INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Eletromagnetismo I

Professor: Prof. Carlos Eduardo Souza - Cadu

Sala: A2-13 (IF, andar 1P)
Email: carloseduardosouza@id.uff.br

Aula 2
Sistemas e Transformação de coordenadas

Na aula de hoje…

1. Sistemas de coordenadas;
2. Transformação entre sistemas de coordenadas;

Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense

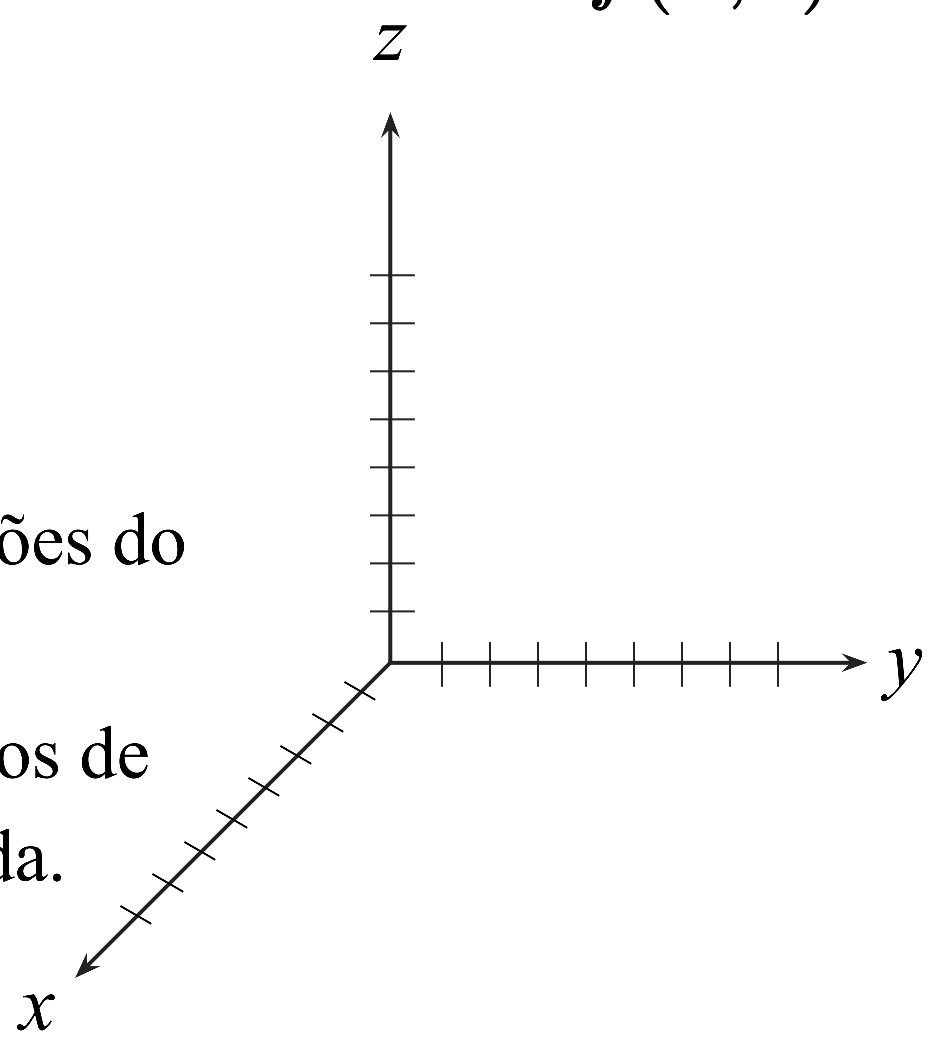
Eletromagnetismo I

Sistema de coordenadas

$$f(\vec{r}, t)$$

Grandezas físicas são funções do espaço e do tempo…

Precisamos definir os pontos de maneira unívoca e adequada.

