ESCOLA DE ENGENHARIA DE VOLTA REDONDA (EEIMVR-UFF)
Departamento de Ciências Exatas (VCE)

Primeira Avaliação (P1) - 2019/1

Disciplina:	**Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)** | Data: **17/05/2019**	**NOTA**
Professor:	Yoisell Rodríguez Núñez	
Aluno(a):		

1. (1,00 ponto) **Identifique** o elemento na primeira coluna abaixo, com sua correspondente interpretação na segunda coluna:

$\mathcal{V})$ Equação de Riccati	$\mathcal{L}$ ___ $y' - \dfrac{2}{\cos x}y = e^{x^3}$
$\mathcal{T})$ $y'' - 7y' + 12y = 7t + 5e^{-t}\,\text{sen}(2t)$	♡ ___ $\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$
$\mathcal{H})$ EDO exata	$\mathcal{V}$ ___ $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2$
$\mathcal{M})$ $\{e^{4t}, e^{3t}\}$	Σ ___ Problema de Valor Inicial (PVI)
$\mathcal{L})$ EDO de 1^a ordem linear	$\downarrow$ ___ $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{\cos x}y = (\,\text{sen}x - 1)y^2$
♡) $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$	$\mathcal{M}$ ___ Sistema fundamental de soluções
$\downarrow)$ EDO de Bernoulli	$\mathcal{A}$ ___ $r^2 - 7r + 12 = 0$
$\mathcal{S})$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\cos x}{1 + 2y^2}$	$\mathcal{T}$ ___ $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$
$\mathcal{A})$ Equação característica	$\mathcal{H}$ ___ $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$
$\Sigma)$ $\begin{cases} yx^2\dfrac{dy}{dx} = e^{y^3} - \text{sen}x^3, \\ y(1) = 1 \end{cases}$	$\mathcal{S}$ ___ EDO de variáveis separáveis

2. (2,50 pontos)* Determine a solução geral da EDO: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y}{x + 4y}$

3. (2,~~0~~5 0 pontos) Resolva a EDO: $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)\dfrac{dy}{dx} = 0$

4. (2,~~0~~5 0 pontos)* Encontre a solução da EDO: $y - y'\cos x = y^2 \cos x(1 - \text{sen}x)$

5. (2,50 pontos) Calcule a solução geral da EDO:

$$y'' - 7y' + 12y = 7t + 5e^{-t}\,\text{sen}(2t)$$

6. (2,00 pontos) Assinale com a letra **V** para VERDADEIRA ou a letra **F** para FALSA, as afirmações abaixo, justificando cada resposta dada:

a) V A função $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{C - x^2}$ (com C =constante) é a solução geral da EDO de Riccati: $y' - y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \quad x > 0.$

b) F A EDO $y' = \dfrac{2 - \frac{y}{x}}{1 + 4\frac{y}{x}}$ não é homogênea.

c) F A EDO $(2x^4 + y^2 - 2019 \ln x^5)dx + (e^{2020y} \cos(5y) + 2xy)dy = 0$ não é exata.

d) V $\{e^{3t}, e^{4t}\}$ representa um conjunto fundamental de soluções da EDO: $y'' - 7y' + 12y = 0$.

Observações:

- ***Escolha** a questão **2 ou 4** para resolver. As **demais questões** são de **resolução obrigatória**.
- Todas **as respostas devem ser justificadas**, isto é, acompanhadas dos argumentos e/ou cálculos usados para obtê-las.

As conquistas humanas compõem-se de 1% de inspiração e 99% de transpiração

Thomas Edison

BOA PROVA!!!

GABARITO EDO (P1) - 2019/1

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y}{x + 4y}$

$\underbrace{(-2x + y)}_{M}\, dx + \underbrace{(x + 4y)}_{N}\, dy$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1 = \dfrac{\partial N}{\partial x} = 1$ É exata

$F(x,y) = -2\int x + y \, dx$

$= -\dfrac{2x^2}{2} + y + h(y)$

$F(x,y) = -x^2 + y + h(y)$ $\ast$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 + h'(y)$

$x + 4y = 1 + h'(y)$

$\int h'(y) = \int x + 4y - 1 \, dy$

$h(y) = xy + \dfrac{4y^2}{2} - y + c_1$

$h(y) = xy + 2y^2 - y + c_1$

Substituindo em $(\ast)$

$F(x,y) = -x^2 + \cancel{y} + xy + 2y^2 - \cancel{y} + c_1$

$F(x,y) = 2y^2 - x^2 + xy + c_1$ onde $F(x,y) = c$, então $c - c_1 = K$

$K = 2y^2 - x^2 + x$ //

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x + 4y}$ (I)

$M(x,y) = 2x - y$ $\quad M(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda x - \lambda y = \lambda(2x - y)$ (homogênea)

