AULA 3 – SINAIS E SISTEMAS

André Pinho

Revisão de somatórios

Fórmulas de Somatórios

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Relação de recorrência:

$$S_1 = a_1$$

$$S_n = S_{n-1} + a_n \ , para\, n > 1$$

Fórmulas de Somatórios

- Notação
  - Suponha ‘a’ uma sucessão de números
  - Designa-se a letra maiúscula grega “sigma” como a forma condensada da soma dos termos de ‘a’.
  - Assim:

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n, \qquad k \leq n(k, n\ inteiros)$$

  - É permitida a mudança de variável

Fórmulas de Somatórios

- Notação
  - Generalização: o índice de sequência pode ser uma função da variável de sequência.
  - Sendo φ uma função da variável de sequência i:

$$\sum_{i=k}^{n} a_{\varphi(i)} = a_{\varphi(k)} + a_{\varphi(k+1)} + \cdots + a_{\varphi(n)}$$

  - Exemplo: $\varphi(i) = 2i$

$$\sum_{i=1}^{4} a_{\varphi(i)} = a_2 + a_4 + a_6 + a_8$$

Fórmulas de Somatórios

- Outras notações

$$\sum_{i:P(i)} a_i$$

  – Soma dos termos da sucessão ‘a’, cujos índices ‘i’ satisfazem a propriedade P
  – Exemplos:

$$\sum_{i \text{ é } par \wedge 0 \leq i \leq 8} a_i = a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8$$

$$\sum_{i \in \{1,3,5\}} a_i = a_1 + a_3 + a_5$$

Fórmulas de Somatórios

- Propriedades dos somatórios
  - Convenção: K designa qualquer conjunto finito de inteiros e n e k designam inteiros tal que $k \leq n$

- Distributiva:

$$\sum_{i=k}^{n} ca_i = c \sum_{i=k}^{n} a_i$$

Fórmulas de Somatórios

- Associativas
  1) $=> K_1$ e K_2 conjunto finito de inteiros

$$\sum_{i \in K_1} a_i + \sum_{i \in K_2} a_i = \sum_{i \in K_1 \cap K_2} a_i + \sum_{i \in K_1 \cup K_2} a_i$$

  – Casos particulares:

$$\sum_{i \in K_1 \cup K_2} a_i = \sum_{i \in K_1} a_i + \sum_{i \in K_2} a_i\,, \qquad \text{se } K_1 \cap K_2 = \emptyset$$

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=k}^{j} a_i + \sum_{i=j+1}^{n} a_i$$

Fórmulas de Somatórios

- Associativas

  2) =>

$$\sum_{i=k}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=k}^{n} a_i + \sum_{i=k}^{n} b_i$$

Que genericamente pode ser definida como:

$$\sum_{i \in K}(a_i + b_i) = \sum_{i \in K} a_i + \sum_{i \in K} b_i$$

Fórmulas de Somatórios

- Comutativa
  - Sendo φ qualquer permutação de um conjunto de inteiros, tem-se:

$$\sum_{i \in K} a_i = \sum_{\varphi(i) \in K} a_{\varphi(i)}$$

  - Casos particulares: $\varphi(i) = i + c,\quad c$ uma constante inteira

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{k \le i \le n} a_i = \sum_{k \le \varphi(i) \le n} a_{\varphi(i)} = \sum_{k \le i+c \le n} a_{i+c} = \sum_{k-c \le i \le n-c} a_{i+c}$$

$$= \sum_{i=k-c}^{n-c} a_{i+c}$$

Fórmulas de Somatórios

- Mudança de variável
  - Sendo B um conjunto qualquer finito de inteiros

$$\sum_{i \in B} a_{\varphi(i)} = \sum_{i \in \varphi[B]} a_i$$

Como o nome da variável é irrelevante:

$$\sum_{i \in B} a_{\varphi(i)} = \sum_{j \in \varphi[B]} a_j , \qquad j = \varphi(i),$$

$$\sum_{i=k}^{n} a_{\varphi(i)} = \sum_{j=\varphi(k)}^{\varphi(n)} a_{\mathrm{j}}$$