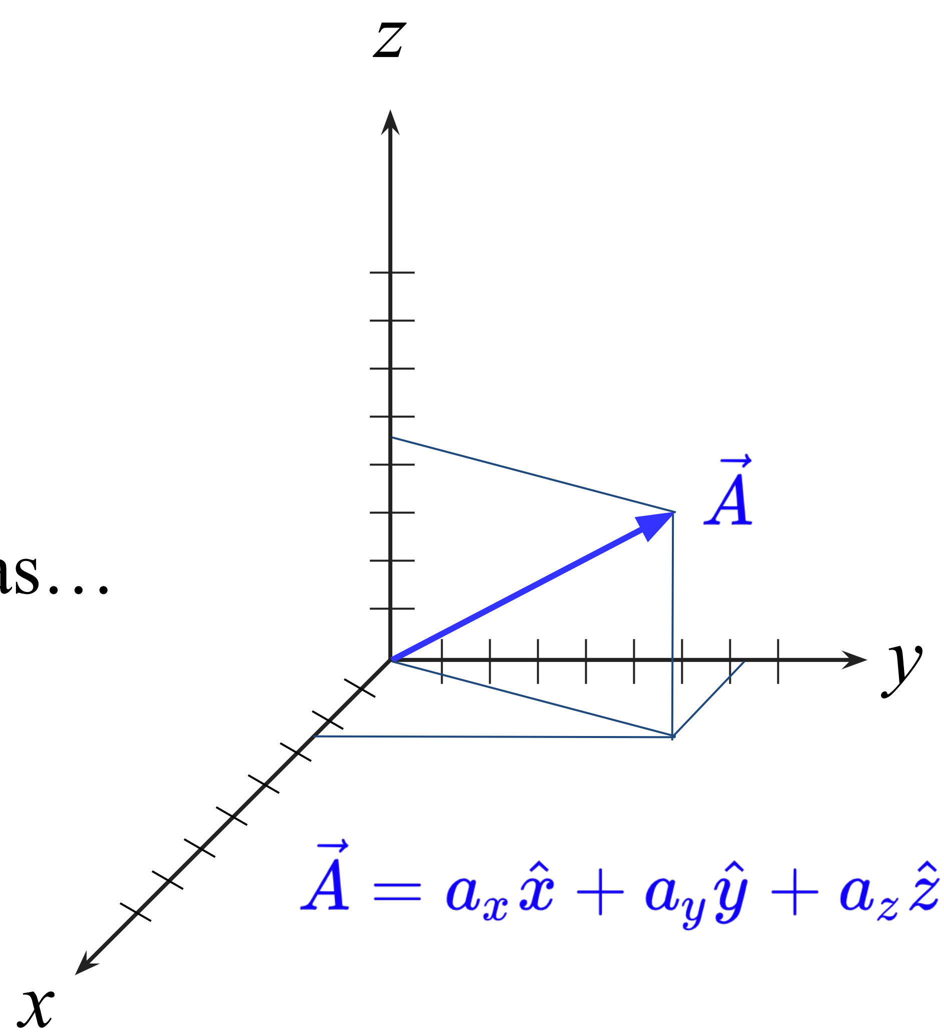


Sistema ortogonal

Sistema de coordenadas

Em coordenadas cartesianas…

$$-\infty < x < \infty$$
$$-\infty < y < \infty$$
$$-\infty < z < \infty$$



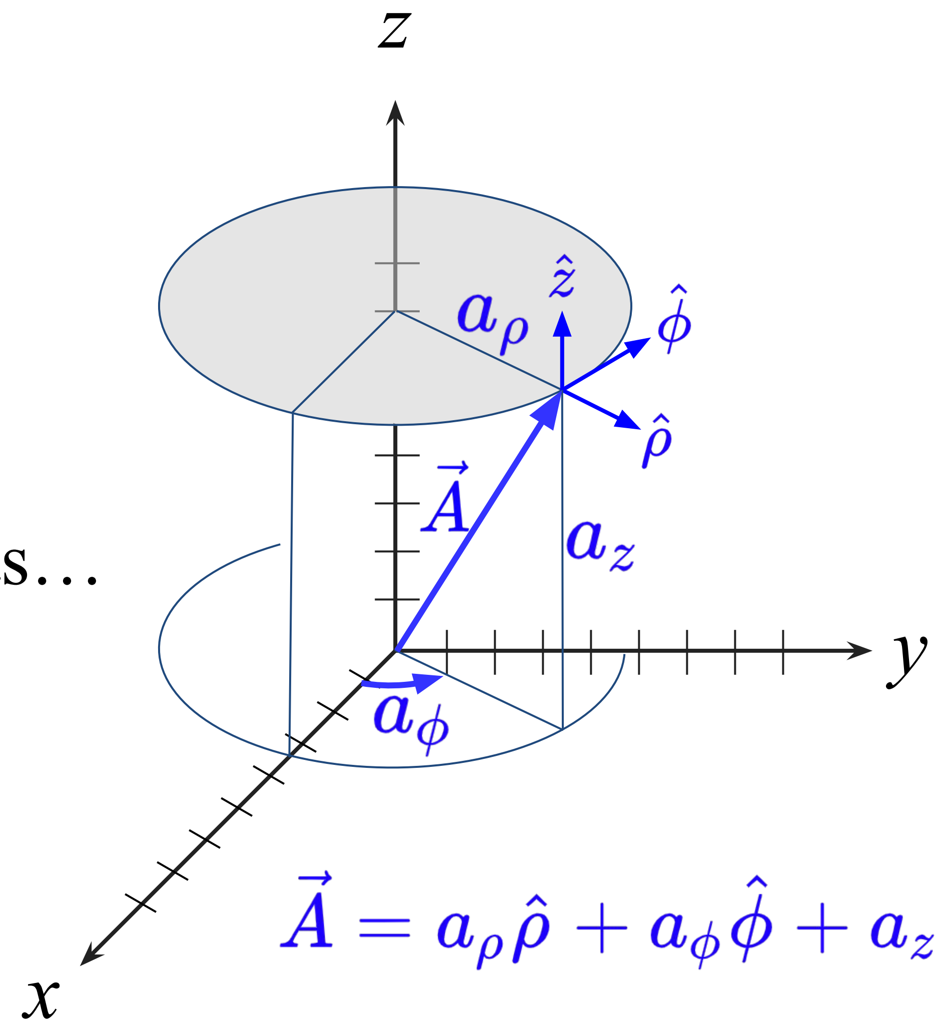
Um vetor é escrito como:

$$(a_x, a_y, a_z) \quad ou \quad a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$$

Sistema de coordenadas

Em coordenadas cilíndricas…

$$
\begin{aligned}
0 &\le \rho < \infty \\
0 &\le \phi < 2\pi \\
-\infty &< z < \infty
\end{aligned}
$$



$$\vec{A} = a_\rho \hat{\rho} + a_\phi \hat{\phi} + a_z \hat{z}$$

Um vetor é escrito como:

$$(a_\rho, a_\phi, a_z) \quad ou \quad a_\rho \hat{\rho} + a_\phi \hat{\phi} + a_z \hat{z}$$

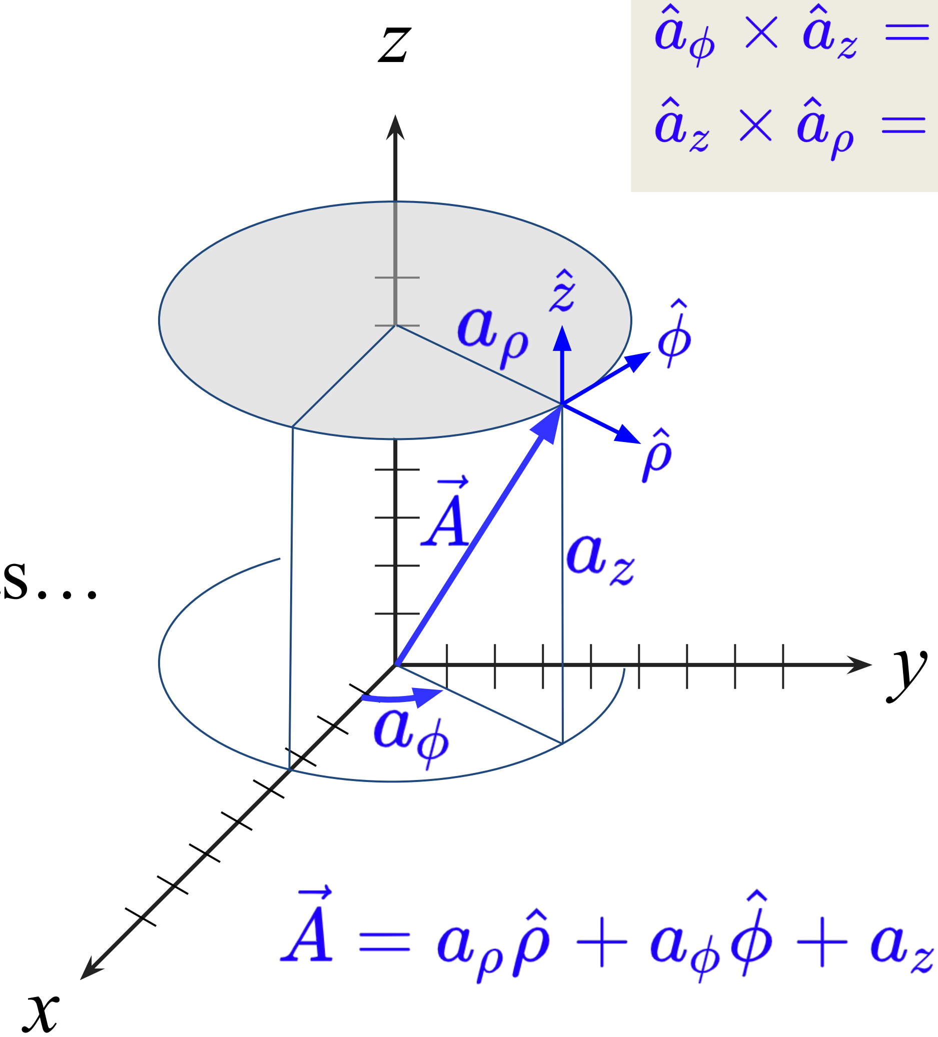
Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense

Eletromagnetismo I

Sistema de coordenadas

$$\hat{a}_\rho \cdot \hat{a}_\rho = \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_\phi = \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1$$
$$\hat{a}_\rho \cdot \hat{a}_\phi = \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_z = \hat{a}_z \cdot \hat{a}_\rho = 0$$

$$\hat{a}_\rho \times \hat{a}_\phi = \hat{a}_z$$
$$\hat{a}_\phi \times \hat{a}_z = \hat{a}_\rho$$
$$\hat{a}_z \times \hat{a}_\rho = \hat{a}_\phi$$



Em coordenadas cilíndricas…

$$0 \le \rho < \infty$$
$$0 \le \phi < 2\pi$$
$$-\infty < z < \infty$$

$$\vec{A} = a_\rho \hat{\rho} + a_\phi \hat{\phi} + a_z \hat{z}$$

Um vetor é escrito como:

