ESCOLA DE ENGENHARIA DE VOLTA REDONDA (EEIMVR-UFF)
Departamento de Ciências Exatas (VCE)

Segunda Avaliação (P2) - 2018/1

Disciplina:	**Cálculo I**	Data: **28/06/2018**	**NOTA**
Professor:	Yoisell Rodríguez Núñez		
Aluno(a):	—		

1. (2.5 pontos) **Esboce** o gráfico da função $f(x) = \dfrac{12(1-x)}{x^2}$, sabendo que: $f'(x) = \frac{12(x-2)}{x^3}$ e $f''(x) = \frac{24(3-x)}{x^4}$.

2. (1.5 pontos) Há várias semanas o Departamento de Estradas da cidade de Moscou vem registrando a velocidade do tráfego em uma saída da rodovia próxima ao Estadio Olímpico Luzhnikí (sede da Copa do Mundo da Rússia). os dados sugerem que a velocidade do tráfego na saída (em Km/h) é modelada pela função polinomial $v(t) = t^3 - 10,5t^2 + 30t + 20$, onde t é o número de horas após o meio dia. A que horas entre às 15:00 e às 18:00, o tráfego se move **mais rápido** e a que horas ele se move **mais lentamente**?

3. (1.5 pontos) Verifique as condições do **Teorema do Valor Médio** para a função $h(x) = x^2 - 9x + 14$ no intervalo $[0, 5]$ e determine o(s) valor(es) de x_0 correspondente(s) à conclusão do teorema.

4. (3,0 pontos) Calcule as seguintes **integrais**:

1,0 I) $\displaystyle\int \frac{6x}{(5-3x^2)^2}dx$ 1,0 II) $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)dx$ 1,0 III) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2+3x-10}dx$

5. (1.5 pontos) Determine a **área** entre as funções $g(x) = 3 - x^2$ e $h(x) = x + 1$.

6. (1,0 ponto)[extra] Analise as afirmações abaixo e marque **V** para o(s) resultado(s) verdadeiro(s) e **F** para o(s) resultado(s) falso(s). **Justifique** sua resposta.

0,25 I) F A **integral definida** de uma função de variável real é uma outra função chamada de primitiva.

0,25 II) V $\displaystyle\int_0^1 \frac{6x^5}{x^6+2018}dx = \ln(2019) - \ln(2018)$.

0,25 III) F A função $P(x) = \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^4}{4} - 3x$ é uma **primitiva** da função $p(x) = x^5 + 2x^3 - 3$.

0,25 IV) V $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}dx = \frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1) + C$, onde $C \in \mathbb{R}$.

Observação

- Todas as respostas devem estar justificadas, isto é, acompanhadas dos argumentos e/ou cálculos usados para obtê-las.

Assim como problemas surgem, as soluções aparecem...

BOA PROVA!!!

P2 - Cálculo I
2018/1

Prof. Yoisell R. N

Gabarito

(1) $f(x) = \dfrac{12(1-x)}{x^2}$

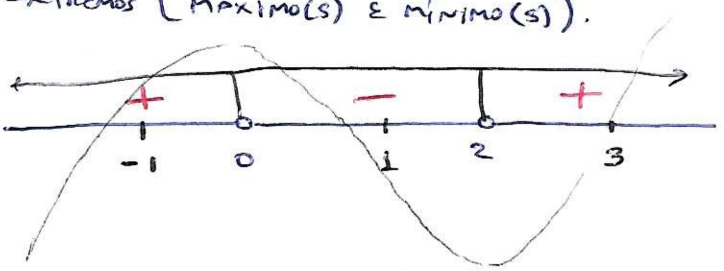
I- $\text{Dom} f = \mathbb{R}\setminus\{0\} = \mathbb{R}^*$

II- Pontos de interseção com os eixos coordenados

- Com o eixo y $\rightsquigarrow$ $\nexists$ pois $x \neq 0$
- Com o eixo x $(y=0) \rightsquigarrow 0 = \dfrac{12(1-x)}{x^2} \Rightarrow x = 1 \rightsquigarrow$ Pto de interseção $(1,0)$.

III- Pontos críticos? $\rightsquigarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{12(x-2)}{x^3} = 0 \Rightarrow x = 2$

IV- Extremos (máximo(s) e mínimo(s)).



