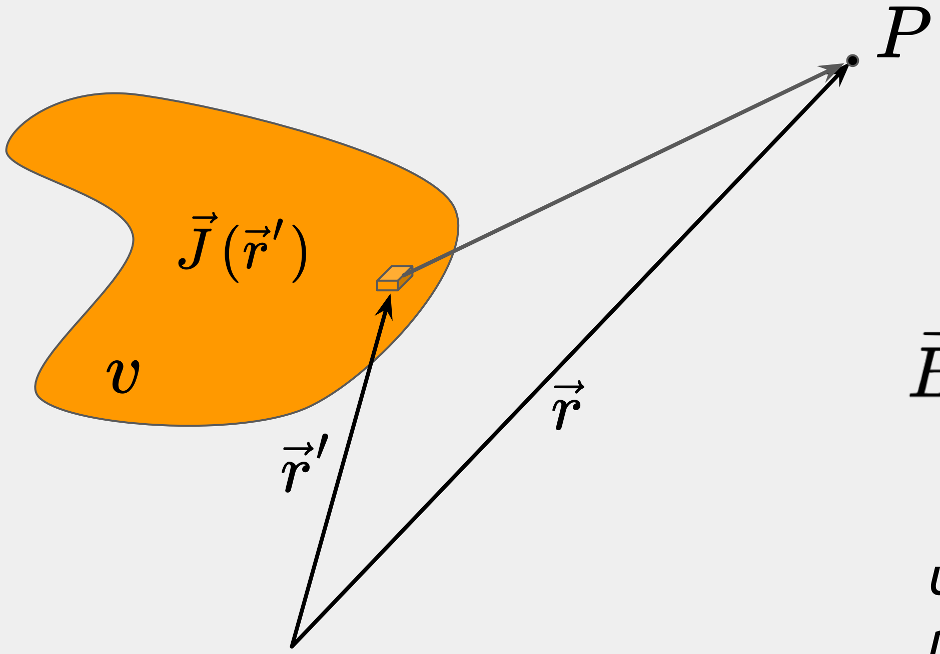
Tipicamente, desejamos calcular



$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v dv' \, \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R}}{|\vec{R}|}$$

uma expressão que envolve produto vetorial

Tipicamente, desejamos calcular



$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v dv' \, \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times \vec{R}}{|\vec{R}|}$$

uma expressão que envolve produto vetorial

A ideia é calcularmos isso mais facilmente!!

Seria possível definirmos um potencial magnético?

Sim, mas neste caso, um potencial vetor!!

Seria possível definirmos um potencial magnético?

Sim, mas neste caso, um potencial vetor!!

Ponto de partida: a lei de Gauss Magnética

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Seria possível definirmos um potencial magnético?

Sim, mas neste caso, um potencial vetor!!

Ponto de partida: a lei de Gauss Magnética

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Mas, de imediato, usando o fato identidade vetorial $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$
para um campo $\vec{A}$ *qualquer,*

definimos:

$$\vec{B} \equiv \nabla \times \vec{A}$$

Classificação dos campos vetoriais *em termos do Divergente e do Rotacional*

- *se* $\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (solenoidal)$
- *se* $\nabla \times \vec{A} = 0 \quad (potencial)$

Um campo no qual o fluxo através de uma área fechada é nulo...

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}' = 0$$

De forma que, usando o teo. da divergência

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}' = \iiint_v (\nabla \cdot \vec{A}) dv = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

Devido à identidade $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0, \ \forall \vec{F}$, *podemos escrever*

$$\vec{A} = \nabla \times \vec{F} = 0, \ \forall \vec{F}$$

Classificação dos campos vetoriais *em termos do Divergente e do Rotacional*

- se $\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (solenoidal)$
- se $\nabla \times \vec{A} = 0 \quad (potencial)$

Um campo no qual o fluxo do rotacional através de uma área fechada é nulo…

$$\oint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}' = 0$$

De forma que, usando o teo de Stokes

$$\oint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}' = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$$