Fórmulas de Somatórios

- Mudança de variável
  - $\varphi(i) = i + c$, logo $j = i + c$

$$\sum_{i=k}^{n} a_{\varphi(i)} = \sum_{j=\varphi(k)}^{\varphi(n)} a_j$$

$$\sum_{i=k}^{n} a_{i+c} = \sum_{j=k+c}^{n+c} a_j$$

Fórmulas de Somatórios

- Mudança de variável
  - $\varphi(i) = c - i$, logo $j = c - i$

$$\sum_{i=k}^{n} a_{\varphi(i)} = \sum_{j=\varphi(n)}^{\varphi(k)} a_j$$

$$\sum_{i=k}^{n} a_{c-i} = \sum_{j=c-k}^{c-n} a_j$$

Fórmulas de Somatórios

- Outras mudanças típicas

$$\sum_{i=k+c}^{n} a_i = \sum_{j=k}^{???} a_{???}$$

$$j = i - c$$

Assim, quando $i = n \ \rightarrow j = n - c$, e

E o índice: $i = j + c$

Fórmulas de Somatórios

- Exemplos:

$$\sum_{i=k+c}^{n} a_i = \sum_{j=k}^{n-c} a_{j+c} \leftarrow j = i - c$$

$$\sum_{i=k}^{n+c} a_i = \sum_{j=k-c}^{n} a_{j+c} \leftarrow j = i - c$$

$$\sum_{i=k+c}^{n+c} a_i = \sum_{j=k}^{n} a_{j+c} \leftarrow j = i - c$$

Fórmulas de Somatórios

- Resultados de somatórios importantes:
  - Somatório de uma constante:

$$\sum_{i=k}^{n} 1 = n - k + 1$$

$$\sum_{i=k}^{n} c = c \sum_{i=k}^{n} 1 = c(n - k + 1)$$

Fórmulas de Somatórios

- Resultados de somatórios importantes:
  - Progressão aritmética (PA):

$$a_i = a_{i-1} + r$$

$$a_i = a_j + (i - j)r$$

  - Soma de uma PA de razão 1, iniciando em 1:

$$
\begin{array}{rcccccccccl}
 & Sn = & 1 & + & 2 & + \dots + & (n-1) & + & n & & \\
+ & Sn = & n & + & (n-1) & + \dots + & 2 & + & 1 & & \text{(Sn escrito na forma inversa)} \\
\hline
 & 2\,Sn = & (n+1) & + & (n+1) & + \dots + & (n+1) & + & (n+1) & & \text{(n parcelas)}
\end{array}
$$

Logo $2\,Sn = n\,(n+1)$ e, portanto, $Sn = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Fórmulas de Somatórios

- Resultados de somatórios importantes:
  - Soma de uma PA de razão r:

$$S_n = \sum_{i=k}^{n} a_i$$

Considerando $\varphi(i) = n - i + k$, tem-se que

$\varphi(n) = k$ e $\varphi(k) = n$

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=k}^{n} a_{n-i+k} \rightarrow 2S_n = \sum_{i=k}^{n} a_i + \sum_{i=k}^{n} a_{n-i+k}$$

Fórmulas de Somatórios

- Resultados de somatórios importantes:

$$2S_n = \sum_{i=k}^{n}(a_i + a_{n-i+k}) = \sum_{i=k}^{n}(a_i + a_{n-i+k})$$

$$a_i = a_k + (i-k)r \; e \; a_{n-i+k} = a_k + (n-i+k-k)r$$

$$2S_n = \sum_{i=k}^{n}(a_k + (i-k)r + a_k + (n-i)r\,) = \sum_{i=k}^{n}(2a_k + (n-k)r)$$

$$= (a_k + a_n)\sum_{i=k}^{n} 1$$

$$S_n = \frac{(a_k + a_n)}{2}(n-k+1)$$

Fórmulas de Somatórios

- Exercício: calcule a soma dos n primeiros números ímpares: 1,3,5,...., 2n+1

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1 = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Fórmulas de Somatórios