$f'(x) = \dfrac{12(x-2)}{x^3}$

Logo:

$f \uparrow$ em $(-\infty,0) \cup (2,+\infty)$

$f \downarrow$ em $(0,2)$

$\Rightarrow x = 2$ é pto de mínimo para $f(x)$.

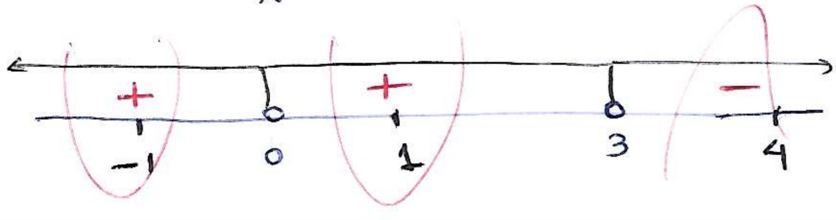
$\mapsto$ Obs:

- $x=0$ NÃO pode ser extremo de f, pois: $0 \notin \text{Dom} f$.
- $x = 2 \Rightarrow f(2) = \dfrac{12(1-2)}{2^2} = \dfrac{\cancel{12}^{3}(-1)}{\cancel{4}_{1}} = -3$

$\Rightarrow (2,-3)$ mínimo.

V- Concavidade e pontos de inflexão:

$f''(x) = \dfrac{24(3-x)}{x^4} = 0 \Leftrightarrow x = 3$



$f''(x) = \dfrac{24(3-x)}{x^4}$

Questão (1) (Continuação)...

Assim,

$$\left.\begin{array}{l} f \cup \text{ em } (-\infty,0) \cup (0,3) \\ f \cap \text{ em } (3,+\infty) \end{array}\right] \Longrightarrow x_0 = 3$$ é a abcissa de um ponto de inflexão da função $f(x)$.

$\rightarrow$ Obs: $f(3) = \frac{12(1-3)}{3^2} = \frac{\cancel{12}^{4}(-2)}{\cancel{9}_{3}} = -\frac{8}{3}$

$\Rightarrow (3,-\frac{8}{3})$ pto de inflexão.

VI - Assíntotas ?

- Assíntota(s) horizontal(is):

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{12(1-x)}{x^2} \rightsquigarrow \frac{\infty}{\infty}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{12(-1)}{2x} = 0 \Longrightarrow y = 0 \text{ (Eixo x)}$$

é uma assíntota horizontal para $f(x)$.

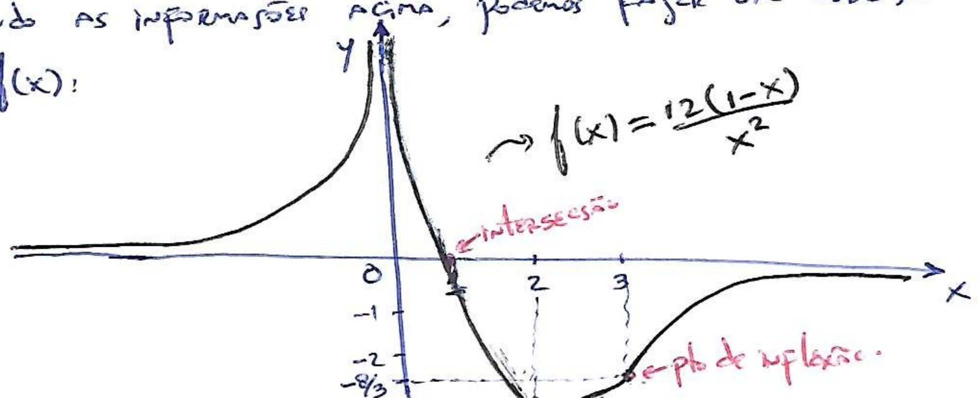
- Assíntota(s) vertical(is).

Observe que $x=0$ (Eixo y) representa uma assíntota vertical de $f(x)$, pois:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{12(1-x)}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{12(1-x)}{x^2} = +\infty$$

Portanto, juntando as informações acima, podemos fazer um esboço do gráfico da função $y=f(x)$:



(2) Problema 1 (Problemas de Otimização - Lista 4. "Aplicações da Derivada")
(Adaptado)
Disponível no site da Disciplina.

---

(3) • Condições (hipóteses) do TEOREMA DO VALOR MÉDIO.

