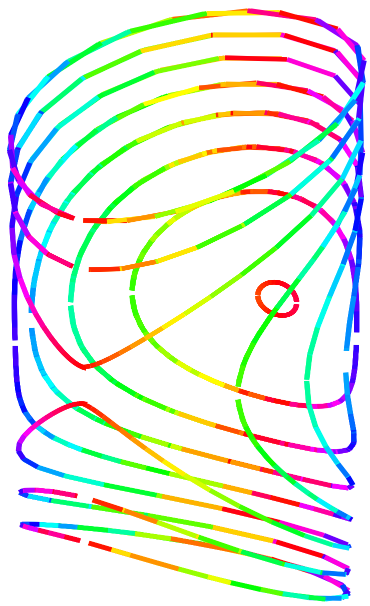
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS



Patrícia Nunes da Silva

Este livro está registrado no EDA da Fundação Biblioteca Nacional/MinC sob
número 350.448, Livro 646, folha 108.

PREFÁCIO

As equações diferenciais ordinárias apareceram de forma natural com os métodos do Cálculo Diferencial e Integral, descobertos por Newton e Leibnitz no final do século XVII, e se converteram na linguagem pela qual muitas das leis, em diferentes ramos da Ciência, se expressam. Assim, as equações diferenciais ordinárias modelam fenômenos que ocorrem na Física, Biologia, Economia e na própria Matemática.

Historicamente, no fim do século XVIII, as equações diferenciais ordinárias se transformaram numa disciplina independente na Matemática, impulsionada por matemáticos famosos como Euler, Lagrange e Laplace, entre outros, que estudaram as equações diferenciais ordinárias no Cálculo das Variações, na Mecânica Celeste, na Dinâmica dos Fuidos, etc. No século XIX os fundamentos da Matématica experimentaram uma revisão geral, fixando com exatidão conceitos até então nebulosos. Matemáticos como Cauchy, Gauss, Riemann e principalmente Poincaré são referências obrigatórias no estudo moderno das equações diferenciais ordinárias. Na atualidade, a teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias é objeto de efervescente pesquisa em todo o mundo, incluindo o Brasil.

Nestas notas abordaremos toda a ementa das disciplinas Cálculo Diferencial e Integral III e EDO oferecidas pelo Departamento de Análise do IME–UERJ.

A autora gostaria agradecer ao professor do Departamento de Análise do IME–UERJ, Mauricio A. Vilches, pelo estímulo para que estas notas fossem organizadas na forma do presente livro bem como por sua valiosa contribuição na elaboração das figuras e gráficos que aparecem ao longo do texto.

Patrícia Nunes da Silva
Universidade de Rio de Janeiro
Rio de Janeiro/2005

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

1.1 Definições

Denotaremos por $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto ou uma reunião de intervalos abertos e $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que possua todas as suas derivadas, a menos que seja indicado o contrário. Denotaremos por:

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}(x)$$
$$y^{(0)}(x) = y(x).$$

Definição 1.

Uma **equação diferenciável ordinária** (edo) é uma equação que envolve uma função incógnita, sua variável independente e derivadas da função incógnita e que pode ser escrita na forma:

$$F\big(x,\, y(x),\, y'(x),\, y''(x),\, y^{(3)}(x), ...,\, y^{(n-1)}(x),\, y^{(n)}(x)\big) = 0, \quad n \geq 1. \tag{1.1}$$

As equações diferenciais ordinárias podem ser classificadas pela ordem e pela linearidade.

Definição 2.

A **ordem** de uma equação diferencial ordinária é a ordem da mais alta derivada presente na equação.

Exemplo 1.

1. A edo $\dfrac{d^2y}{dt^2} + sen(y) = 0$ é de ordem 2.

2. A edo $\left(y'\right)^3 + y = x\,y$ é de ordem 1.

Observação 1.

A equação (1.1) é uma equação diferencial ordinária de ordem n. Note que F é uma função de $n+2$ variáveis.

Vamos supor que todas as equações diferenciais ordinárias de ordem n podem ser escritas da seguinte forma:

$$\boxed{y^{(n)}(x) = f\left(x,\, y(x),\, y'(x),\, y''(x),\, y^{(3)}(x), ...,\, y^{(n-1)}(x)\right),} \tag{1.2}$$

onde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função real definida em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Isto é garantido por um teorema clássico chamado Teorema da Função Implícita que, com hipóteses razoáveis (as quais são adotadas nestas notas), implica que localmente as edo's (1.1) e (1.2) são equivalentes.

Exemplo 2. *Sejam* $F(x,y,z,w) = m\,w + k\,y + \tau\,z - h(x) = 0$ *e* $f(x,y,z) = -\dfrac{1}{m}\,(k\,y + \tau\,z - h(x))$.

A edo de ordem 2

$$m\,y'' + \tau\,y' + k\,y = h(x)$$

pode ser escrita na forma (1.1):

$$F(x,y,y',y'') = 0$$

e na forma (1.2):

$$y'' = f(x,y,y').$$

Esta edo descreve o oscilador harmônico amortecido, submetido a uma força $h(x)$.

Definição 3.

Uma equação diferencial ordinária de ordem n é **linear** se é do tipo:

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} p_i(x)\,y^{(i)} = q(x),} \tag{1.3}$$

onde, $p_i = p_i(x)$ e $q = q(x)$ são funções tais que $p_n(x) \neq 0$. Caso contrário, é dita não-linear. Se a função $q(x) = 0$ para todo $x \in I$, a edo é dita linear **homogênea**. Caso contrário, é dita não–homogênea.

Exemplo 3.

Uma edo **linear de primeira ordem** é do tipo:

$$\boxed{y' + p(x)\, y = q(x),}$$

onde $p = p(x)$ e $q = q(x)$ são funções reais.

Exemplo 4.

A seguinte edo de primeira ordem, modela a evolução de certas espécies de populações:

$$\frac{dy}{dt} + \alpha\, y - \gamma\, y^2 = 0.$$

Exemplo 5.

Uma edo linear de segunda ordem é do tipo:

$$\boxed{y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = r(x),}$$

onde $p = p(x)$, $q = q(x)$ e $r = r(x)$ são funções reais.

Exemplo 6.

No estudo do pêndulo simples, a equação que descreve o movimento do pêndulo é:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{l}\, sen(y) = 0,$$

onde l é comprimento do pêndulo e g, a constante gravitacional. Esta edo é não-linear, mas para pequenas oscilações $sen(y) \simeq y$; então:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{l}\, y = 0,$$

que é uma edo linear de segunda ordem e descreve o movimento de um pêndulo para pequenas oscilações. Este processo de aproximação é chamado linearização da edo.

Definição 4.

Uma função $\phi : J \to \mathbb{R}$, de classe $C^n(J)$, chama-se **solução** da edo de ordem n (1.2) no intervalo J, se:

1. Para todo $x \in J$, o vetor $\big(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n-1)}(x)\big)$ pertence ao domínio da função f.

2. Para todo $x \in J$, a função $\phi(x)$ satisfaz identicamente a edo (1.2). Isto é:

$$\phi^{(n)}(x) = f\left(x,\, \phi(x),\, \phi'(x),\, \phi''(x),\, \phi^{(3)}(x), ...,\, \phi^{(n-1)}(x)\right).$$

Exemplo 7. *As funções* $w(t) = sen\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$ *e* $z(t) = cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$ *são soluções da edo:*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{l}\,y = 0. \tag{1.4}$$

Na verdade, se, para cada $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, considerarmos

$$\phi(t) = c_1\, sen\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + c_2\, cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right),$$

temos:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\left(c_1\, sen\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + c_2\, cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)\right) = -\frac{g}{l}\,\phi.$$

Logo,

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\phi = 0.$$

Isto é, $\phi(t)$ também é solução da edo (1.4).

Definição 5.

Uma **solução geral** da equação diferencial ordinária (1.2) em I é uma função $\Phi = \Phi(x; c_1, \ldots, c_n)$, n-vezes derivável, definida em I e que depende de n constantes arbitrárias c_i. Além disso, para cada $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, Φ é solução da edo (1.2).

Exemplo 8.

Uma solução geral da edo de primeira ordem $y' = f(x, y)$ é uma função $\Phi = \Phi(x, c)$, $c \in \mathbb{R}$ tal que $\Phi' = f(x,\, \Phi)$. Em particular, a edo $y' = f(x)$ tem solução geral a família de primitivas da função $f(x)$:

$$y(x) = \int f(x)\, dx.$$

Analogamente, a solução geral de uma edo de segunda ordem $y'' = f(x, y, y')$ é uma função $\Phi = \Phi(x, c_1, c_2)$, $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\Phi'' = f(x,\ \Phi,\ \Phi')$. Em particular, a edo $y'' = f(x)$ tem solução geral:

$$y(x) = \int F(x)dx + c_1\, x$$

onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$. Isto é, $F'(x) = f(x)$.

Definição 6.

Uma **solução particular** da edo (1.2) é uma solução que pode ser deduzida da solução geral de (1.2) atribuindo-se às constantes arbitrárias $(c_1, \ldots, c_n)$ um valor determinado $(c_1, \ldots, c_n) = (\widetilde{c}_1, \ldots, \widetilde{c}_n)$.

Exemplo 9.

A função $T(x) = A - c\, e^{-kx}$ tal que $A,\ c,\ k \in \mathbb{R}$ é a solução geral da edo:

$$T' = k\,(A - T),$$

De fato, $T'(x) = c\, k\, e^{-kx} = k[A-(A-c\, e^{-kx}) = k\,(A-T(x))$; Note que para cada escolha de c obtemos uma solução particular, por exemplo, $T_1(x) = A - 3\, e^{-kx}$ e $T_2(x) = A - \dfrac{3}{4}\, e^{-kx}$.

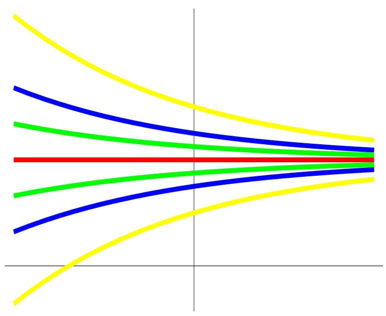


Figura 1.1: Gráfico de T para diferentes c.

Exemplo 10.

A função $y(x) = \dfrac{(x^2 + c)^2}{4} + 1$ tal que $c \in \mathbb{R}$ é a solução geral da edo:

$$y' = 2\, x\, \sqrt{y - 1}.$$

Note que $y_0(x) = 1$ também é solução da edo e que não existe escolha de c que permita obter y_0 a partir da solução geral.

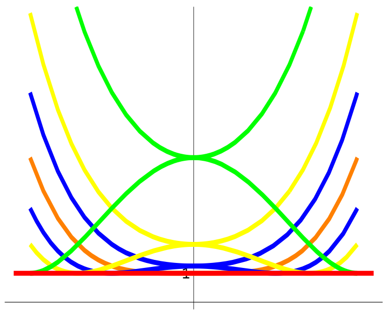


Figura 1.2: Gráficos de y e de y_0 (vermelho).

Definição 7.

Uma **solução singular** em I da equação diferencial ordinária (1.2), é uma solução que não se deduz da solução geral da edo.

Observação 2.

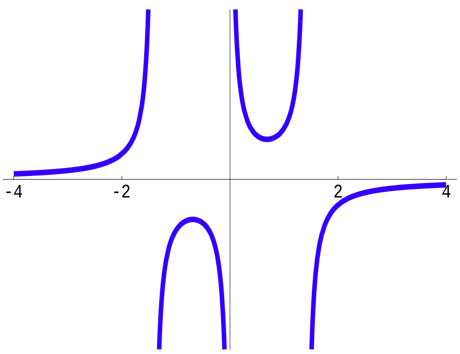
O gráfico de uma solução de uma edo é chamado **curva integral**. Como a solução Φ de uma edo deve ser obrigatoriamente derivável, logo, ela deve ser contínua; então, pode haver diferenças entre a curva integral de uma edo e o gráfico da função Φ.

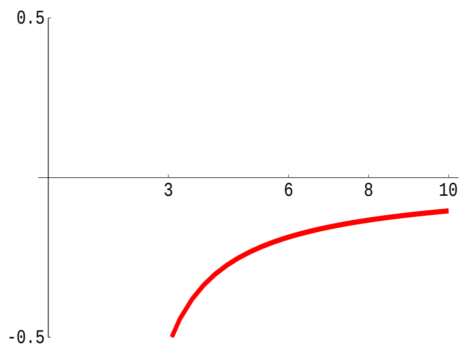
Exemplo 11.

A função $\Phi(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2\,x}{2 - x^2}$ é uma solução particular da edo:

$$x^2\,y' - x^2\,y^2 + x\,y + 1 = 0;$$

logo, como solução, deve estar definida em um intervalo que não contém 0, $-\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}$. No desenho a seguir, temos a solução da edo no intervalo $[3, 10]$. Gráficos de Φ e da solução, respectivamente:





1.2 Problemas de Valor Inicial (PVI)

Definição 8.

Um sistema formado por:

1. uma edo de ordem n e
2. n condições complementares que determinam, em um mesmo valor da variável independente, o valor da função incógnita e de suas derivadas

é chamado de **problema de valor inicial (PVI)**. As condições complementares são ditas condições iniciais.
Um problema de valor inicial para a edo de ordem n é do tipo:

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f\left(x,\, y(x),\, y'(x),\, y''(x),\, y^{(3)}(x), ...,\, y^{(n-1)}(x)\right) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ y''(x_0) = y_2 \\ \quad \cdots \\ \quad \cdots \\ \quad \cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Uma solução do problema de valor inicial é uma função que satisfaz tanto a edo como as condições complementares.

Exemplo 12.

Se lançamos um objeto verticalmente, ignorando o efeito da resistência do ar, a única força que age sobre o objeto é a gravitacional. Se a aceleração do objeto é a e m é sua massa, da segunda lei de Newton, segue que: $ma = -mg$. Denotando por v a velocidade do objeto, a igualdade anterior pode ser escrita $\dfrac{dv}{dt} = -g$. Usando o exemplo 8, obtemos que a solução geral da edo é:

$$v(t) = -g\,t + c.$$

Na solução geral da edo, a constante que aparece como conseqüência da integração pode ser interpretada da seguinte forma: se $t = 0$, temos $v(0) = c$; assim, a constante pode ser considerada como a velocidade inicial do objeto.

Ainda que o fenômeno descrito pela segunda lei de Newton não exija o conhecimento da velocidade inicial, em um problema real, ao imprimir-se ao objeto uma velocidade inicial v_0 dada, estamos escolhendo entre todas as soluções da edo exatamente aquela em que o valor c coincide com v_0. Logo, a solução do PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -g \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

é $v(t) = -g\,t + v_0$

Exemplo 13. *Consideremos o PVI:*

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

A edo tem solução geral $y(x) = c_1\,cos(x) + c_2\,sen(x)$. Impondo as condições iniciais, obtemos $2 = y(0) = c_1$ e $0 = y'(0) = c_2$; logo, a solução do PVI é $y(x) = 2\,cos(x)$.

Exemplo 14. *O PVI:*

$$\begin{cases} |y'| + |y| = 0 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

não tem solução, pois a única solução da edo é $y(x) = 0$, que não verifica a condição inicial.

Exemplo 15. *O PVI:*

$$\begin{cases} x\,y' - y = -1 \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = c, \end{cases}$$

tem soluções $y(x) = c\,x + 1$.

1.3 Campos de Direções

Do ponto de vista geométrico, as curvas integrais (soluções) de uma edo do tipo $y' = f(x, y)$ são tais que em cada ponto (x, y) a reta tangente à curva integral passando pelo ponto tem coeficiente angular $m = f(x, y)$. Isto sugere um método geométrico para entender aproximadamente como deveriam ser as curvas integrais da edo. Para isto, traçamos um pequeno segmento de reta em cada ponto (x, y) com coeficente angular $f(x, y)$, o conjunto destes segmentos é chamado **campo de direções da edo**.

Exemplo 16. *Considere a edo* $y' = -y$.

Calculando alguns coeficientes angulares:

(x,y)	f(x,y)=-y
$(x, 0)$	0
$(x, 1)$	-1
$(x, -1)$	1
(x, y)	$-y$

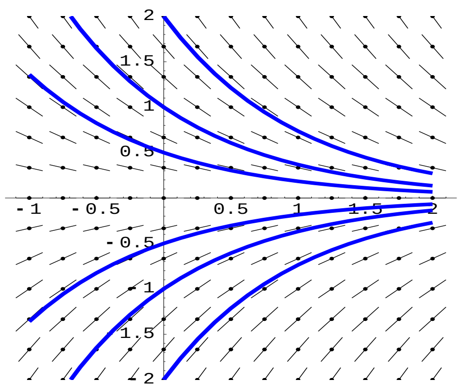


Figura 1.3: Campo de direções e algumas curvas integrais.

Exemplo 17. *Considere a edo* $y' = x - y$.

Calculando alguns coeficientes angulares:

(x,y)	f(x,y)
(x, x)	0
$(x, x - 1)$	1
$(x, x + 1)$	-1
$(x, x - k)$	k
$(x, x + k)$	$-k$

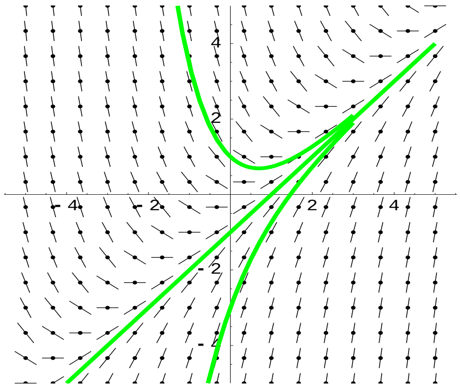


Figura 1.4: Campo de direções e algumas curvas integrais.

1.4 Teorema de Picard

Dada uma edo, temos duas questões fundamentais para responder:

1. Ela tem solução? E se tem, ela é única?
2. Como obter esta solução?

O próximo teorema responde à primeira questão para as edo's de primeira ordem.

Teorema 1. **(Picard)** *Sejam* $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $(x_0, y_0) \in [a, b] \times [c, d]$*; então:*

i) Se f *é contínua, então o PVI*

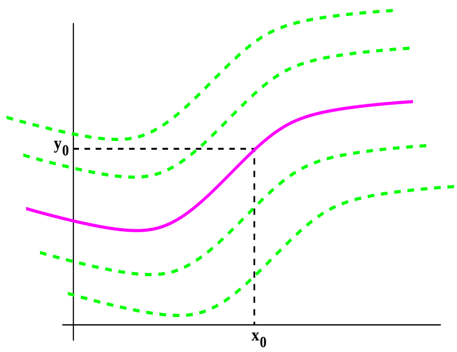
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem uma solução no intervalo $I_0 = (x_0 - h, x_0 + h) \subset [a, b]$*,* $(h > 0)$*.*

ii) Se $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *for contínua en* $[a, b] \times [c, d]$*, então a solução do PVI é única.*

Observação 3.

Geometricamente, o Teorema de Picard é equivalente a: se a edo $y' = f(x, y)$ tem solução, existe uma curva integral passando por (x_0, y_0).



Capítulo 2

Modelos

O termo **modelo** é utilizado freqüentemente como sinônimo de edo quando referida a aplicações. A seguir, apresentaremos alguns modelos:

2.1 Molas

Considere uma mola, de massa desprezível, presa verticalmente por uma extremidade. Suponha que na outra extremidade há um corpo de massa m com velocidade v_0. Determine a edo que descreve o comportamento da velocidade v, em função da deformação, x, da mola.

A **Lei de Hooke** nos diz que a mola exerce sobre o corpo uma força que é proporcional à deformação da mola. Como a força exercida pela mola se opõe à deformação, a força resultante no corpo é igual ao peso do corpo menos a força exercida pela mola. Sabemos que a força resultante também é igual a $F = m\,a$ e $a = \dfrac{dv}{dt}$; logo,

$$m\,\frac{dv}{dt} = m\,g - k\,x.$$

Isto é,

$$m\,\frac{dv}{dx}v = m\,\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = m\,\frac{dv}{dt} = m\,g - k\,x.$$

Ou seja:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}\left(g - \frac{k\,x}{m}\right) \tag{2.1}$$

é o modelo que descreve o comportamento da velocidade v, em função da deformação, x, da mola.

2.2 Lei de Resfriamento de Newton

O problema da condução do calor tem um modelo simples, mas real, que trata da troca de calor de um corpo com o meio ambiente, com as seguintes hipóteses:

1. A temperatura $T = T(t)$ depende apenas do tempo t.

2. A temperatura do meio A é constante.

3. A lei de resfriamento de Newton: a taxa de variação temporal da temperatura $T = T(t)$ de um corpo é proporcional à diferença entre T e a temperatura A (constante) do ambiente em volta. Isto é,

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - A), \quad k > 0.$$

Se $T > A$, então $\dfrac{dT}{dt} < 0$, de modo que a temperatura $T = T(t)$ é decrescente. Logo, se a temperatura do corpo é maior que a do ambiente o corpo está resfriando.

Se $T < A$, então $\dfrac{dT}{dt} > 0$, de modo que a temperatura $T = T(t)$ é crescente. Logo, se a temperatura do corpo é menor que a do ambiente o corpo está esquentando.

Se $T = A$, então $\dfrac{dT}{dt} = 0$, de modo que a temperatura T é constante.

2.3 Crescimento e Decrescimento Exponencial

2.3.1 Crescimento Exponencial

Suponha que

1. $N = N(t)$ é o número de indivíduos de uma população (colônia, etc),

2. a população tem taxas de natalidade e de mortalidade constantes β e δ, respectivamente (em nascimentos ou mortes por indivíduo por unidade de tempo).

Então, durante um pequeno intervalo de tempo Δt, ocorrem aproximadamente $\beta\, N(t)\, \Delta t$ nascimentos e $\delta\, N(t)\, \Delta t$ mortes, de modo que a variação em $N(t)$ é dada por $\Delta N \approx (\beta - \delta)\, N(t)\, \Delta t$, e assim:

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = k\,N,$$

com $k = \beta - \delta$.

A equação acima nos diz que a variação da população N é proporcional ao valor atual de N. Essa é uma das hipóteses mais simples sobre variação populacional. A constante k é chamada de constante de crescimento (se for positiva) ou declínio (se for negativa). Esta equação é chamada de equação de crescimento exponencial.

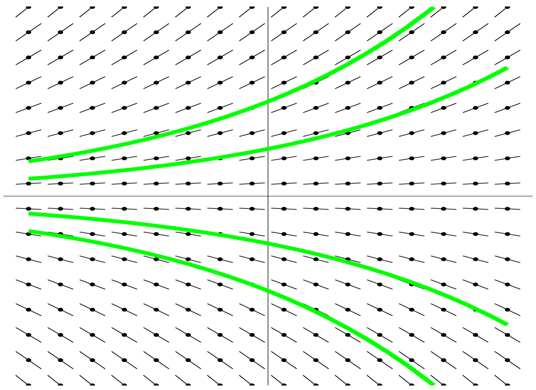


Figura 2.1: Campo de direções da edo para $k > 0$.