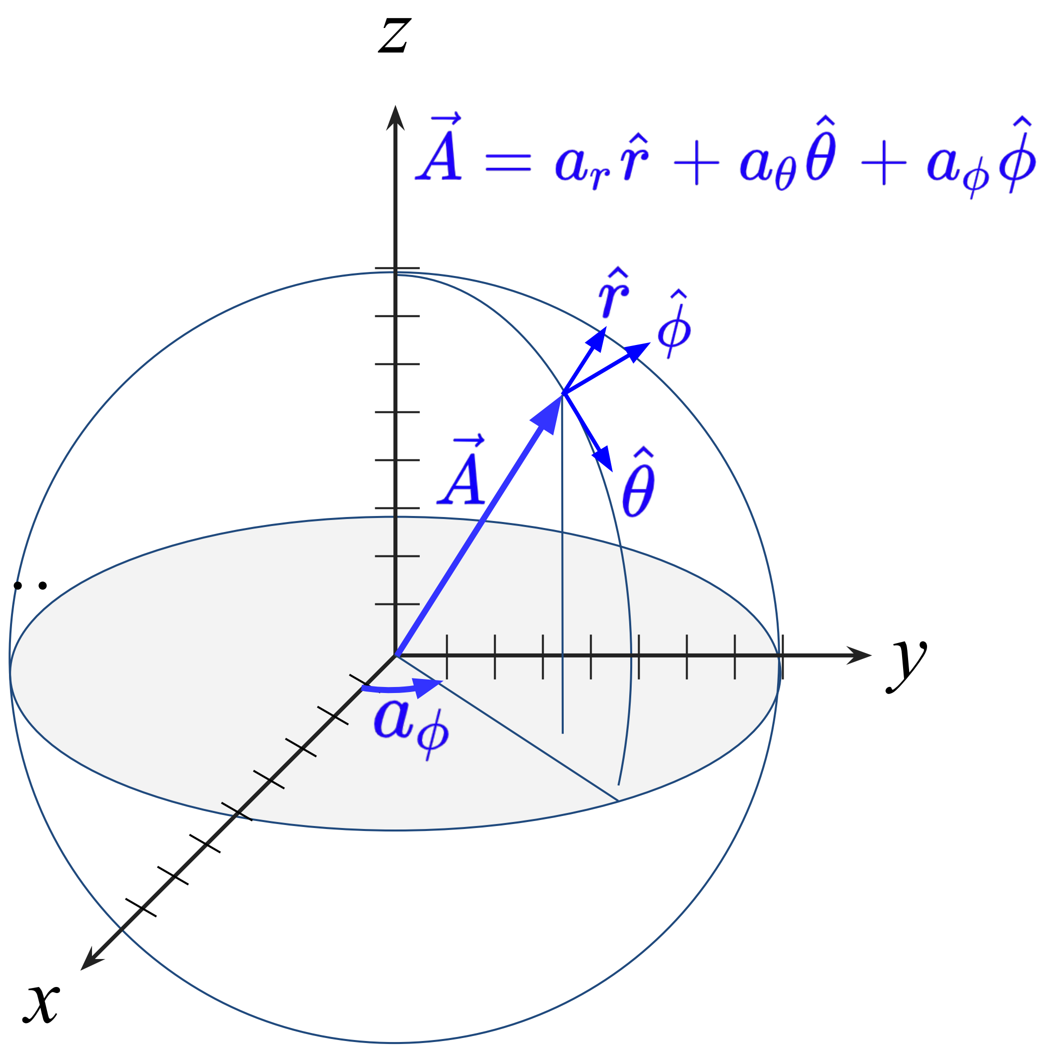
$$(a_\rho, a_\phi, a_z) \quad ou \quad a_\rho \hat{\rho} + a_\phi \hat{\phi} + a_z \hat{z}$$

Eletromagnetismo I

Sistema de coordenadas

Em coordenadas esféricas…

$$0 \leq r < \infty$$
$$0 \leq \theta < \pi$$
$$0 \leq \phi < 2\pi$$

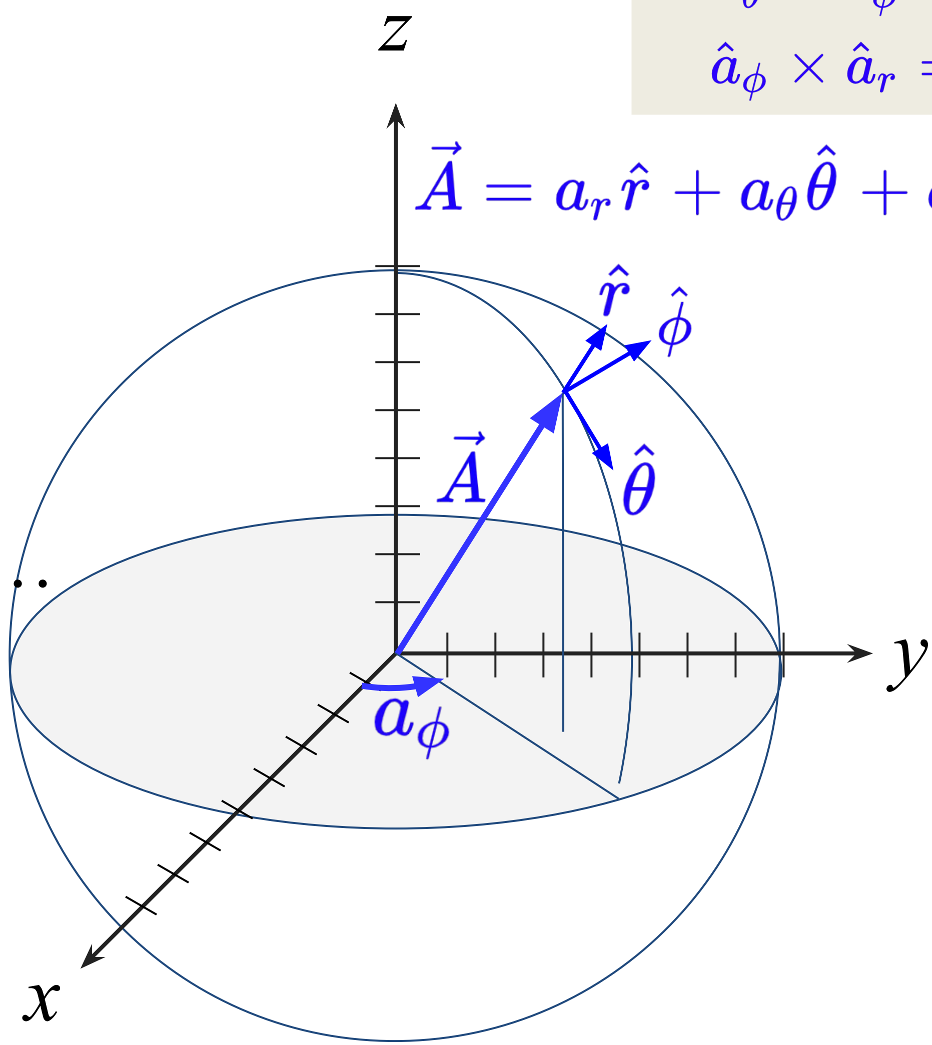


Um vetor é escrito como:

$$(a_r, a_\theta, a_\phi) \quad ou \quad a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta} + a_\phi \hat{\phi}$$

$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_r = \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_\theta = \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_\phi = 1$$
$$\hat{a}_r \cdot \hat{a}_\theta = \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_\theta = \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_r = 0$$
$$\hat{a}_r \times \hat{a}_\theta = \hat{a}_\phi$$
$$\hat{a}_\theta \times \hat{a}_\phi = \hat{a}_r$$
$$\hat{a}_\phi \times \hat{a}_r = \hat{a}_\theta$$

Sistema de coordenadas



Em coordenadas esféricas…

$$0 \leq r < \infty$$
$$0 \leq \theta < \pi$$
$$0 \leq \phi < 2\pi$$

Um vetor é escrito como:

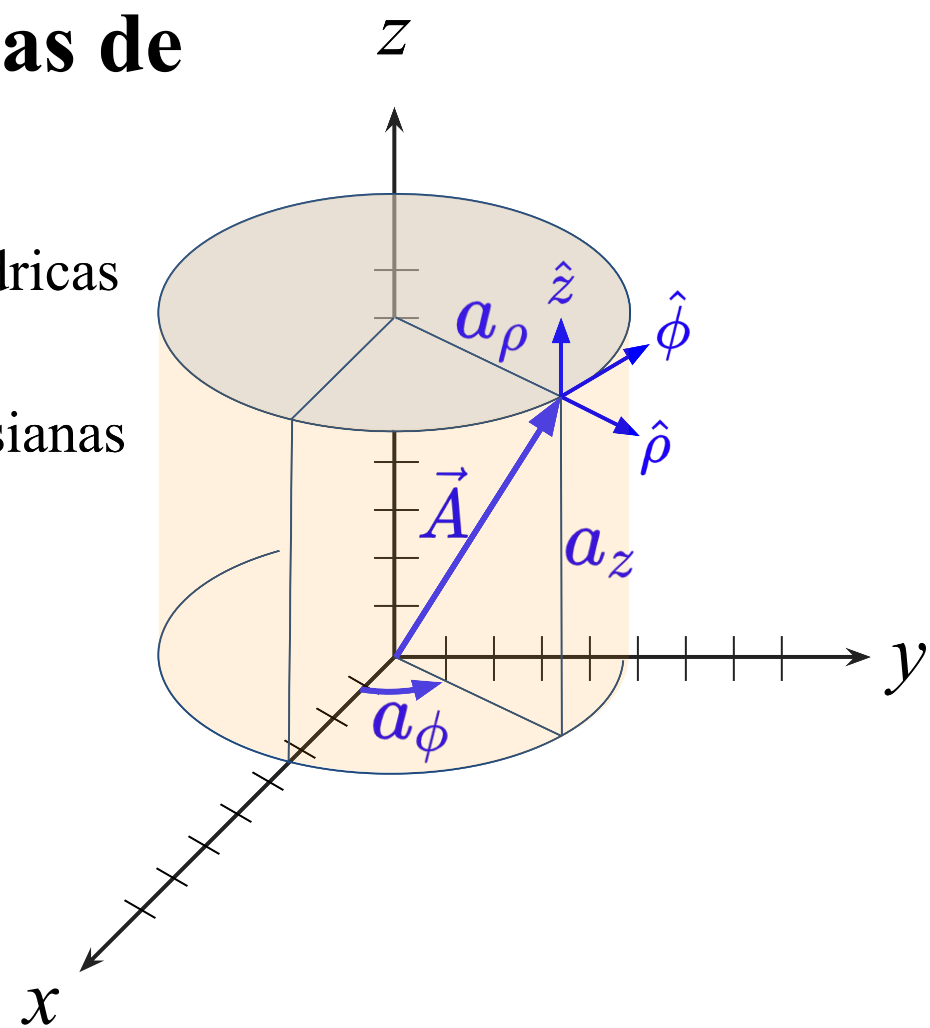
$$(a_r, a_\theta, a_\phi) \quad ou \quad a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta} + a_\phi \hat{\phi}$$

