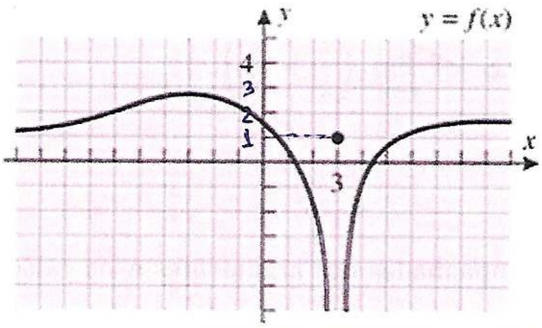
ESCOLA DE ENGENHARIA DE VOLTA REDONDA (EEIMVR-UFF)
Departamento de Ciências Exatas (VCE)

Primeira Avaliação (P1) - 2018/1

Disciplina:	**Cálculo I**	Data: **10/05/2018**	**NOTA**
Professor:	Yoisell Rodríguez Núñez		$\lim_{x \to 0^+} 10e^x$
Aluno(a):	—		

1. (2,25 pontos) Para a função $y = f(x)$ (figura abaixo), obtenha:



Obs: 0,45 pontos cada item.

a) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \to 3} f(x) = -\infty$

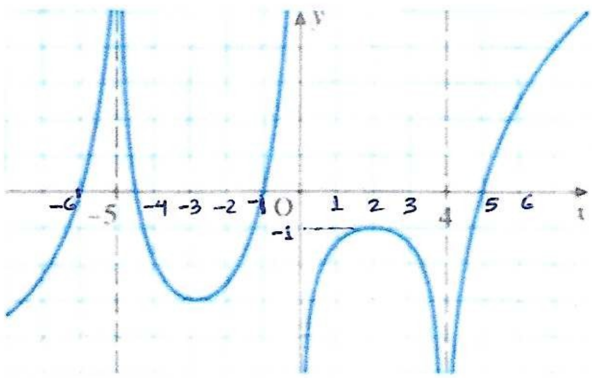
d) $f(3) = 1$

e) f é contínua em $x = 3$? derivável nesse ponto? **Justifique** sua resposta.

f é descontínua em $x=3$, pois: $\lim_{x \to 3} f(x) = -\infty \neq 1 = f(3)$

$\therefore f$ não é derivável nesse ponto.

2. (2,50 pontos) O gráfico a seguir representa uma função $y = g(x)$. **Classifique** em Verdadeira (V) ou Falsa (F) cada uma das seguintes afirmações. **Justifique** sua resposta.



I) Dom $g = \mathbb{R}$

II) $g(x) > 0, \quad \forall x > 4$

III) $g(2) = 0$

IV) $g(x)$ é descontínua em $x = -5$

V) g é derivável em $x = 0$

VI) $\lim_{x \to 4^-} g(x) = +\infty$

VII) $\lim_{x \to 4^+} g(x) = -\infty$

VIII) $x = 0$ é uma assíntota vertical

IX) g é estritamente crescente no intervalo $(-5, 0)$

X) $g(-6) + g(-1) + g(5) = 0$

Observação: Nesta questão cada item vale 0,25 pontos

3. (3,00 pontos) Dados os **limites**:

I) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2 - 3e^x}{3 + 2e^x}$ II) $\lim_{x \to 0^+} e^{2010} \cdot (1 + 8x)^{\frac{1}{x}}$ III) $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{\text{sen}^2(x)}{-4x^3}$

0,75 a) **Identifique** as indeterminações geradas por cada limite acima. (0,25 cada)

2,25 b) **Calcule** os três limites. (0,75 cada)

4. (2,25 pontos) Determine as **derivadas** das funções:

0,75 I) $h(x) = \frac{xe^{x^3}}{1-\tan(x)}$ 0,75 II) $m(x) = x^2\,\mathrm{sen}(x) - e^{3x}$ 0,75 III) $n(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}+3\cos(x^2)}{x^5}$

5. (0,50 pontos [extra]) **Explique** por que o seguinte cálculo está incorreto:

(0,10)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} - \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\\ &= +\infty-(+\infty)\\ &= 0.\end{aligned}$$

O cálculo é incorreto pois "$\infty - \infty$" é uma forma indeterminada (*)

I) Determine:

0,20 a) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$ 0,20 b) $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$.