Se $N(0) = N_0$ é a população inicial, então a solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = k\,N \\ N(0) = N_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

descreve o comportamento desta população em função do tempo.

2.3.2 Decrescimento Exponencial

Considere uma amostra de material que contém $N(t)$ átomos de um certo isótopo radioativo no instante t. Foi experimentalmente observado que uma fração constante destes átomos radioativos decairá espontaneamente (em átomos de outro elemento ou em outro isótopo) durante cada unidade de tempo. Conseqüentemente, a amostra se comporta como uma população com uma taxa de mortalidade constante mas sem ocorrência de nascimentos. Logo, obtemos:

$$\frac{dN}{dt} = -k\,N, \qquad k > 0.$$

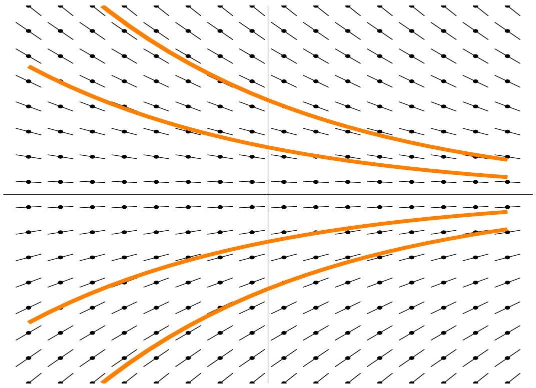


Figura 2.2: Campo de direções da edo para $k < 0$.

Onde k depende do isótopo radioativo em questão. Se $N(0) = N_0$ é a quantidade inicial do isótopo, então a solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = -k\,N \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

descreve a quantidades de átomos do isótopo radioativo em função do tempo.

A constante de decaimento de um isótopo radioativo é frequentemente especificada em termos de uma outra constante empírica, a meia-vida do isótopo. A meia-vida τ de um isótopo radioativo é o tempo necessário para que metade dele decaia.

Datação por carbono radioativo

A datação por carbono radioativo é uma ferramenta importante para pesquisa arqueológica. Ela se baseia no fato de que o isótopo radiativo C_{14} do Carbono é acumulado durante toda a vida dos seres orgânicos e começa a decair com a morte. Como a meia vida do C_{14} é aproximadamente 5730 anos, quantidades mensuráveis de C_{14} ainda estão presentes muitos anos após a morte.

Observação 4. *A rigor, ambos os modelos são exatamente iguais, a diferença está na interpretação da constante k.*

2.4 Crescimento Logístico

O modelo de crescimento exponencial não é adequado para o estudo de populações a longo prazo, pois o crescimento de uma população é eventualmente limitado por diversos fatores, como por exemplo, os ambientais. Uma população não pode cerscer sempre; por isto foi proposto o seguinte modelo:

$$\frac{dp}{dt} = h(p)\,p.$$

Nele, queremos escolher $h(p)$ de modo que $h(p) \approx k$ quando a população p for pequena e que $h(p)$ decresça quando a população p for suficientemente grande. Uma função simples com esta propriedade é: $h(p) = k - a\,p$, ($a > 0$). Substituindo na equação, temos

$$\frac{dp}{dt} = h(p)p = (k - a\,p)\,p.$$

Esta equação é conhecida como **equação logística**. É conveniente, reescrevê-la, pondo k em evidência e introduzindo uma nova constante, da seguinte forma

$$\frac{dp}{dt} = k\left(1 - \frac{p}{R}\right)p, \qquad R = \frac{k}{a}. \tag{2.3}$$

A constante k é chamada de taxa de crescimento intrínseco, isto é a taxa de crescimento na ausência de qualquer fator limitador e R é a capacidade ambiental de sustentação da espécie.

2.5 Problemas de Mistura

Consideremos um tanque que contém uma mistura de soluto e solvente. Neste tanque, há tanto um fluxo de entrada como um de saída, e queremos calcular a quantidade $x(t)$ de soluto no tanque no instante t. Vamos supor que no instante $t = 0$, a quantidade de soluto é $x(0) = x_0$. Suponha que a solução entre no tanque a uma taxa de r_i litros por segundo e que sua concentração seja de c_i gramas por litro. Suponha também que a solução do tanque seja mantida uniformemente misturada e que ela escoa a uma taxa constante de r_s litros por segundo Para deduzir uma equação diferencial para $x(t)$, estimamos a variação Δx em x por um curto período de tempo $[t, t + \Delta t]$. Temos:

$$
\begin{cases}
\Delta x = & \text{gramas de soluto que entram – gramas de soluto que saem} \\
\quad = & \text{(concentração da solução que entra) (litros que entram) } \Delta t \\
& \qquad \text{– (concentração do tanque)(litros que saem) } \Delta t \\
\quad = c_i\, r_i\, \Delta t - \dfrac{\text{quantidade soluto no tanque}}{\text{Volume do tanque}}\, r_s\, \Delta t \\
\Delta x \approx c_i\, r_i\, \Delta t - \dfrac{x(t)}{V(t)}\, r_s\, \Delta t \\
\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = c_i\, r_i - \dfrac{x(t)}{V(t)}\, r_s
\end{cases}
$$

o volume do tanque é dado por:

$$
\begin{aligned}
V(t) &= \text{volume inicial + (litros que entram – litros que saem)} \\
&= V_0 + (r_i - r_s)\, t.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\frac{dx}{dt} = c_i\, r_i - \frac{r_s}{V_0 + (r_i - r_s)t}\, x
$$

é o modelo que descreve a quantidade de soluto no tanque em função do tempo.

2.6 Epidemias

Suponha que uma determinada população pode ser dividida em duas partes: a dos que têm a doença e podem infectar outros e a dos que não a tem, mas são suscetíveis a ela. Seja x a proporção dos indivíduos suscetíveis e y a proporção de indivíduos infectados; então $x + y = 1$. Suponha qua i) a doença se espalhe pelo contato entre indivíduos doentes e sãos e que a taxa de disseminação é proporcional aos contatos; ii) os elementos dos dois grupos se movem livremente entre si de modo que o número de contatos é proporcional ao produto de x e y. Denotemos por y_0 é número inicial de infectados. Logo, o PVI

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy}{dt} = \alpha y\, x = \alpha\, y\,(1-y), \ \alpha > 0 \\
y(0) = y_0
\end{cases}
$$

é o modelo que descreve a variação do número de indivíduos infectados em função do tempo.

2.7 Lei de Torricelli

A Lei de Torricelli nos dá uma expressão para a taxa de variação do volume do tanque em relação ao tempo. Suponha que um tanque tenha um orifício de área a em seu fundo. Considere $h(t)$ como a profundidade da água no tanque no instante t. Se olharmos para uma gota de água na superfície da água e considerarmos que ela está caindo em queda livre até o fundo do tanque, sua velocidade v é dada por $v = \sqrt{2\,g\,h}$, logo:

$$\frac{dV}{dt} = -a\,v = -a\,\sqrt{2\,g\,h}.$$

Em um intervalo Δt suficientemente pequeno, o volume de água que passa pelo orifício entre os instantes t e $t + \Delta t$ é aproximadamente igual ao volume do cilindro de base a e altura $v(t)\Delta t$. Portanto, a variação no volume neste intervalo de tempo é dada por $\Delta V \approx -v(t)\Delta\, t\, a$ e:

$$\frac{dV}{dt} = -a\,v.$$

Isto é, a Lei de Toricelli nos diz que a taxa de variação do volume é proporcional à velocidade com que a água sai pelo buraco e que a constante de proporcionalidade é igual à área do orifício.

Também podemos expressar o volume como função da profundidade da seguinte maneira: seja $A(h)$ a seção horizontal do tanque na altura h, temos:

$$V = \int_0^h A(h)\,dh \qquad \text{e} \qquad \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt} = -a\,\sqrt{2\,g\,h},$$

Portanto,

$$A(h)\,\frac{dh}{dt} = -a\,\sqrt{2\,g\,h}$$

é uma outra expressão para lei de Torricelli.

2.8 Circuitos

Sem aprofundamento detalhados de conceitos de eletricidade, apresentaremos agora alguns exemplos de circuitos elétricos.

Sabemos que:

1. A intensidade da corrente elétrica I é a taxa de variação da carga elétrica Q em relação ao tempo que passa por uma seção tranversal de um condutor, isto é $I(t) = \dfrac{dQ}{dt}$.
2. A capacitância C de um capacitor a uma carga elétrica Q, com uma diferença de potencial V entre as placas é $C(t) = \dfrac{Q(t)}{V(t)}$.
3. A lei de Ohm: a diferença de potencial V nos terminais de um resistor de resistência R submetido a uma intensidade de corrente I é dada por $V(t) = R\,I(t)$.

Circuiros RC: são circuitos que possuem um resistor com resitência R, um capacitor de capacitância C, uma fonte com voltagem E constante.

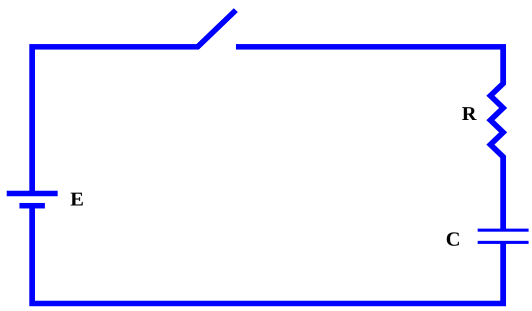


Figura 2.3: Circuito RC.

O modelo que rege este fenômeno é a edo de primeira ordem:

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0.$$

Circuiros RL: são circuitos que possuem um resistor com resitência R, um indutor de indutância L, uma fonte com voltagem E constante.

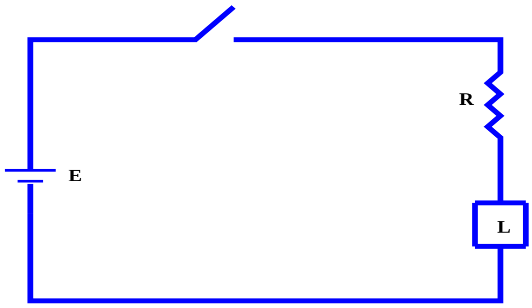


Figura 2.4: Circuito RL.

O modelo que rege este fenômeno é a edo de primeira ordem:

$$L\,\frac{dI}{dt} + R\,I = E.$$

Circuiros RLC: são circuitos mais complexos (redes) formados por um resistor com resitência R, um capacitor de capacitância C, carregando uma diferença de potencial V_C e uma fonte cuja diferença de potencial é $E(t)$.

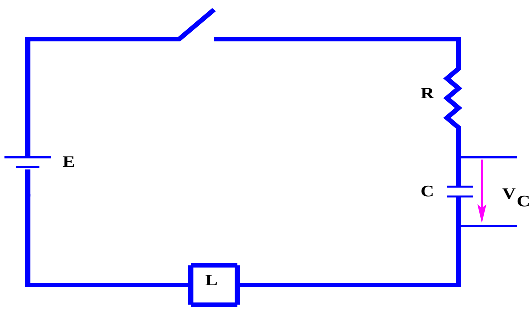


Figura 2.5: Circuito RLC.

O modelo que rege este fenômeno é a edo de segunda ordem:

$$L\,\frac{d^2I}{dt^2} + R\,\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0.$$

2.9 Reações Químicas

2.9.1 Reações Irreversíveis Mononucleares

A lei de ação de massa estabelece que a velocidade de uma reação química é proporcional às concentrações das substâncias que reagem.

Consideremos inicialmente a inversão da sacarose. A reação é:

$$C_{12}\,H_{22}\,O_{11} + H_2\,O = C_6\,H_{12}\,O_6 + C_6\,H_{12}\,O_6.$$

São formadas duas moléculas, uma de glicose e outra de frutose. Como, neste caso, a concentração da àgua pode ser suposta constante durante a reação, já que sua variação é desprezível nas condições em que o problema se realiza, chamamos A esta concentração, a a da sacarose antes de iniciar a reação e x a da sacarose decomposta ao fim do tempo t. A velocidade com que se verifica a inversão será dada pela derivada da quantidade decomposta em relação ao tempo; como esta derivada deve ser proporcional às concentrações A da àgua e $a - x$ da sacarose que ainda não reagiu, temos:

$$\frac{dx}{dt} = k_1\,A\,(a - x). \tag{2.4}$$

2.9.2 Reação Bimolecular Irreversível

Consideremos a reação:

$$C_2\,H_2 + O_2 = 2\,C\,O + H_2.$$

Chamando a e b as concentrações iniciais de acetileno e oxigênio e x a quantidade de cada reagente, expressa tal como as concentrações iniciais, em moléculas/grama por unidade de volume, a velocidade da reação é:

$$\frac{dx}{dt} = k\,(a - x)\,(b - x). \tag{2.5}$$

2.10 Exercícios

1. A taxa de crescimento da população de uma certa cidade é proporcional ao número de habitantes. Determine o modelo que descreve o comportamento da população em função do tempo.

2. Um material radioativo se desintegra a uma taxa proporcional à quantidade de matéria no instante t. Determine o modelo associado a este processo. Supondo que a quantidade de inicial de matéria seja Q_0, determine o PVI que descreve variação da quantidade de átomos ainda não desintegrados em função do tempo. Este PVI tem solução? Ela é única?

3. Esboce o campo de direções da edo $y' = x^2 + y$ e tente determinar graficamente algumas de suas curvas integrais.

(x,y)	f(x,y)
$(x, -x^2)$	0
$(x, -x^2 + 1)$	1
$(x, -x^2 - 1)$	-1
$(x, -x^2 + k)$	k
$(x, -x^2 - k)$	$-k$

Capítulo 3

Edo's de Primeira Ordem

3.1 Introdução

Neste capítulo estamos interessados em obter e analisar as soluções das edo's de primeira ordem. Isto é, edo's que podem ser escritas na forma:

$$F(y', y, x) = 0 \qquad \text{ou} \qquad y' = f(x, y)$$

Estudaremos vários métodos elementares de resolução de vários tipos especiais de edo's de primeira ordem. Veremos a maioria dos métodos reduz o problema de obtenção de solução ao cálculo de primitivas.
Sejam $I \subset \mathbb{R}$ e uma função $H : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Lembremos que uma primitiva de H em I é uma função $G : I \to \mathbb{R}$ tal que $G'(x) = H(x)$ para todo $x \in I$. Sendo G uma primitiva de F, sabemos que, para toda constante c, $G(x) + c$ também é uma primitiva de H. A família das primitivas de H é denominada de integral indefinida de G e denotada por

$$\int H(x)\, dx = G(x) + c.$$

Ou seja,

$$\int \frac{d\,G(x)}{dx}\, dx = \int H(x)\, dx = G(x) + c. \tag{3.1}$$

Isto é, $\Phi(x) = G(x) + c$ é solução geral da edo:

$$\frac{d\Phi}{dx} = H.$$

3.2 Edo's de Variáveis Separáveis

Exemplo 18. *Considere a seguinte edo:*

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\alpha}{V}\, P, \tag{3.2}$$

onde α e V são constantes. Reescrevendo a equação (3.2), obtemos:

$$\frac{d}{dt}\ln|P(t)| = \frac{1}{P}\,\frac{dP}{dt} = -\frac{\alpha}{V}.$$

Integrando com respeito a t e usando (3.1), vemos que a solução geral da edo (3.2) é dada por

$$P(t) = c\,e^{-\frac{\alpha}{V}t}$$

Vamos tentar generalizar o procedimento acima. O quê havia de especial nesta edo que nos permitiu determinarmos P?

Definição 9. *Uma edo de primeira ordem é do tipo separável se é da forma:*

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y).} \tag{3.3}$$

Observação 5. *Se a é tal que $g(a) = 0$, a função $y(x) = a$ é solução da edo (3.3).*

3.2.1 Obtenção de Soluções não Constantes

Discutiremos a resolução da edo (3.3), supondo que f e g estão definidas em intervalos abertos I e J, respectivamente, e que f é contínua em I e g' é contínua em J.

Resolução:

1. Reescrevemos a equação, "separando as variáveis":

$$\frac{1}{g(y)}\,\frac{dy}{dx} = f(x)$$

2. Consideremos uma primitiva $H(x)$ de $\dfrac{1}{g(x)}$ e uma primitiva $G(x)$ de $f(x)$. Isto é:

$$\frac{dH}{dx}(x) = \frac{1}{g(x)} \qquad \text{e} \qquad \frac{dG}{dx}(x) = f(x)$$

3. Usamos (3.1) em

$$\int \frac{d}{dx}\, H\left(g(y(x))\right)\, dx = \int \frac{1}{g(y)}\,\frac{dy}{dx}\, dx = \int f(x)\, dx,$$

para obter a solução geral da edo (3.3) na forma implícita:

$$H(g(y(x))) = G(x) + c.$$

Exemplo 19.

$$\frac{dy}{dx} = 2\, x\, \sqrt{y-1}$$

Inicialmente, vamos procurar soluções constantes. Observemos que $y = 1$ é raiz de $g(y) = \sqrt{y-1} = 0$. Logo $y(x) = 1$ é solução da edo. Para determinarmos as soluções não-constantes, separamos a variáveis e integramos:

$$\frac{1}{\sqrt{y-1}}\,\frac{dy}{dx} = 2\, x$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{y(x)-1}\right)\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{y-1}}\,\frac{dy}{dx}\, dx = \int 2\, x\, dx$$

e obtemos a solução geral da edo na forma implícita

$$2\, \sqrt{y(x)-1} = x^2 + c$$

ou

$$y(x) = \frac{1}{4}\,(x^2+c)^2 + 1$$

Observe, que no caso da edo deste exemplo a solução constante $y(x) = 1$ não pode ser deduzida da solução geral. Logo $y(x) = 1$ é uma solução singular da edo .

Observação 6. *Através de uma mudança na variável de integração, obtemos*

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\frac{dy}{dx}\, dx = \int \frac{1}{g(y)}\, dy.$$

Método Prático:

1. Reescrevemos a equação, “separando as variáveis”:

$$\frac{1}{g(y)}\,\frac{dy}{dx} = f(x)$$

2. Integramos os dois lados com respeito à variável independente

$$\int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} \, dx = \int f(x) \, dx$$

3. Usamos a Observação 6

$$\int \frac{1}{g(y)} \, dy = \int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} \, dx = \int f(x) \, dx.$$

   E a solução é:

$$\boxed{\int \frac{1}{g(y)} \, dy = \int f(x) \, dx.} \tag{3.4}$$

Exemplo 20. *Considere a seguinte edo:*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

Resolução:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}, \qquad \int \frac{1}{y} \, dy = -\int \frac{1}{x} \, dx$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|c|,$$

então, $y(x) = \dfrac{c}{x}$ é a solução geral da edo .

Exemplo 21.

$$y' = -\frac{(1+x)y}{(1-y)x}$$

Resolução:

$$\frac{1-y}{y} \frac{dy}{dx} = -\frac{1+x}{x}, \qquad \int \frac{1-y}{y} \, dy = -\int \frac{1+x}{x} \, dx$$

$$\ln|y| - y = -\ln|x| - x + c;$$

então $\ln|x\,y| + x - y = c$ é a solução geral da edo.

3.3 Edo's de Primeira Ordem Linear

Definição 10. *Uma edo de primeira ordem é* **linear** *se pode ser escrita na forma:*

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x).$$

Se a função $q(x) \equiv 0$*, dizemos que é uma edo de primeira ordem* **linear homogênea***, caso contrário,* **linear não-homogênea***.*

Definição 11. *Um* **fator integrante** *para uma edo é uma função* $\mu(x, y)$ *tal que a multiplicação da equação por* $\mu(x, y)$ *fornece uma equação em que cada lado pode ser identificado como uma derivada com respeito a* x*.*

Com a ajuda de um fator integrante apropriado, há uma técnica padrão para resolver as chamadas edo's de primeira ordem lineares.

Exemplo 22.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2} = 2 + x \tag{3.5}$$

Vamos procurar um fator integrante que seja função somente de x.

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\mu(x)y = (2 + x)\mu(x).$$

Gostaríamos que o lado esquerdo fosse a derivada do produto $\mu(x)\, y$. Ou seja, que ele fosse igual a:

$$\frac{d}{dx}\,(\mu(x)\, y) = \mu(x)\,\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx}\, y$$

Comparando termo a termo, o fator integrante, caso exista, deve satisfazer:

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{1}{2}\,\mu(x)$$

Resolvendo a equação de variáveis separáveis acima, temos:

$$\int \frac{1}{\mu}\, d\mu = \int \frac{1}{2}\, dx$$

Logo; $\ln|\mu| = \dfrac{x}{2} + c$, isto é $\mu(x) = C\, e^{\frac{x}{2}}$. Fazendo $C = 1$, temos $\mu(x) = e^{\frac{x}{2}}$, e obtemos:

$$\frac{d}{dx}\,\left(e^{\frac{x}{2}}\, y\right) = e^{\frac{x}{2}}\,\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\, e^{\frac{x}{2}}\, y = (2 + x)\, e^{\frac{x}{2}}$$

e integrando com respeito a x, temos

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}}\, y &= \int \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x}{2}}\, y\right) dx = \int (x+2)\, e^{\frac{x}{2}}\, dx = \int x\, e^{\frac{x}{2}}\, dx + \int 2\, e^{\frac{x}{2}}\, dx \\ &= x\, 2\, e^{\frac{x}{2}} - \int 2\, e^{\frac{x}{2}}\, dx + 4\, e^{\frac{x}{2}} + c = x\, 2\, e^{\frac{x}{2}} - 4\, e^{\frac{x}{2}} + 4\, e^{\frac{x}{2}} + c = x\, 2\, e^{\frac{x}{2}} + c, \end{aligned}$$

onde usamos integração por partes no primeiro termo. Logo,

$$y(x) = 2\, x + c\, e^{-\frac{x}{2}}$$

é solução geral da edo (3.5).

3.3.1 Obtenção de Soluções

Vamos repetir o argumento usado no exemplo anterior para resolver a edo de primeira ordem linear:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\, y = q(x). \tag{3.6}$$

Primeiramente, vamos procurar um fator integrante que seja função somente de x

$$\mu(x)\, \frac{dy}{dx} + \mu(x)\, p(x)\, y = q(x)\, \mu(x).$$

Gostaríamos que o lado esquerdo fosse a derivada do produto $\mu(x)y$. Ou seja, que ele fosse igual a

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)\, y] = \mu(x)\, \frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx}\, y.$$

Comparando termo a termo, o fator integrante, caso exista, deve satisfazer

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)\, p(x).$$

Resolvendo a equação de variáveis separáveis acima, temos

$$\int \frac{1}{\mu}\, d\mu = \int p(x)\, dx.$$

Logo, a função

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

é um fator integrante para a edo (3.6). Multiplicando a equação (3.6) por $\mu(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)\,dx}\,y\right) &= e^{\int p(x)\,dx}\,\frac{dy}{dx} + \frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)\,dx}\right)\,y\\ &= e^{\int p(x)\,dx}\left(\frac{dy}{dx} + p(x)\,y\right) = q(x)e^{\int p(x)dx}\end{aligned}$$

e integrando com respeito a x, temos

$$e^{\int p(x)dx}\,y = \int q(x)\,e^{\int p(x)dx}\,dx + c$$

Logo,

$$\boxed{y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)\,e^{\int p(x)dx}\,dx + c\right)}$$

é solução geral da edo (3.6).