$N(x,y) = x + 4y$ $\quad N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x + 4\lambda y = \lambda(x + 4y)$ (homogênea)

logo a EDO (I) é homogênea

$y = vx$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \cdot x + v$

$\frac{dv}{dx} \cdot x + v = \frac{2x - vx}{x + 4vx}$

$\frac{dv}{dx} x + v = \frac{\cancel{x}(2 - v)}{\cancel{x}(1 + 4v)}$

$\frac{dv}{dx} x + v = \frac{2 - v}{1 + 4v}$

$\frac{dv}{dx} x = \frac{2 - v}{1 + 4v} - v$ $\qquad \frac{dv}{dx} \cdot x = \frac{2 - v - v(1 + 4v)}{(1 + 4v)}$

$\frac{dv}{dx} \cdot x = \frac{2 - v - v - 4v^2}{(1 + 4v)}$ $\qquad \frac{dv}{dx} x = \frac{2 - 2v - 4v^2}{(1 + 4v)}$

$(1 + 4v)\, dv\, x = (2 - 2v - 4v^2)\, dx$

$\frac{(1 + 4v)}{(2 - 2v - 4v^2)} dv = \frac{dx}{x}$

$\int \frac{(1 + 4v)}{(2 - 2v - 4v^2)} dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$ $\quad u = 2 - 2v - 4v^2$, $du = -2 - 8v$, $-du/2 = 1 + 4v$ $\quad \int -\frac{1}{2} \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} + c$

$-\frac{1}{2} \ln|u| = \ln|x| + c$ $\qquad -\frac{1}{2} \ln|2 - 2v - 4v^2| = \ln|x| + c$

$e^{-1/2 \ln|2 - 2v - 4v^2|} = e^{\ln|x|} + e^c$ $\qquad (2 - 2v - 4v^2)^{-1/2} = x + e^c$

$\Rightarrow v = \frac{y}{x}$ $\quad \frac{1}{\left(2 - 2\left(\frac{y}{x}\right) - 4\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{1/2}} = x + e^c$

Questão 3

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad M(x,y) = 3xy + y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \qquad N(x,y) = x^2 + xy$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y$$

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$; Portanto devemos procurar um fator integrante

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 3x + 2y - 2x - y = x + y$$

$$\frac{x+y}{N} = \frac{x+y}{x^2+xy} = \frac{\cancel{x+y}}{x\cancel{(x+y)}} = \frac{1}{x}$$

Daí Temos

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = \boxed{x}$$

Multiplicamos a EDO pelo fator integrante $\mu(x) = x$, Temos:

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$M(x,y) = 3x^2y + xy^2 \quad ; \quad N(x,y) = x^3 + x^2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2xy$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2xy$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$; Portanto EDO EXATA

Existe $\psi(x,y)$ Tal que $\frac{\partial \psi}{\partial x} = M$; $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N$

(1) (2)

De (1) Temos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 3x^2y + xy^2$$

$\Rightarrow$ INTEGRANDO

$$\psi(x,y) = \int 3x^2y + xy^2 + C(y)$$

$$\psi(x,y) = \frac{3x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{2} + C(y)$$

$$\psi(x,y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + C(y)$$

Derivando em relação a y, Temos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = x^3 + \frac{2x^2y}{2} + C'(y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = x^3 + x^2y + C'(y)$$

Mas $\frac{\partial \psi}{\partial y} = N$, Portanto

$$\cancel{x^3 + x^2y} + C'(y) = \cancel{x^3 + x^2y}$$

$$C'(y) = 0$$

Portanto:

$$C(y) = C_1$$

$$\psi(x,y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + C_1$$

$$\boxed{x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = k} \longrightarrow \text{Sol. geral}$$

com $k = (C_2 - C_1) \in \mathbb{R}$

(5) $y'' - 7y' + 12y = 7t + 5e^{-t} \operatorname{sen}(2t)$

$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$

$\lambda = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\lambda = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4.1.12}}{2}$

$\lambda = \dfrac{7 \pm 1}{2}$

$\lambda_1 = 4$

$\lambda_2 = 3$

+0,50

$y_H = C_1 e^{4t} + C_2 e^{3t}$

$y_p = y_{p1} + y_{p2}$

$y_{p1} = At + D$

$y_{p1}' = A$

$y_{p1}'' = 0$

$0 - 7A + 12At + 12D = 7t$

$12At = 7t$

$A = \dfrac{7t}{12t} = \dfrac{7}{12}$

$-7A + 12D = 0$

$D = \dfrac{7A}{12}$

$D = \dfrac{7}{12} \cdot \dfrac{7}{12} = \dfrac{49}{144}$

$y_{p2} = Be^{-t} \operatorname{sen}(2t) + Ce^{-t} \cos(2t)$

$y_{p2}' = Be^{-t} \operatorname{sen}(2t).(-1) + Be^{-t} \cos(2t).2 + Ce^{-t} \cos(2t).(-1) - Ce^{-t} \operatorname{sen}(2t).2$