Observação:

- Todas as respostas devem estar justificadas, isto é, acompanhadas dos argumentos e/ou cálculos usados para obtê-las.

Se não puder destacar-se pelo talento, vença pelo esforço.

BOA PROVA!!!

R/ 5

(*) Em outras palavras, "∞" é um símbolo que é usado para representar um número grande o suficiente (positivo ou negativo), sendo que não existe apenas um número grande o suficiente que possa ser representado por ∞. Logo, não temos como determinar a "quantidade" $\infty - \infty$.

I) $\lim_{x\to 0^+}\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\frac{1}{0^+} \text{"="} +\infty} - \overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\frac{1}{0^+}\text{"="}+\infty}\right) \rightsquigarrow \infty - \infty$ (Forma indeterminada)

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{\to 0}{x}-1}{\underset{\to 0^+}{x^2}}$

"=" $-\frac{1}{0^+}$

$= -\infty$

Logo:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty}$$

II) $\lim_{x\to 0^-}\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\frac{1}{0^-}\text{"="}-\infty} + \overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\frac{1}{0^+}\text{"="}+\infty}\right)$

$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\overset{\to 0}{x}+1}{\underset{\to 0^+}{x^2}}$

"=" $\frac{1}{0^+}$

$= +\infty$

Assim:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty}$$

Gabarito - Cálculo I
P1 - 2018/1.
Prof. Yoisell R. N.

Observação: As questões (1) e (5) foram resolvidas na folha da prova.

---

(2) I) Do gráfico, podemos observar que:

$$\text{Dom } g = (-\infty,-5) \cup (-5,0) \cup (0,4) \cup (4,+\infty)$$
$$= \mathbb{R} \setminus \{-5,0,4\}.$$

Logo, a afirmação é FALSA(F).

II) Note que $g(x) < 0 \ \forall x \in (4,5)$ e $g(x) > 0 \ \forall x \in (5,+\infty)$ $\Big] \rightsquigarrow$ Portanto a afirmação é FALSA (F)..

III) Observe que: $g(2) = -1 \neq 0$. Assim, a afirmação é FALSA (F).

IV) Afirmação VERDADEIRA (V), pois: $\lim\limits_{x\to -5^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -5^+} g(x) = -\infty$

mas $\nexists\, g(-5)$ (ou seja, a função $y=g(x)$ não está definida para $x=-5$).

$\therefore g(x)$ é descontínua em $x=-5$.

V) $g(x)$ não é derivável em $x=0$, pois é uma função descontínua nesse ponto já que $\nexists\, g(0)$, ou seja, $y=g(x)$ não está definida em $x=0$.

Por outro lado: $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty \neq +\infty = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$ (Limites laterais diferentes) $\nexists \lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

Conclusão: $g(x)$ descontínua em $x=0 \Longrightarrow g(x)$ não derivável em $x=0$

Logo, a afirmação é FALSA (F).

Questão (2) Continuação ...

(2) VI) $\lim_{x \to 4^-} g(x) = -\infty \Rightarrow$ Afirmação FALSA (F).

VII) $\lim_{x \to 4^+} g(x) = -\infty \Rightarrow$ " VERDADEIRA (V).

VIII) A reta $x=0$ (o eixo dos y) é uma assíntota vertical da função $y=g(x)$, pois:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} g(x) = +\infty.$$

Assim, a afirmação é VERDADEIRA (V).

IX) Note que $y=g(x)$ é estritamente decrescente em $(-5,-3)$ e estritamente crescente no intervalo $(-3,0)$.

Portanto, a afirmação é FALSA (F).