- Resultados de somatórios importantes:
  - Progressão geométrica (PG):

$$a_i = r a_{i-1}$$

$$a_i = a_j r^{i-j}$$

  - Soma de uma PG, iniciando em 1:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} r^i$$

Fórmulas de Somatórios

- Resultados de somatórios importantes:

$$S_{n+1} = S_n + r^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} r^i + r^{n+1}$$

$$S_{n+1} = 1 + r(1 + r + \cdots + r^n) = 1 + rS_n$$

$$S_n + r^{n+1} = 1 + rS_n$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Fórmulas de Somatórios

- Resultados de somatórios importantes:
  - Considerando a uma PG com razão r:

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = \sum_{i=k}^{n} a_k r^{i-k} = a_k \sum_{i=k}^{n} r^{i-k}$$

Mudando a variável: $j = i - k$

$$a_k \sum_{j=0}^{n-k} r^j = a_k \frac{r^{n-k+1} - 1}{r - 1} = \sum_{i=k}^{n} a_k r^{i-k}$$

Fórmulas de Somatórios

- Resultados de somatórios importantes:
  - Do resultado anterior:

$$\sum_{i=k}^{n} a_k r^i = r^k \sum_{i=k}^{n} a_k r^{i-k} = a_k \frac{r^{n+1} - r^k}{r - 1}$$

$$\sum_{i=k}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - r^k}{r - 1}$$

Fórmulas de Somatórios

- Resultados de somatórios importantes:
  - Mais um:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} ix^i$$

$$\boxed{S_n + (n+1)x^{n+1}} = \sum_{i=1}^{n+1} ix^i = x + \sum_{i=2}^{n+1} ix^i$$

Mudando a variável: $j = i - 1$

$$= x + \sum_{j=1}^{n} (j+1)x^{j+1} = x + x(\sum_{j=1}^{n} jx^j + \sum_{j=1}^{n} x^j)$$

$$x + xS_n + x\frac{x^{n+1} - x}{x - 1} = \boxed{xS_n + \frac{x^{n+2} - x}{x - 1}}$$

Fórmulas de Somatórios

- Resultados de somatórios importantes:
  - Resolvendo a equação:

$$S_n + (n+1)x^{n+1} = xS_n + \frac{x^{n+2} - x}{x - 1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} ix^i = \frac{x - (n-1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(x-1)^2}$$

Fórmulas de Somatórios

- Resultados de somatórios importantes:
  - Mais um:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$S'_n + (n+1)^3 = \sum_{i=1}^{n+1} i^3 = 1 + \sum_{i=2}^{n+1} i^3$$

Fórmulas de Somatórios

- Resultados de somatórios importantes:

Fazendo $j = i - 1$

$$\boxed{S'_n + (n+1)^3} = 1 + \sum_{i=2}^{n+1} i^3 = 1 + \sum_{j=1}^{n} (j+1)^3$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{n} (j^3 + 3j^2 + 3j + 1)$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{n} j^3 + 3\sum_{j=1}^{n} j^2 + 3\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1$$

$$= \boxed{1 + S'_n + 3\sum_{j=1}^{n} j^2 + 3\frac{(n+1)n}{2} + n}$$

Fórmulas de Somatórios

- Resultados de somatórios importantes:

Resolvendo a equação

$$S'_n + (n+1)^3 = S'_n + 3\sum_{j=1}^{n} j^2 + 3\,\frac{(n+1)n}{2} + n + 1$$

$$3\sum_{j=1}^{n} j^2 = (n+1)^3 - 3\,\frac{(n+1)n}{2} - (n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Fórmulas de Somatórios

