ESCOLA DE ENGENHARIA DE VOLTA REDONDA (EEIMVR-UFF)
Departamento de Ciências Exatas (VCE)

Primeira Avaliação (P1) - 2019/2

Disciplina:	**Equações Diferenciais Ordinárias** | Data: **11/10/2019**	**Folhas**	**NOTA**
Professor:	Yoisell Rodríguez Núñez		
Aluno(a):			

1. (2,00 pontos) Assinale com a letra **V** para VERDADEIRA ou a letra **F** para FALSA, as afirmações abaixo, justificando cada resposta dada:

a) V $\mu(x) = e^{2x}$ não é um **fator integrante** da EDO de 1^a ordem linear $y' + \dfrac{y}{2} = 2 + x$.

b) F A função $y(x) = \dfrac{1}{Cx - x^2}$ não representa representa a **solução geral da EDO de Bernoulli**: $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y = xy^2$.

c) F A EDO $\left(\dfrac{2019e^x}{\ln x} - 5x^2y^3\right)dx + \left(5x^3y^2 + \dfrac{\operatorname{sen}(3y)\cos(y^5)}{y^3}\right)dy = 0$ é **exata**.

d) V $\{e^{-4t}, e^{5t}\}$ não representa um **conjunto fundamental de soluções** da EDO: $y'' - 9y' + 20y = 0$.

2. (2,50 pontos) Determine a **solução geral** da EDO: $(3y - 3\operatorname{sen}y - 3x - 1)dx + (1 - \cos y)dy = 0$

3. (2,50 pontos)* Resolva o **PVI**: $\begin{cases} xy' = y + 2xe^{-\frac{y}{x}}, \\ y(1) = 2 \end{cases}$

4. (2,50 pontos)* Encontre a **solução da EDO** abaixo, sabendo que $y_1(x) = x - 1$ é uma solução particular desta equação:
$$\frac{dy}{dx} + xy^2 - 2x^2y + x^3 = x + 1.$$

5. (3,00 pontos) Considere o **sistema massa-mola** sujeito a um termo forçante que é **descrito pela EDO**:
$$x'' + 81x = -8\operatorname{sen}(4t)$$

a) Encontre a **solução geral da EDO** acima.

b) Resolva o **PVI** para $x(0) = 3$ e $x'(0) = 5$.

c) Identifique, **sem calcular os coeficientes**, a forma de uma solução particular da EDO:
$$x'' + 81x = e^{-3t} + 5t^2 + 3e^{7t}\cos(4t)$$

Observações:

- ***Escolha** a questão **3 ou 4** para resolver.
- As **demais questões** são de **resolução obrigatória**.
- Todas **as respostas devem ser justificadas**, isto é, acompanhadas dos argumentos e/ou cálculos usados para obtê-las.

O único lugar onde o SUCESSO vem antes do TRABALHO é no dicionário.

BOA PROVA!!!

GABARITO - P1

EDO

2019/2

1) a) $\boxed{y' + \frac{y}{2} = 2 + x}$ (I)

$p(x) = \frac{1}{2}$ e $q(x) = 2 + x$

Assim, o fator integrante da EDO (I) pode ser calculado na forma:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \frac{1}{2}dx} = e^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{x}{2}} \neq e^{2x}.$$

Logo, a afirmação é <u>VERDADEIRA</u> (V).

b) $\boxed{\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\cdot y = xy^2}$ (II) (EDO de Bernoulli)

Note que: $y(x) = \frac{1}{Cx - x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\overbrace{\cancel{0(Cx-x^2)}}^{0} - 1(C-2x)}{(Cx-x^2)^2}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x - C}{(Cx-x^2)^2}$$

Assim, temos:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\cdot y} = \frac{2x-C}{(Cx-x^2)^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{Cx-x^2}\right) = \frac{2x-C}{(Cx-x^2)^2} + \frac{1}{x(Cx-x^2)}$$

$$= \frac{x(2x-C) + (Cx-x^2)}{x(Cx-x^2)^2} = \frac{2x^2 - \cancel{Cx} + \cancel{Cx} - x^2}{x(Cx-x^2)^2}$$

$$= \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(Cx-x^2)^2} = \frac{x}{(Cx-x^2)^2} = x\cdot\frac{1}{(Cx-x^2)^2} = \boxed{x\cdot y^2}$$

ou seja, $y(x) = \frac{1}{Cx-x^2}$, $C \in \mathbb{R}$ é a solução geral de (II). ∴ Afirmação <u>FALSA</u> (F)

Questão 1) (Continuação...)

