Paula Pellacani Babilone Mannarino

2a VE de Cálculo 1-A

Questão 1) Considere a função $f(x) = e^x(x^2 - x)$, definida em seu maior domínio possível.

a) Calcular as assíntotas horizontais e verticais de f.

Sabemos que as assíntotas horizontais são calculadas a partir do $\lim_{x \to \pm\infty} f$. Logo:

$\lim_{x\to+\infty} e^x(x^2-x) = \text{"}0 \cdot \infty\text{"}$ IND. ?? e $\lim_{x\to-\infty} e^x(x^2-x) = e^{-\infty}((-\infty)^2 - (-\infty)) = \text{"}0 \cdot -\infty\text{"} \to$ IND. ? ∞

Concluímos, aqui, que não existem assíntotas horizontais, visto que $\lim_{x\to+\infty} f \neq \lim_{x\to-\infty} f$. ? ?

Ainda, observando que $f(x) = e^x(x^2 - x)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, é possível concluir que não existem assíntotas verticais. 0.25

b) Determinar em quais intervalos a função é crescente e decrescente, apresentando pontos de máximo e mínimo.

Para isto, utilizamos o Teste da Primeira Derivada, no qual analisamos a derivada de f.

$f'(x) = (e^x(x^2-x))' = \overset{f'g}{e^x \cdot (x^2-x)} + \overset{f \cdot g'}{e^x \cdot 2x - 1} \Leftrightarrow e^x((x^2-x) + (2x-1))$.

Agora, a partir de $f'(x)$, verificamos se existem pontos mínimos que, pelo Teorema de Fermat, é obtido a partir de $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x((x^2-x) + (2x-1)) = 0$

$e^x = 0 \Leftrightarrow x = +\infty$

$((x^2-x) + (2x-1)) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$ ✓

$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - (4 \cdot 1 \cdot -1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ✓

A partir dos valores obtidos, fazemos uma análise de sinais a partir de uma tabela:

f'	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
e^x	−	+	+
x^2+x-1	+	+	+
	−	+	+
	Dec.	Cres	Cresc.

Logo, concluímos que f é:

0.75
- Decrescente em $(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$
- Crescente em $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$ e

Crescente em $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$ ✓

c) Determine os intervalos onde f tem concavidade para baixo e onde tem para cima, e também os pontos de inflexão.

Para isto, utilizamos o Teste da Segunda Derivada, no qual analisamos f'':

$f'' = (e^x((x^2-x) + (2x-1)))' = (e^x(x^2+x-1))' = e^x(x^2+x-1) + e^x(2x+1) = e^x((x^2+x-1) + (2x+1))$

De mesmo modo, encontramos os pontos onde $f''(x) = 0$:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(\underbrace{(x^2+x-\cancel{1}) + (2x+\cancel{1})}_{3x}) = 0$

$e^x = 0 \Leftrightarrow x = \infty$ ✓

$(x^2+x-1) + (2x+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0$

$\Rightarrow x^2 = -3x \Leftrightarrow x = \frac{-3x}{x} \Leftrightarrow \boxed{x = -3}$ ou $\boxed{x = 0}$

Novamente, fazemos uma análise com o auxílio de uma tabela, que está na página a seguir devido ao pouco espaço. ✓

$A_{\square} = y \cdot x$ | $\frac{1500\,m^2}{x} = y$

$x + 2y$

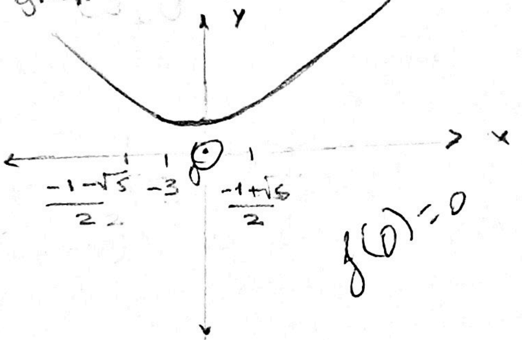
f''	$-\infty$	-3	0	
e^x	$-$	$-$	$+$	
x^2+3x	$+$	$-$	$+$	
	$-$	P.I. $+$	$+$	

0.75

Logo, concluímos que f tem concavidade para cima em $(-3,0)$ e $(0,+\infty)$ e concavidade para baixo em $(-\infty,-3)$. Além disso, o ponto de inflexão é -3.

d) Faça um esboço do gráfico, utilizando as informações dos itens a, b e c.

Teremos, portanto, como gráfico de $f(x) = e^x(x^2-x)$:



0

$f(0)=0$

Questão 02) Use derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente à curva $\ln(x-y) = (x+1)y - y^3$ no ponto $(3,2)$.