A integral de linha independe do caminho: campo conservativo

Devido à identidade $\nabla \times (\nabla V) = 0, \quad \forall V,$ *podemos escrever*

$$\vec{A} = -\nabla V, \quad \forall V$$

Um campo no qual o fluxo através de uma área fechada é nulo…

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}' = 0$$

De forma que, usando o teo da divergência

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}' = \iiint_v (\nabla \cdot \vec{A}) dv = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

Devido à identidade $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0, \; \forall \vec{F},$ *podemos escrever*

$$\vec{A} = \nabla \times \vec{F} = 0, \; \forall \vec{F}$$

Classificação dos campos vetoriais *em termos do Divergente e do Rotacional*

- *se* $\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (solenoidal)$
- *se* $\nabla \times \vec{A} = 0 \quad (potencial)$

Um campo no qual o fluxo do rotacional através de uma área fechada é nulo…

$$\oint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}' = 0$$

De forma que, usando o teo de Stokes

$$\oint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}' = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$$

A integral de linha independe do caminho: campo conservativo

Devido à identidade $\nabla \times (\nabla V) = 0, \quad \forall V,$ *podemos escrever*

$$\vec{A} = -\nabla V, \quad \forall V$$

Um campo no qual o fluxo através de uma área fechada é nulo…

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}' = 0$$

De forma que, usando o teo da divergência

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}' = \iiint_v (\nabla \cdot \vec{A}) dv = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

Devido à identidade $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0, \quad \forall \vec{F}$ *podemos escrever*

$$\vec{A} = \nabla \times \vec{F} = 0, \quad \forall \vec{F}$$

Transformações de Calibre

Em resumo:

Classificação dos campos vetoriais *em termos do Divergente e do Rotacional*

Transformações de Calibre

- se $\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (solenoidal)$ $\Rightarrow$ $\vec{A} = \nabla \times \vec{F} = 0, \ \forall \vec{F}$
- se $\nabla \times \vec{A} = 0 \quad (potencial)$ $\Rightarrow$ $\vec{A} = -\nabla V, \ \forall V$

Em resumo:

Classificação dos campos vetoriais *em termos do Divergente e do Rotacional*

Transformações de Calibre

- *se* $\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (solenoidal)$ $\;\Rightarrow\;$ $\vec{A} = \nabla \times \vec{F} = 0, \;\; \forall \vec{F}$
- *se* $\nabla \times \vec{A} = 0 \quad (potencial)$ $\;\Rightarrow\;$ $\vec{A} = -\nabla V, \;\; \forall V$

De forma geral, um campo $\vec{A}$ é completamente descrito em uma região se conhecermos:

(1)
$$\nabla \cdot \vec{A} = \rho_v$$
Densidade de fonte

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{\rho}_S$$
Densidade de circulação

Em especial, qq vetor que satisfaça as eqs (1) com $\rho_v = \rho_S = 0$ no infinito pode ser expresso como:

$$\vec{A} = -\nabla V + \nabla \times \vec{F}$$

Teo de Helmholtz

Dado que

$$\vec{A} = -\nabla V + \nabla \times \vec{F}$$

e a identidade vetorial

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A}),$$ *tal que:* $$\nabla^2 \vec{A} = \nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z}$$

Obtemos

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla(\rho_v) - \nabla \times (\vec{\rho}_S).$$

Estendendo esses resultados para a Magnetostática:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \implies \vec{B} \equiv \nabla \times \vec{A}$$

*O campo magnético pode ser escrito como um rotacional de um Pot Vetor **A**.*

Estendendo esses resultados para a Magnetostática:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 \implies \vec{B} \equiv \nabla \times \vec{A}$$

*O campo magnético pode ser escrito como um rotacional de um Pot Vetor **A**.*

Portanto,

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$$
$$= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Esse resultado pode ser generalizado para um Pot Vetor mais geral ainda da forma:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f$$

onde f é um Potencial escalar.