1) c) $$\underbrace{\left(\frac{2019e^x}{\ln x} - 5x^2y^3\right)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{\left(5x^3y^2 + \frac{\operatorname{sen}(3y)\cos(y^5)}{y^3}\right)}_{N(x,y)}dy = 0$$

A EDO acima é exata desde que: $\boxed{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}$

Observe que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2019e^x}{\ln x} - 5x^2y^3\right) = \cancel{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2019e^x}{\ln x}\right)} \to 0$$
$$- \frac{\partial}{\partial y}(5x^2y^3)$$
$$= -15x^2y^2$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(5x^3y^2 + \frac{\operatorname{sen}(3y)\cdot\cos(y^5)}{y^3}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(5x^3y^2) + \cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\operatorname{sen}(3y)\cdot\cos(y^5)}{y^3}\right)} \to 0$$
$$= 15x^2y^2$$

ou seja, $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

Logo, a EDO não é exata. $\therefore$ A afirmação é FALSA (F).

d) $\boxed{y'' - 9y' + 20y = 0}$ (III)

Eq. característica: $r^2 - 9r + 20 = 0 \Rightarrow (r-4)(r-5) = 0$

$$\begin{array}{c} r \quad -4 \\ r \quad -5 \\ \hline -5r - 4r = -9r \end{array}$$

$\Rightarrow r_1 = 4$ ou $r_2 = 5$

Logo, $\{e^{4t}, e^{5t}\}$ é um conjunto fundamental de soluções de (III). Afirmação VERDADEIRO (V)

2) $\underbrace{\left(3y-3\operatorname{sen}y-3x-1\right)}_{\overset{\shortparallel}{M(x,y)}}dx+\underbrace{(1-\cos y)}_{\overset{\shortparallel}{N(x,y)}}dy=0 \quad (\mathrm{IV})$

Obs:

$\frac{\partial M}{\partial y}=3-3\cos y$ e $\frac{\partial N}{\partial x}=0$

$=3(1-\cos y)$

Logo, como $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x} \Longrightarrow$ EDO (IV) não é exata.

Fator integrante:

$$\mu(x)=e^{\int\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right)dx}=e^{\int\left[\frac{3(1-\cos y)-0}{1-\cos y}\right]dx}=e^{\int\frac{3\cancel{(1-\cos y)}}{\cancel{1-\cos y}}dx}$$

$$=e^{\int 3dx}=e^{3x}$$

Assim, multiplicando a EDO (IV) pelo fator integrante, temos:

$$\underbrace{e^{3x}(3y-3\operatorname{sen}y-3x-1)}_{\tilde{M}(x,y)}dx+\underbrace{e^{3x}(1-\cos y)}_{\tilde{N}(x,y)}dy=0 \quad (\mathrm{IV})'$$

$\frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}=e^{3x}\cdot(3-3\cos y)$ e $\frac{\partial\tilde{N}}{\partial x}=3e^{3x}(1-\cos y)$

$=3e^{3x}(1-\cos y)$

$\Longrightarrow \frac{\partial\tilde{M}}{\partial y}=\frac{\partial\tilde{N}}{\partial x} \Longrightarrow$ a EDO (IV)' é exata.

Portanto, $\exists\ \phi=\phi(x,y)$ (fator integrante) tal que:

$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\tilde{M}(x,y)$ e $\frac{\partial\phi}{\partial y}=\tilde{N}(x,y)$

Questão 2) (Continuação ...)

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = e^{3x}(1-\cos y)$$

$$\Rightarrow \phi(x,y) = \int e^{3x}(1-\cos y)\,dy = e^{3x}(y-\operatorname{sen} y) + C(x)$$

Integ em y.