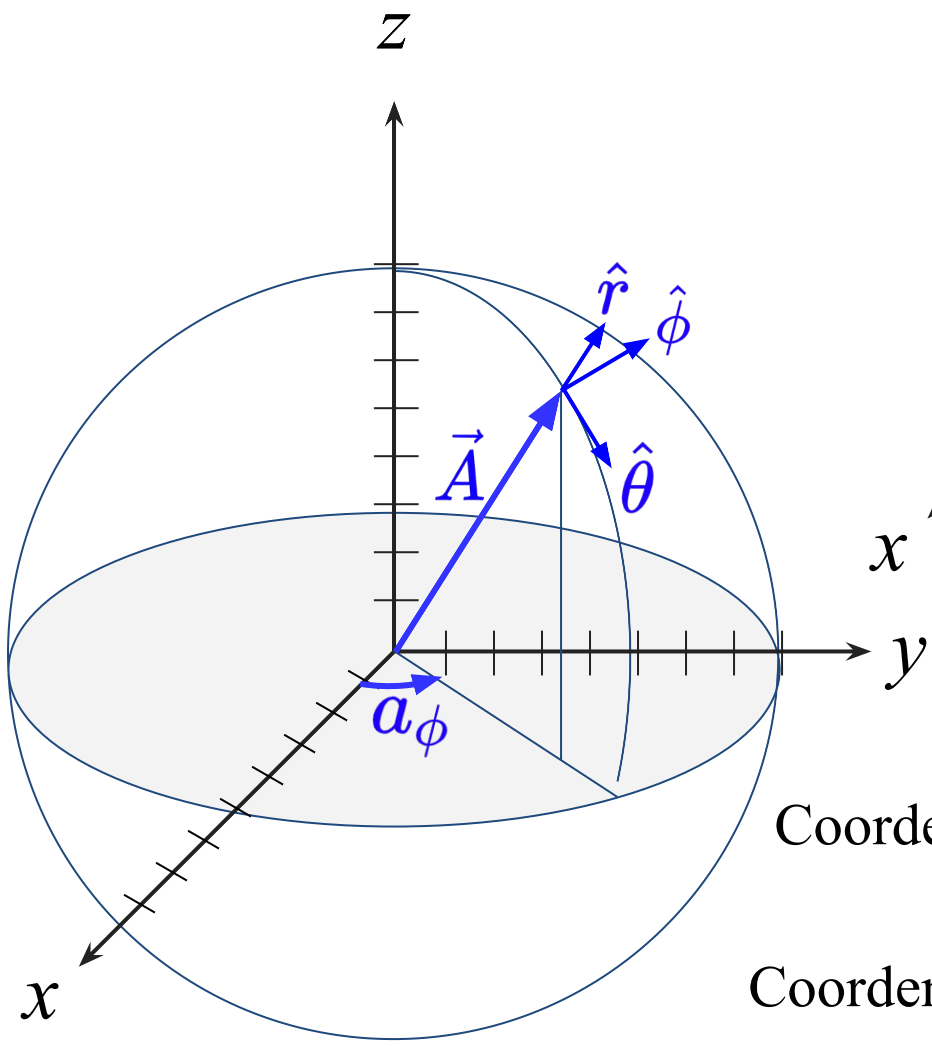
Relacionando os sistemas de coordenadas

Coordenadas cilíndricas

vs

Coordenadas cartesianas





Coordenadas esféricas

vs

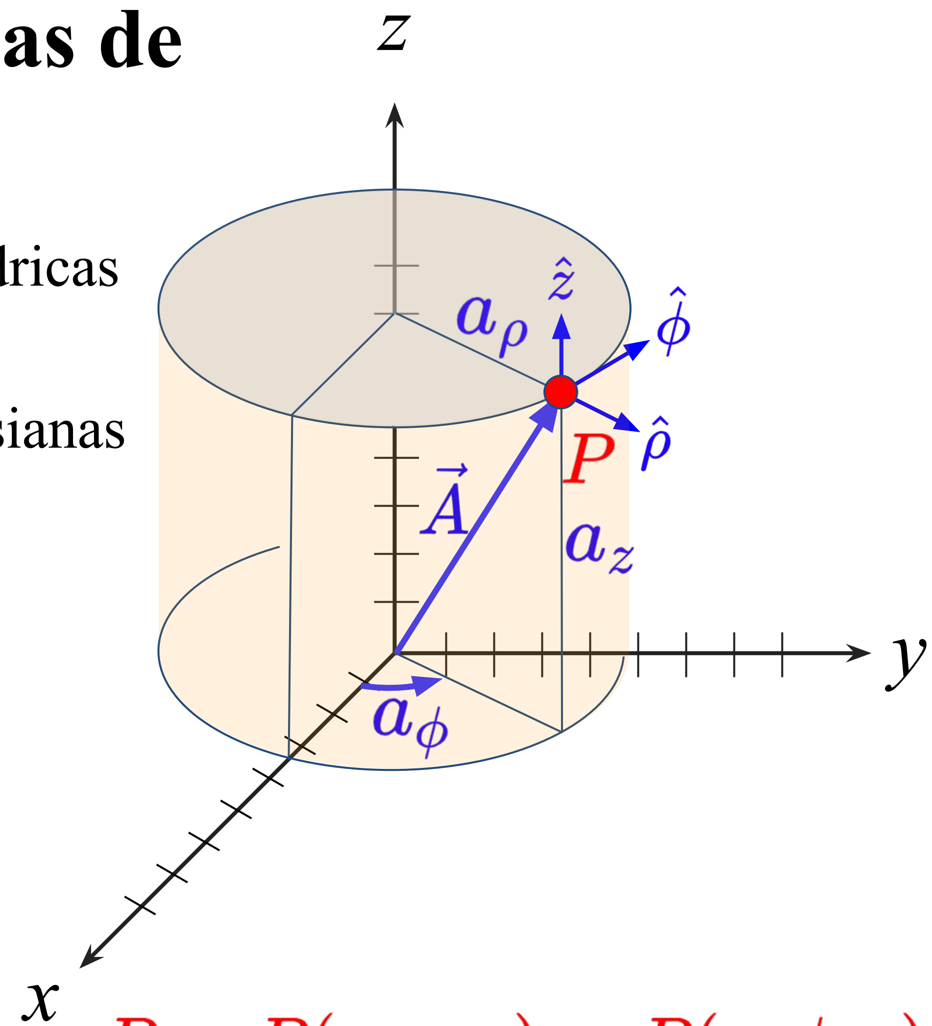
Coordenadas cartesianas

Relacionando os sistemas de coordenadas

Coordenadas cilíndricas

vs

Coordenadas cartesianas



$$P = P(x, y, z) = P(\rho, \phi, z)$$

Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense

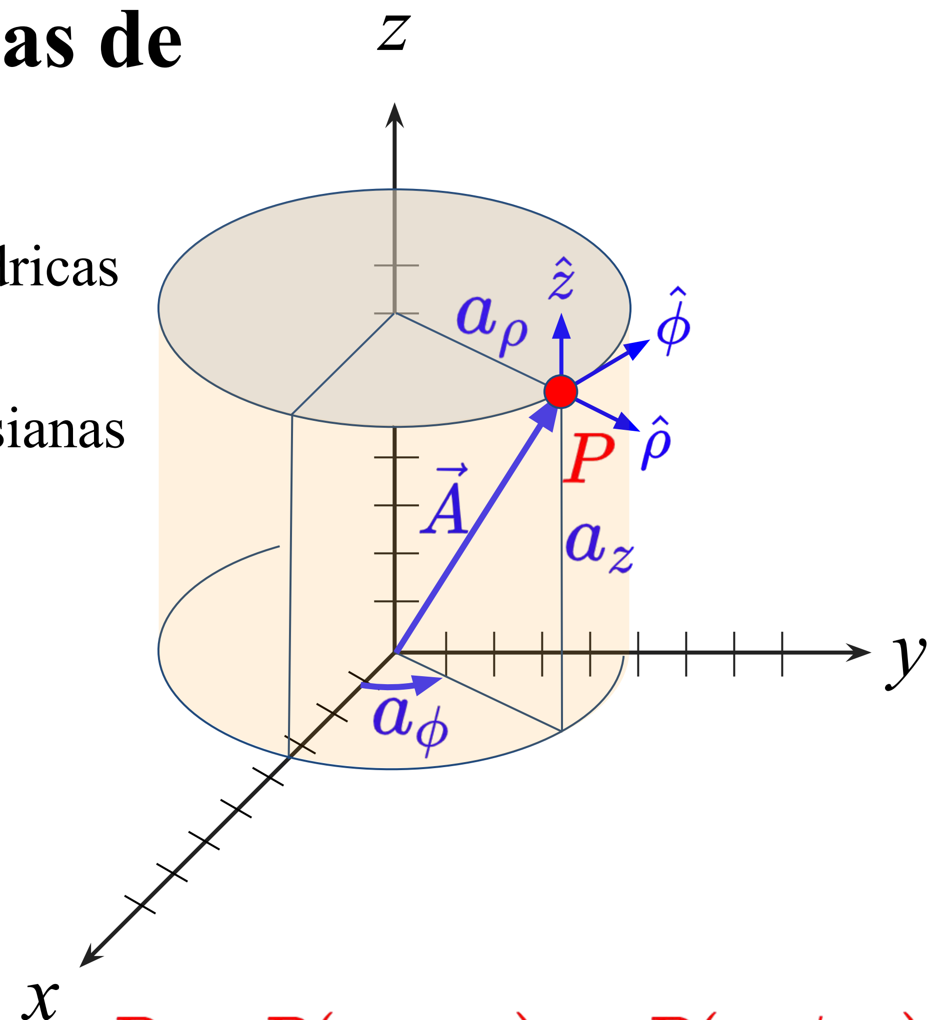
Eletromagnetismo I

Relacionando os sistemas de coordenadas

Coordenadas cilíndricas

vs

Coordenadas cartesianas



$$P = P(x, y, z) = P(\rho, \phi, z)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \;\; \phi = \tan^{-1}(y/x), \;\; z = z$$

Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense

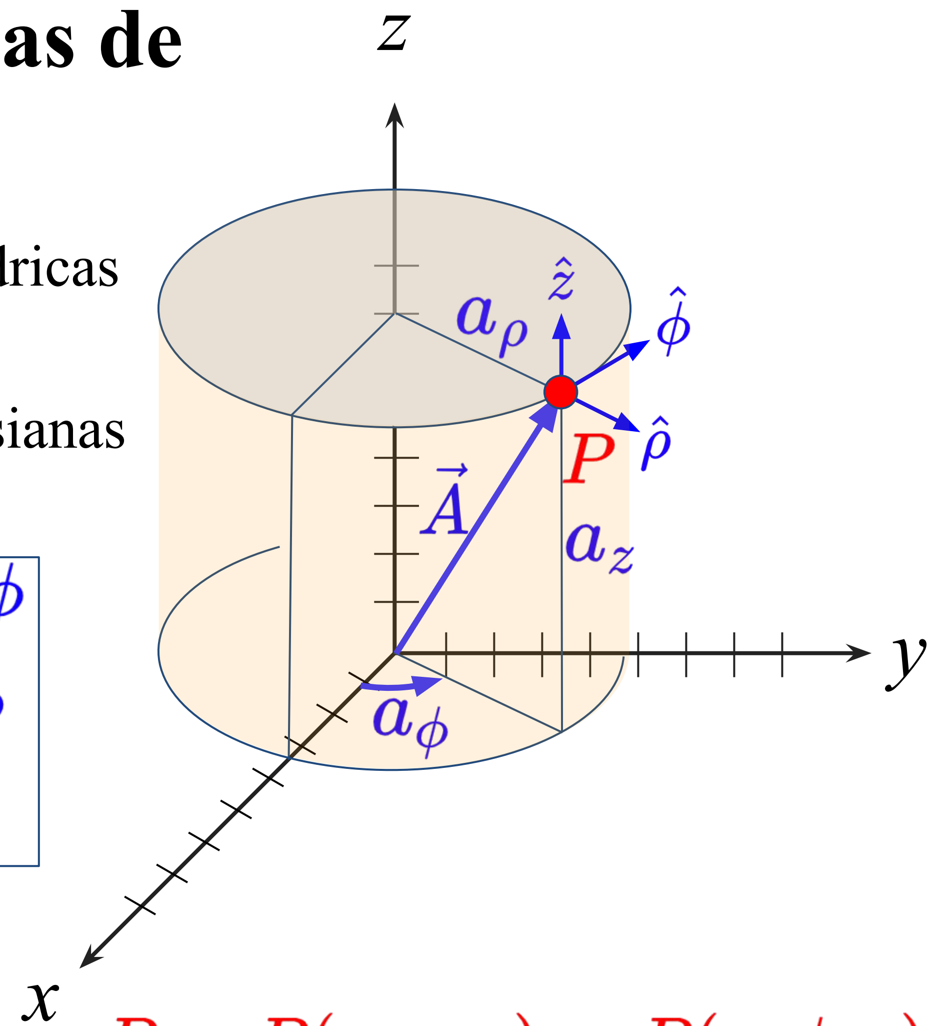
Eletromagnetismo I

Relacionando os sistemas de coordenadas

Coordenadas cilíndricas

vs

Coordenadas cartesianas



$$\cos\phi = x/\rho \Rightarrow x = \rho\cos\phi$$

$$\sin\phi = y/\rho \Rightarrow y = \rho\cos\phi$$

$$z = z$$

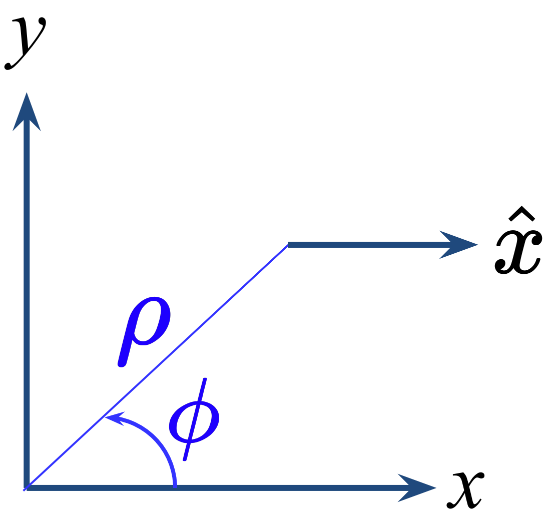
$$P = P(x, y, z) = P(\rho, \phi, z)$$

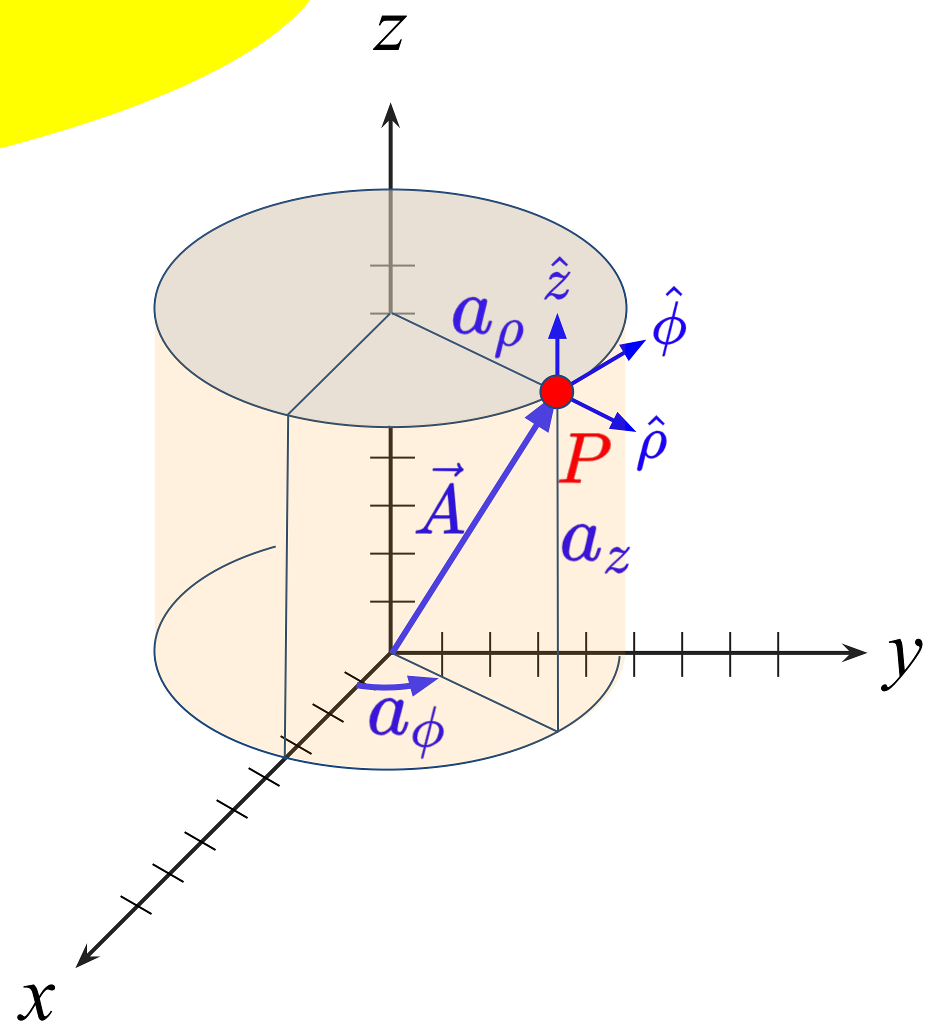
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \;\; \phi = \tan^{-1}(y/x), \;\; z = z$$

Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense

Eletromagnetismo I

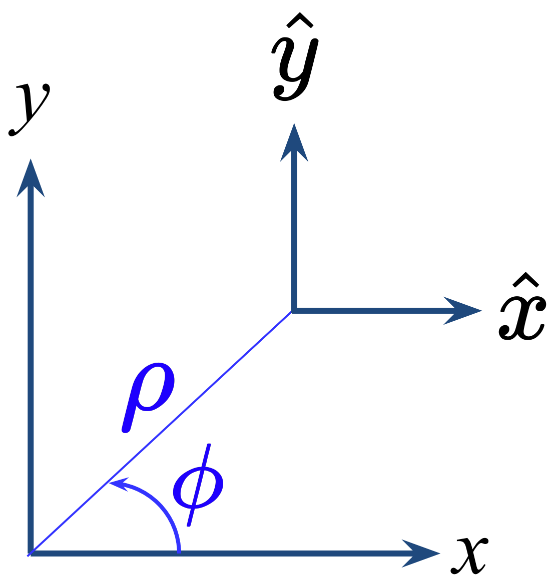
Mapeamento entre coords Cilíndricas e Cartesianas