Resumo:

Para determinar a solução geral de edo 's lineares:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x), \tag{3.7}$$

1. determinar um fator integrante da forma

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

2. a solução geral da edo linear (3.7) é dada por

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)\,q(x)\,dx + c\right).$$

Nas próximas seções, veremos alguns métodos de resolução de edo's que envolvem uma mudança na variável dependente.

3.4 Equação de Bernoulli

Exemplo 23. *Consideremos a edo:*

$$2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} = 4\,x^2 + 3\,y^2 \tag{3.8}$$

Façamos mudança de variável $v = y^2$. As derivadas de v e y satisfazem

$$\frac{dv}{dx} = 2\,y\,\frac{dy}{dx}$$

reescrevendo a edo (dividindo por $x\,y^2$), temos

$$2\,y\,\frac{dy}{dx} - 3\,\frac{y^2}{x} = 4\,x$$

fazendo a mudança de variável, obtemos:

$$\frac{dv}{dx} - 3\,\frac{v}{x} = 4\,x. \tag{3.9}$$

Isto é, obtivemos uma edo linear. Resolvendo esta equação, obtemos que uma solução geral da edo (3.9) é dada por

$$v(x) = x^3 \int 4\,x^{-3}\,x\,dx = -4\,x^2 + c\,x^3.$$

Voltando à variável original y. Como $v = y^2$, temos

$$y^2(x) = -4\,x^2 + c\,x^3$$

é solução geral da edo (3.8).

Definição 12. *Uma edo de primeira ordem que pode ser escrita na forma*

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)\,y^n \tag{3.10}$$

é chamada uma edo de Bernoulli. Observemos que se $n = 0$ ou $n = 1$, a equação de Bernoulli é uma edo linear.

3.4.1 Obtenção de Soluções

Para determinar a solução geral da equação de Bernoulli (3.10), vamos considerar a seguinte mudança de variável:

$$v = y^{1-n}$$

Derivando com respeito a x, obtemos:

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\,\frac{dy}{dx}$$

Reescrevendo a edo (3.10), obtemos

$$(1-n)\, y^{-n}\, \frac{dy}{dx} + (1-n)\, p(x)\, y^{1-n} = (1-n)\, q(x).$$

Na variável v, temos

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)\, p(x)\, v = (1-n)\, q(x).$$

Ou seja, obtivemos uma edo linear.

O conteúdo da próxima seção é de autoria do aluno do $4^{\underline{o}}$ período do curso de Física da UERJ, Israel Nunes de Almeida Júnior e nesta oportunidade, a autora o agradece por ele ter gentilmente cedido este texto para publicação no presente livro. Esta seção tem o mérito de apresentar um método de resolução de EDOs de primeira ordem que não estava contemplado na versão anterior do livro online: o Método de Lagrange. Além de apresentar sua aplicação usual para a resolução de EDOs de primeira ordem lineares, Israel estende sua aplicação às EDOs do tipo Bernoulli.

Em 2006, durante o curso de *Cálculo Diferencial e Integral III*, Israel propôs a seguinte questão: "O método de Lagrange, usado para resolução de equações diferenciais lineares, também é válido para resolução de EDOs do tipo Bernoulli?"

Em resposta a esta questão, propus ao Israel que ele mesmo investigasse esta possibilidade. Primeiro, testando o método em um exemplo particular. Sendo bem sucedido nesta etapa, aplicando-o a uma EDO qualquer do tipo Bernoulli. Ao final deste processo, foi feita uma comparação entre este método e o método apresentado neste livro. Posteriormente, para efeito de completude deste trabalho, ele fez um levantamento bibliográfico a fim de identificar outros possíveis autores que apresentassem esta estratégia de resolução para EDOs do tipo Bernoulli. Esta mesma proposta foi estendida aos demais alunos inscritos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III e apenas nos livros de Abunahman e Piskounov foram encontradas menções a esta estratégia. Destaco, entretanto, que estes autores apenas sugeriram a aplicação ou empregaram esta estratégia em exemplos particulares. Esta seção é resultado desta investigação.

3.4.2 Outro método de resolução de EDOs do tipo Bernoulli

por Israel Nunes de Almeida Júnior

Dizemos que uma equação é do tipo Bernoulli, se ela pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n \tag{3.11}$$

onde P e Q são constantes ou funções de x.

Já vimos que a EDO pode ser transformada em uma EDO linear através da mudança de variável $v = y^{1-n}$. Vale salientar que para $n = 0$ ou $n = 1$, a equação é na verdade linear, e a substituição não é necessária. Usando a mudança de variável mencionada, a equação (3.11) fica

$$\frac{v}{dx} + P_1 v = Q_1, \tag{3.12}$$

onde $P_1 = (1-n)P$ e $Q_1 = (1-n)Q$. Observe que a equação (3.12) é linear em v.

Antes de prosseguirmos, vamos apresentar o chamado método de Lagrange para EDOs lineares.

Método de Lagrange – EDOs lineares

O método de Lagrange é usado para resolver EDOs lineares. Isto é, EDOs que podem ser escritas na forma

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \tag{3.13}$$

onde P e Q são constantes ou funções de x.

No método de Lagrange, procuramos uma solução de (3.13) na forma de um produto. Isto é, $y(x) = u(x)v(x)$. Observe que, neste caso, a derivada de y é dada por

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Substituindo a expressão acima em (3.13), obtemos

$$u\left(\frac{dv}{dx} + Pv\right) + v\frac{du}{dx} = Q \tag{3.14}$$

As funções u e v são determinadas em duas etapas.

1. Primeiro, determinamos uma função v tal que

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0. \tag{3.15}$$

2. Depois, determinamos as funções u tais que

$$v\frac{du}{dx} = Q, \tag{3.16}$$

   onde v é a função determinada no item anterior.

Determinação de v: Para resolver (3.15), multiplique os dois membros da equação por dx:

$$dv + Pdx = 0.$$

Separe as variáveis:

$$\frac{dv}{v} = -Pdx.$$

Integre:

$$\int \frac{1}{v}dv = -\int Pdx$$
$$\ln|v| = -\int Pdx + C.$$

Logo,

$$|v| = e^C e^{-\int Pdx}$$

Isto, é a função v deve ser da forma

$$v = Ke^{-\int Pdx}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Determinação de u: Vamos, agora, determinar as funções u que resolvem (3.16) para v dado por $v = e^{-\int Pdx}$ (observe que isto corresponde à escolha $K = 1$ na equação acima). Substituindo v em (3.16):

$$e^{-\int Pdx}\frac{du}{dx} = Q$$
$$\frac{du}{dx} = e^{\int Pdx}Q$$

Integrando:

$$u = \int e^{\int Pdx}Qdx$$

Como $y = uv$, tem-se:

$$y = e^{-\int P dx} \int e^{\int P dx} Q dx \tag{3.17}$$

Método de Lagrange e EDOs do tipo Bernoulli – Um caso particular

Vejamos agora, através de um exemplo, que estas mesmas idéias podem ser aplicadas a uma EDO do tipo Bernoulli. Considere a EDO:

$$\frac{dy}{dx} - 2\frac{y}{x} = 3xy^2.$$

Fazendo $y(x) = u(x)v(x)$, derivando com respeito a x:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

e substituindo

$$\begin{aligned} u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - 2\frac{uv}{x} &= 3xu^2v^2 \\ u\left(\frac{dv}{dx} - 2\frac{v}{x}\right) + v\frac{du}{dx} &= 3xu^2v^2 \end{aligned}$$

Calculando v:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} - 2\frac{v}{x} &= 0 \\ \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x} &= 0 \end{aligned}$$

Integrando:

$$\ln|v| = 2\ln|x| + C.$$

Podemos tomar uma solução particular $v(x) = x^2$.

Calculando u:

$$\begin{aligned} x^2\frac{du}{dx} &= 3xu^2x^4 \\ u^{-2}du &= 3x^3dx \end{aligned}$$

Integrando:

$$-\frac{1}{u} = \frac{3x^4}{4} + C.$$

Assim:

$$u(x) = -\frac{4}{3x^4 + K}.$$

Como $y(x) = u(x)v(x)$, tem-se

$$y(x) = -\frac{4x^2}{3x^4 + K} \qquad \text{(\textit{Solução Geral})}$$

Para averiguar a consistência deste método, propomos também a solução da mesma EDO pelo método apresentado anteriormente, ou seja, EDOs do tipo Bernoulli. Tomemos novamente a EDO:

$$\frac{dy}{dx} - 2\frac{y}{x} = 3xy^2.$$

Dividindo por y^2:

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - 2\frac{1}{x}y^{-1} = 3x.$$

Substituindo $w = y^{-1}$ e derivando com respeito a x

$$\frac{dw}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

Na nova variável, a equação se reescreve:

$$\frac{dw}{dx} + \frac{2}{x}w = -3x.$$

Observe que trata-se de uma EDO linear em w.

Vamos resolver esta EDO linear pelo método de Lagrange. Fazendo $w(x) = u(x)v(x)$, obtemos

$$\frac{dw}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Substituindo

$$u\left(\frac{dv}{dx} + 2\frac{v}{x}\right) + v\frac{du}{dx} = -3x.$$

Calculando v:

$$\frac{dv}{dx} + 2\frac{v}{x} = 0$$
$$\frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{x}$$

Integrando:

$$\ln|v| = -2\ln|x| + C.$$

Podemos tomar uma solução particular $v(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Calculando u:

$$\frac{1}{x^2}\frac{du}{dx} = -3x$$

Integrando:

$$du = -3x^3 dx$$
$$u(x) = -\frac{3x^4}{4} + C.$$

Como, $w(x) = u(x)v(x)$, tem-se

$$w(x) = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{3x^4}{4} + C\right)$$
$$w(x) = -\frac{3x^2}{4} + \frac{C}{x^2}.$$

Reduzindo ao mesmo denominador

$$w(x) = \frac{4C - 3x^2}{4x^2}$$

Como $w = y^{-1}$, pode-se escrever, já que $4C = -K$:

$$y(x) = -\frac{4x^2}{3x^4 + K}.$$

Este foi o mesmo resultado obtido quando utilizamos o Método de Lagrange. Observamos ainda que, procedendo desta forma, precisamos efetuar mais mudanças de variáveis do que no método de Lagrange.

Método de Lagrange e EDOs do tipo Bernoulli – O caso geral

Considere agora uma EDO do tipo Bernoulli. Isto é, uma EDO da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n. \tag{3.18}$$

com $n \neq 0$ e $n \neq 1$. Vamos tentar obter sua solução y pelo método de Lagrange.

Fazendo a substituição $y(x) = u(x)v(x)$ e derivando com respeito a x:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)\frac{uv}{x} &= Q(x)(uv)^n \\ u\left(\frac{dv}{dx} + P(x)v\right) + v\frac{du}{dx} &= Q(x)u^n v^n. \end{aligned}$$

Calculando v:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} + P(x)v &= 0 \\ \frac{dv}{v} &= -P(x)dx \end{aligned}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{v}dv &= -\int P(x)dx \\ \ln|v| &= -\int P(x)dx \end{aligned}$$

Isto é, $v(x) = e^{-\int P(x)dx}$.

Calculando u:

$$\begin{aligned} v\frac{du}{dx} &= Q(x)u^n v^n \\ \frac{du}{dx} &= Q(x)u^n v^{n-1} \\ \frac{du}{u^n} &= Q(x)v^{n-1}dx \end{aligned}$$

Integrando:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{u^n} du &= \int Q(x) v^{n-1} dx \\
\frac{u^{1-n}}{1-n} &= \int Q(x) v^{n-1} dx + C \\
u^{1-n} &= (1-n)\left(\int Q(x) v^{n-1} dx + C\right) \\
u &= \left[(1-n)\left(\int Q(x) v^{n-1} dx + C\right)\right]^{\frac{1}{1-n}}.
\end{aligned}
$$

Lembrando que $v(x) = e^{-\int P(x)dx}$ e substituindo em u:

$$
u = \left[(1-n)\left(\int Q(x)\left(e^{-\int P(x)dx}\right)^{n-1} dx + C\right)\right]^{\frac{1}{1-n}}.
$$

Como, $y(x) = u(x)v(x)$, temos

$$
y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[(1-n)\left(\int Q(x)\left(e^{-\int P(x)dx}\right)^{n-1} dx + C\right)\right]^{\frac{1}{1-n}},
$$

que é a solução geral da EDO de Bernoulli (3.18) obtida através do Método de Lagrange.

Observe que se resolvemos a EDO de Bernoulli (3.18) pela substituição $w = y^{1-n}$, podemos reescrever a EDO (3.18) na nova variável:

$$
\frac{dw}{dx} + P_1(x)w = Q_1(x),
$$

onde $P_1(x) = (1-n)P(x)$ e $Q_1(x) = (1-n)Q(x)$.

Pelo método de Lagrange, fazendo $w(x) = u(x)v(x)$, obtemos:

$$
u\left(\frac{dv}{dx} + P_1(x)v\right) + v\frac{du}{dx} = Q_1(x).
$$

Calculando v:

$$
\begin{aligned}
\frac{dv}{dx} + P_1(x)v &= 0 \\
\frac{dv}{v} &= -P_1(x)dx
\end{aligned}
$$

Integrando:

$$\int \frac{1}{v} dv = -\int P_1(x)dx$$
$$\ln|v| = -\int P_1(x)dx$$

Isto é, $v(x) = e^{-\int P_1(x)dx}$.

Calculando u:

$$v\frac{du}{dx} = Q_1(x)$$
$$du = Q_1(x)v^{-1}dx$$

Integrando:

$$u = \int Q_1(x)v^{-1}dx + C$$

Lembrando que $v(x) = e^{-\int P_1(x)dx}$ e substituindo em u:

$$u = \left(\int Q_1(x)e^{\int P_1(x)dx}dx + C\right).$$

Como, $w(x) = u(x)v(x)$, temos

$$w(x) = (1-n)e^{(n-1)\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx}dx + C\right).$$

Por outro lado, $w = y^{1-n}$. Logo

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[(1-n)\left(\int Q(x)\left(e^{-\int P(x)dx}\right)^{n-1}dx + C\right)\right]^{\frac{1}{1-n}},$$

que é a mesma solução geral da EDO de Bernoulli (3.18) obtida através do Método de Lagrange.

Exemplos

1.

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = xy^3$$

Solução: $y(x) = u(x)v(x)$ e $\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - 2xuv = xu^3v^3$$
$$u\left(\frac{dv}{dx} - 2xv\right) + v\frac{du}{dx} = xu^3v^3$$

Calculando v:

$$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0$$
$$\frac{dv}{v} = 2xdx$$
$$\ln|v| = x^2 + C$$
$$v(x) = e^{x^2}$$

Calculando u:

$$e^{x^2}\frac{du}{dx} = xe^{3x^2}u^3$$
$$u^{-3}du = xe^{3x^2}dx$$

Calculando a integral $\int xe^{2x^2}dx$ Fazendo $\alpha = 2x^2$, tem-se $4xdx = d\alpha$ e

$$\int xe^{2x^2}dx = \frac{1}{4}\int e^{\alpha}d\alpha = \frac{\alpha}{4} + C = \frac{e^{2x^2}}{4} + C$$

Integrando:

$$-\frac{1}{2u^2} = \frac{e^{2x^2} + K}{4}$$
$$u^2 = -\frac{2}{e^{2x^2} + K}.$$

Como, $y(x) = u(x)v(x)$, temos $y^2(x) = u^2(x)v^2(x)$. Logo

$$y^2(x) = -\frac{2e^{2x^2}}{e^{2x^2} + K} \qquad \text{(Solução Geral)}$$

2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}.$$

Solução: $y(x) = u(x)v(x)$ e $\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} - \frac{4}{x}uv = x\sqrt{u}\sqrt{v}$$
$$u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{4}{x}v\right) + v\frac{du}{dx} = x\sqrt{u}\sqrt{v}$$

Calculando v:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{4}{x}v = 0$$
$$\frac{dv}{v} = \frac{4}{x}dx$$
$$v(x) = x^4$$

Calculando u:

$$x^4\frac{du}{dx} = x\sqrt{u}\sqrt{x^4}\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}$$

Integrando:

$$\sqrt{u} = \ln\sqrt{x} + K$$
$$u = (\ln\sqrt{x} + K)^2$$

Como, $y(x) = u(x)v(x)$, temos

$$y(x) = x^4(\ln\sqrt{x} + K)^2 \qquad \text{(Solução Geral)}$$

Discussão sobre o "novo" método

O método analisado propõe a resolução da equação de Bernoulli pelo método de Lagrange. Esse método se mostrou viável e simplificado na prática, visto que realizamos apenas uma mudança de variável ($y(x) = u(x)v(x)$), diferentemente do método de resolução mais comum, onde substituímos $y^{1-n} = w$, e posteriormente encontramos a função w como solução de uma EDO linear e, finalmente, determinamos a solução da EDO do tipo Bernoulli original. Nos exemplos apresentados, não ficou evidenciada uma tendência para resolução de integrais de forma mais complicada do que normalmente apareceriam se as EDOs fossem resolvidas pelo método mais usual. Desta forma, a resolução por este método se mostrou confiável e mais facilmente compreendida pelos alunos. Além disso, ele permite uma resolução das EDOs de maneira mais rápida e prática.

Bibliografia

[1] ABUNAHMAN, S., Equações Diferencias, ERCA Editora e Gráfica Ltda, Rio de Janeiro, 1989.

[2] AGNEW, R. P., Diferential Equations, Editora McGraw-Hill, New York, 1960.

[3] AYRES, F., Equações Diferencias, Editora McGraw-Hill, São Paulo, 1959.

[4] DIAS, A. T., Curso de Cálculo Infinitesimal, Fundação Gorceix, Ouro Preto, 1962.

[5] MACHADO, Kleber Daum. Equações Diferenciais aplicadas à Física. Paraná. Editora UEPG, 2000

[6] PISKOUNOV, N., Cálculo Diferencial e Integral: Volume II, Editora Lopes da Silva, Portugal, 1987.

[7] ZILL, D. G. & CULLEN, M. R., Equações Diferenciais: Volume 1, Editora Makron Books, São Paulo, 2005.

3.5 Equação de Riccati

Definição 13. *Equações de Riccati são edo's de primeira ordem que podem ser escritas na forma:*

$$\frac{dy}{dx} = q(x)\, y^2 + p(x)\, y + r(x) \tag{3.19}$$

Observe que quando $q(x) = 0$*, temos uma equação linear e quando* $r(x) = 0$*, temos uma equação de Bernoulli com* $n = 2$*.*

Observação 7. *Liouville, matemático francês, mostrou que uma solução geral da equação de Riccati (nos caso em que ela não é linear nem do tipo Bernoulli) só pode ser explicitamente obtida se já conhecermos uma solução.*

Vamos deduzir um método de resolução para o caso em que conhecemos uma solução de (3.19) que denotaremos por y_1. Vejamos um exemplo:

Exemplo 24. *Sabendo que $y_1(x) = x$ é uma solução, resolver a edo de Riccati:*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 3. \tag{3.20}$$

Consideremos a mudança de variável

$$z = y - y_1 = y - x$$

Derivando, obtemos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1.$$

Usando a equação (3.20). como $y_1(x) = x$ é uma solução, temos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1 = -\frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 3 - 1.$$

fazendo a substituição $y = y_1 + z = x + z$, temos:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{(x+z)^2}{x^2} - \frac{x+z}{x} + 3 - 1 = -\frac{2\,x\,z}{x^2} - \frac{z^2}{x^2} - \frac{z}{x}.$$

Ou seja, obtivemos uma equação de Bernoulli:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{3}{x}\,z = -\frac{1}{x^2}\,z^2. \tag{3.21}$$

Resolvendo e equação de Bernoulli (3.21), obtemos que

$$z(x) = \frac{4\,x}{4\,c\,x^4 - 1}$$

é solução geral da edo (3.21). Como $y = y_1 + z = x + z$, temos

$$y(x) = x + z(x) = \frac{4\,c\,x^5 + 3\,x}{4\,c\,x^4 - 1}.$$

3.5.1 Determinação de Soluções

Vamos tratar o caso geral. Seja y_1 uma solução particular da equação de Riccati:

$$\frac{dy}{dx} = q(x)\,y^2 + p(x)\,y + r(x).$$

Neste caso, a mudança de variável

$$z = y - y_1$$

transforma a equação de Riccati na variável y em uma equação de Bernoulli com $n = 2$ na variável z. De fato, temos:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{dy_1}{dx}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{dy_1}{dx} &= q\,y^2 + p\,y + r - \frac{dy_1}{dx} \\
&= q\,(y_1 + z)^2 + p\,(y_1 + z) + r - \frac{dy_1}{dx} \\
&= 2\,q\,y_1\,z + q\,z^2 + p\,z + \left(q\,y_1^2 + p\,y_1 + r - \frac{dy_1}{dx}\right),
\end{aligned}$$

como y_1 é uma solução, a exepressão entre parênteses é igual a zero, ou seja, obtivemos uma edo de Bernoulli com $n = 2$ para a variável z:

$$\boxed{\frac{dz}{dx} - (2\,q(x)\,y_1(x) + p(x))\,z = q(x)\,z^2.}$$

3.5.2 Método Alternativo de Resolução da edo de Riccati

Seja y_1 uma solução particular da equação de Riccati:

$$\frac{dy}{dx} = q(x)\,y^2 + p(x)\,y + r(x).$$

Vimos que a mudança de variável:

$$z(x) = y(x) - y_1(x)$$

transforma a equação de Riccati na variável y em uma equação de Bernoulli com $n = 2$ na variável z. Por outro lado, sabemos que a mudança de variável:

$$z(x) = v^{1-2}(x) = v^{-1}(x)$$

transforma a equação de Bernoulli com $n = 2$ na variável z em uma edo linear na variável v. Combinando as duas mudanças de variável acima, vemos que a seguinte mudança de variável:

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{v(x)},$$

transforma a equação de Riccati na variável y em uma equação linear na variável v. De fato, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{dv}{dx}\,\frac{1}{v^2(x)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} - \frac{dv}{dx}\,\frac{1}{v^2} &= \frac{dy}{dx} = q\,y^2 + p\,y + r \\
\frac{dy_1}{dx} - \frac{dv}{dx}\,\frac{1}{v^2} &= q\,\left(y_1 + \frac{1}{v}\right)^2 + p\,\left(y_1 + \frac{1}{v}\right) + r \\
-\frac{dv}{dx}\,\frac{1}{v^2} &= \left(q\,y_1^2 + p\,y_1 + r - \frac{dy_1}{dx}\right) + \frac{2\,y_1\,q}{v} + \frac{q}{v^2} + \frac{p}{v},
\end{aligned}$$

como y_1 é uma solução da edo, a expressão entre parênteses é igual a zero, ou seja:

$$-\frac{1}{v^2}\,\frac{dv}{dx} = \frac{2\,y_1\,q}{v} + \frac{q}{v^2} + \frac{p}{v},$$

então obtivemos a edo linear:

$$\boxed{\frac{dv}{dx} + \left(p(x) + 2\,y_1(x)\,q(x)\right)\,v(x) = -q(x).}$$

Exemplo 25. *Ache a solução geral da seguinte edo de Riccati:*

$$y' - 1 - x^2 + 2\,x\,y - y^2 = 0,$$

se $y_1(x) = x$ é uma solução.