- Soma telescópica

$$\sum_{i=k}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_{k-1}\ (óbvio!)$$

  – Exemplo:

$$\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$$

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{(i+1)}, \text{ considerando } a_i = \frac{1}{(i+1)}$$

$$\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = -\sum_{i=k}^{n}\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i}\right) = -\sum_{i=k}^{n}(a_i - a_{i-1})$$

Fórmulas de Somatórios

- Soma telescópica

$$\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = -\sum_{i=k}^{n} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i} \right) = -\sum_{i=k}^{n} (a_i - a_{i-1})$$

$$= a_{k-1} - a_n = \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}$$

Fórmulas de Somatórios

- Determine

$$a)\sum_{i=1}^{n}(2^i + 5)\,, para\ n \geq 1$$

$$b)\sum_{i=1}^{50}(3^i + 2i + 1)$$

$$c)\sum_{i=1}^{20}2(3^i + i)$$

$$d)\sum_{i=1}^{n}i2^i\,, para\ n \geq 1$$

Fórmulas de Somatórios

- Verifique

$$a)\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \frac{-1-(-1)^{n+1}}{2}, para\ n \geq 1$$

$$b)\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \frac{-1+(2n-1)(-1)^n}{4}, para\ n \geq 1$$

- Determine

$$a)\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^i i^2, para\ n \geq 1$$

Fórmulas de Somatórios

- Somatórios duplos

$$\sum_{(i,j)\in K} a_{i,j}$$

  - Caso específico:

  $I \; e \; J$ conjuntos finitos e independentes um do outro, tais que $(i,j) \in K \Leftrightarrow i \in I \wedge j \in J$

  - Exemplo:

$$\sum_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} a_{i,j} = \sum_{i\in\{1,2,3\}\wedge j\in\{1,2,3\}} a_{i,j} = \sum_{1\leq i,j\leq 3} a_{i,j}$$

A ordem dos índices é irrelevante!

Fórmulas de Somatórios

- Troca dos Somatórios

$$\sum_{i \in I \wedge j \in J} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} a_{i,j}$$

  - Válido quando $I\ e\ J$ são independentes
  - Este resultado é importante em virtude de, por vezes, ser mais fácil somar em relação a uma variável, do que em relação à outra

Fórmulas de Somatórios

- Troca dos Somatórios
  - Outro caso:

$$a_{i,j} = b_i c_j$$

Assumindo que a expressão b_i não envolve a variável j e que a expressão c_j não envolve a variável i

$$\sum_{1 \le i,j \le 3} a_{i,j} = \sum_{1 \le i,j \le 3} b_i c_j = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_i c_j$$

$$= \sum_{i=1}^{3} b_i \sum_{j=1}^{3} c_j = \sum_{j=1}^{3} c_j \sum_{i=1}^{3} b_i$$

Fórmulas de Somatórios

- Troca dos Somatórios
  - Calcular

$$\sum_{1 \le i,j \le n} (i+j)^2$$

$$\sum_{1 \le i,j \le n} (i^2 + 2ij + j^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 \sum_{j=1}^{n} 1 + 2\sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} j^2 \sum_{i=1}^{n} 1$$

Fórmulas de Somatórios

- Troca dos Somatórios
  - Continuando

$$\boxed{\sum_{1 \le i,j \le n} (i+j)^2} = \sum_{i=1}^{n} i^2 \sum_{j=1}^{n} 1 + 2\sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n} j^2 \sum_{i=1}^{n} 1 =$$

$$n\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\frac{(1+n)n}{2}\frac{(1+n)n}{2} + n\sum_{j=1}^{n} j^2 =$$

$$2n\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\frac{(1+n)n}{2}\frac{(1+n)n}{2} = \boxed{\frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}}$$

Fórmulas de Somatórios

- Determine

$$a)\ \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{i+j}$$

$$b)\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(j^2+i)$$