X) Do gráfico, temos:

$$\left.\begin{array}{l} g(-6)=0 \\ g(-1)=0 \\ g(5)=0 \end{array}\right] \Rightarrow g(-6)+g(-1)+g(5) = 0+0+0=0$$

(ou seja $x=-6; -1$ e 5 são os zeros da função $y=g(x)$; isto é interceptos com o eixo dos x)

Logo, podemos concluir que a afirmação é VERDADEIRA (V).

3) I) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-3e^x}{3+2e^x} \sim \dfrac{\infty}{\infty}$ (Indeterminação).

(1ª via)

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(2-3e^x)'}{(3+2e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3\cancel{e^x}}{2\cancel{e^x}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{2} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

(2ª via)

Observe que para $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-3e^x}{3+2e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3\cancel{e^x}}{2\cancel{e^x}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{2} = \boxed{-\frac{3}{2}}$$

→ parcelas representativas.

II) $\lim\limits_{x\to0^+} e^{2010}\cdot(1+8x)^{\frac{1}{x}} \sim 1^{\infty}$ (Indeterminação)

(1ª via) $= \left(\lim\limits_{x\to0^+} e^{2010}\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to0^+}(1+8x)^{\frac{1}{x}}\right)$

$$= e^{2010}\cdot \lim_{x\to0^+} (1+8x)^{\frac{1}{8x}\cdot 8}$$

$$= e^{2010}\cdot\Big[\underbrace{\lim_{y\to0^+}(1+y)^{\frac{1}{y}}}_{=e}\Big]^8 = e^{2010}\cdot e^8 = e^{2010+8}$$

$$= \boxed{e^{2018}}$$

Fazendo $y = 8x \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0^+$

$= e$ (Limite notável) ⟷ estudado em sala de aula.

(2ª via)

Metodologia estudada em sala para calcular limites que geram indeterminações do tipo potência: $(1^{\infty}, 0^0$ ou $\infty^0)$.

• 1° passo: Calcular: $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x}\cdot\ln(1+8x)}$ ← $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)\cdot\ln f(x)$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+8x)}{x} \sim \frac{0}{0} \text{ (Forma indeterminada)}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\left(\frac{1}{1+8x}\right)\cdot 8}{1} = \lim_{x\to0^+} \frac{8}{1+\underbrace{8x}_{\to0}} = \frac{8}{1+0} = \frac{8}{1} = 8$$

• 2° passo.

Conclua que: $\lim\limits_{x\to0^+} (1+8x)^{\frac{1}{x}} = e^8$

Questão ③ II) Continuação ...

Assim,

$$\lim_{x\to 0^+} e^{2010}\cdot(1+8x)^{\frac{1}{x}} = e^{2010}\cdot e^{8} = e^{2010+8} = \boxed{e^{2018}}$$

III) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\text{sen}^2(x)}{-4x^3} \sim \left(\dfrac{0}{0}\right)$ (Indeterminação)

(1ª via) $\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(\text{sen}^2(x))'}{(-4x^3)'} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\cancel{2}^{\,1}\,\text{sen}\,x\cdot\cos x}{-\cancel{12}_{\,6}\,x^2} \sim \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$\overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(\text{sen}\,x\cdot\cos x)'}{(-6x^2)'} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(\cos x)(\cos x)-(\text{sen}\,x)\cdot(-\text{sen}\,x)}{-12x}$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\cos^2 x+\text{sen}^2 x}{-12x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{-12x} \;"="\; \left(-\dfrac{1}{12}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{0^-}\right)$

simbolicamente

$= \left(-\dfrac{1}{12}\right)\cdot(-\infty)$

$= \boxed{+\infty}$

(2ª via):

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\text{sen}^2(x)}{-4x^3} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\text{sen}\,x\cdot\text{sen}\,x}{-4\cdot x\cdot x\cdot x}$