Primeiro, derivamos a curva em respeito a $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}\ln(x-y) = \frac{dy}{dx}(x+1)y - y^3 \Leftrightarrow \frac{(x-y)'}{x-y} = 1.y + (x+1)y' - 3y^2y'$$

$$\Rightarrow \frac{1-y'}{x-y} = y + xy' + y' - 3y^2y' \Leftrightarrow 1-y' = xy - y^2 + x^2y' - xy'y - 3xy^2y' - 3y^3y'$$

$$\Rightarrow 1-y' = xy - y^2 + y'(x^2 - xy - 3xy^2 - 3y^3) \Leftrightarrow -y' = xy - y^2 + y'(x^2 - xy - 3xy^2 - 3y^3) - 1$$

$$\Rightarrow -xy - y^2 + 1 = y'(x^2 - xy - 3xy^2 - 3y^3) + y' \Leftrightarrow -xy - y^2 + 1 = y'(x^2 - xy - 3xy^2 - 3y^3 + 1)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-xy - y^2 + 1}{x^2 - xy - 3xy^2 - 3y^3 + 1}$$ é a derivada implícita de $\ln(x-y) = (x+1)y - y^3$.

Agora, para o cálculo da reta tangente, relembramos sua fórmula $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ e reaplicamos:

$f(3) = 2$ e $f'(3) = \frac{-3.2 - 2^2 + 1}{3^2 - 3.2 - 3.3.2^2 - 3.2^3 + 1} = \frac{-6-4+1}{9-6-36-23} = \frac{-9}{-56} = \frac{9}{56}$

Logo, concluímos que a equação da reta tangente à esta curva é dada por:

$y = 2 + \frac{9}{56}(x-3)$

1.5

Questão 03) Calcular os limites, caso existam:

) $\lim_{x \to 0^+} \ln(x)\tan(x) \underset{\downarrow}{=}$ "$\infty.0$", que é indeterminado. Logo: $\lim_{x \to 0^+} \ln(x)\tan(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\tan(x)}{\frac{1}{\ln(x)}}$

por avaliação

"$\frac{0}{0}$" $\underset{L'H}{=} \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\tan(x)}{\frac{1}{\ln(x)}} \right)' = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sec^2(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sec^2(x)}{x} =$ "$\frac{0}{0}$" $\underset{L'H}{=} \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\sec^2(x)}{x} \right)'$

...ria ind., porém
...demos aplicar L'H

Errou derivada!!

0

$\lim_{x \to 0^+} \frac{2\sec^2(x).\tan(x)}{1} = \frac{2.0.0}{1} = \frac{0}{1} = 0.$

$\lim_{x \to +\infty} x^{1/x} \underset{\downarrow}{=} \infty^{1/\infty} =$ "∞^0", que é indeterminado. Porém, reescrevemos como:

por avaliação

...m $\lim_{x \to +\infty} e^{1/x \ln x}$ e fazemos o cálculo do $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}.\ln x =$ "$0.\infty$" $= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\frac{1}{\frac{1}{x}}} =$ "$\frac{\infty}{\infty}$"

...H $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

...gora, retornemos $\lim_{x \to \infty} e^{1/x \ln x} = e^0 = 1$

1

...uestão 04) Se $f: [-1,2] \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $f(-1)=10$, $f(0)=3$, $f(2)=1$

$f'(x) < 0$ em $[-1,2]$:

Qual o ponto mínimo absoluto de f? Justifique.

Se é um extremo $\Rightarrow$

Não. $\Rightarrow$ é crítico

...egundo o Teorema de Fermat, se $c \in [a,b]$ e $f'(c)=0$, c é um ponto extremo de f.

...partir disso, poderíamos calcular $f'(c)$ pelo Teorema do Valor Médio, que afirma ... se f é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b), com $f(a) \neq f(b)$, teremos o ...lculo de $f'(c)$ a partir da equação $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Com isso, faríamos:

$f'(c) = \frac{1-10}{2-(-1)} \Leftrightarrow 0 = \frac{-9}{3} = \frac{-1}{3} \Leftrightarrow 0 = \frac{-1}{3}$. Porém, esta hipótese é um absurdo, pois ... não é igual a $\frac{-1}{3}$ e, já observando anteriormente que $f'(x) < 0$ em $[-1,2]$, observa-se ... não existe ponto mínimo absoluto em f.

0

Prove que existem x_0 e x_1 em $[-1,2]$, tais que $f'(x_0) = -1$ e $f'(x_1) = -3$

...n primeira instância, notavelmente, $f'(x) < 0$ para $[-1,2]$. Logo, existem x_1 e x_0 tal ...e suas derivadas são -3 e -1.