Reescrevendo a edo: $y' = y^2 - 2\,x\,y + x^2 + 1$; logo, $q(x) = 1$ e $p(x) = -2\,x$, então:

$$\begin{aligned}
v' + (-2\,x + 2\,x)\,v &= -1 \\
v' &= -1,
\end{aligned}$$

de onde $v = -x + c$. A solução geral da edo de Riccati é $y(x) = y_1(x) + \dfrac{1}{v(x)}$, isto é:

$$y(x) = \frac{x^2 - c\,x - 1}{x - c}.$$

Exemplo 26. *Ache a solução geral da seguinte edo de Riccati:*

$$y' - y^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2} = 0;\ x > 0,$$

se $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$ *é uma solução.*

Reescrevendo a edo: $y' = y^2 - \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x^2}$; logo, $q(x) = 1$ e $p(x) = -\dfrac{1}{x}$, então:

$$\begin{aligned} v' + \left(-\frac{1}{x} + 2\,\frac{1}{x}\right)\, v &= -1 \\ v' + \frac{1}{x}\, v &= -1, \end{aligned}$$

de onde $v = \dfrac{c\, - x^2}{2\,x}$. A solução geral da edo de Riccati é $y(x) = y_1(x) + \dfrac{1}{v(x)}$, isto é:

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{2\,x}{c\, - x^2}.$$

3.6 Edo's Exatas

Exemplo 27. *Consideremos a seguinte edo:*

$$2\,x + y^2 + 2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} = 0$$

Seja $\psi(x,y) = x^2 + x\,y^2$; então:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2\,x + y^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2\,x\,y.$$

Logo

$$\frac{d}{dx}\,\psi(x, y(x)) = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = 2\,x + y^2 + 2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} = 0$$

Agora podemos integrar e obter:

$$\int \frac{d}{dx}\,\psi(x, y(x))\,dx = \int 0\,dx = c.$$

Isto é, $\psi(x, y(x)) = c$, equivalentemente:

$$x^2 + x\,y^2 = c$$

é solução geral da edo.

Definição 14. *Uma edo de primeira ordem do tipo:*

$$\boxed{M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0}$$

é dita **exata** *se existe uma função $\psi(x,y)$ tal que:*

$$M(x,y) = \frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad e \qquad N(x,y) = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

Observação 8. *Como uma edo exata pode ser reescrita na forma*

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

sua solução geral será dada por $\psi(x, y(x)) = c$. Isto é, a solução geral de uma edo exata é formada pelas curvas de nível da função $\psi(x,y)$.

Agora é conveniente fazermos as seguintes perguntas:

1. Como identificar uma edo exata?
2. Se a edo é exata, como determinar ψ?

Teorema 2. *Sejam $M,\ N : I_1 \times I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^2, onde I_i são intervalos abertos. A edo:*

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

é exata se e somente se:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y), \tag{3.22}$$

para todo $(x,y) \in I_1 \times I_2$.

Observação 9. *Notee que esta condição nada mais é do que exigir a igualdade das derivadas mistas de ψ. (Teorema de Schwarz).*

Se a seguinte edo é exata:

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3.23}$$

tal que as funções M e N satisfazem as hipóteses do Teorema 2. Pela Observação 8, para resolver a edo (3.23), basta determinarmos a função $\psi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = M(x,y) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = N(x,y).$$

Integrando a primeira igualdade acima com respeito a x, obtemos:

$$\psi(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y).$$

Para determinarmos $g(y)$, derivamos ψ com respeito a y e usar a segunda igualdade que a função ψ deve satisfazer:

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big) + \frac{d}{dy}\,g(y) = \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x,y).$$

Logo, para determinarmos $g(y)$, basta resolvermos a edo:

$$\frac{dg}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big). \tag{3.24}$$

Uma condição necessária para que esta edo tenha solução é que o lado direito de (3.24) não dependa de x. Para verificar que isto ocorre, vamos derivar lado direito de (3.24) com respeito a x:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\Big) &= \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\int M(x,y)\,dx\Big) \\
&= \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)
\end{aligned}$$

Como a edo (3.23) é exata, pelo Teorema 2, temos que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Logo, obtivemos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\Big) = 0.$$

Isto é, o lado direito de (3.24) depende somente de y. Resolvendo a edo (3.24), obtemos:

$$g(y) = \int \Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\Big)\,dy$$

e ψ é dada por:

$$\begin{aligned}
\psi(x,y) &= \int M(x,y)dx + g(y) \\
&= \int M(x,y)dx + \int \Big(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\Big)\,dy.
\end{aligned}$$

Exemplo 28. *Considere a seguinte edo:*

$$\frac{2x}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3.25}$$

Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6\,x}{y^4} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6\,x}{y^4},$$

pelo Teorema 2, a edo (3.25) é exata. Logo, existe $\psi(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y) = \frac{2\,x}{y^3} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y) = \frac{y^2 - 3\,x^2}{y^4}$$

e a solução geral da edo (3.25) é dada por $\psi(x, y) = c$. Vamos determinar $\psi(x, y)$, integrando em relação a x:

$$\psi(x, y) = \int \frac{2\,x}{y^3}\,dx + g(y) = \frac{x^2}{y^3} + g(y).$$

Derivando a expressão acima com respeito a y e usando que $\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y)$, temos:

$$N(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{y^3} + g(y)\right) = -\frac{3\,x^2}{y^4} + \frac{dg}{dy}.$$

Logo,

$$\frac{dg}{dy} = N(x, y) + \frac{3x^2}{y^4} = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} + \frac{3x^2}{y^4} = \frac{1}{y^2}$$

Uma solução da edo acima é: $g(y) = -\dfrac{1}{y}$; logo, $\psi(x, y) = \dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{1}{y}$ e:

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = c$$

é uma solução geral da edo exata (3.25).

3.6.1 Fator Integrante

Exemplo 29. *Considere a seguinte edo:*

$$3\,x\,y + y^2 + (x^2 + x\,y)\,\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3.26}$$

Como
$$\frac{\partial}{\partial y}(3\,x\,y+y^2)=3\,x+2\,y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(x^2+x\,y)=2\,x+y,$$
então a edo não é exata.
Vamos tentar encontrar um fator integrante $\mu(x)$, tal que:
$$\mu(x)(3\,x\,y+y^2)+\mu(x)(x^2+x\,y)\,\frac{dy}{dx}=0$$
seja exata. A condição necessária e suficiente, dada pelo Teorema 2, para que uma edo seja exata, se:
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x)\,(3\,x\,y+y^2)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\,(x^2+x\,y)\right).$$
Derivando, obtemos:
$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\mu(x)\right)(3\,x\,y+y^2)+\mu(x)\,\frac{\partial}{\partial y}(3\,x\,y+y^2)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\mu(x)\right)(x^2+x\,y)\mu(x)\frac{\partial}{\partial x}(x^2+x\,y);$$
logo,
$$\mu(x)(3\,x+2\,y)=\frac{d\mu}{dx}(x^2+x\,y)+\mu(x)(2\,x+y)$$
Isto é, um fator integrante dependendo somente de x, se existir, deve satisfazer:
$$\frac{d\mu}{dx}=\frac{x+y}{x^2+x\,y}\,\mu=\frac{x+y}{x\,(x+y)}\,\mu=\frac{1}{x}\,\mu$$
Resolvendo a edo de variáveis separáveis acima, temos que:
$$\mu(x)=x$$
é um fator integrante. Multiplicando a edo por μ:
$$x\,(3\,x\,y+y^2)+x\,(x^2+x\,y)\,\frac{dy}{dx}=0. \tag{3.27}$$
Como
$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(3\,x^2\,y+x\,y^2)=3\,x^2+2\,x\,y \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^3+x^2\,y)=3\,x^2+2\,x\,y,$$
o Teorema 2 garante que a edo (3.27) é exata. Isto é, o fator integrante μ tornou a edo (3.26) exata. Uma solução geral da edo (3.27) é:
$$x^3\,y+\frac{x^2\,y^2}{2}=\psi(x,y)=c.$$
A solução acima também nos dá uma solução geral da edo (3.26) (Por quê?).

3.6.2 Determinação do Fator Integrante

Suponha que a edo:

$$M(x,y) + N(x,y)\,\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3.28}$$

não é exata.
Queremos determinar um fator integrante $\mu(x,y)$ que a torne exata. Isto é, procuramos $\mu = \mu(x,y)$ tal que a edo:

$$\mu(x,y)\,M(x,y) + \mu(x,y)\,N(x,y)\,\frac{dy}{dx} = 0$$

seja exata.
Supondo que estamos nas condições do Teorema 2, devemos ter

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(x,y)\,M(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(x,y)\,N(x,y)\Big)$$

Derivando a expressão acima:

$$M\,\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\,\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \tag{3.29}$$

A equação acima é uma equação diferencial parcial de primeira ordem que não sabemos resolver. No entanto, se supusermos que μ é função apenas de uma variável, poderemos achar a solução, de fato:
1. Se $\mu = \mu(x)$, temos $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ e de (3.29):

$$\frac{d\mu}{dx} = -\frac{1}{N}\,\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{3.30}$$

2. Se $\mu = \mu(y)$, temos $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ e de (3.29):

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{M}\,\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{3.31}$$

Em cada um desses casos, teremos uma edo de variáveis separáveis que pode ser resolvida se

1. o lado direito de (3.30) depender somente de x.

2. o lado direito de (3.31) depender somente de y.

Exemplo 30. *Considere a edo:*

$$x^2 - y^2 + 2\,x\,y\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3.32}$$

Verifique que $\dfrac{1}{x^2}$ é fator integrante e que $x + \dfrac{y^2}{x} = c$ é a solução geral da edo.

3.7 Edo's Homogêneas

Definição 15. *Uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é homogênea de grau n se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y), \quad \forall (x, y) \in A.$$

Exemplo 31. $f(x, y) = x^4 + x^3 y$ *é homogênea de grau* 4.

Exemplo 32. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ *é homogênea de grau* 1.

Exemplo 33. $f(x, y) = x^2 + \operatorname{sen}(x)\cos(y)$ *não é homogênea.*

Definição 16. *Uma equação diferencial da forma (3.28) é denominada homogênea quando $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são funções homogêneas de mesmo grau.*

Exemplo 34. *A edo:*

$$x^2 - y^2 + 2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} = 0$$

é homogênea, pois $M(x, y) = x^2 - y^2$ e $N(x, y) = 2\,x\,y$ são funções homogêneas de grau 2.

Exemplo 35. *A edo:*

$$(x^2 + y^2) + (x\,y^2 + y^3)\,\frac{dy}{dx} = 0.$$

não é homogênea, pois $M(x, y) = x^2 + y^2$ é homogênea de grau 2 e $N(x, y) = x\,y^2 + y^3$ é homogênea de grau 3. Como o grau não é o mesmo, a equação não é homogênea

Observação 10. *Seja $f(x, y)$ homogênea de grau n. Fixemos $(x, y) \in Dom(f)$ tal que $x \neq 0$, consideremos $\lambda = \dfrac{1}{x}$, temos:*

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x}\,x, \frac{1}{x}\,y\right) = \frac{1}{x^n}\,f(x, y) = \frac{f(x, y)}{x^n} \tag{3.33}$$

Vamos usar esta propriedade para resolver equações homogêneas. Consideremos a edo:

$$M(x,y) + N(x,y)\,\frac{dy}{dx} = 0$$

com M e N funções homogêneas de grau n.

Podemos reescrevê-la como

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = -\frac{\dfrac{M(x,y)}{x^n}}{\dfrac{N(x,y)}{x^n}}.$$

Usando 3.33, temos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M\left(1,\dfrac{y}{x}\right)}{N\left(1,\dfrac{y}{x}\right)} = F\left(1,\frac{y}{x}\right).$$

Isto é, o lado direito da equação é uma função que depende do quociente $\dfrac{y}{x}$. Consideremos a mudança de variável:

$$v = \frac{y}{x} \qquad \text{ou, equivalentemente,} \qquad y = v\,x.$$

Derivando esta relação, temos: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dx}\,x + v$. Logo

$$\frac{dv}{dx}\,x + v = \frac{dy}{dx} = -\frac{M\left(1,\dfrac{y}{x}\right)}{N\left(1,\dfrac{y}{x}\right)} = -\frac{M\,(1,v)}{N\,(1,v)}.$$

Isto é, obtivemos a edo de **variáveis separáveis**:

$$\boxed{\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}\left(\frac{M\,(1,v)}{N\,(1,v)} + v\right)}$$

Exemplo 36. *Considere a edo:*

$$(x^2 - y^2) - 2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3.34}$$

Como:

$$M(\lambda\, x, \lambda\, y) = (\lambda\, x)^2 - (\lambda y)^2 = (\lambda^2\, x^2 - \lambda^2\, y^2) = \lambda^2\,(x^2 - y^2) = \lambda^2\, M(x, y)$$

e

$$N(\lambda\, x, \lambda\, y) = 2\,(\lambda\, x)\,(\lambda\, y) = \lambda^2\, 2\, x\, y = \lambda^2\, N(x, y),$$

(3.34) é uma edo homogênea.

Reescrevendo a edo (3.34), temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2}}{\dfrac{2xy}{x^2}} = \frac{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2\left(\dfrac{y}{x}\right)}$$

Fazendo a mudança de variável $v = \dfrac{y}{x}$, obtemos

$$\frac{dv}{dx}\, x + v = \frac{dy}{dx} = \frac{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2\left(\dfrac{y}{x}\right)} = \frac{1 - v^2}{2\, v},$$

$$\frac{dv}{dx}\, x = \frac{1 - v^2}{2\, v} - v = \frac{1 - 3\, v^2}{2\, v};$$

ou seja,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{1 - 3v^2}{2v}\right).$$

A solução geral desta edo de variáveis separáveis é:

$$(1 - 3\, v^2)\, x^3 = c.$$

Voltando às variáveis originais:

$$\left(1 - 3\,\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)\, x^3 = (1 - 3\, v^2)\, x^3 = c.$$

Isto é, $x^3 - 3\, y^3\, x = c$ é uma solução geral da edo (3.34).

Observação 11. *Se tivermos uma edo da forma*

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{M(x, y)}{N(x, y)}\right) \tag{3.35}$$

e as funções com M e N forem homogêneas de grau n, podemos reescrevê-la como

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{M(x,y)}{N(x,y)}\right) = F\left(\frac{\dfrac{M(x,y)}{x^n}}{\dfrac{N(x,y)}{x^n}}\right).$$

Usando 3.33, temos:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{M\left(1, \dfrac{y}{x}\right)}{N\left(1, \dfrac{y}{x}\right)}\right) = G\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Isto é, o lado direito da equação é uma função que depende do quociente $\dfrac{y}{x}$. Consideremos a mudança de variável:

$$v = \frac{y}{x} \qquad \text{ou, equivalentemente,} \qquad y = v\,x.$$

Argumentando como no caso das edo's Homogêneas, obtemos

$$\frac{dv}{dx}x + v = \frac{dy}{dx} = G(1, v)$$

Isto é, obtivemos a edo de **variáveis separáveis***:*

$$\boxed{\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}\Big(G(1, v) - v\Big)}$$

As edo's que podem ser escritas na forma (3.35) são chamadas de edo's Redutíveis a edo's Homogêneas.

3.8 Edo's Redutíveis

Analisaremos agora as edo que podem ser escritas na forma:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{3.36}$$

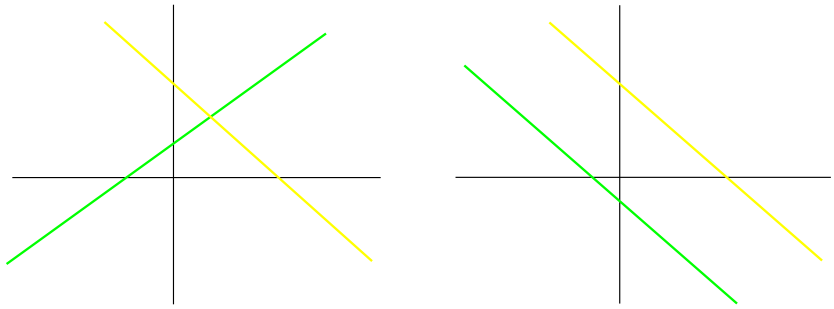
onde $a_i,\, b_i,\, c_i \in \mathbb{R}$, ($i = 1,\, 2$).

Observação 12. *Se $c_1 \neq 0$ ou $c_2 \neq 0$, a edo (3.36) não é homogênea.*

Consideremos as retas:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

determinadas pelo numerador e pelo denominador do argumento da função F em (3.36).



Analisaremos dois casos:

3.8.1 Redutíveis a Homogêneas

Se as retas são concorrentes, então

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

Denotemos por (α, β) a solução do sistema linear:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

e consideremos a mudança de variável:

$$\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases} \tag{3.37}$$

Podemos reescrever a edo (3.36) na forma

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{du} = \frac{dy}{dx} = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = F\left(\frac{a_1(u+\alpha) + b_1(v+\beta) + c_1}{a_2(u+\alpha) + b_2(v+\beta) + c_2}\right)$$

$$= F\left(\frac{a_1u + b_1v + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2u + b_2v + a_2\beta + b_2\beta + c_2}\right) = F\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right);$$

pois (α, β) é solução do sistema linear. Isto é, obtivemos a seguinte edo homogênea:

$$\frac{dv}{du} = F\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right).$$

Observação 13. *A mudança de variável (3.37) corresponde a consideramos um novo eixo de coordenadas uv cuja origem se localiza no ponto de coordenadas $(x, y) = (\alpha, \beta)$. Nas novas variáveis u e v o lado direito de (3.36) será uma função homogênea de grau zero.*

Exemplo 37. *Seja a edo:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 3y - 1}{3x + y - 2} \tag{3.38}$$

Consideremos o sistema linear

$$\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Temos

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 2 + 9 = 11 \neq 0$$

e a solução do sistema é dada por $\left(\frac{7}{11}, \frac{1}{11}\right)$. Fazendo a mudança de variável

$$x = u + \frac{7}{11} \qquad \text{e} \qquad y = v + \frac{1}{11},$$

temos,

$$\frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx} = \frac{2\,x - 3\,y - 1}{3\,x + y - 2} = \frac{2\left(u + \frac{7}{11}\right) - 3\left(v + \frac{1}{11}\right) - 1}{3\left(u + \frac{7}{11}\right) + v + \frac{1}{11} - 2} = \frac{2\,u - 3\,v}{3\,u + v}.$$

Isto é,

$$\frac{dv}{du} = \frac{2\,u - 3\,v}{3\,u + v}.$$

A solução geral da edo homogênea acima é:

$$u^2\left(2 - \frac{6v}{u} - \frac{v^2}{u^2}\right) = c$$

desfazendo a mudança de variável $x = u + \frac{7}{11}$ e $y = v + \frac{1}{11}$, obtemos:

$$2\,(11\,x - 7)^2 - 6\,(11\,y - 1)\,(11\,x - 7) - (11\,y - 1)^2 = c$$

é solução geral da edo (3.38).

3.8.2 Redutíveis a Variáveis Seraravéis

Se as retas são paralelas, então

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = 0$$

No caso de retas paralelas coincidentes, já sabemos resolver a edo (3.36). Se as retas são paralelas não coincidentes, temos

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = m \neq \frac{c_2}{c_1}.$$

Isto é:

$$a_2 = m\, a_1 \qquad \text{e que} \qquad b_2 = m\, b_1.$$

Logo, podemos reescrever a equação na forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{m(a_1x + b_1y) + c_2}\right).$$

Considerando a mudança de variável:

$$v(x) = a_1\, x + b_1\, y, \qquad \text{logo} \qquad \frac{dv}{dx} = a_1 + b_1\, \frac{dy}{dx},$$

e obtemos uma edo de variáveis separáveis para v:

$$\frac{dv}{dx} = a_1 + b_1\frac{dy}{dx} = a_1 + b_1 F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

$$= a_1 + b_1 F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{m(a_1x + b_1y) + c_2}\right)$$

$$= a_1 + b_1 F\left(\frac{v + c_1}{mv + c_2}\right)$$

Exemplo 38. *Considere a edo:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,x - y + 1}{6\,x - 3\,y - 1}. \tag{3.39}$$

Logo:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = 0$$

Fazendo a mudança de variável para $a_1 = 2$ e $b_1 = -1$:

$$v(x) = 2\,x - y; \qquad \text{logo,} \qquad \frac{dv}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx},$$

então:

$$\frac{dv}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx} = 2 - \frac{2\,x - y + 1}{6\,x - 3\,y - 1} = 2 - \frac{2\,x - y + 1}{3\,(2\,x - y) - 1} = 2 - \frac{v + 1}{3\,v - 1}$$

$$= \frac{6\,v - 2 - v - 1}{3\,v - 1} = \frac{5\,v - 3}{3\,v - 1}.$$

Logo,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{5\,v - 3}{3\,v - 1}.$$

A solução geral desta edo é dada por:

$$\frac{3\,v}{5} + \frac{4}{25}\ln|5\,v - 3| = x + c$$

desfazendo a mudança de variável, obtemos: $v = 2\,x - y$

$$\frac{3\,(2\,x - y)}{5} + \frac{4}{25}\,\ln|5\,(2\,x - y) - 3| - x = c$$

é solução geral da edo (3.39).

3.9 Equação de Clairaut

Definição 17. *Uma equação é de Clairaut se é da forma:*

$$y = x\frac{dy}{dx} + \phi\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{3.40}$$

Observação 14. *Quando $\phi(z) = z$, temos que (3.40) é de variáveis separáveis*

Exemplo 39. *A edo:*

$$y = x\,\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

é de Clairaut. Aqui temos $\phi(z) = z^2$.

3.9.1 Determinação de Solução

Vamos introduzir um parâmetro auxiliar p:

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

A edo (3.40) pode ser reescrita na forma:

$$y = x\,p + \phi\,(p)\,. \tag{3.41}$$

Derivando a expressão acima em relaçãoo a x, obtemos:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\,(x\,p + \phi\,(p)) = p + x\,\frac{dp}{dx} + \phi'\,(p)\,\frac{dp}{dx},$$

ou

$$(x + \phi'\,(p))\,\frac{dp}{dx} = 0.$$

Logo

$$x + \phi'\,(p) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dp}{dx} = 0.$$

A solução da segunda destas equações nos diz que $p(x) = c$. Usando a equação (3.41), vemos que a família de retas:

$$y(x) = x\,p + \phi\,(p) = c\,x + \phi(c)$$

é solução geral de (3.40).