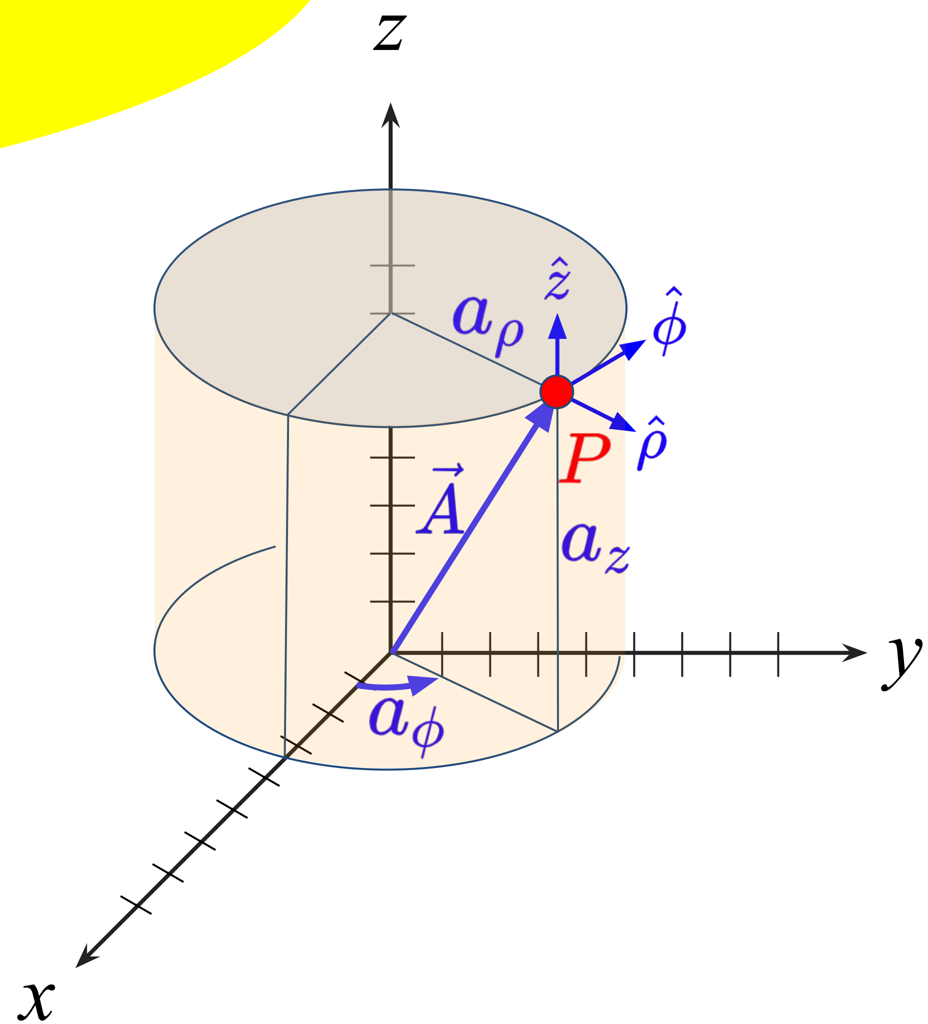




$$\hat{x}(\rho, \phi) = \cdots ?$$

Mapeamento entre coords Cilíndricas e Cartesianas





$$\hat{x}(\rho,\phi) = \cdots ?$$
$$\hat{y}(\rho,\phi) = \cdots ?$$

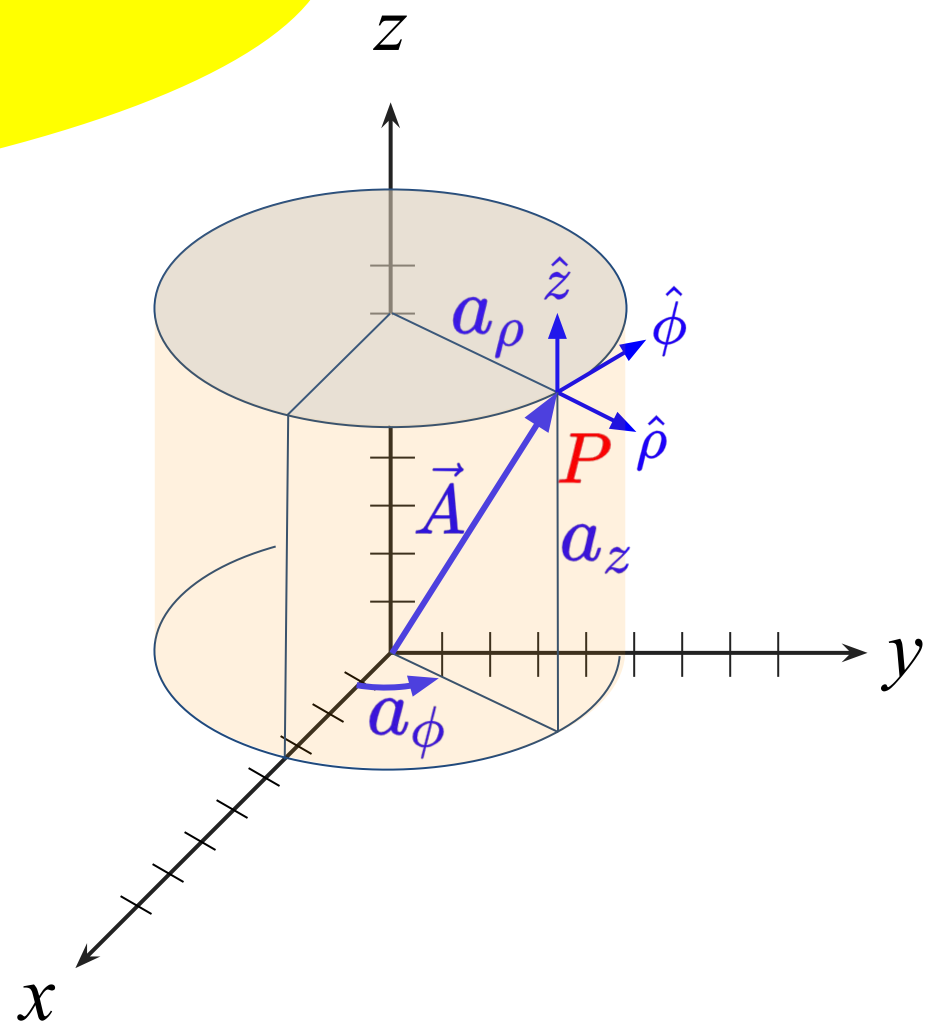
Mapeamento entre coords Cilíndricas e Cartesianas

Em resumo

$$\hat{x} = \cos\phi\,\hat{\rho} - \operatorname{sen}\phi\,\hat{\phi}$$
$$\hat{y} = \operatorname{sen}\phi\,\hat{\rho} + \cos\phi\,\hat{\phi}$$
$$\hat{z} = \hat{z}$$

ou

$$\hat{\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{y}$$
$$\hat{\phi} = -\operatorname{sen}\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$$
$$\hat{z} = \hat{z}$$



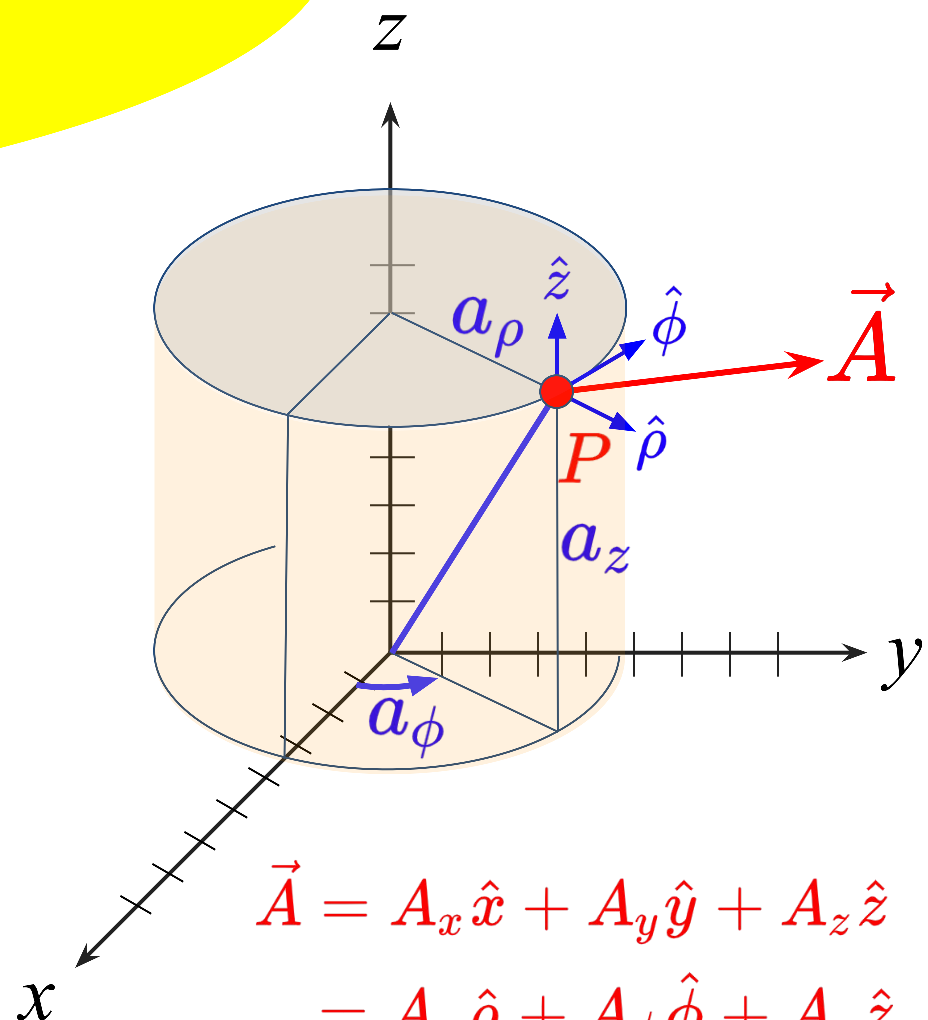
Mapeamento entre coords Cilíndricas e Cartesianas