$h(x) = x^2 - 9x + 14$ ← função polinomial de 2º grau

• $h(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$, em particular é uma função contínua em $[0,5]$

• $h(x)$ é derivável em $\mathbb{R}$, em particular, derivável no intervalo $(0,5)$.

Assim, pelo TEOREMA DO VALOR MÉDIO, podemos concluir que

$\exists$ (pelo menos um) $x_0 \in (0,5)$ tq: $h'(x_0) = \dfrac{h(5)-h(0)}{5-0}$

Obs:

$h'(x) = (x^2-9x+14)' = 2x-9 \Rightarrow h'(x_0) = 2x_0 - 9$

$h(5) = 5^2 - 9(5) + 14 = 25 - 45 + 14 = -6$

$h(0) = \cancel{0^2}^{0} - \cancel{9(0)}^{0} + 14 = 14$

Logo,

$$2x_0 - 9 = \frac{-6-14}{5}$$

$$\Leftrightarrow 2x_0 - 9 = -\frac{\cancel{20}^{4}}{\cancel{5}}$$

$$\Leftrightarrow 2x_0 = -4 + 9$$

$$\Leftrightarrow 2x_0 = 5$$

$$\Leftrightarrow x_0 = \frac{5}{2} \in (0,5)$$

(4) I) $$\int \underbrace{\frac{\overbrace{6x\,dx}^{=-du}}{(5-3x^2)^2}}_{(5-3x^2)^2\,=\,u^2} \;=\; \int -\frac{du}{u^2} = -\int u^{-2}\,du = -\frac{u^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$= \frac{1}{u} + C$$

$$= \frac{1}{5-3x^2} + C$$

Substituição

$u = 5-3x^2$

$du = -6x\,dx$

$\Rightarrow 6x\,dx = -du$

II) $$\int_1^2 x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx$$

Int x partes

$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}\,dx$

$dv = x\,dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$$= \left(\frac{2^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\ln 2 - \frac{1^2}{2}\cancel{\ln 1}^{\,0}\right) - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx$$

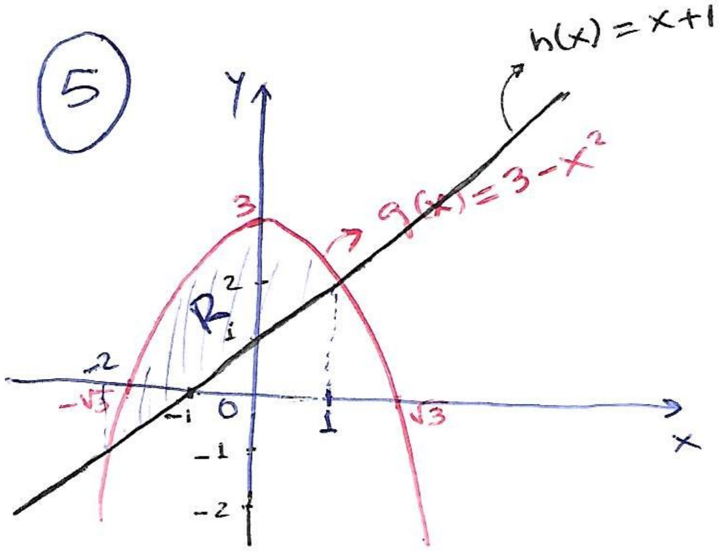
$$= (2\ln 2 - 0) - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{x=1}^{x=2} = 2\ln 2 - \frac{1}{4}(2^2 - 1^2)$$

$$= 2\ln 2 - \frac{1}{4}\cdot(4-1)$$

$$= 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

III) $$\int \frac{3x-2}{x^2+3x-10}\,dx \longleftarrow$$ Integração via decomposição em frações parciais (Exemplo I – Pág 263-264 Apostila do IME – disponível no site da Disciplina)

5



Interceptos (Limites de integração)

$g(x) = h(x)$

$\Longleftrightarrow 3 - x^2 = x + 1$

$\Longleftrightarrow x^2 + x + 1 - 3 = 0$

$\Longleftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$\Longleftrightarrow (x+2)(x-1) = 0$