Por outro lado, as possíveis soluções (necessariamente não-constantes) da edo $x + \phi'\,(p) = 0$ nos fornecem as seguintes soluções **singulares** da equação de Clairaut:

$$y(x) = x\,p(x) + \phi\,(p(x))\,.$$

Vamos resolver a equação de Clairaut do Exemplo 39:

$$y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \tag{3.42}$$

Fazendo $p = \dfrac{dy}{dx}$ a edo pode ser reescrita na forma:

$$y = x\,\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x\,p + p^2 \tag{3.43}$$

Derivemos a expressão acima em relação a x e lembremos que $p = \dfrac{dy}{dx}$. Temos:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\,p + \phi\,(p)\right) = p + x\,\frac{dp}{dx} + 2\,\frac{dp}{dx},$$

ou

$$(x + 2\,p)\frac{dp}{dx} = 0.$$

Então:

$$x + 2p = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dp}{dx} = 0$$

Da edo $\dfrac{dp}{dx} = 0$ obtemos $p(x) = c$. Logo, por (3.43), a família de retas:

$$y(x) = c\,x + c^2$$

é solução geral de (3.42). Resolvendo $x + 2\,p = 0$, determinamos:

$$p(x) = -\frac{x}{2}.$$

Substituindo $p(x) = -\dfrac{x}{2}$ em (3.43), obtemos

$$y(x) = x\,p(x) + (p(x))^2 = -\frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4},$$

solução singular da equação de Clairaut (3.42).

3.10 Equação de Lagrange

Definição 18. *Uma edo é de Lagrange se é da forma:*

$$y = x\,\psi\left(\frac{dy}{dx}\right) + \phi\left(\frac{dy}{dx}\right). \tag{3.44}$$

Observação 15. *Se $\psi(z) = z$, (3.44) é uma edo de Clairaut.*

Exemplo 40. *A edo:*

$$y = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

é de Lagrange, onde $\psi(z) = z^2$ e $\phi(z) = z^3$.

3.10.1 Determinação de Solução

Novamente, consideramos um parâmetro auxiliar p:

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

A edo (3.44) pode ser reescrita na forma:

$$y = x\,\psi\,\left(\frac{dy}{dx}\right) + \phi\,\left(\frac{dy}{dx}\right) = x\,\psi(p) + \phi\,(p)\,. \tag{3.45}$$

Derivando (3.45) com respeito a x, obtemos:

$$p = \frac{dy}{dx} = \psi(p) + (x\,\psi'(p) + \phi'(p))\,\frac{dp}{dx} \tag{3.46}$$

Observe que se $p = m$ é raiz de $p - \psi(p)$ então (3.46) é satisfeita e

$$y(x) = x\,\psi(m) + \phi(m)$$

é solução da edo de Lagrange (3.44). Considerando x como função de p e lembrando que:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{dx}},$$

podemos reescrever (3.46) na forma:

$$(\psi(p) - p)\,\frac{dx}{dp} + \psi'(p)\,x + \phi'(p) = 0. \tag{3.47}$$

Seja $x(p)$ a solução geral da edo linear e $y(p)$ dado por (3.45). Então $(x(p), y(p))$ é a solução geral da equação de Lagrange (3.44) na forma paramétrica.
Vamos resolver a equação de Lagrange do Exemplo 40:

$$y = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \tag{3.48}$$

Fazendo $p = \frac{dy}{dx}$, obtemos:

$$y = x\,\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x\,p^2 + p^2. \tag{3.49}$$

Derivando com respeito a x:

$$p = \frac{dy}{dx} = p^2 + (2\,x\,p + 2\,p)\frac{dp}{dx} \tag{3.50}$$

Resolvendo $p - \psi(p) = 0$, achamos as raízes $p = 0$ e $p = 1$. Usando (3.49), encontramos as seguintes soluções de (3.48):

$$y(x) = 0 \quad \text{e} \quad y(x) = x + 1.$$

Determinemos agora a solução geral de (3.48). Considerando x como função de p, a partir de (3.50) obtemos a seguinte edo linear:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{2}{1-p}\,x = \frac{2}{1-p}$$

cuja solução geral é:

$$x(p) = -1 + \frac{c}{(1-p)^2}$$

Voltando à equação (3.49), obtemos a solução geral de (3.48) na forma paramétrica

$$\begin{cases} x(p) & = -1 + \dfrac{c}{(1-p)^2} \\ y(p) & = \dfrac{c\,p^2}{(1-p)^2} \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro p das equações acimas:

$$\frac{y}{x+1} = p^2 = \frac{(\sqrt{c} + \sqrt{x+1})^2}{x+1}.$$

Logo,

$$y(x) = \left(c + \sqrt{x+1}\right)^2$$

é solução geral de (3.48). Note que a solução $y(x) = x+1$ pode ser deduzida da solução geral ($c = 0$); por outro lado a solução $y(x) = 0$ é uma solução singular de (3.48).

3.11 Exercícios

1. Determine a solução geral das edo's de variáveis separáveis:

a) $2z(3z+1)\dfrac{dw}{dz}+1-2w=0$

b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-e^{-x}}{y+e^{y}}$

c) $\dfrac{du}{dv}=\dfrac{1+u^2}{1+v^2}$

d) $(1+y)x-(1+x)\dfrac{dy}{dx}=0$

e) $xy(y+2)-(y+1)\dfrac{dy}{dx}=0$

f) $\dfrac{dy}{dx}=1+x+y^2+xy^2$

2. Determine a solução geral das edo's lineares:

a) $\dfrac{ds}{dt}+s\cos t=\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}2t$

b) $\dfrac{dy}{dx}-y=-2e^{-x}$

c) $\dfrac{d\rho}{d\theta}+\rho\operatorname{tg}\theta=0$

d) $\dfrac{ds}{dt}+\dfrac{s}{t}=\cos t+\dfrac{\operatorname{sen}t}{t}$

e) $y'+2xy=2xe^{-x^2}$

f) $x\dfrac{dy}{dx}+y=(1+x)e^{x}$

3. Determine a solução geral das edo's de Bernoulli:

a) $nx\dfrac{dy}{dx}+2y=xy^{n+1}$

b) $3y^2y'-ay^3-x-1=0$

c) $y-y'\cos x=y^2\cos x(1-\operatorname{sen}x)$

d) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=y^3$

e) $x\dfrac{dy}{dx}+y+x^2y^2=0$

f) $y'+xy=x^3y^3$

4. Observando que $y_1(x)=x$ é uma solução, resolva as seguintes equações de Ricatti:

a) $y'+y^2=1+x^2$

b) $y'+2xy=1+x^2+y^2$

5. Resolva a equação abaixo, sabendo que $y_1(x)=\operatorname{sen}x$ é uma solução.

$$\frac{dy}{dx}=(\operatorname{cotg}x)y^2\operatorname{cossec}x-y+\operatorname{sen}x$$

6. Determine a solução geral das edo's Exatas:

a) $2(3xy^2+2x^3)+3(2x^2y+y^2)\dfrac{dy}{dx}=0$

b) $(x^3+y^3)+3xy^2\dfrac{dy}{dx}=0$

c) $y - 3x^2 - (4y - x)\dfrac{dy}{dx} = 0$

d) $\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y^2}{(x-y)^2} = 0.$

e) $\dfrac{y^2}{(x-y)^2} - \dfrac{1}{x} + \left[\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right]\dfrac{dy}{dx} = 0$

f) $(y^3 - x)y' = y.$

7. Resolva as equações abaixo encontrando um fator integrante.

a) $(x^4 + y^4) - xy^3\dfrac{dy}{dx} = 0,\ x > 0$

b) $(3x^2y + 2xy + y^3) + (x^2 + y^2)\dfrac{dy}{dx} = 0$

c) $y + (2xy - e^{-2y})\dfrac{dy}{dx} = 0$

d) $e^x + (e^x \operatorname{cotg} y + 2y \operatorname{cossec} y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

e) $\dfrac{y}{x} + (y^3 - \ln x)\dfrac{dy}{dx} = 0,\ x > 0$

f) $\cos^2 y \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y \cos x\dfrac{dy}{dx} = 0$

g) $y^2 + (xy + 1)\dfrac{dy}{dx} = 0$

h) $-(x^2 + y^2) + xy\dfrac{dy}{dx} = 0$

8. Determine a solução geral das edo's Homogêneas:

a) $3(5x + 3y) + (11x + 5y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

b) $3x + 5y + (4x + 6y)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

c) $x + 4y + 2x\dfrac{dy}{dx} = 0.$

d) $x^2 + y^2 + (2xy + y^2)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

e) $x^2 + 3xy + y^2 - x^2\dfrac{dy}{dx} = 0.$

f) $2y - (2x - y)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

9. Determine a solução geral das edo's Redutíveis:

a) $x + 2y + 1 - (2x + 4y + 3)\dfrac{dy}{dx} = 0$

b) $(x + 2y - 4) - (2x + y - 5)\dfrac{dy}{dx} = 0$

c) $x + 2y + 1 - (4x + 8y + 3)\dfrac{dy}{dx} = 0$

d) $3y - 7x + 7 - (3x - 7y - 3)\dfrac{dy}{dx} = 0$

e) $x - 2y + 5 + (2x - y + 4)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

f) $3x - y + 2 + (9x - 3y + 1)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

10. Resolva as edo's de Clairaut e Lagrange:

a) $y = x + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3$

b) $y = xy' + y'$

c) $y = y(y')^2 + 2xy'$

d) $y = x\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

e) $3\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 y = \left[2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 1\right]x$

f) $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$

11. Determine a solução geral das edo's:

a) $x(x+3)\dfrac{dy}{dx} - y(2x+3) = 0$

b) $\sqrt{1-4t^2}\dfrac{ds}{dt} + 2\sqrt{1-s^2} = 0$

c) $(ax+b)\dfrac{dy}{dx} - y^2 = 0, \quad a \neq 0$

d) $\dfrac{ds}{dt} - s\,\mathrm{cotg}\,t = e^t(1 - \mathrm{cotg}\,t)$

e) $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0$

f) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

g) $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = 0$

h) $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = xy^3$

i) $x\dfrac{dy}{dx} - 3y = -2nx$

j) $\dfrac{ds}{dt} - s\,\mathrm{cotg}\,t = 1-(t+2)\,\mathrm{cotg}\,t$

k) $y' + 3y = x + e^{-2x}$

l) $\dfrac{ds}{dt} + s\,\mathrm{tg}\,t = 2t + t^2\,\mathrm{tg}\,t$

m) $(1 + y\,\mathrm{sen}\,x) + (1-\cos x)\dfrac{dy}{dx} = 0$

n) $y' - \dfrac{n}{x}y = e^x x^n$

o) $\dfrac{dy}{dx} = y\,\mathrm{tg}\,x + \cos x$

p) $\dfrac{dx}{dt} - 6x = 10\,\mathrm{sen}\,2t$

q) $2xy\dfrac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$

12. Ache a solução do problema de valor inicial dado, na forma explícita, e determine o intervalo no qual a solução é definida

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{y+x^2y}, \qquad y(0) = -2$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{1+2y}, \qquad y(2) = 0$

13. Mostre que se a e λ forem constantes positivas e b um número real qualquer, então toda solução da equação $y' + ay = be^{-\lambda x}$ tem a propriedade $y \longrightarrow 0$ quando $x \longrightarrow \infty$.

Sugestão: Considere separadamente os caso $a = \lambda$ e $a \neq \lambda$.

14. (i) Mostre que $y_c(x) = ce^{-\int p(x)dx}$ é solução geral da equação linear homogênea

$$y' + p(x)y = 0.$$

(ii) Mostre que

$$y_p(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[\int \left(q(x)e^{\int p(x)dx}\right)dx\right]$$

é uma solução particular de $y' + p(x)y = q(x)$

(iii) Se $y_c(x)$ é qualquer solução geral da equação linear homogênea $y' + p(x)y = 0$ e $y_p(x)$ é qualquer solução particular da equação linear $y' + p(x)y = q(x)$, então mostre que $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ é uma solução geral da equação linear $y' + p(x)y = q(x)$.

15. Mostre que uma equação de Riccati com coeficientes constantes $y' + ay^2 + by + c = 0$ tem uma solução da forma $y = m$ se, e somente se, m é uma raiz da equação $am^2 + bm + c = 0$.

16. Empregue este resultado para encontrar a solução geral de:
(i) $y' + y^2 + 3y + 2 = 0$ (ii) $y' + y^2 - 2y + 1 = 0$

17. Determine o valor de A para que a solução $y(x)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} xy' + 3y = 5x^2 + 3, x > 0 \\ y(2) = A \end{cases} \quad \text{seja tal que} \quad \lim_{x\to 0^+} y(x) \quad \text{seja finito}$$

18. Determine a solução geral das equações abaixo:

a) $3x^2 + y^2 - 2xy\dfrac{dy}{dx} = 0$

b) $x + 2y + 1 - (2x - 3)\dfrac{dy}{dx} = 0$

c) $y = x(y')^2 + (y')^2$

d) $y = xy' - \dfrac{1}{(y')^2}$

e) $2x^2 + y^2 + (2xy + 3y^2)\dfrac{dy}{dx} = 0$

f) $y = 2xy' + (y')^2$

g) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$

h) $y = xy' + \sqrt{1 - (y')^2}$

i) $(3e^{3x}y - 2x)dx + e^{3x}dy = 0$

j) $y = x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1$

k) $\left(\dfrac{y}{x} + 6x\right)dx + (\ln x - 2)dy = 0,\ x > 0$

l) $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$

m) $\cos y + y\cos x + (\operatorname{sen} x - x\operatorname{sen} y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

n) $y' = -\dfrac{x^2 + y^2}{(2x + y)y}$

o) $x\cos\dfrac{y}{x}\left(y + x\dfrac{dy}{dx}\right) = y\operatorname{sen}\dfrac{y}{x}\left(x\dfrac{dy}{dx} - y\right)$

p) $x\dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

q) $x + 2y + 1 - (4(x + 2y) + 3)\dfrac{dy}{dx} = 0$

r) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y - 3}{x - y - 1}$

s) $2x\dfrac{dz}{dx} - 2z = \sqrt{x^2 + 4z^2}$

19. Encontre o valor de b para o qual a equação dada é exata e, então, resolva-a usando esse valor de b.

$$(ye^{2xy} + x)dx + bxe^{2xy}dy = 0$$

20. Determine a solução geral das equações abaixo.

a) $2 + y - (3 - x)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

b) $\dfrac{ds}{dt}\cos t + s\,\mathrm{sen}\,t = 1.$

c) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = 2y^2.$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{x}y + x\sqrt{y}.$

e) $y = xy' + y' - (y')^2.$

f) $x\dfrac{dy}{dx} - 2y + 3x = 0.$

g) $xy - (1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

h) $y' - a\dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}, \quad a \neq 0,\ a \neq 1.$

i) $3x + 2y + x\dfrac{dy}{dx} = 0.$

j) $\sqrt{1 + x^2}\dfrac{dy}{dx} - \sqrt{1 - y^2} = 0.$

k) $x - y - (x + y)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

l) $y + xy^2 - x\dfrac{dy}{dx} = 0.$

m) $x + 2y + 1 - (2x - 3)\dfrac{dy}{dx} = 0.$

n) $\dfrac{dy}{dx} - 2y = 1 - 2x.$

a) $\dfrac{x}{(x+y)^2} + \dfrac{2x + y}{(x+y)^2}\dfrac{dy}{dx} = 0.$

b) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1}{x}y = e^x.$

c) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4} = \dfrac{2y}{x^3}\dfrac{dy}{dx}.$

d) $(1 - x^2)y' - xy - axy^2 = 0$

e) $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} - (1 - y^2) = 0.$

f) $y = (x + 1)(y')^2.$

g) $y = x\dfrac{dy}{dx} - \ln\dfrac{dy}{dx}.$

h) $y = 2x\dfrac{dy}{dx} - x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2.$

i) $y = -\dfrac{1}{2}\dfrac{dy}{dx}\left(2x + \dfrac{dy}{dx}\right).$

j) $\dfrac{dy}{dx} = (y - 4x)^2$ sabendo que $y_1 = 4x + 2$ é solução da equação.

21. Mostre que as equações abaixo não são exatas, mas se tornam exatas quando multiplicadas, cada qual, pelo fator integrante sugerido. Resolva as equações exatas assim obtidas:

a) $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0, \qquad \mu(x,y) = \dfrac{1}{xy^3}$

b) $\left(\dfrac{\operatorname{sen} y}{y} - 2e^{-x}\operatorname{sen} x\right)dx + \left(\dfrac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy = 0, \qquad \mu(x,y) = ye^x$

22. Mostre que qualquer equação separável

$$M(x) + N(y)y' = 0,$$

também é exata.

23. Mostre que, se $\dfrac{N_x - M_y}{xM - yN} = R$ onde R depende apenas da quantidade xy, então a equação diferencial

$$M + Ny' = 0$$

tem um fator integrante da forma $\mu(xy)$. Encontre uma fórmula geral para esse fator integrante.

24. Use o resultado acima para resolver o seguinte problema

$$\left(3x + \frac{6}{y}\right) + \left(\frac{x^2}{y} + \frac{3y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

25. Considere a equação de Clairaut

$$y = xy' - \frac{1}{4}(y')^2$$

Mostre que a reta

$$y = Cx - \frac{1}{4}C^2$$

é tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(C/2, C^2/4)$. Explique por que isto implica que $y = x^2$ é solução singular da equação de Clairaut dada.

Capítulo 4

Aplicações

4.1 Molas

Consideremos o problema da mola (2.1):

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}\left(g - \frac{kx}{m}\right)$$

Temos uma equação de variáveis separáveis. Aplicamos o algoritmo (3.4):

$$\int v\,dv = \int \left(g - \frac{k\,x}{m}\right)\,dx$$

e, obtemos

$$\frac{v^2}{2} = g\,x - \frac{k\,x^2}{2\,m} + c.$$

Para determinar a constante c, lembremos que a velocidade incial do corpo era v_0 quando não havia deformação, isto é, quando $x = 0$. Logo

$$\frac{v_0^2}{2} = c$$

e a velocidade v, em função da deformação, é dada por

$$v^2 = 2gx - \frac{k\,x^2}{m} + 2\,c = 2\,g\,x - \frac{k\,x^2}{m} + v_0^2.$$

4.2 Crescimento Exponencial

Sabemos que o modelo de crescimento exponencial é dado por (2.2):

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = k\,N \\ N(0) = N_0. \end{cases}$$

Novamente, aplicamos (3.4):

$$\int \frac{1}{N}\,dp = \int k\,dt \qquad \ln|N| = k\,t + c_1$$

obtendo

$$N(t) = e^{c_1}\,e^{kt} = c\,e^{kt}.$$

Como $N_0 = N(0) = c$; logo:

$$\boxed{N(t) = N_0\,e^{kt}.}$$

4.2.1 Decaimento Radioativo:

O modelo de decaimento radioativo também é dado por (2.2):

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = -k\,N \\ N(0) = N_0, \end{cases}$$

tem solução $N(t) = N_0\,e^{-kt}$. A constante k de decaimento de um isótopo radioativo é freqüentemente especificada em termos de uma outra constante empírica, a meia-vida do isótopo. A meia-vida τ de um isótopo radioativo é o tempo necessário para que metade dele decaia. Para encontrar a relação entre k e τ, fazemos $t = \tau$ e sabemos que $N(\tau) = \frac{1}{2}N_0$. Quando resolvemos em relação a τ, encontramos

$$\frac{1}{2}N_0 = N(\tau) = N_0 e^{-k\tau} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = -k\tau \Rightarrow \frac{\ln 2}{k} = \tau.$$

A datação por carbono radioativo é uma ferramenta importante para pesquisa arqueológica. Ela se baseia no fato de que há uma quantidade constante do isótopo radiativo ${}^{14}C$ do Carbono em toda criatura viva. Tal quantidade começa a decair com sua morte. Como a meia-vida do carbono é longa (aproximadamente 5700 anos), podem ser medidas quantidades remanescentes de carbono-14 mesmo depois de muito tempo.

Exemplo 41. *Uma amostra de carvão vegetal encontrada em um sítio arqueológico contém 63% de ^{14}C em relação a uma amostra atual de carvão de igual massa. Qual a idade da amostra encontrada?*

Denotemos por N_0 a quantidade de carbono que existia no carvão antes do decaimento. Como a constante k se relaciona com a meia-vida τ pela equação

$$k = \frac{\ln 2}{\tau} = \frac{\ln 2}{5700}$$

e sabemos que a solução da equação de decaimento quando $N(0) = N_0$ é

$$N(t) = N_0\, e^{-kt}.$$

Logo, temos

$$0,63N_0 = N_0 e^{-kt} = N_0\, e^{-\frac{\ln 2}{5700}t} \Rightarrow -\frac{\ln 2}{5700}\, t = \ln 0,63$$

$$t = -\frac{5700 \ln 0,63}{\ln 2} \approx 3800 \text{ anos}$$

A solução $N(t) = N_0\, e^{kt}$ prevê que a população cresce exponencialmente. Observa-se que tal previsão é adequada para certas populações pelo menos por períodos limitados. No entanto, é claro que esta situação não pode perdurar. Em algum momento, as limitações sobre o espaço, o suprimento de comida ou outros recursos reduzirão a taxa de crescimento inibindo o crescimento exponencial. Para levar em conta este fato, vamos substituir a constante k por uma função que dependa da população. Teremos o chamado crescimento logístico.

4.3 Crescimento Logístico

O modelo é dado por (2.3):

$$\frac{dp}{dt} = k\left(1 - \frac{p}{R}\right) p, \qquad R = \frac{k}{a}.$$

É uma equação do tipo Bernoulli com $n = 2$ uma vez que podemos reescrevê-la na seguinte forma

$$\frac{dp}{dt} - kp = -\frac{k}{R}\, p^2$$

Para resolvê-la consideramos a mudança de variável $v = p^{1-2} = p^{-1}$ e obtemos uma edo linear:

$$\frac{dv}{dt} = -p^{-2}\,\frac{dp}{dt}$$

Resolvendo a edo, obtemos:

$$v = \frac{1}{R} + c\,e^{-kt} = \frac{1 + c\,R\,e^{-kt}}{R}.$$

Desfazendo a mudança de variável $v = p^{-1}$:

$$p(t) = \frac{1}{v} = \frac{R}{1 + c\,R\,e^{-kt}}.$$

Vamos determinar a constante c supondo que no instante $t = 0$ a população seja igual a p_0. Temos:

$$p_0 = p(0) = \frac{R}{1 + c\,R}$$

logo, $p_0 + c\,R\,p_0 = R$ e $c = \dfrac{R - p_0}{Rp_0}$. Fazendo esta escolha para o valor de c na solução geral, após simplificações, temos:

$$\boxed{p(t) = \frac{R\,p_0}{p_0 + (R - p_0)\,e^{-kt}}.}$$

Vamos analisar o comportamento desta solução. Vemos que quando t tende a ∞, $p(t)$ tende à população limite R. Este valor é chamado de nível de saturação ou capacidade ambiental sustentável. Não temos mais o crescimento exponencial. Se a população inicial é inferior a R, ela cresce sem nunca superar o valor R. Se a população inicial é superior a R, ela decresce e tende a R.