$y_{p2}' = (-B - 2C)e^{-t} \operatorname{sen}(2t) + (2B - C)e^{-t} \cos(2t)$

$y_{p2}'' = (-B-2C)e^{-t} \operatorname{sen}(2t).(-1) + (-B-2C)e^{-t} \cos(2t).2$
$+ (2B - C)e^{-t} \cos(2t).(-1) + (2B - C)e^{-t}(-\operatorname{sen}(2t)).2$

$y_{p2}'' = (B + 2C)e^{-t} \operatorname{sen}(2t) + (-2B - 4C)e^{-t} \cos(2t)$
$+ (-2B + C)e^{-t} \cos(2t) + (-4B + 2C)e^{-t} \operatorname{sen}(2t)$

$y_{p2}'' = (B + 2C - 4B + 2C)e^{-t} \operatorname{sen}(2t) + (-2B - 4C - 2B + C)e^{-t} \cos(2t)$

$y_{p2}'' = (-3B + 4C)e^{-t} \operatorname{sen}(2t) + (-4B - 3C)e^{-t} \cos(2t)$

$y_{P2}'' - 7y_{P2}' + 12y_{P2} = 5e^{-t}\,sen(2t)$

$(-3B+4C)e^{-t}\,sen(2t) + (-4B-3C)e^{-t}\cos(2t) - 7(-B-2C)e^{-t}\,sen(2t) - 7(2B-C)e^{-t}$
$\cos(2t) + 12Be^{-t}\,sen(2t) + 12Ce^{-t}\cos(2t) = 5e^{-t}\,sen(2t)$

$$\begin{cases} -3B+4C+7B+14C+12B = 5 \\ -4B-3C-14B+7C+12C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18C+16B = 5 \\ 16C-18B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18C+16B = 5 \\ 8C-9B = 0 \quad \cdot\left(16/9\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18C+16B = 5 \\ \frac{128C}{9} - 16B = 0 \end{cases}$$

$\frac{290C}{9} = 5$

$290C = 45$

$C = \frac{45}{290}$

$C = \frac{9}{58}$

$8 \cdot \frac{9}{58} = 9B$

$B = \frac{8}{9}\,\frac{9}{58}$

$B = \frac{8}{58}$

$y_G = C_1e^{4t} + C_2e^{3t} + \frac{7t}{12} + \frac{49}{144} + \frac{8}{58}e^{-t}\,sen(2t) + \frac{9}{58}e^{-t}\cos(2t)$

X 7,0

6. A) $y' - y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

$Y = \frac{1}{x} + \frac{1}{v}$

$\frac{d(x^{-1})}{dx} + v^{-2}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{v}\right) + \frac{1}{x^2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{v}\right)^2$

$-\cancel{\frac{1}{x^2}} + v^{-2}\frac{dv}{dx} + \cancel{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{vx} + \cancel{\frac{1}{x^2}} - \cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{2}{xv} - \frac{1}{v^2} = 0$

$\frac{dv}{dy} - \frac{v}{x} = 1$

$\mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx}$

$\mu = e^{-\ln x}$

$\mu = -x$

$\frac{dv}{dx}\cdot(-x) + \frac{vx}{x} = x$

$\frac{d(-x \cdot v)}{dx} = x$

$-x \cdot v = \int x\,dx$

$v = -\frac{x^2 + C}{2x}$

$Y = \frac{1}{x} + \frac{2x}{C - x^2}$

+0,50

6) B)

$y' = \frac{2 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{4y}{x}}$ $\quad v = \frac{y}{x}$

$v'x + v = \frac{2 - \frac{vx}{x}}{1 + \frac{4vx}{x}}$

$y'(x-y): \frac{\frac{2 - \frac{1}{}y}{4x}}{\frac{1 + 4y}{4x}}$ $\quad v'x + v = \frac{2 - v}{1 + 4v}$

+0,50

EDO HOMOGÊNEA ✓

6) c) $(2x^4 + y^2 - 2019 \ln x^5)\,dx + (e^{2020y} \cos(5y^1 + 2020y))\,dy = 0$

$My = 2y$

$Nx = 2y$

+0,50

ⓐ EXATA

d) $y'' - 7y' + 12y = 0$

$yh(x) \Rightarrow y^2 - 7y + 12 = 0$

$(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$

$\frac{7 \pm 1}{2} = \begin{matrix} x' = 4 \\ x'' = 3 \end{matrix}$

+0,50

$yh(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{3x}$