0

1- 11.1

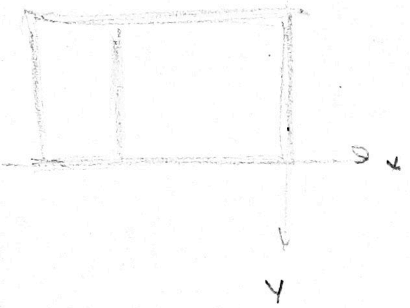
12204201u

aula Pellacani Basilone Mannarino

ª VE de Cálculo 1-A

Questão 05) Um agricultor quer cercar uma área de $1500m^2$ num campo retangular e então dividi-lo ao meio c/ uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isso de modo a minimizar o custo da cerca?

Para minimizar o custo, é preciso das mínimas dimensões possíveis, o que nos remete ao conceito de mínimo absoluto.



A área total é calculada por: $A_t = xy$.

E o perímetro da cerca é dado por: $P_c = 2(x+y) + y$.

Sabendo que $A_t = 1500 \Rightarrow 1500 = x \cdot y \Leftrightarrow y = \frac{1500}{x}$

Logo, substituímos P_c por:

$$P_c = 2\left(x + \frac{1500}{x}\right) + \frac{1500}{x} = P_c = 2x + \frac{3000}{x} + \frac{1500}{x}$$

(*) $P_c = 2x + \frac{4500}{x} \Rightarrow P_c = 2x^2 + 4500$, onde $0 \leq x \leq \sqrt[2]{2250}$

(*) Analisando o intervalo fechado dessa equação, $[0, \sqrt{2250}]$, percebemos que é possível calcular o mínimo absoluto a partir do Teorema de Weirstrass, que afirma que $\exists\ c \in f:[a,b] \ / \ f([a,b]) = [M,m]$, sendo M e m o máximo e o mínimo.

Fazemos, então:

1. Cálculo dos pontos críticos de $f'(x)$, sendo $f'(x) = (2x^2+4500)' = f'(x) = 4x$.

Logo, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Logo, 0 é um ponto crítico.

2. Escrevemos o conjunto dos pontos críticos como $T = \{0, \sqrt[2]{2250}\}$

3. Escrevemos o conjunto $f(T) = \{4500, 9000\}$

E notamos que o mínimo absoluto de f seria igual a 4500, com $x=0$. Porém, por lógica, não podemos supor por absurdo que o comprimento do retângulo é de tamanho 0, pois $y = \frac{1500}{0}$ não é determinado. Portanto, usamos o valor 9000, concluindo que, para atingir o menor custo possível para a instalação da cerca, seu comprimento deve ser igual a $\sqrt[2]{2250}$ m ou $15\sqrt[2]{10}$ m, e sua largura igual a $\frac{1500}{15\sqrt{10}}$

$= \frac{100}{\sqrt{10}}$ m.

1

UFF - IME - Departamento de Matemática Aplicada
V2B
Nome: Paula Pellacani Babilone Mannarino

Questão	Valor	Nota
1	3,0	1.75
2	1,5	1.5
3	2,0	1
4	1,5	0
5	2,0	2
Total:	10,0	6.25

2a VE de Cálculo 1A

14/07/2022

1. Considere a função $f(x) = e^x\left(x^2 - x\right)$, definida em seu maior domínio possível.

0.25 (a) Determine, caso existam, as assíntotas horizontais e as assíntotas verticais do gráfico de f.

(b) Determine em quais intervalos a função é crescente e em quais ela é decrescente, apresentando
0.75 os pontos de máximo ou mínimo locais, se existirem.

(c) Determine os intervalos onde f tem concavidade para baixo e onde tem concavidade para cima.
0.75 Determine também os pontos de inflexão, caso existam.

0 (d) Faça um esboço do gráfico, utilizando todas as informações dos itens anteriores.

---

2. Use derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente à curva $\ln(x - y) = (x+1)y - y^3$, no ponto $(3, 2)$.

---

3. Calcule os limites abaixo, caso existam.

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)\tan(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{1/x}$

---

4. Se $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $f(-1) = 10$, $f(0) = 3$, $f(2) = 1$ e $f'(x) < 0$ em $[-1, 2]$,

(a) Qual o ponto de mínimo absoluto de f? Justifique.

(b) Prove que existem x_0 e x_1 em $[-1, 2]$ tais que

$$f'(x_0) = -1, f'(x_1) = -3.$$

(c) A função f possui inversa? Justifique.

(d) Utilizando o item (b), se $f(x_0) = y_0$ e $f(x_1) = y_1$, calcule $(f^{-1})'(y_0)$ e $(f^{-1})'(y_1)$.

---

5. Um agricultor quer cercar uma área de 1500m^2 num campo rectangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isso de forma a minimizar o custo da cerca?