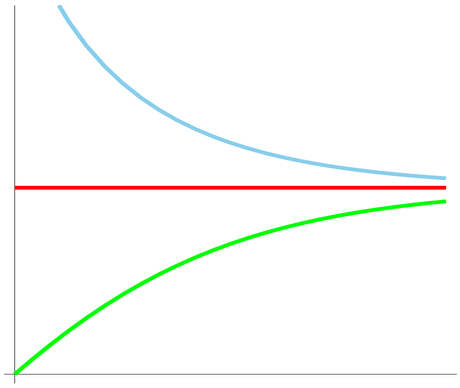


Figura 4.1: Gráfico da $p = p(t)$.

4.4 Circuitos

A edo que descreve os circuitos RC é:

$$R\,\frac{dI}{dt} + \frac{I(t)}{C} = 0,$$

onde C é a capacitância e R, a resistência. Esta edo é de variáveis separáveis; logo sua solução é:

$$I(t) = C\,exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

A edo que descreve os circuitos RL é:

$$L\,\frac{dI}{dt} + R\,I(t) = E,$$

onde R é a resistência L a indutância e E a voltagem. Esta edo é linear; logo sua solução é:

$$I(t) = \frac{E\,L}{R} + C\,exp\left(-\frac{R\,t}{L}\right).$$

4.5 Reações Químicas

4.5.1 Reações Irreversíveis Mononucleares

Consideremos a edo (2.4):

$$\frac{dx}{dt} = k\,(a - x),$$

donde $k = k_1\,A$. Contando o tempo a partir do momento em que se inicia a reação, para $t = 0$, devemos ter $x = 0$; logo, temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k\,(a - x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

A edo é de variáveis separavéis:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a - x} + ln(c) &= k\,t, \\ -ln\left(\frac{a - x}{c}\right) &= k\,t \\ e^{-kt} &= \frac{a - x}{c}. \end{aligned}$$

Utilizando a condição inicial, obtemos que $c = a$; então:

$$e^{-kt} = \frac{a - x}{a},$$

que nos dá a quantidade de sacarose decomposta por unidade de volume ao fim do tempo t.

4.5.2 Reação Bimolecular Irreversível

Consideremos a edo (2.5):

$$\frac{dx}{dt} = k\,(a - x)\,(b - x).$$

Contando o tempo a partir do momento em que se inicia a reação, para $t = 0$, devemos ter $x = 0$; logo, temos o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k\,(a - x)\,(b - x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

A edo é de variáveis separavéis:

$$\int \frac{dx}{(a - x)\,(b - x)} + ln(c) = k\,t,$$

$$\frac{1}{a - b}\, ln\biggl(c\,\Bigl(\frac{x - a}{x - b}\Bigr)\biggr) = k\,t.$$

Utilizando a condição inicial, obtemos que $c = \dfrac{b}{a}$; então:

$$\frac{1}{a - b}\, ln\biggl(\frac{b}{a}\,\Bigl(\frac{x - a}{x - b}\Bigr)\biggr) = k\,t.$$

4.6 Famílias de Curvas Planas

Sabemos que a solução da edo $y' = f(x, y)$ é uma família a 1–parâmetro de curvas. A reciproca é verdadeira? Isto é, dada uma família a 1–parâmetro de curvas $F(x, y, \lambda) = 0$ tal que $F : A \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $A \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto, existe uma edo que tem como solução a família dada?

Exemplo 42. *Seja $F(x, y, \lambda) = y - 2\,\lambda\,x^2 + \lambda$. Nós temos uma família de parábolas:*

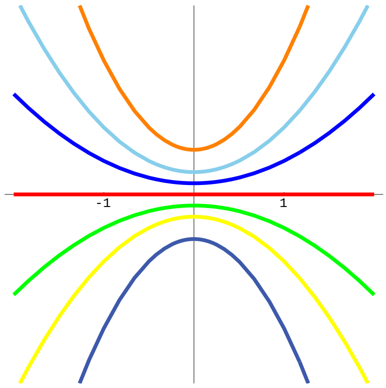


Figura 4.2: Gráfico da família $y - 2\,\lambda\,x^2 + \lambda = 0$.

Derivando implicitamente $y - 2\,\lambda\,x^2 + \lambda = 0$, temos $y' - 4\,\lambda\,x = 0$ eliminando λ; obtemos a edo: $4\,x\,y - (2\,x^2 + 1)\,y' = 0$.

Exemplo 43. *Seja $F(x, y, \lambda) = (x - \lambda)^2 + y^2 - 1$. Nós temos uma família de círculos de raio 1 centrados ao longo do eixo dos x:*

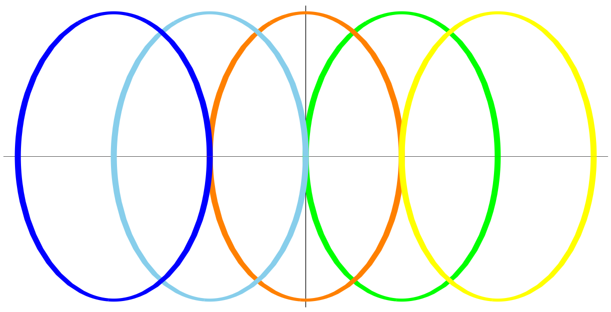


Figura 4.3: Gráfico da família $(x - \lambda)^2 + y^2 = 1$.

Derivando implicitamente $(x - \lambda)^2 + y^2 = 1$, temos $x - \lambda + y\,y' = 0$ eliminando λ; obtemos a edo: $y^2\,(1 + y'^2) = 1$. Neste caso, a edo tem soluções singulares $y_1(x) = 1$ e $y_2(x) = -1$. Estas soluções são chamadas de envoltórias da família.

Exemplo 44. *Seja $F(x, y, \lambda) = y - \lambda\,x - f(c)$, onde f é função arbitrária. Nós temos uma família de retas.*

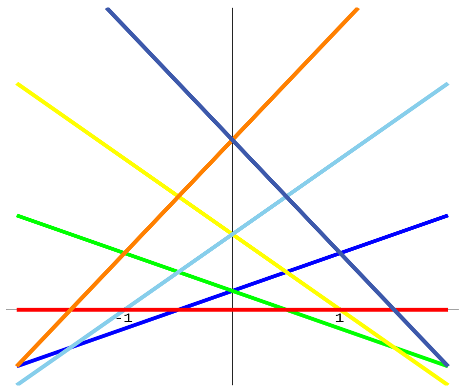


Figura 4.4: Gráfico da família para $f(c) = \dfrac{c^2}{2}$.

Derivando implicitamente $y - \lambda\, x - f(c) = 0$, *temos* $y' = c$; *obtemos a edo de Clairaut* $y = x\, y' + f(y')$.

Seguindo o desenvolvimento dos exemplos, podemos deduzir o seguinte método:

Dada a família $F(x, y, \lambda) = 0$:

i) Derivamos, em relação a x, a família: $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0$

ii) Resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} F(x, y, \lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) + \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda)\, \dfrac{\partial y}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

de onde eliminamos λ. Isto é garantido pelo Teorema da Função Implícita. Se $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) \neq 0$, sempre poderemos obter $\lambda = \psi(x, y)$.

4.6.1 Envoltórias

Seja a família 1–parâmetro $F(x, y, \lambda) = 0$, tal que para cada λ cada curva é diferenciável.

Definição 19. *A envoltória da família* $F(x, y, \lambda) = 0$ *é uma curva parametrizada por* $\gamma(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda))$ *tal que:*

$$F(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0 \tag{4.1}$$

$$\dot{x}(\lambda)\, \frac{\partial F}{\partial x}(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) + \dot{y}(\lambda)\, \frac{\partial F}{\partial y}(x(\lambda), y(\lambda), \lambda) = 0. \tag{4.2}$$

Observação 16. *Geometricamente a condição (4.2) implica que no ponto* $(x(\lambda), y(\lambda))$ *a envoltória e a curva da família (4.1) tem a mesma reta tangente.*

Exemplo 45. *Seja* $F(x,y,\lambda) = y - \lambda\, x - f(\lambda)$*; então* $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -x - f'(\lambda)$*, então a envoltória é*

$$\begin{cases} x = -f'(\lambda) \\ y = -\lambda\, f'(\lambda) - f(\lambda). \end{cases}$$

No caso de $f(\lambda) = \dfrac{\lambda^2}{2}$*, temos:*

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = \dfrac{\lambda^2}{2}. \end{cases}$$

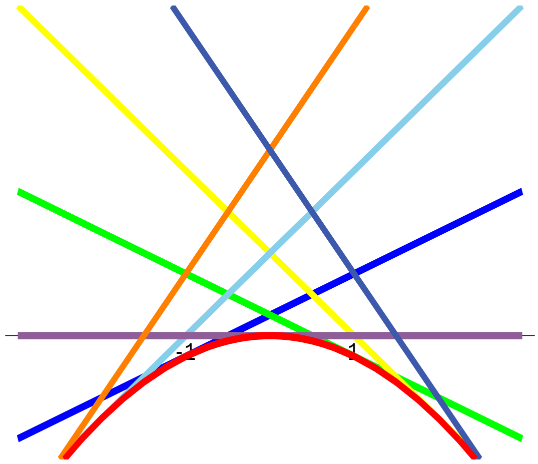


Figura 4.5: Gráfico das retas e sua envoltória.

4.6.2 Trajetórias

Uma curva que intercepta todas as curvas da famiília $F(x,y,\lambda) = 0$ num ângulo constante ω é dita uma ω–trajetória da família.
Seja $F(x,y,\lambda) = 0$ uma famiília de curvas diferenciáveis C_λ e $f(x,y,y') = 0$ a edo associada à família. Se C_λ intercepta uma ω–trajetória T, como no seguinte desenho:

Se a cada ponto de C_λ associemos a terna (x, y, y'), onde (x, y) são as coordenadas do ponto P e $y' = f(x, y)$, analogamente a cada ponto de T associamos a terna $x_1, y_1, y'_1)$ tais que $x = x_1$, $y = y_1$ no ponto P, como $y' = tg(\theta)$ e $y' = tg(\phi)$, logo:

$$y' = tg(\theta) = tg(\phi - \omega) = \frac{tg(\phi) - tg(\omega)}{1 + tg(\phi)\, tg(\omega)} = \frac{y'_1 - tg(\omega)}{1 + y'_1\, tg(\omega)};$$

então a família de ω–trajetórias é dada por:

$$f\left(x, y, \frac{y'_1 - tg(\omega)}{1 + y'_1\, tg(\omega)}\right) = 0. \tag{4.3}$$

Exemplo 46. *Determine as $\frac{\pi}{4}$–trajetórias da família $x^2 + y^2 = c$.*
A edo associada à família $x^2 + y^2 = c$ é $x + y\, y' = 0$; então,

$$\frac{y - tg(\frac{\pi}{4})}{1 + y'\, tg(\frac{\pi}{4})} = \frac{y' - 1}{1 + y'}$$

e obtemos a edo homogênea: $x - y + (x + y)\, y' = 0$, cuja solução é:

$$x^2 + y^2 = c_1\, exp\left(-2\, arctg\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

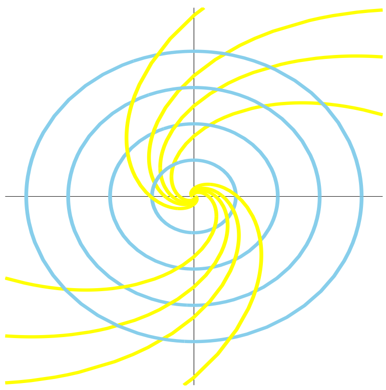


Figura 4.6: Gráfico das famílias.

4.6.3 Trajetórias Ortogonais

Se $w = \frac{\pi}{2}$, então de (4.3) a família ortogonal a $F(x, y, \lambda) = 0$ é dada pela solução da edo:

$$f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

As famílias ortogonais aparecem naturalmente em diversas aplicações. Por exemplo, as curvas do fluxo do calor numa lâmina é ortogonal a família de curvas de igual temperatura (isotermas), as linhas do fluxo de um campo elétrico ou magnetico são ortogonais as curvas equipotenciais.

Exemplo 47. Potencial gerado por dois fios

Para determinar as linhas de força do campo gerado por dois fios se utiliza o fato que as linhas de força e as linhas equipotenciais são ortogonais. O problema é achar a família ortogonal a:

$$(x-\lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 - 1.$$

Derivando e eliminando λ obtemos:

$$x^2 - y^2 - 1 + 2\,x\,y\,y' = 0, \quad \textit{equivalentemente} \quad y' = \frac{y^2 - x^2 + 1}{2\,x\,y}.$$

Pela condição de ortogonalidade; mudamos y' por $-\dfrac{1}{y'}$:

$$-\frac{1}{y'} = \frac{y^2 - x^2 + 1}{2\,x\,y}, \quad \textit{equivalentemente} \quad y' = \frac{2\,x\,y}{x^2 - y^2 - 1}.$$

Devemos resolve a edo não exata:

$$2\,x\,y + (y^2 - x^2 + 1)\,y' = 0.$$

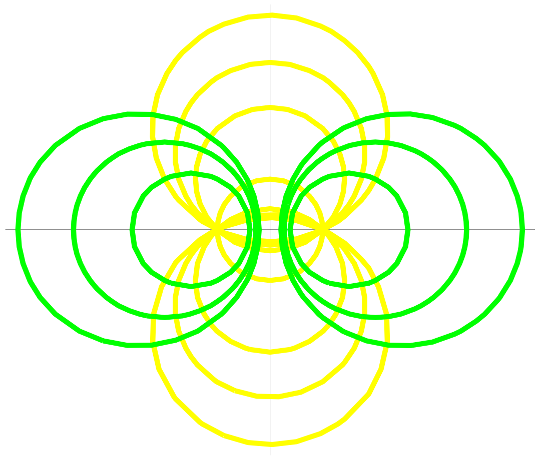
O fator integrante é $\mu(y) = \dfrac{1}{y^2}$; logo, obtemos para $y \neq 0$:

$$\frac{2\,x}{y} + \left(1 - \frac{x^2}{y^2} + y^2\right)\,y' = 0.$$

A solução da edo é:

$$x^2 + (y+c)^2 = 1 + c^2.$$

Logo, a família é formada pelos círculos $x^2 + (y+c)^2 = 1 + c^2$ e $y = 0$. Gráfico das *famílias de curvas:*



4.7 Exercícios

1. Numa colméia, a razão de crescimento da população é uma função da população. Assim $\frac{dp}{dt} = f(p)$.

   a) Calcule $p(t)$ para $f(p) = \beta.p$ $(\beta > 0)$, considere $p(0) = p_0$ e determine a população limite do sistema (i.e. o limite de $p(t)$ quando t tende a infinito).

   b) Encontre $p(t)$ para $f(p) = \beta p - kp^2$ onde β e k são constantes positivas. Determine a população limite do sistema.

2. A taxa de crescimento da população de uma certa cidade é proporcional ao número de habitantes. Se a população em 1950 era de 50.000 e em 1980 de 75.000, qual a população esperada em 2010?

3. Um material radioativo se desintegra a uma taxa proporcional à quantidade de matéria no instante t. Supondo que a quantidade de inicial de matéria seja Q_0 e que 10 anos após já tenha se desintegrado $\frac{1}{3}$ da quantidade inicial, pede-se o tempo necessário para que metade da quantidade inicial desintegre.

4. Uma bola de golfe de massa $0,5kg$ recebe uma tacada que lhe imprime uma velocidade de $72Km/h$. Supondo que a bola permanece em contato permanente com o chão e sabendo que a força de atrito que atua sobre ela é de $-5N$, qual a distância percorrida pela bola até que ela pare?

5. Considere um pára-quedista em queda livre, sem o acionamento do pára-quedas. Determine a sua velocidade como função do tempo e sua velocidade limite ($t \to \infty$). Considere $v(0) = 0$. Obs.: Considere

   $P = mg =$ peso do paraquedista com o pára-quedas

   $R = -\gamma v =$ resistência do ar

6. A população de pássaros de uma ilha experimenta um crescimento sazonal descrito por

$$\frac{dy}{dt} = (3 \operatorname{sen} 2\pi t)y,$$

   onde t é o tempo em anos. A migração para dentro e para fora da ilha também é sazonal. A taxa de migração é dada por $M(t) = 2000 \operatorname{sen} 2\pi t$ pássaros por ano. Logo a equação diferencial completa da população é dada por

$$\frac{dy}{dt} = \text{(crescimento sazonal)+(migração pra dentro/fora)} = (3 \operatorname{sen} 2\pi t)y + 2000 \operatorname{sen} 2\pi t$$

a) Determine $y(t)$ que satisfaz $y(0) = 500$.

b) Determine a população máxima.

7. A meia-via do cobalto radioativo é de $5,27$ anos. Suponha que um acidente nuclear tenha levado o nível de radiação por cobalto numa certa região a 100 vezes o nível aceito para a habitação humana. Quanto tempo levará até que a região seja novemente habitável? (Ignore a presença provável de outros elementos radioativos.)

8. O Carbono extraído de um crânio antigo continha apenas um sexto do ${}^{14}C$ radioativo do que o carbono extraído de uma amostra de um osso atual. Qual é a idade do crânio? Considere a meia-vida do carbono igual a 5.700 anos.

9. Suponha que um corpo, descoberto à meia-noite, tenha temperatura de $29,4$°C e que a temperatura ambiente seja constante e igual a $21,1$°C. O corpo é removido rapidamente (faça a hipótese da instantaneidade) para o necrotério onde a temperatura ambiente é $4,4$°C. Depois de uma hora a temperatura do corpo é de $15,6$°C. Estime a hora da morte.

10. Os moradores de uma certa comunidade decidiram interromper a fluorização da água local. Atualmente, o reservatório local contém 200 milhões de litros de água fluorizada que contém 1.600 Kg de flúor. A água está sendo usada a uma taxa de 4 milhões de litros por dia e está sendo substiutída a uma mesma taxa por água não fluorizada, e o flúor restante é sempre redistribuído uniformemente no reservatório. Expresse a quantidade de flúor no reservatório em função do tempo. Quanto tempo levará para que a quantidade de flúor no reservatório esteja reduzida à metade?

11. Suponha que faltem 3 horas para um estudante fazer um exame e durante esse tempo ele deseja memorizar um conjunto de 60 fatos. De acordo com os psicólogos, a taxa segundo a qual uma pessoa pode memorizar um conjunto de fatos é proporcional ao número de fatos que restam para serem memorizados. Suponha que inicialmente nenhum fato tenha sido memorizado. Se o estudante memoriza 15 fatos nos primeiros 20 minutos, quantos fatos ele irá memorizar em 1h? E, em 3h?

12. Um reservatório de 500 litros, inicialmente contém 100 litros de água fresca. Começando no instante $t = 0$, escoa para o reservatório água contendo 50% de poluidores, à taxa de 2 litros/min. Há também um escoamento que ocorre à taxa de 1 litro /min. Considere a mistura bem agitada e determine a concentração de poluidores no instante de transbordamento.

13. Considere um lago de volume constante V que no instante t contém uma quantidade $Q(t)$ de poluentes distribuídos homogeneamente com uma concentração $c(t)$, onde $c(t) = \frac{Q(t)}{V}$. Suponha que um fluxo de água com uma concentração k de poluentes entre no lago com uma vazão r e que a água saia do lago com a mesma vazão. Suponha que poluentes também sejam lançados diretamente no lago a uma taxa constante P.

   a) Se no instante $t = 0$ a concetração do poluente é c_0, determine uma expressão para a concentração $c(t)$ em qualquer instante do tempo. Qual a concentração limite quando $t \to \infty$?

   b) Se o despejo do poluente no lago é proibido ($k = 0$ e $P = 0$ para $t > 0$), determine o intervalo de tempo T necessário para que a concentração de poluentes seja reduzida a 50% do valor original e a 10% do valor original.

14. A população de uma cidade é de 1.000.000 de habitantes. Houve uma epidemia e 10% da população contraiu o vírus. Em sete dias esta porcentagem cresceu para 20%. O vírus se propaga por contato direto entre os indivíduos enfermos e sãos (logo, é proporcional ao número de contatos). A partir destes dados e supondo que o modelo seja fechado, isto é, a população mantendo-se constante, sem nascimentos, mortes ou migração, e os indivíduos tendo toda liberdade de interagir, calcule:

   a) A proporção de indivíduos enfermos e sãos como função do tempo

   b) O tempo necessário para que a porcentagem de indivíduos enfermos seja de 50%.

15. Uma pedra é solta a partir do repouso de uma altura h acima da superfície da Terra. Mostre que a velocidade com que atinge o solo é $v = \sqrt{2gh}$.

16. Determine o tempo necessário para esvaziar um tanque cilíndrico de raio 2m e altura 5m, cheio de água, admitindo-se que a água escoe através de um orifício, situado na base do tanque, de raio 10cm, com uma velocidade $v = \sqrt{2gh}$m/s, sendo h a altura da água no tanque e $g = 10$m/s^2 a aceleração gravitacional.

17. A população de mosquitos em determinada área cresce a uma razão proporcional à população atual e, na ausência de outros fatores, a população dobra a cada semana. Existem, inicialmente, 200.000 mosquitos na área e os predadores comem 20.000 mosquitos/dia. Determine a população na área em qualquer instante t.

18. Segundo a lei de resfriamento de Newton, a velocidade de resfriamento de um corpo é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e a do meio ambiente. Se a temperatura ambiente é 20ºC e a temperatura de um corpo passa de 100ºC para 60ºC em vinte minutos, qual é o tempo necessário para que a temperatura do corpo seja igual a 30ºC?

19. Suponha que um aposento contenha 1.200 litros de ar originalmente isento de monóxido de carbono. A partir do instante $t = 0$, fumaça de cigarro contendo 4% de monóxido de carbono é introduzida no aposento com uma vazão de 0,1 l/min e a mistura gasosa homogênea sai do aposento com a mesma vazão.

    a) Determine uma expressão para a concentração $c(t)$ do monóxido de carbono no aposento para $t > 0$.

    b) A exposição prolongada a concentrações de monóxido de carbono maiores do que $0,00012$ é prejudicial à saúde. Determine o intervalo de tempo τ após o qual esta concentração é atingida.

20. Um corpo de massa m cai do repouso em um meio que oferece resistência proporcional ao quadrado da velocidade. Ache a relação entre a velocidade v e o tempo t. Ache a velocidade limite.