$\Downarrow$ derivando em x:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 3e^{3x}(y-\operatorname{sen} y) + C'(x)$$

$$= e^{3x}(3y - 3\operatorname{sen} y - 3x - 1)$$

$$\Rightarrow \cancel{3e^{3x}y} - \cancel{3e^{3x}\operatorname{sen} y} + C'(x) = \cancel{3e^{3x}y} - \cancel{3e^{3x}\operatorname{sen} y} - 3xe^{3x} - e^{3x}$$

$$\Rightarrow C'(x) = -3xe^{3x} - e^{3x}$$

$$\Rightarrow C(x) = -\int [3xe^{3x} + e^{3x}]\,dx = -\underbrace{\int 3xe^{3x}\,dx}_{I} - \int e^{3x}\,dx$$

$$= -I - \frac{e^{3x}}{3} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

$$= \left(-xe^{3x} + \cancel{\frac{e^{3x}}{3}}\right) - \cancel{\frac{e^{3x}}{3}} + C_1 = -xe^{3x} + C_1$$

$$I = xe^{3x} - \int e^{3x}\,dx = xe^{3x} - \frac{e^{3x}}{3}$$

Int x partes

$u = x \qquad du = dx$

$dv = 3e^{3x}\,dx \qquad v = e^{3x}$

$$\therefore \boxed{e^{3x}(y - \operatorname{sen} y) - xe^{3x} = C_2}$$

$C_2 \in \mathbb{R}$

Representa a solução geral de (IV)

3) $(*)\begin{cases} xy' = y + 2x e^{-\frac{y}{x}} & (\mathrm{V}) \\ y(1) = 2 \end{cases}$

EDO Homogênea

$$\boxed{y' = \frac{y + 2x e^{-\frac{y}{x}}}{x}} = \frac{y}{x} + 2e^{-\frac{y}{x}} \quad \forall x \neq 0$$

Mudança de variável: $y = v.x$ (ou seja, $v = \frac{y}{x}$) $\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = v.\frac{dx}{dx} + x\frac{dv}{dx}$

$$= v + x\frac{dv}{dx}$$

Assim, temos:

$$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = \cancel{v} + 2e^{-v}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = 2e^{-v} \underset{\text{Separando variáveis}}{\Longrightarrow} e^{v}dv = \frac{2}{x}dx$$

$\Downarrow$ Integrando

$$\int e^{v}dv = \int \frac{2}{x}dx$$

$$e^{v} = 2\ln|x| + C_1$$

$\exists C$ tal que: $C_1 = \ln C$

$$\Rightarrow e^{v} = \ln|x^2| + \ln C$$

$$\Rightarrow e^{v} = \ln|Cx^2|$$

$$\Rightarrow e^{\frac{y}{x}} = \ln|Cx^2| \quad (\text{Solução geral de } (\mathrm{V}))$$

$v = \frac{y}{x}$

avaliando na condição inicial: $y(1) = 2$

$$e^{\frac{2}{1}} = \ln|C.1^2| \Rightarrow e^2 = \ln|C| \rightarrow C = e^{e^2}$$

Assim, $\boxed{e^{\frac{y}{x}} = \ln|e^{e^2}.x^2|}$ representa a solução do PVI $(*)$.

4) $\boxed{\dfrac{dy}{dx} + xy^2 - 2x^2y + x^3 = x+1}$ (VI) (Eq. de Riccati)

$y_1(x) = x - 1$ (solução particular)

$\boxed{\dfrac{dy}{dx} = -xy^2 + 2x^2y - x^3 + x + 1}$; $q(x) = -x$; $p(x) = 2x^2$ e

$r(x) = -x^3 + x + 1$

$\left(\dfrac{dy}{dx} = q(x)\cdot y^2 + p(x)\cdot y + r(x)\right)$

Mudança de variável:

$z = y - y_1 = y - (x-1) = y - x + 1$

$\Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{dy}{dx} - 1 = (-xy^2 + 2x^2y - x^3 + x + \cancel{1}) - \cancel{1}$

$\Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = -xy^2 + 2x^2y - x^3 + x$; com:

$y = y_1 + z$

$= x - 1 + z$

$$\frac{dz}{dx} = -x(x-1+z)^2 + 2x^2(x-1+z) - x^3 + x$$

$$= -x\left[(x-1)^2 + 2(x-1)z + z^2\right] + 2x^3 - 2x^2 + 2x^2z - x^3 + x$$

$$= -x\left[x^2 - 2x + 1 + 2xz - 2z + z^2\right] + x^3 - 2x^2 + 2x^2z + x$$

$$= \cancel{-x^3} + \cancel{2x^2} - \cancel{x} - \cancel{2x^2z} + 2xz - xz^2 + \cancel{x^3} - \cancel{2x^2} + \cancel{2x^2z} + \cancel{x}$$

$\Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = 2xz - xz^2 \Longrightarrow \boxed{\dfrac{dz}{dx} - 2xz = -xz^2 \quad (*)}$ (EDO de Bernoulli) c/ $n = 2$

Mudança de variável: $v = z^{1-n} = z^{1-2} = z^{-1} = \dfrac{1}{z}$

$\Rightarrow \dfrac{dv}{dx} = -1\cdot z^{-2}\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1}{z^2}\dfrac{dz}{dx}$

Multiplicando a EDO (*) por "$-\dfrac{1}{z^2}$", temos:

$-\dfrac{1}{z^2}\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{1}{z^{\cancel{2}}}\cdot 2x\cancel{z} = \dfrac{1}{\cancel{z^2}}\cdot x\cancel{z^2}$

$\Rightarrow \overbrace{-\dfrac{1}{z^2}\dfrac{dz}{dx}}^{=\frac{dv}{dx}} + 2x\cdot\overbrace{\left(\dfrac{1}{z}\right)}^{=v} = x \Longrightarrow \dfrac{dv}{dx} + 2x\cdot v = x$

Questão 4) (Continuação...)

$$(**) \quad \boxed{\frac{dv}{dx} + 2x \cdot v = x}$$ (EDO 1ª ordem Linear)

Fator integrante: $\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$

Multiplicando a EDO $(**)$ pelo fator integrante:

$$\underbrace{e^{x^2} \cdot \frac{dv}{dx} + e^{x^2} \cdot 2x \cdot v}_{= \frac{d}{dx}(v \cdot e^{x^2})} = e^{x^2} \cdot x \Rightarrow \frac{d}{dx}(v e^{x^2}) = e^{x^2} \cdot x$$

↳ Integrando em x:

$$v \cdot e^{x^2} = \underbrace{\int e^{x^2} \cdot x \, dx}_{\boxed{*}} + C \; ; \; C \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{*} = \int e^u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

Subst
$u = x^2$
$du = 2x\,dx$
$\Rightarrow x\,dx = \frac{du}{2}$

$$\Rightarrow v \cdot e^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{v(x) = \frac{1}{2} + \frac{C}{e^{x^2}} = \frac{e^{x^2} + 2C}{2e^{x^2}}} \Longrightarrow \boxed{z = \frac{1}{v} = \frac{2e^{x^2}}{e^{x^2} + 2C}}$$

↳ Solução geral de $(**)$

$v = \frac{1}{z}$ $\left(\Rightarrow z = \frac{1}{v}\right)$

↳ Solução geral de $(*)$

Assim, a solução geral da Eq. de Riccati (VI) é da forma:

$$\boxed{y(x) = y_1(x) + z(x) = x - 1 + \frac{2e^{x^2}}{e^{x^2} + 2C}} \; ; \; C \in \mathbb{R}.$$

5) a) $\boxed{x'' + 81x = -8\,\text{sen}(4t)}$ (VII)

Primeiro, precisamos resolver a EDO homogênea:

$\boxed{x'' + 81x = 0}$ (VIII)

Eq. característica: $r^2 + 81 = 0 \Longrightarrow r^2 = -81 \Longrightarrow r_1 = 9i$, $r_2 = -9i$

autovalores complexos conjugados com:
$\alpha = 0$ (parte real)
$\beta = 9$ (" imaginária)

Assim, temos o sistema fundamental de soluções da EDO (VIII) na forma:

$$\{e^{\alpha t}\text{sen}(\beta t);\ e^{\alpha t}\cos(\beta t)\}$$

$$= \{\cancel{e^{0\cdot t}}^{1}\cdot\text{sen}(9t);\ \cancel{e^{0\cdot t}}^{1}\cdot\cos(9t)\}$$

$$= \{\text{sen}(9t);\ \cos(9t)\} \Longrightarrow \boxed{x_h(t) = C_1\,\text{sen}\,9t + C_2\cos 9t}$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Solução geral de (VIII).