Estendendo esses resultados para a Magnetostática:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Portanto,

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$$
$$= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Esse resultado pode ser generalizado para um Pot Vetor mais geral ainda da forma:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f$$

onde f é um Potencial escalar.

Observe que: $\nabla \times (\nabla f) = 0, \quad \forall f,$

De forma que

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times (\vec{A} + \nabla f)$$
$$= \nabla \times \vec{A} + \cancel{\nabla \times \nabla f} = \nabla \times \vec{A}.$$

Qual a vantagem disso tudo?

Estendendo esses resultados para a Magnetostática:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Portanto,

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$$
$$= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Desejamos resolver essa eq aqui!!

Esse resultado pode ser generalizado para um Pot Vetor mais geral ainda da forma:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f$$

onde f é um Potencial escalar.

Observe que: $\nabla \times (\nabla f) = 0, \quad \forall f,$

De forma que

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times (\vec{A} + \nabla f)$$
$$= \nabla \times \vec{A} + \cancel{\nabla \times \nabla f} = \nabla \times \vec{A}.$$

Qual a vantagem disso tudo?

Estendendo esses resultados para a Magnetostática:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Portanto,

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A})$$
$$= \cancel{\nabla(\nabla \cdot \vec{A})} - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Desejamos resolver essa eq aqui!!

Esse resultado pode ser generalizado para um Pot Vetor mais geral ainda da forma:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f$$

onde f é um Potencial escalar.

Observe que: $\nabla \times (\nabla f) = 0, \quad \forall f,$

De forma que

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times (\vec{A} + \nabla f)$$
$$= \nabla \times \vec{A} + \cancel{\nabla \times \nabla f} = \nabla \times \vec{A}.$$

Qual a vantagem disso tudo?

Com uma escolha adequada de f, podemos eliminar $\nabla \cdot \vec{A}$ *e obter uma* ***Equação de Poisson****, a qual sabemos resolver.*

Em resumo,

dada a Eq de Poisson para o Pot Vetor:

$$\nabla(\cancel{\nabla\cdot\vec{A}}) - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv'$$

$$\nabla^2\vec{A} = \nabla^2 A_x\hat{x} + \nabla^2 A_y\hat{y} + \nabla^2 A_z\hat{z} \quad \begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \Rightarrow A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{J_x(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv' \\ \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \Rightarrow A_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{J_y(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv' \\ \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \Rightarrow A_z(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{J_z(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dv' \end{cases}$$

Em resumo,

dada a Eq de Poisson para o Pot Vetor:

$$\cancel{\nabla(\nabla\cdot\vec{A})} - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J}$$

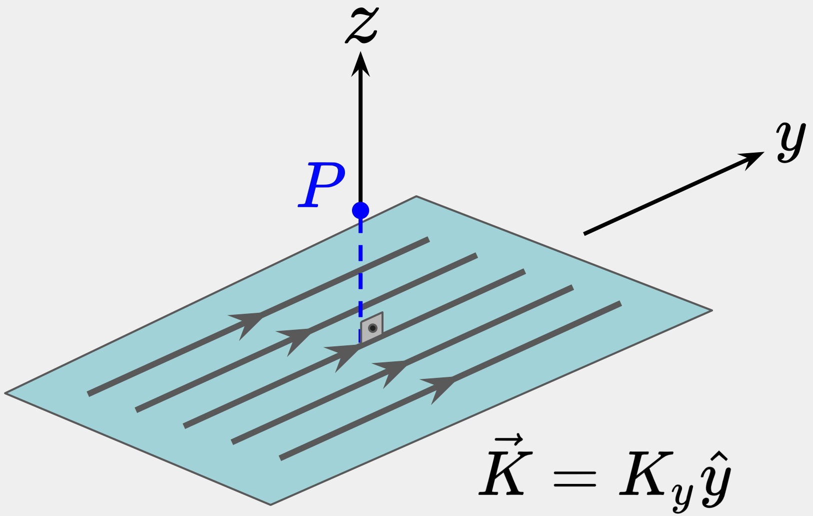
3D $\rightarrow$ $$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_v dv'\,\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{R}|}$$