21. Para uma certa substância, a taxa de variação da pressão de vapor (P) em relação à temperatura (T) é proporcional à pressão do vapor e inversamente proporcional ao quadrado da temperatura. Determine uma expressão para $P(T)$.

22. Uma solução de 60kg de sal em água enche um tanque de 400 litros. Faz-se entrar água nesse tanque na razão de 8 litros por minuto e a mistura, mantida homogênea por agitação, sai com a mesma vazão. Qual a quantidade de sal existente no tanque no fim de 1 hora?

23. Achar o tempo necessário para esvaziar um tanque cilíndrico de raio 8m e altura 10m, cheio de água, sabendo que a água se escoa através de um orifício, situado na base do tanque, de raio 10cm, com uma velocidade $v = 4\sqrt{h}$, sendo h a altura da água no tanque.

24. Quando um corpo se move através de um fluido viscoso sob ação de uma força F, a força resultante é $F - k\eta v$, onde k depende da forma do corpo, v é a velocidade do corpo e η é o coeficiente de viscosidade. Obter a velocidade como função do tempo. Suponha que o movimento seja retilíneo, que a força aplicada seja constante e que $v(0) = v_0$.

Capítulo 5

Edo's de Segunda Ordem

Neste capítulo estamos interessados em estudar equações de segunda ordem, isto é, edo's do tipo:

$$F\left(x, y(x), y'(x), y''(x)\right) = 0$$

Achar soluções gerais de qualquer tipo de edo de segunda ordem está fora do contexto destas notas. Por exemplo, com os métodos desenvolvidos neste capítulo não poderemos achar as soluções das seguintes edo's:

Exemplo 48.

1. A edo de Legendre de ordem α:

$$(1 - x^2)\, y'' - 2\, x\, y' + \alpha\,(\alpha + 1)\, y = 0.$$

2. A edo de Bessel de ordem $\mu \geq 0$:

$$x^2\, y'' + \, x\, y' + (x^2 - \mu^2)\, y = 0.$$

Nos trataremos sistematicamente apenas de duas classes de edo's de segunda ordem: as que podem ser reduzidas a edo's de primeira ordem e as lineares. Isto não tão é restritivo como pode parecer, pois com estas edo's podemos modelar uma grande quantidade de fenômenos.

5.1 Edo's de Segunda Ordem Redutíveis

Consideremos a edo de segunda ordem:

$$y'' = f(x, y, y').$$

As soluções de alguns tipos de edo's de segunda ordem podem ser obtidas utilizando os métodos estudados no capítulo anterior nos seguintes casos:

i) Quando $\mathbf{f}$ não depende de de $\mathbf{y}$ e $\mathbf{y'}$:

$$\boxed{y'' = f(x).}$$

Integrando duas vezes a edo:

$$y(x) = \int \left(\int f(x)\, dx + c_1 \right) dx + c_2,$$

se $F(x) = \int f(x)\, dx$; então:

$$\boxed{y(x) = \int F(x), dx + c_1\, x + c_2.}$$

Exemplo 49.

Seja $y'' = cos(2\,x)$, a edo não depende de y e de y'; logo:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int cos(2\,x)\, dx = \frac{sen(2\,x)}{2}, \\ y &= \int \frac{sen(2\,x)}{2}\, dx + c_1\, x + c_2, \\ y &= -\frac{cos(2\,x)}{4}\, dx + c_1\, x + c_2. \end{aligned}$$

ii) Quando $\mathbf{f}$ não depende de de $\mathbf{y}$:

$$\boxed{y'' = f(x, y').}$$

Fazemos $p = y'$; então, $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = y''$; logo, obtemos a edo:

$$\boxed{p' = f(x, p),}$$

que é de primeira ordem em p.

Exemplo 50.

Seja $(1+x)\,y''+y'=0$, não depende de y ; fazendo $p=y'$:

$$(1+x)\,p'+p=0,$$

que é uma edo de variáveis separáveis:

$$\frac{p'}{p}=-\frac{1}{1+x},$$

e

$$\int\frac{dp}{p}+\int\frac{dx}{1+x}=\ln(p)+ln(1+x)=ln(p\,(1+x)),$$

então $ln(p\,(1+x))=ln(c_1)$; logo, $p\,(x+1)=c_1$ obtendo $y'=\dfrac{c_1}{x+1}$, e:

$$y=c_1\int\frac{dx}{x+1}+c_2=c_1\,ln(x+1)+c_2.$$

iii) Quando f não depende de de x e de y′:

$$\boxed{y''=f(y).}$$

Fazemos $p=y'$; então, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\,(p(y(x)))=p\,\dfrac{dp}{dy}$; logo, obtemos a edo:

$$\boxed{p\,\frac{dp}{dy}=f(y),}$$

que é de variáveis separáveis em p.

Exemplo 51.

Seja $y''=-4\,y^{-3}$, $y>0$. A edo só depende de y, como $f(y)=-4\,y^{-3}$, obtemos:

$$p\,\frac{dp}{dy}=-4\,y^{-3}.$$

Por outro lado:

$$\int p\,dp=-4\int y^{-3}\,dy+c_1$$

$$p^2=\frac{4}{y^2}+c_1$$

$$p=\pm\sqrt{\frac{4}{y^2}+c_1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{\frac{4}{y^2}+c_1}.$$

Logo, $\dfrac{y}{\sqrt{c_1\,y^2+4}}\,y' = \pm 1$, integrando:

$$\begin{aligned}\sqrt{c_1\,y^2+4} &= \pm c_1\,x + c_2\\ c_1\,y^2 &= (\pm c_1\,x + c_2)^2 - 4.\end{aligned}$$

iv) Quando f não depende de de x:

$$\boxed{y'' = f(y, y').}$$

Fazemos $p = y'$; então, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\,(p(y(x))) = p\,\dfrac{dp}{dy}$; logo, obtemos a edo:

$$\boxed{p\,\frac{dp}{dy} = f(y, p),}$$

que é de primeira ordem em p.

Exemplo 52.

Seja $y\,y'' = y^2\,y' + (y')^2$, $y \neq 0$. A edo não depende de x. Como:

$$f(y, p) = f(y, y') = y\,y' + \frac{(y')^2}{y} = y\,p + \frac{p^2}{y};$$

logo obtemos a edo de primeiro ordem linear:

$$p' - \frac{p}{y} = y,$$

cuja solução é $p = y^2 + c_1\,y$; logo, $y' = y^2 + c_1\,y$ que é de variáveis separáveis:

$$\frac{y'}{y^2 + c_1\,y} = 1$$

$$\int \frac{dy}{y^2 + c_1\,y} = x + c_2,$$

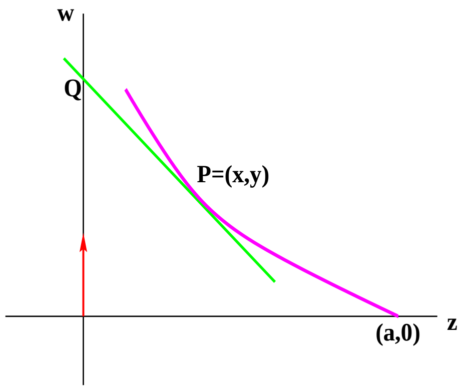
logo,

$$y = c_2\,(y + c_1)\,exp(x).$$

5.2 Aplicações

5.2.1 Curva de Perseguição

Suponha que na origem do plano temos uma presa que foge de um predador ao longo do eixo dos y com velocidade constante v. O predador localizado no ponto $(a, 0)$ persegue a presa correndo sempre na direção em que se encontra a presa com velocidade constante w. Determinaremos a curva descrita pelo predador e as condições sobre a, v e w para o predador encontrar a presa. Considere o seguinte desenho:



Após de um tempo t o predador se encontra no ponto P e a presa no ponto $Q = (0, v\,t)$. O deslocamento do predador entre o ponto G e P é $w\,t$; logo:

$$w\,t = \int_x^a \sqrt{1 + (y')^2}\,dx.$$

O ponto Q é a interseção da reta tangente da curva no ponto P, a equação desta reta é $w - y = w'(z - x)$, se $z = 0$; então, $\overline{OQ} = y - x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$. Por outro lado $\overline{OQ} = v\,t$; logo:

$$\frac{v}{w}\int_x^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \frac{v}{w}\,(w\,t) = v\,t = y - x\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Fazendo $c = \dfrac{v}{w}$ e derivando em relação a x em ambos os lados, obtemos:

$$x\,\frac{d^2y}{dx^2} = c\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

que é uma edo de segunda ordem que não depende de y; logo, fazemos $p = y'$ e $p' = y''$, temos a edo de variáveis separáveis:

$$\begin{aligned} x\,p' &= c\,\sqrt{1+p^2} \\ \frac{p'}{\sqrt{1+p^2}} &= \frac{c}{x}, \end{aligned}$$

logo, $ln\left(\left|\sqrt{1+p^2}+p\right|\right) = c\,ln(x) + ln(k)$ e:

$$\sqrt{1+p^2}+p = k\,x^c.$$

Como a trajetória do predador se inicia no ponto $G = (a,0)$, temos: $y'(a) = 0$ ou $p = 0$ e $k = \dfrac{1}{a^c}$, então podemos escrever a solução como:

$$\sqrt{1+p^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^c - p,$$

de onde obtemos:

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^c\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{2c}-1\right)$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^c - \left(\frac{a}{x}\right)^c\right).$$

Logo, as soluções da edo são:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{c+1}\left(\dfrac{x}{a}\right)^{c+1} + \dfrac{a}{c-1}\left(\dfrac{a}{x}\right)^{c-1}\right) + k_1 & \text{se} \quad c \neq 1 \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2\,a} - a\,ln|x|\right) + k_2 & \text{se} \quad c = 1. \end{cases}$$

Como $y(a) = 0$, para $c \neq 1$ temos que $k_1 = \dfrac{a\,c}{1-c^2}$ e:

$$y = \frac{a/2}{}\left(\frac{1}{c+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{c+1} + \frac{1}{c-1}\left(\frac{a}{x}\right)^{c-1}\right) - \frac{a\,c}{1-c^2}.$$

Analogamente para $c = 1$:

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2\,a} - a\,ln|x|\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - a\,ln|a|\right).$$

Lembrando que $c = \dfrac{v}{w}$, logo:

i) Se $v \geq w$; então:

$$\lim_{x \to 0+} y(x) = +\infty$$

o predador não pega a presa.

ii) Se $v < w$; então $c < 1$ e:

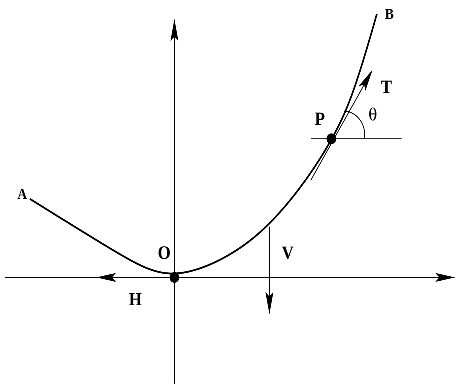
$$\lim_{x \to 0+} y(x) = -\frac{a\,c}{c^2 - 1}$$

este é o ponto onde predador pega a presa.

5.2.2 Catenária

O problema é determinar a forma que toma um cabo flexível, suspenso em dois pontos e sujeito a seu peso. Este problema foi proposto por Leonardo da Vinci e resolvido por vários matemáticos, entre eles, Leibniz e J. Bernoulli; foi Leibniz que deu o nome de catenária à curva solução do problema.

Suporemos que temos um cabo flexível e inextensível suspenso em dois pontos A e B. Temos:



Vamos localizar a origem do plano no ponto mais baixo da curva formada pelo cabo e analisar as forças que atuam no trecho OP. Como o cabo é flexível segue que as tensões são tangentes. Temos as tensões H e T e o peso do segmento OP, que denotaremos por V. Estas forças estão em equilíbrio, logo

$$H + T + V = 0.$$

Em termos das componentes, temos:

$$-H + T\cos\theta = 0$$
$$-V + T\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

logo,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{V}{H}$$

Vamos expressar as forças pelo comprimento do arco. Sejam ω o peso por unidade de comprimento e s o comprimento do arco OP. Podemos expressar $V = \omega\, s$. Note que H e ω são constantes e:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta = \frac{V}{H} = \frac{\omega s}{H} = cs, \qquad c = \frac{\omega}{H}$$

Logo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c\frac{ds}{dx} = c\,\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = c\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Observem que esta edo é uma dos tipos especiais de equações de segunda ordem apresentados. Vemos que o lado direito não depende nem de x e nem de y.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Vamos considerar a mudança de variável:

$$p = \frac{dy}{dx},\ \frac{dp}{dx} = y'' = c\,\sqrt{1+p^2};\text{ então } \int \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\,dp = \int c\,dx$$

fazendo a mudança:

$$p = \operatorname{tg} u\, dp = \sec^2 u\, du;\text{ então } \int \sec u\, dp = c\,x + k_1.$$

Logo: $c\,x + k_1 = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| = \ln\sqrt{1+p^2} + p$; e:

$$\sqrt{1+p^2} + p = e^{cx+k_1}$$

Escrevendo: $1 + p^2 = p^2 - 2\,p\,e^{cx+k_1} + e^{2cx+2k_1}$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = p(x) = \operatorname{senh}(c\,x + k_1);$$

que tem solução:

$$y(x) = \frac{1}{c}\cosh\left(c\,x + k_1\right) + k_2.$$

Vejamos como determinar as constantes k_1 e k_2. Lembremos que $x = 0$ é o ponto mais baixo da nossa curva. A tangente de y no ponto O é nula. Isto é:

$$\frac{dy}{dx}(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{c_0+k_1} - e^{-c_0-k_1}) \Rightarrow k_1 = 0$$
$$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = y(0) = \frac{1}{c}\cosh{(cx)} + k_2 = \frac{1}{c} + k_2$$

Portanto, nossa solução é:

$$y(x) = \frac{\cosh(c\,x) - 1}{c}.$$

O gráfico de $y = y(x)$ é chamada **catenária**.

5.3 Equações Lineares de Segunda Ordem

Neste parágrafo estamos interessados em estudar equações lineares de segunda ordem, isto é, edo's do tipo:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\,\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = r(x).} \tag{5.1}$$

A edo

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\,\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = 0.} \tag{5.2}$$

é dita **homogênea** associada a edo (5.1).

Se $r(x) \not\equiv 0$, a edo (5.1) é dita **linear não-homogênea.**

Vamos enunciar, para as edo's de segunda ordem, um teorema de existência e unicidade de solução.

Teorema 3. *Sejam $p,\, q : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tal que $x_0 \in I$, então o PVI:*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + p(x)\,\dfrac{dy}{dx} + q(x)\,y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ \dfrac{dy}{dx}(x_0) = y_1 \end{cases}$$

tem uma única solução definida no intervalo I.

Observação 17.

1. A demonstração deste teorema é simples mas depende de um resultado de existência e unicidade geral que veremos no apêndice.

2. As equações lineares são especiais pois para elas temos garantida a existência e unicidade de soluções. Na verdade, este resultado vai a ser generalizado para equações lineares de ordem n.

3. É possível provar que se $p,\, q \in C^k(I)$ então a solução de (5.2), $y \in C^k(I)$.

Nosso objetivo é determinar uma solução geral da edo (5.1), provaremos que tal solução é do tipo:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x),}$$

onde y_h é a solução geral de (5.2) e y_p é uma solução particular de (5.1).

Claramente $y(x) = 0$ é a única solução da edo (5.2) tal que $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Se y_1 e y_2 são soluções da edo (5.2); então, $y = \lambda_1 \, y_1 + \lambda_2 \, y_2$ também é solução de (5.2).

5.3.1 Álgebra Linear I

Consideremos o conjunto:

$$V^n = \{y : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, y \in C^n(I)\}.$$

V é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, de fato, do Cálculo sabemos que para todo y_1 e $y_2 \in V^n$, λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, temos:

$$\lambda_1 \, y_1 + \lambda_2 \, y_2 \in V^n.$$

Logo a estas funções podemos dar um tratamento análogo aos vetores em Álgebra Linear.
A seguir vamos estabelecer um critério para verificar se duas soluções y_1 e $y_2 \in V^2$ de (5.2) são linearmente independentes.

Definição 20.

As funções y_1 e $y_2 \in V^2$ são chamadas **lineramente dependentes (ld)**, se uma é um múltiplo constante da outra. Isto é, λ

$$y_1(x) = \lambda \, y_2(x), \qquad \forall x \in I.$$

Caso contrário, são chamadas **linearmente independentes (li)**.

Exemplo 53.

1. As funções $y_1(x) = sen(x)$ e $y_2(x) = cos(x)$ são li para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. As funções $y_1(x) = sen(2\,x)$ e $y_2(x) = sen(x)\,cos(x)$ são ld para todo $x \in \mathbb{R}$, pois $f(x) = 2\,g(x)$.

Vejamos a seguir um critério para decidir quando duas soluções são li. Inicialmente, consideremos a seguinte definição.

Definição 21.

Dadas duas funções y_1 e $y_2 \in V^2$, o **Wronskiano** de y_1 e y_2 no ponto $x \in I$, é o determinante:

$$W(f,g)(x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x). \end{bmatrix}$$

Exemplo 54.

Sejam $y_1(x) = e^{k_1 x}$ e $y_2(x) = e^{k_2 x}$; então:

$$W(y_1, y_2)(x) = \det \begin{bmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1\, e^{k_1 x} & k_2\, e^{k_2 x} \end{bmatrix} = (k_2 - k_1)\, e^{(k_1+k_2)x},$$

logo, $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ se $k_1 \neq k_2$. As funções $y_1(x) = e^{k_1 x}$ e $y_2(x) = e^{k_2 x}$ são li, se $k_1 \neq k_2$.

Exemplo 55. *Sejam $y_1(x) = e^{kx}$ e $y_2(x) = x\, e^{kx}$; então:*

$$W(y_1, y_2)(x) = \det \begin{bmatrix} e^{kx} & x\, e^{kx} \\ k\, e^{kx} & e^{kx} + k\, x\, e^{x} \end{bmatrix} = e^{2kx},$$

logo, $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para todo k. As funções $y_1(x) = e^{kx}$ e $y_2(x) = x\, e^{kx}$ são li para todo k.

Teorema 4. *Suponha que y_1 e y_2 são duas soluções de*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\, \frac{dy}{dx} + q(x) = 0$$

em um intervalo aberto I em que p e q são contínuas. Então, y_1 e y_2 são linearmente independentes, se e somente se $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ em um ponto de $x \in I$

($\Leftarrow$) Seja $x_0 \in I$ tal que $W(y_1, y_2)(x_0)(x) \neq 0$. Suponhamos, por contradição, que y_1 e y_2 sejam linearmente dependentes. Isto é, que existe λ tal que $y_1 = \lambda\, y_2$. Tome α_1 e α_1 tais que $\lambda = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$ e $\alpha_1 \neq 0$. Temos:

$$y_1 = \lambda\, y_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\, y_2; \quad \text{então,} \quad \alpha_1\, y_1 + \alpha_2\, y_2 = 0.$$

Portanto

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Observe que o determinante da matriz associada ao sistema linear acima é exatamente igual ao Wronskiano $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ no ponto x_0. Isto implicaria

que a única solução do sistema homogêneo seria a trivial. Isto é, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Contradição. Logo, y_1 e y_2 são linearmente independentes.
$(\Rightarrow)$ Vamos provar, na verdade, que $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Suponhamos que y_1 e y_2 sejam linearmente dependentes. E, suponhamos, por contradição, que exista $x_0 \in I$ tal que $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$. Isto nos diz que o sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1\, y_1\,(x_0) + \alpha_2\, y_2\,(x_0) = 0 \\ \alpha_1\, y_1'\,(x_0) + \alpha_2\, y_2'\,(x_0) = 0 \end{cases}$$

tem uma solução não-trivial (α_1, α_2), ($\alpha_1 \neq 0$ ou $\alpha_2 \neq 0$). Seja

$$\Phi(x) = \alpha_1\, y_1(x) + \alpha_2\, y_2(x).$$

Observe que, por construção, Φ é solução do PVI:

$$\begin{cases} \Phi'' + p(x)\, \Phi + q(x) = 0 \\ \Phi(x_0) = \alpha_1\, y_1(x_0) + \alpha_2\, y_2(x_0) = 0 \\ \Phi'(x_0) = \alpha_1\, y_1'(x_0) + \alpha_2\, y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Por outro lado, $\Psi(x) \equiv 0$ também é solução do PVI acima. Pelo Teorema de existência e unicidade, $\Psi = \Phi$ em I. Isto implica:

$$0 = \Psi(x) = \Phi(x) = \alpha_1\, y_1(x) + \alpha_2\, y_2(x) \quad \text{com} \quad \alpha_1 \neq 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_2 \neq 0$$

Ou seja, y_1 e y_2 são múltiplas. Contradição. Logo, $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ em todo $x \in I$.

Para finalizar nossa análise, resta saber se dadas y_1 e y_2 soluções li. de:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\, \frac{dy}{dx} + q(x)\, y = 0.$$

Podemos afirmar que toda solução do problema acima é da forma:

$$\alpha_1\, y_1 + \alpha_2\, y_2?$$

Usaremos o teorema que acabamos de provar para estabelecer o seguinte resultado:

Teorema 5. *Sejam y_1 e y_2 soluções linearmente independentes da edo:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\,\frac{dy}{dx} + q(x)\,y = 0$$

em um intervalo aberto I em que p e q são contínuas. Se Y é solução da edo; então, existem constantes α_1 e α_2 tais que

$$Y(x) = \alpha_1\,y_1(x) + \alpha_2\,y_2(x), \quad \textit{para todo}\, x \in I$$

Prova: Fixe $x_0 \in I$ e considere o sistema

$$\begin{cases} \alpha y_1(x_0) + \beta y_2(x_0) = Y(x_0) \\ \alpha y_1'(x_0) + \beta y_2'(x_0) = Y'(x_0) \end{cases}$$

Como y_1 e y_2 duas soluções linearmente independentes, temos $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$. Logo, o sistema acima tem solução única (α_1, α_2). Seja $\Phi(x) = \alpha_1\,y_1(x) + \alpha_2\,y_2(x)$. Por construção, Φ é solução do PVI:

$$\begin{cases} \Phi'' + p(x)\,\Phi + q(x) = 0 \\ \Phi(x_0) = \alpha_1\,y_1(x_0) + \alpha_2\,y_2(x_0) = Y(x_0) \\ \Phi'(x_0) = \alpha_1\,y_1'(x_0) + \alpha_2\,y_2'(x_0) = Y'(x_0) \end{cases}$$

Por outro lado, $Y(x)$ também é solução do PVI. Pelo Teorema de existência e unicidade, $\Phi = Y$ em I. Isto implica:

$$Y(x) = \Phi(x) = \alpha_1\,y_1(x) + \alpha_2\,y_2(x), \qquad x \in I.$$

Logo, provamos que o conjunto das soluções da edo (5.2) é um subespaço vetorial de V^2 de dimensão 2.