Agora, precisamos encontrar uma solução particular da EDO (VII) (via método de variação de parâmetros ou pelo método dos coeficientes a determinar):

"Olhando" para o membro à direita de (VII), podemos supor uma solução particular na forma:

$$x_p(t) = A\,\text{sen}(4t) + B\cos(4t)$$
$$\Longrightarrow x_p'(t) = 4A\cos(4t) - 4B\,\text{sen}(4t)$$
$$\Longrightarrow x_p''(t) = -16A\,\text{sen}(4t) - 16B\cos(4t)$$

Subst em (VII), temos:

$$\Rightarrow [-16A\,\text{sen}(4t) - 16B\cos(4t)] + 81\cdot[A\,\text{sen}(4t) + B\cos(4t)] = -8\,\text{sen}(4t)$$

Questão 5) a) (Continuação ...)

$$\Rightarrow 65A\,\text{sen}(4t) + 65B\cos(4t) = \underbrace{-8\,\text{sen}(4t)}_{=\,-8\,\text{sen}(4t)\,+\,0\cdot\cos(4t)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 65A = -8 \Rightarrow A = -\dfrac{8}{65} \\ 65B = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

Assim, $\boxed{x_p(t) = -\dfrac{8}{65}\,\text{sen}(4t)}$ representa uma solução particular da EDO não-homogênea (VII)

Logo, a solução geral da EDO (VII) é dada por:

$$x(t) = \underbrace{x_h(t)}_{\text{Solução geral da EDO Homogênea associada}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{Solução particular da EDO não-homogênea}} = C_1\,\text{sen}(9t) + C_2\cos(9t) - \frac{8}{65}\,\text{sen}(4t)$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

b) Avaliando as condições iniciais ($x(0) = 3$ e $x'(0) = 5$) para encontrar a solução do PVI associado à EDO (VII), temos:

$$3 = x(0) = C_1\cdot\text{sen}(9.0) + C_2\cdot\cos(9.0) - \frac{8}{65}\cdot\text{sen}(4.0)$$

$$= C_1\cdot\cancelto{0}{\text{sen}\,0} + C_2\cdot\cancelto{1}{\cos 0} - \frac{8}{65}\cdot\cancelto{0}{\text{sen}\,0} = C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 3}$$

$$5 = x'(0) = 9C_1\cos(9.0) - 9C_2\,\text{sen}(9.0) - \frac{32}{65}\cos(4.0)$$

$$= 9C_1\cdot\cancelto{1}{\cos 0} - 9\cdot C_2\cdot\cancelto{0}{\text{sen}\,0} - \frac{32}{65}\cdot\cancelto{1}{\cos 0}$$

$$= 9C_1 - \frac{32}{65} \Rightarrow 9C_1 - \frac{32}{65} = 5 \Rightarrow 9C_1 = 5 + \frac{32}{65}$$

$$\Rightarrow 9C_1 = \frac{325+32}{65} = \frac{357}{65}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{357}{585}}$$

Assim, a solução do PVI é dada por:

$$\boxed{x(t) = \frac{357}{585}\,\text{sen}(9t) + 3\cos(9t) - \frac{8}{65}\,\text{sen}(4t)}$$

Questão 5) (Continuação...)

5.c) $\underbrace{\underbrace{\underbrace{x'' + 81x = e^{-3t}}_{x_{p_1}(t) = Ae^{-3t}} + 5t^2}_{x_{p_2}(t) = Bt^2 + Ct + D} + 3e^{7t}\cos(4t)}_{x_{p_3}(t) = E\cdot e^{7t}\cos(4t) + Fe^{7t}\operatorname{sen}(4t)}$ (IX)

$\therefore$

$$\boxed{\begin{aligned} x_p(t) &= x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t) + x_{p_3}(t) \\ &= Ae^{-3t} + Bt^2 + Ct + D + Ee^{7t}\cos(4t) + Fe^{7t}\operatorname{sen}(4t) \end{aligned}}$$

Representa uma solução particular da EDO (IX), com os coeficientes A, B, C, D, E e F a determinar.