$\Longleftrightarrow x = -2$ ou $x = 1$

$x^2 + x - 2 = 0$

$$\begin{array}{cc} x & 2 \\ x & -1 \\ \hline \end{array}$$
$2x - x = x$

Logo,

$$A(R) = \int_{-2}^{1} [g(x) - h(x)]\, dx$$

$$= \int_{-2}^{1} [(3 - x^2) - (x+1)]\, dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (3 - x^2 - x - 1)\, dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{x=-2}^{x=1}$$

$$= \left[-\frac{(1)^3}{3} - \frac{(1)^2}{2} + (2)(1)\right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2(-2)\right]$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(-\frac{(-8)}{3} - \frac{4}{2} - 4\right)$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}_{1}} + 4 = 8 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{48 - 2 - 3 - 16}{6} = \frac{\cancel{27}^{9}}{\cancel{6}_{2}} = \frac{9}{2} \text{ u.A}$$

6 I) A integral definida de uma função é representada por um número real. A primitiva de uma função é o resultado do cálculo de uma integral indefinida. Logo, a afirmação é FALSA (F).

II) $$\int_0^1 \frac{\overbrace{6x^5\,dx}^{du}}{\underbrace{x^6+2018}_{u}} = \int_{2018}^{2019} \frac{du}{u} = \ln|u| \Big|_{u=2018}^{u=2019}$$

Substituição:

$u = x^6+2018$

$\Rightarrow du = (x^6+2018)'dx$

$= 6x^5\,dx$

Obs:

$x=0 \Rightarrow u = 0^6+2018 = 2018$

$x=1 \Rightarrow u = 1^6+2018 = 2019$

$$= \ln|2019| - \ln|2018|$$
$$= \ln(2019) - \ln(2018)$$

Portanto, a afirmação é VERDADEIRA (V)

III) $P(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} - 3x$ é uma primitiva da função:

$p(x) = x^5 + 2x^3 - 3$?

Verificando:

$$P'(x) = \left[\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} - 3x\right]' = \cancel{6}\frac{x^5}{\cancel{6}} + \cancel{4}\frac{x^3}{\cancel{4}} - 3$$
$$= x^5 + x^3 - 3$$
$$\neq x^5 + 2x^3 - 3 = p(x)$$

Assim, a afirmação é FALSA (F).

Outra forma:

$$\int p(x)\,dx = \int (x^5+2x^3-3)\,dx = \frac{x^6}{6} + \cancel{2}^{1}\frac{x^4}{\cancel{4}_{2}} - 3x + C$$
$$= \underbrace{\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} - 3x}_{\neq P(x)} + C$$

Questão (6) (Continuação...).

IV) $$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1)+C \quad , \quad C\in\mathbb{R}$$

$$\iff \left[\frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1)+C\right]' = x^3e^{x^2}$$

Verificando:

$$\left[\frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1)+C\right]' = \underbrace{\underbrace{\left(\frac{e^{x^2}}{2}\cdot(x^2)'\right)(x^2-1)}_{\text{Regra da cadeia}} + \frac{e^{x^2}}{2}\cdot(x^2-1)'}_{\text{Derivada do produto}} + \cancel{C'}^{\,0}$$

$$= \frac{e^{x^2}}{\cancel{2}}\cdot(\cancel{2}x)\cdot(x^2-1) + \frac{e^{x^2}}{\cancel{2}}\cdot(\cancel{2}x)$$

$$= e^{x^2}(x)(x^2-1) + e^{x^2}\cdot x$$

$$= e^{x^2}\cdot x^3 - \cancel{e^{x^2}\cdot x} + \cancel{e^{x^2}\cdot x}$$

$$= x^3e^{x^2}.$$

Portanto, podemos concluir que a afirmação é VERDADEIRA (V)

Outra via:

$$\int \underbrace{x^3 \overbrace{e^{x^2}}^{=e^u} dx}_{=\,u\frac{du}{2}} \underset{\uparrow}{=} \int \frac{e^u\cdot u}{2}\,du = \frac{1}{2}\int ue^u\,du$$

Subst
$u = x^2$
$\Rightarrow du = 2x\,dx$
$\Rightarrow x\,dx = \frac{du}{2}$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\left[ue^u - \int e^u du\right]+C = \frac{1}{2}ue^u - \frac{1}{2}e^u + C$$

Int x partes
$v = u \qquad dv = du$
$dw = e^u du \qquad w = e^u$

$$= \frac{1}{2}e^u(u-1)+C$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)+C$$

$$= \frac{e^{x^2}}{2}(x^2-1)+C.$$