Em resumo

$$\hat{x} = \cos\phi\,\hat{\rho} - \operatorname{sen}\phi\,\hat{\phi}$$
$$\hat{y} = \operatorname{sen}\phi\,\hat{\rho} + \cos\phi\,\hat{\phi}$$
$$\hat{z} = \hat{z}$$

ou

$$\hat{\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{y}$$
$$\hat{\phi} = -\operatorname{sen}\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$$
$$\hat{z} = \hat{z}$$



$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$
$$= A_\rho\hat{\rho} + A_\phi\hat{\phi} + A_z\hat{z}$$

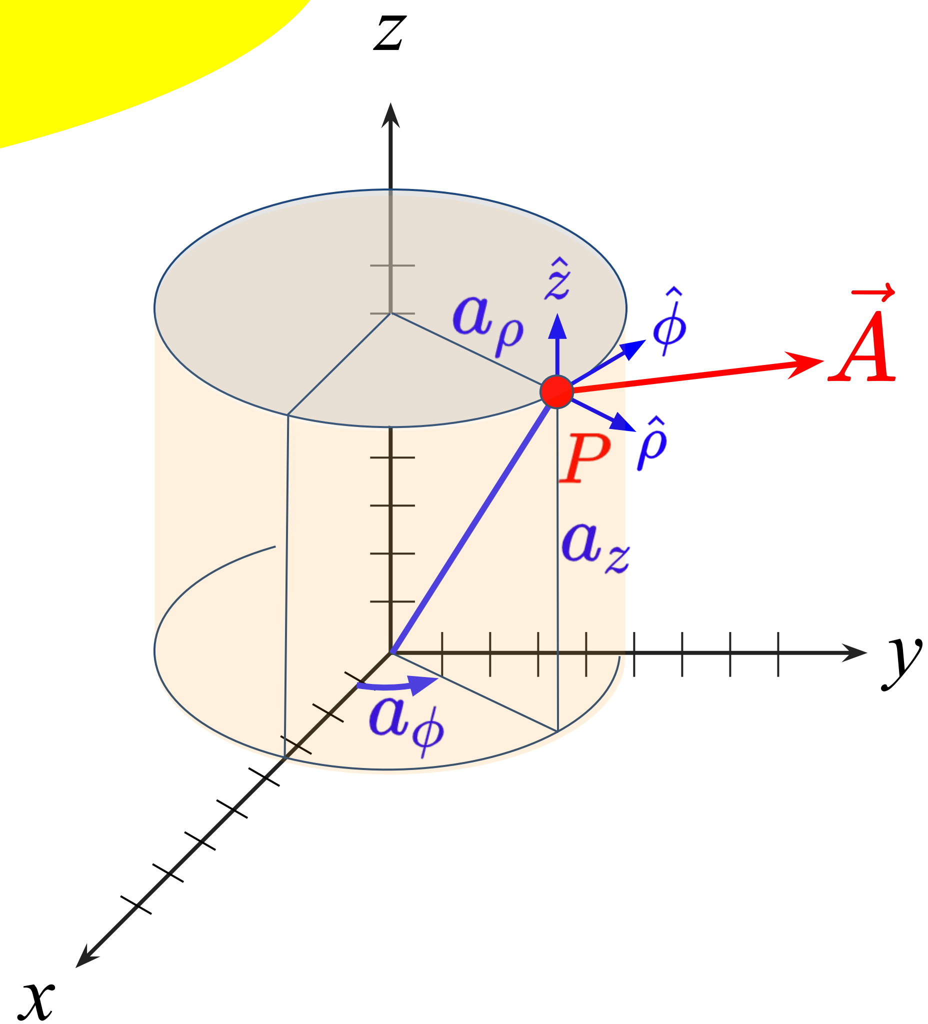
com

$$A_\rho = A_x\cos(\phi) + A_y\operatorname{sen}(\phi)$$
$$A_\phi = -A_x\operatorname{sen}(\phi) + A_y\cos(\phi)$$
$$A_z = A_z$$

Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense

Eletromagnetismo I

Mapeamento entre coords Cilíndricas e Cartesianas



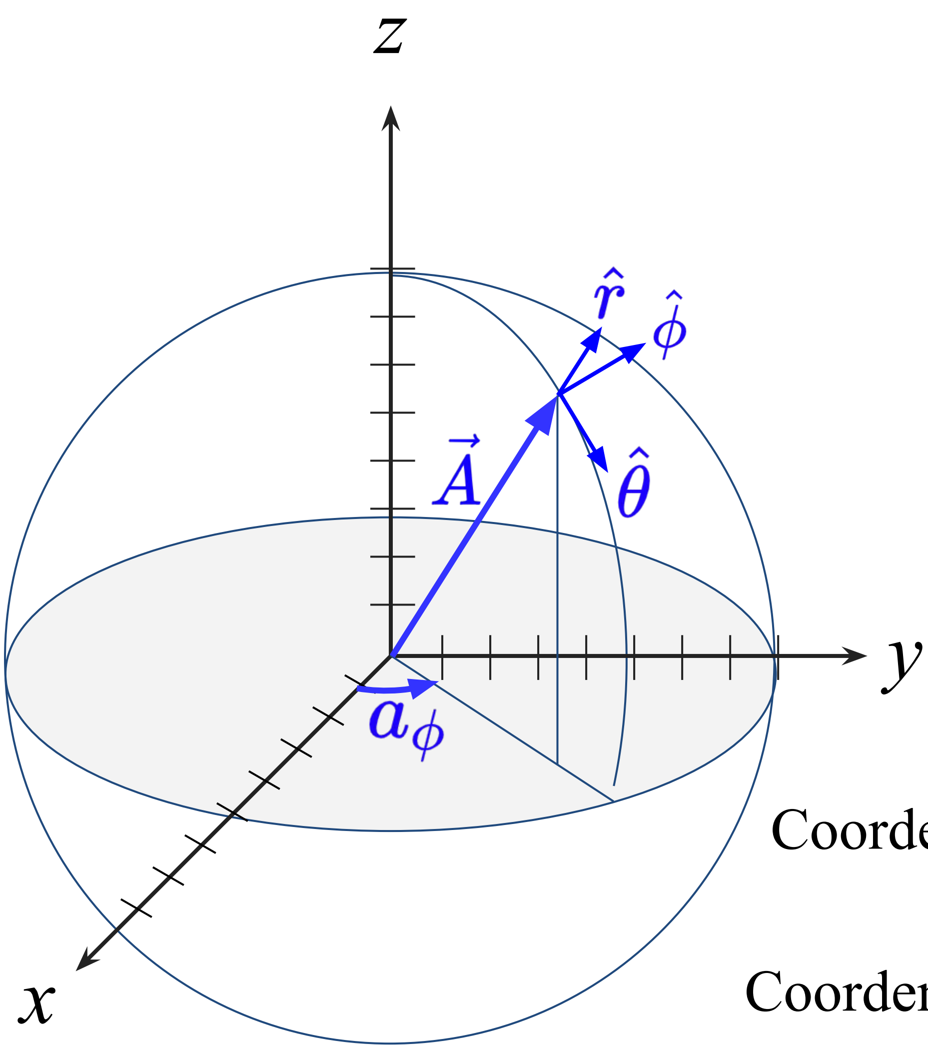
Usando o formalismo matricial

$$\vec{A}_{cil} = \mathbb{M}\vec{A}_{ret}$$

$$\begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \mathrm{sen}(\phi) & 0 \\ -\mathrm{sen}(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Mapeamento entre coords Esféricas e Cartesianas

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi) & \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi) & \cos(\phi) \\ \cos(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta)\mathrm{sen}(\phi) & -\mathrm{sen}(\phi) \\ -\mathrm{sen}(\phi) & \cos(\phi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$



Coordenadas esféricas

vs

Coordenadas cartesianas

Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense

Eletromagnetismo I