$= -\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0^-} \underbrace{\left(\dfrac{\text{sen}\,x}{x}\right)}_{1}\cdot\underbrace{\left(\dfrac{\text{sen}\,x}{x}\right)}_{1}\cdot\underbrace{\left(\dfrac{1}{x}\right)}_{\frac{1}{0^-}} \;"="\; \left(-\dfrac{1}{4}\right)(1)\cdot(1)\cdot\left(\dfrac{1}{0^-}\right) = \left(-\dfrac{1}{4}\right)\cdot(-\infty)$

simbolicamente

$= \boxed{+\infty}$

Limite Notável (estudado em sala)

4) I) $h(x) = \dfrac{x e^{x^3}}{1-\tan x}$

$$\Rightarrow h'(x) \underset{\substack{\text{Regra de}\\ \text{derivação}\\ \text{do quociente}}}{=} \frac{(x e^{x^3})' \cdot (1-\tan x) - (x e^{x^3}) \cdot (1-\tan x)'}{(1-\tan x)^2}$$

$$\underset{\substack{\text{Regra de}\\ \text{derivação}\\ \text{do produto}\\ + \text{Regra}\\ \text{da Cadeia}}}{=} \frac{\left[(1) \cdot e^{x^3} + x \cdot e^{x^3} \cdot (3x^2)\right](1-\tan x) - x e^{x^3}(-\sec^2 x)}{(1-\tan x)^2}$$

$$\boxed{h'(x) = \frac{\left[e^{x^3} + 3x^3 e^{x^3}\right](1-\tan x) + x e^{x^3} \sec^2 x}{(1-\tan x)^2}}$$

<u>Obs</u>. Pode tentar simplificar a fração ou deixar dessa forma. (a escolha é sua!)
(Idem para ítens II) e III))

II) $m(x) = x^2 \operatorname{sen}(x) - e^{3x} \Rightarrow m'(x) = (x^2 \operatorname{sen}(x))' - (e^{3x})'$

derivada da diferença = diferença das derivadas

$$\Rightarrow m'(x) = \left[(2x)(\operatorname{sen} x) + x^2(\cos x)\right] - (e^{3x}) \cdot (3x)'$$

Derivada do produto > 1ª parcela
e Regra da Cadeia > 2ª parcela

$$\boxed{m'(x) = 2x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x - 3e^{3x}}$$

Questão (4) Continuação ...

III) $n(x) = \dfrac{x^{\frac{3}{2}} + 3\cos(x^2)}{x^5}$

$$\Longrightarrow n'(x) = \frac{\left(x^{\frac{3}{2}} + 3\cos(x^2)\right)' \cdot x^5 + \left(x^{\frac{3}{2}} + 3\cos(x^2)\right) . (x^5)'}{(x^5)^2}$$

Regra da derivação do quociente
+ Regra da soma
+ Regra da cadeia.

$$= \frac{\left[\frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} - 3\operatorname{sen}(x^2) \cdot (x^2)'\right] \cdot x^5 + \left[x^{\frac{3}{2}} + 3\cos(x^2)\right] \cdot (5x^4)}{x^{10}}$$

$$= \frac{\left[\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - 3 \cdot \operatorname{sen}(x^2) \cdot (2x)\right] x^5 + 5x^{\frac{3}{2}} . x^4 + 15x^4 . \cos(x^2)}{x^{10}}$$

$$= \frac{\left[\frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - 6x\operatorname{sen}(x^2)\right] x^5 + 5x^{\frac{3}{2}+4} + 15x^4 . \cos(x^2)}{x^{10}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}+5} - 6x^6 \operatorname{sen}(x^2) + 5x^{\frac{11}{2}} + 15x^4 . \cos(x^2)}{x^{10}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} x^{\frac{11}{2}} - 6x^6 \operatorname{sen}(x^2) + 5x^{\frac{11}{2}} + 15x^4 \cos(x^2)}{x^{10}}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2} + 5\right) x^{\frac{11}{2}} - 6x^6 \operatorname{sen}(x^2) + 15x^4 \cos(x^2)}{x^{10}}$$

$$\Rightarrow \boxed{n'(x) = \frac{\frac{13}{2} x^{\frac{11}{2}} - 6x^6 \operatorname{sen}(x^2) + 15x^4 \cos(x^2)}{x^{10}}}$$