2D $\rightarrow$ $$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_s dv'\,\frac{\vec{K}(\vec{r}\,')}{|\vec{R}|}$$

1D $\rightarrow$ $$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C d\vec{l}\,'\,\frac{I(\vec{r}\,')}{|\vec{R}|}$$

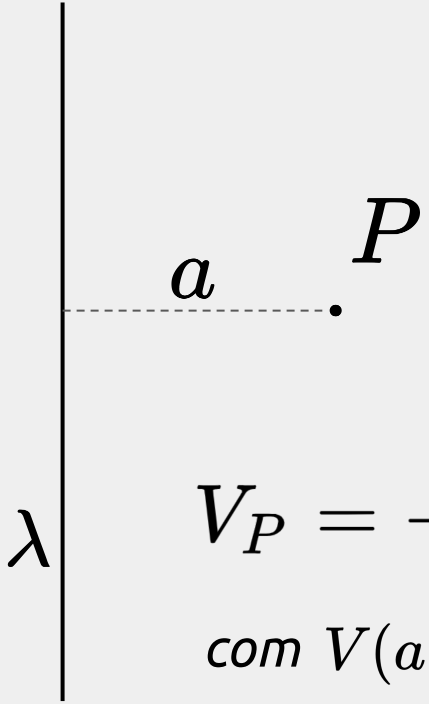
Exemplo 1

Corrente em uma lâmina infinita*. Quanto vale o campo magnético no ponto P?* ***Resolva esse problema via Potencial vetor***



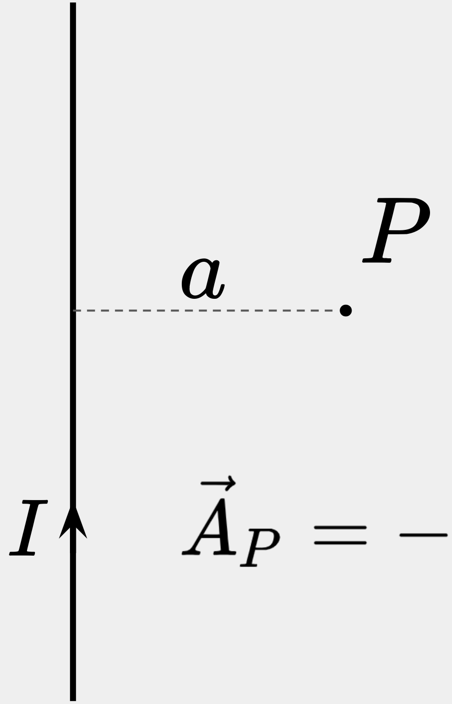
$$\vec{K} = K_y \hat{y}$$

Analogia com a eletrostática



$$V_P = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{a}{r}\right)$$

com $V(a) = 0$



$$\vec{A}_P = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{a}{r}\right)\hat{z}$$

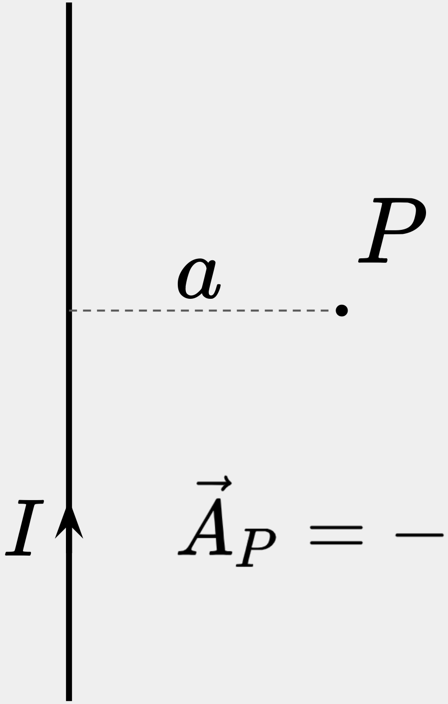
Analogia com a eletrostática

Verificando o resultado, temos:

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

Portanto,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$



$$\vec{A}_P = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{r}\right)\hat{z}$$

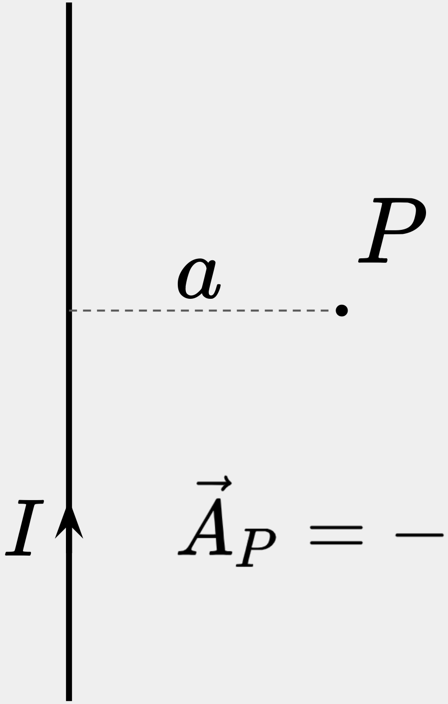
Analogia com a eletrostática

Verificando o resultado, temos:

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\
&= \nabla \times \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{a}{\rho}\right)\hat{z}\right)^{*} \\
&= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{1}{a/\rho}\left(\frac{-a}{\rho^2}\right)\hat{\phi}
\end{aligned}$$



$$\vec{A}_P = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{a}{r}\right)\hat{z}$$

$$*\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{\rho}$$

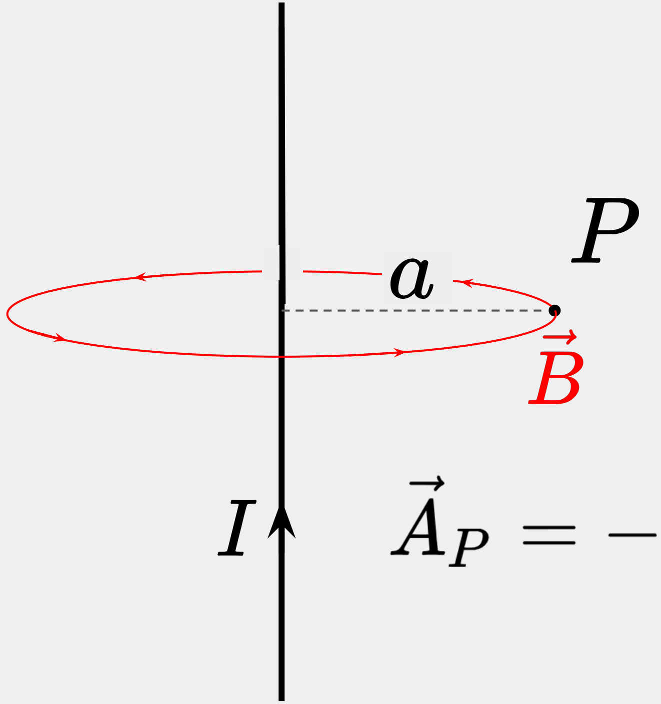
Analogia com a eletrostática

Verificando o resultado, temos:

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

Portanto,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$
$$= \nabla \times \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{a}{\rho}\right)\hat{z}\right)^{*}$$
$$= -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{a/\rho}\left(\frac{-a}{\rho^2}\right)\hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\phi}$$



$$\vec{A}_P = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\left(\frac{a}{r}\right)\hat{z}$$

$${}^{*}\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{\rho}$$