Definição 22.

Sejam y_1 e y_2 soluções li da edo (5.2), dizemos que y_1 e y_2 formam um **conjunto fundamental** de soluções da equação homogênea.

Observação 18.

O último teorema nos diz que se y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental, então:

$$\alpha_1\,y_1(x) + \alpha_2\,y_2(x), \qquad \alpha_1,\,\alpha_2 \in \mathbb{R}$$

é a solução geral da equação homogênea (5.2).

Exemplo 56.

Sejam $y_1(x) = e^x$ e $y_2 = e^{-x}$. Verifique que estas funções são soluções de

$$y'' - y = 0 \tag{5.3}$$

e determine a solução geral da equação homogênea acima.
Vamos verificar que são soluções da edo (5.3):

$$(e^x)'' - e^x = e^x - e^x = 0 \qquad \text{e} \qquad \big(e^{-x}\big)'' - e^{-x} = e^{-x} - e^{-x} = 0.$$

Para construir a solução geral, precisamos de um conjunto fundamental. Logo, basta verificar se e^x e e^{-x} são li. Devemos provar que: $W(e^x, e^{-x}) \neq 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$. Consideremos $x_0 = 0$. Temos:

$$W(y_1, y_2)(0) = \det \begin{bmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e^0 & e^{-0} \\ e^0 & -e^0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Logo,

$$y(x) = \alpha_1 \, e^x + \alpha_2 \, e^{-x}$$

é a solução geral da edo (5.2).

Teorema 6. *Seja $\{y_1,\, y_2\}$ um conjunto fundamental de soluções da edo (5.2) e y_p uma solução particular de (5.1); então a solução geral de (5.1) é:*

$$y(x) = c_1 \, y_1(x) + c_2 \, y_2(x) + y_p(x).$$

O teorema segue diretamente da seguinte observação:

Observação 19.

Se y_1 e y_2 são soluções de (5.1); então $y_1 - y_2$ é solução de (5.2).

Prova do teorema: Fixe y_p; seja y solução de (5.1). Pela observação, $y - y_p$ é solução de (5.2); logo, existem $c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{aligned} y(x) - y_p(x) &= c_1 \, y_1(x) + c_2 \, y_2(x) \\ y(x) &= c_1 \, y_1(x) + c_2 \, y_2(x) + y_p(x). \end{aligned}$$

5.3.2 Redução de Ordem

Vamos prosseguir nosso estudo das edo's homogêneas de segunda ordem para determinar seu conjunto fundamental.
Primeiramente, analisaremos o caso em que já conhecemos uma solução da edo homogênea e queremos determinar uma segunda que seja linearmente independente. Esse método é chamado de redução de ordem.
Vamos obter uma segunda solução $y_2(x)$ a partir de $y_1(x)$ que sejam li. Sabemos que qualquer múltiplo de $y_1(x)$

$$y(x) = c\, y_1(x)$$

ainda é solução da equação homogênea. Como desjamos uma nova solução que seja li, estes tipos de soluções não nos interessam. No entanto, não vamos abandonar completamente este idéia. Vamos tentar determinar soluções da forma:

$$y(x) = c(x)\, y_1(x),$$

onde $c(x)$ é uma função não constante, de modo que $y(x)$ seja solução da equação homogênea. Este argumento é chamado de variação de parâmetros. Sendo possível determinar tal $y(x)$, a nova solução e a antiga, $y_1(x)$, serão naturalmente linearmente independentes.
Vejamos que condições $c = c(x)$ deve satisfazer para que y seja solução. Calculemos as derivadas de y:

$$\begin{aligned} y' &= (c(x)\, y_1)' = c'\, y_1 + c\, y_1', \\ y'' &= c''\, y_1 + 2\, c'\, y_1' + c\, y_1'' \end{aligned}$$

Como queremos que y seja solução, deve satisfazer a edo:

$$\begin{aligned} & y'' + p\, y' + q\, y = 0, \\ & c''\, y_1 + 2\, c' y_1' + \ c y_1'' + p\ (c'\, y_1 + c\, y_1') + q\, c\, y_1 = 0, \end{aligned}$$

reescrevendo a última equação:

$$c\, (y_1'' + p\, y_1' + q\, y_1) + c''\, y_1 + 2\, c'\, y_1' + p\, c'\, y_1 = 0.$$

Como y_1 é solução, o resultado da expressão dentro do parênteses é zero, e:

$$c''\, y_1 + 2\, c'\, y_1' + p\, c'\, y_1 = 0.$$

Esta edo de segunda ordem se encaixa nas edo's estudadas no início do capítulo. Logo:

$$\boxed{c''\, y_1 + (2\, y_1' + p\, y_1) c' = 0,} \tag{5.4}$$

pode ser resolvida com a mudança de variável $v = c'$.

Exemplo 57. *Consideremos a edo:*

$$x^2\, y'' - 5\, x\, y' + 9\, y = 0, \qquad x > 0. \tag{5.5}$$

Observemos que $y_1(x) = x^3$ é solução da equação acima. De fato:

$$x^2\, y_1'' - 5\, x\, y_1' + 9\, y_1 = x^2\, 6\, x - 5\, x\, 3\, x^2 + 9\, x^3 = 0.$$

Vamos tentar determinar uma segunda solução da forma

$$y_2(x) = c(x)\, y_1(x) = c(x)\, x^3.$$

A edo (5.4) fica:

$$c'' + \frac{c'}{x} = 0.$$

Fazendo $p = c'$, obtemos:

$$\begin{aligned} & p' + \frac{p}{x} = 0 \\ & \frac{d}{dx}\,(x\,p) = 0 \\ & x\,p = k_1 \\ & p = \frac{k_1}{x}, \end{aligned}$$

então:

$$c(x) = k_1\, \ln x + k_2.$$

Como queremos apenas exibir uma segunda solução, podemos fazer a escolha que julgarmos mais simples. Por exemplo, podemos tomar

$$y_2(x) = c(x)\, y_1(x) = x^3\, \ln x$$

e, portanto, como y_1 e y_2 são linearmente idenpendentes e solucionam o problema homogêneo (5.5),

$$y(x) = k_1\, y_1 + k_2\, y_2 = k_1\, x^3 + k_2\, x^3\, \ln x$$

é solução geral de (5.5)

5.3.3 Álgebra Linear II

Nosso próximo objetivo é mostrar que as edo's:

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = r(x)$$

podem ser tratadas como uma transformação linear T.

Definição 23.

Uma transformação linear $T : V^2 \to V^0$ se diz um operador diferencial liner de ordem 2 se puder ser colocado na forma:

$$T\,(\phi) = \frac{d^2\phi}{dx^2} + p\,\frac{d\phi}{dx} + q\,\phi.$$

Algumas vezes, é também escrito da forma $T = D^2 + p\,D + q$ onde D é o operador derivada. Isto é:

$$D\,(\phi) = \phi'.$$

Só para nos habituarmos à notação e verificarmos que o operador que definimos é de fato linear, consideremos $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ e $f,\ g \in V$. Se o operador for linear deveriamos ter:

$$T\,(\alpha\, f + \beta\, g) = \alpha\, T\,(f) + \beta\, T\,(g)\,.$$

Calculemos:

$$\begin{aligned} T\,(\alpha\, f + \beta\, g) &= D^2\,(\alpha\, f + \beta\, g) + p\, D\,(\alpha\, f + \beta\, g) + q\,\,(\alpha\, f + \beta\, g) \\ &= \alpha D^2 f + \beta\, d^2 g + p\,\,(\alpha\, Df + \beta\, Dg) + \alpha\, q\, f + \beta\, q\, g \\ &= \alpha\, T\,(f) + \beta\, T\,(g)\,. \end{aligned}$$

Portanto, para encontrarmos uma solução geral de (5.1), basta resolvermos um problema do tipo

$$T\,(y) = r,$$

onde T é um operador linear. Sabemos que toda solução y do problema acima pode ser escrita como:

$$y = y_p + y_h,$$

onde y_p é uma solução particular de $Ty = r$ e y_h uma solução do problema homogêneo, isto é $y_h \in N(T)$, onde $N(T)$ é o nucleo de T:

$$T\,(y) = 0.$$

Isto novamente nos diz que para solucionar o problema não-homogêneo, basta sermos capazes de descrever completamente o conjunto de soluções do problema homogêneo.
Se y_1 e y_2 são soluções do problema homogêneo, então $\alpha y_1 + \beta y_2$ também é solução. De fato, pela linearidade:

$$T\,(\alpha\, y_1 + \beta\, y_2) = \alpha\, T\,(y_1) + \beta\, T\,(y_2)$$

Ou seja, o conjunto de soluções do problema homogêneo é um subespaço vetorial de dimensão 2. Em Álgebra Linear, quando desejamos descrever os elementos de um espaço vetorial, procuramos uma base do espaço.
Todos os resultados obtidos no parágrafo anterior podem ser obtidos de forma muito mais consistente com a utilização de operadores. Por exemplo, o problema de achar a solução da edo (5.2):

Teorema 7. (Princípio de Superposição) *Sejam y_1 e y_2 soluções do problema homogêneo (5.2) no intervalo I, então a combinação linear $\alpha\, y_1 + \beta\, y_2$ também é solução de (5.2) quaisquer que sejam $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.*

Prova: Já vimos que o problema homogêneo pode ser escrito como:

$$Ty = 0 \qquad \text{com} \qquad T = D^2 + p\, D + q$$

e vimos que T é linear. Portanto:

$$T\,(\alpha\, y_1 + \beta\, y_2) = \alpha\, T\,(y_1) + \beta\, T\,(y_2) = 0,$$

uma vez que y_1 e y_2 são soluções.

5.4 Edo's com Coeficientes Constantes

Vamos, agora, considerar equações linerares de segunda ordem da forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\,\frac{dy}{dx} + a_0\,y = 0, \tag{5.6}$$

onde $a_1,\ a_0 \in \mathbb{R}$.
Isto é, equações diferenciais ordinárias de segunda ordem lineares com coeficientes constantes.
Inicialmente introduzirem a resolução de (5.6). Tentaremos encontrar soluções da forma:

$$y(x) = e^{rx}.$$

Logo, $y'(x) = r\,e^{rx}$ e $y''(x) = r^2\,e^{rx}$. Para que y seja solução de (5.6), devemos ter:

$$\left(r^2 + a_1 r + a_0\right)\,e^{rx} = 0$$

isto é, o expoente r deve ser igual às raízes da equação quadrática em r:

$$r^2 + a_1\,r + a_0 = 0$$

Esta equação é chamada **equação característica** da edo (5.6).
Vamos analisar os possíveis casos das raízes da equação característica.
A solução da equcção característica é:

$$r = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

onde Δ é o discriminante da equação característica.

Se $\Delta > 0$

Então, existem $r_1,\ r_2 \in \mathbb{R}$ tais que $r_1 \neq r_2$, como $y_1(x) = e^{r_1 x}$ e $y_2(x) = e^{r_2 x}$ são li, uma solução geral da edo (5.6) é:

$$\boxed{y(x) = k_1\,e^{r_1 x} + k_2\,e^{r_2 x}.}$$

Exemplo 58. *Considere a edo:*

$$y'' + 2\,y' - 8\,y = 0.$$

A equação característica da edo é:

$$r^2 + 2\,r - 8 = (r-2)\,(r+4) = 0,$$

logo a solução geral da edo é:

$$y(x) = k_1\,e^{2x} + k_2\,e^{-4x}.$$

Se $\Delta = 0$

Então, temos $r = r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$ e $r = -\dfrac{a_1}{2}$. Neste caso obtemos $y_1(x) = e^{rx}$. Logo, vamos usar o método de redução de ordem para achar uma segunda solução li. Procuramos soluções do tipo:

$$y(x) = c(x)\, y_1(x).$$

A edo (5.4) é:

$$c''(x) = 0$$

Resolvendo a equação por integração imediata, temos

$$\begin{aligned} c'(x) &= k_1\, x \\ c(x) &= k_1\, x + k_2 \\ c(x) &= x \end{aligned}$$

Como já sabemos que $y_1(x) = e^{rx}$ e $y_2(x) = x\, e^{rx}$ são li, a solução geral da edo (5.6) é:

$$\boxed{y(x) = k_1\, e^{rx} + k_2\, x\, e^{rx}.}$$

Exemplo 59. *Consideremos a edo:*

$$y'' + 4\, y' + 4\, y = 0.$$

A equação característica da edo é: $r^2 + 4\, r + 4 = (r + 2)^2 = 0$; logo, a edo tem como solução geral:

$$y(x) = (k_1 + k_2\, x)\; e^{-2x}.$$

Se $\Delta < 0$

Então, a equação característica tem duas raízes complexas:
$r_1 = \alpha + i\,\beta$ e $r_2 = \alpha - i\,\beta$. Logo, formalmente, vamos tentar uma solução geral da forma:

$$y(x) = k_1\, e^{(\alpha+i\beta)x} + k_2\, e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\,(k_1\, e^{i\beta x} + k_2\, e^{-i\beta x}).$$

Utilizando a fórmula de Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i\,\mathrm{sen}\, x,$$

obtemos,

$$
\begin{aligned}
e^{r_1 x} &= e^{\alpha x}\, e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\,(\cos(\beta x) + i\ \mathrm{sen}(\beta x)) \\
e^{r_2 x} &= e^{\alpha x}\, e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\,(\cos(\beta x) - i\ \mathrm{sen}(\beta x))
\end{aligned}
$$

Sabemos que se consideramos uma combinação linear das funções $e^{r_1 x}$ e $e^{r_1 x}$ esta será solução da edo. Então:

$$\frac{e^{r_1 x} + e^{r_2 x}}{2} = e^{\alpha x}\ \cos(\beta x)$$

$$\frac{e^{r_1 x} - e^{r_2 x}}{2i} = e^{\alpha x}\ \mathrm{sen}(\beta x),$$

Sejam:

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= e^{\alpha x}\ \cos(\beta x), \\
y_2(x) &= e^{\alpha x}\ \cos(\beta x).
\end{aligned}
$$

Claramente y_1 e y_2 são li. Portanto, uma solução geral de (5.6) é dada por:

$$\boxed{y(x) = k_1\, e^{\alpha x}\ \cos(\beta x) + k_2\, e^{\alpha x}\ \mathrm{sen}(\beta x).}$$

Exemplo 60. *A edo:*

$$y'' + y = 0.$$

A equação característica é: $r^2 + 1 = 0$, as raízes são complexas $r_1 = i$ e $r_2 = -i$; logo $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, e a edo tem solução geral:

$$y(x) = k_1\ \cos x + k_2\ \mathrm{sen}\, x.$$

Observação 20.

A justificativa da escolha, em princípio, arbitrária da solução $y(x) = e^{rx}$ da edo (5.6), pode ser feita utilizando Álgebra Liner elementar.

5.4.1 Álgebra Linera III

Com a notação de operador diferencial linear de ordem 2, podemos associar à edo de (5.6) o seguinte operador

$$T = D^2 + a_1\, D + a_0,$$

Logo, a equação de (5.6) pode ser representada como $T(y) = 0$.
Uma propriedade interessante destes operadores, estudada em Álgebra Linear elementar, é que algebricamente, estes operadores se comportam como se fossem polinômios em D. Em particular, eles podem ser fatorados como um produto de operadores de ordem 1. Ou seja, podemos cair na resolução de equações de primeira ordem.

Exemplo 61. *Consideremos a edo:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\,y = 0.$$

A edo pode ser escrita como $D^2 - 4)y = 0$ e:

$$(D-2)\,(D+2)y = 0 \quad \text{ou} \quad (D+2)\,(D-2)y \qquad\qquad = 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(D+2)\,y &= D\,y + 2\,y \\
(D-2)\,(D+2)\,y &= (D-2)\,(Dy + 2\,y) \\
&= D^2\,y + 2\,Dy - 2\,Dy - 4\,y = (D^2 - 4)\,y
\end{aligned}$$

Vejamos qual é a vantagem disto. Sejam y_1, y_2 tais que:

$$(D-2)\,y_1 = 0 \quad \text{e} \quad (D+2)\,y_2 = 0$$

logo:

$$\begin{aligned}
(D^2-4)\,y_1 &= (D+2)\,(D-2)\,y_1 = (D+2)\,0 = 0, \\
(D^2-4)\,y_2 &= (D-2)\,(D+2)\,y_2 = (D-2)\,0 = 0
\end{aligned}$$

Ou seja, podemos achar as soluções de:

$$(D^2-4)\,y = 0,$$

resolvendo:

$$(D-2)\,y = 0 \quad \text{e} \quad (D+2)\,y = 0.$$

As equações de primeira ordem acima correspondem a:

$$(D-2)\,y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\,y,$$

e

$$(D+2)\,y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2\,y$$

cujas soluções, respectivamente, são:

$$y_1(x) = e^{2x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{-2x}.$$

Achamos y_1 e y_2 duas soluções da equação homogênea de segunda ordem. Para que elas formem um conjunto fundamental, basta verificar se elas são li.

$$W(y_1, y_2)(0) = \det \begin{bmatrix} e^{2.0} & e^{-2.0} \\ e^{2.0} & -e^{-2.0} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \neq 0$$

Portanto,

$$y(x) = k_1\, e^{2x} + k_2\, e^{-2x} \quad \text{é solução geral de} \quad (D^2 - 4)y = 0.$$

O exemplo sugere tentar resolver a equação de segunda ordem:

$$(D^2 + a_1\, D + a_0)\, y = 0. \tag{5.7}$$

Tentaremos decompor o operador diferencial $D^2 + a_1\, D + a_0$ em fatores lineares. Para isto, tal como fazemos com polinômios, precisamos encontrar "suas raízes". Isto é, precisamos determinar as raízes do polinômio:

$$r^2 + a_1 r + a_0 = 0.$$

Esta equação também recebe o nome de equação característica da equação (5.7). De posse das raízes do polinômio acima, determinamos os fatores lineares e temos que resolver duas equações de primeira ordem tal como no exemplo.

A seguir estudaremos uma classe especial de equações homogêneas lineares de ordem 2 que não têm coeficientes constantes.

5.5 Equação de Euler-Cauchy Homogênea

Uma edo é de Euler-Cauchy de ordem 2 se é da forma:

$$a_2\, x^2\, y'' + a_1\, x\, y' + a_0\, y = 0, \tag{5.8}$$

tal que $a_2 \neq 0$ e $a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$.
Ela é também chamada de equação equidimensional pois o expoente de cada coeficiente é igual à ordem da derivada. Isso implica que com a substituição:

$$y(x) = x^r, \quad x > 0,$$

produzirá termos do mesmo graue teremos:

$$\begin{aligned} y'(x) &= r\, x^{r-1} \\ y''(x) &= r\,(r-1)\, x^{r-2}; \end{aligned}$$

logo,

$$a_2\, x^2\, y'' + a_1\, x\, y' + a_0\, y = x^r\ \left(a_2\, r\,(r-1) + a_1\, r + a_0\right) = 0$$

Portanto, basta analisarmos as raízes do polinômio:

$$a_2\, r^2 + (a_1 - a_2)\, r + a_0.$$

Seja $\Delta = -(a_1 - a_2)^2 - 4\, a_2\, a_0$ o discriminante da equação de segundo grau. Como antes temos 3 possibilidades:

Se $\boldsymbol{\Delta > 0}$

Logo, temos $r_1,\ r_2 \in \mathbb{R}$ tais que $r_1 \neq r_2$. Uma solução geral de (5.8) é:

$$y(x) = k_1\, x^{r_1} + k_2\, x^{r_2}$$

Se $\boldsymbol{\Delta = 0}$

Logo, temos raízes reais e iguais $r = r_1 = r_2$. Utilizando o método de redução de ordem, vamos achar uma segunda solução da forma:

$$\begin{aligned} y_2 &= c(x)\, x^r \\ y_2' &= x^r\, c' + r\, x^{r-1}\, c \\ y_2'' &= x^r\, c'' + 2\, r\, x^{r-1}\, c' + r\,(r-1) x^{r-2}\, c. \end{aligned}$$

Portanto:

$$a_2\, x^2\, y_2'' + a_1\, x\, y_2' + a_0\, y_2 = a_2\, x^{r+2}\, c'' + c'\, x^{r+1}\, (2\, a_2\, r + a_1) = 0.$$

Fazendo a mudança de variável e lembrando que $r = \dfrac{a_2 - a_1}{2a_2}$

$$\begin{aligned}
&c' = p \\
&a_2\, x^{r+2}\, p' + p\, x^{r+1}\, a_2 = 0 \\
&\frac{dp}{p} = -\frac{x^{r+1}\, a_2}{a_2\, x^{r+2}}\, dx = -\frac{1}{x} dx \\
&\ln|p| = -\ln x \\
&c' = p = \frac{1}{x} \\
&c(x) = \ln x \\
&y_2(x) = c(x)\, x^r\, x^r\ \ln x
\end{aligned}$$

Portanto, uma solução geral de (5.8) é:

$$y(x) = (k_1 + k_2\ \ln x)\ x^r$$

Se $\boldsymbol{\Delta} < 0$

Logo, temos raízes complexas $r_1 = a + bi$ e $r_2 = a - bi$.
Tal como no caso das equações de coeficientes constantes, usamos a fórmula de Euler para obter

$$x^{a \pm bi} = e^{(a \pm bi) \ln x} = e^{a \ln x} e^{\pm bi \ln x} = x^a\, (\cos(b \ln x) \pm i\ \operatorname{sen}(b \ln x))\,.$$

Podemos verificar que as partes real e imaginária são soluções linearmente independentes. Portanto, uma solução geral de (5.8) e:

$$y(x) = x^a\ (k_1\ \cos(b \ln x) + k_2\ \operatorname{sen}(b \ln x))\,.$$

Suponhamos que tenhamos obtido, por este método, uma solução $y(t)$ para $x > 0$.
Observemos agora que, se $x < 0$, obtemos resultados análogos.

Teorema 8. *Consideremos a edo de Euler-Cauchy:*

$$a_2\, x^2\, y'' + a_1\, x\, y' + a_0\, y = 0, \quad x \neq 0.$$

e a equação característica:

$$a_2\, r^2 + (a_1 - a_2)\, r + a_0. \tag{5.9}$$

Então:

1. A edo (5.9) tem raízes reais e distintas $r_1 \neq r_2$. A solução geral da edo é:

$$y(x) = k_1|x|^{r_1} + k_2|x|^{r_2}.$$

2. A edo (5.9) tem raízes repetidas $r_1 = r_2$. A solução geral da edo é:

$$y(x) = (k_1 + k_2 \ln|x|)\,|x|^{r_1}.$$

3. A edo (5.9) tem raízes complexas $r_1 = a + bi$ e $r_2 = a - bi$. A solução geral da edo é:

$$y(x) = |x|^a\ (k_1 \cos(b\ln|x|) + k_2 \operatorname{sen}(b\ln|x|)).$$

Exemplo 62. *Considere a edo:*

$$x^2\,\frac{d^2y}{dx^2} + 5\,x\,\frac{dy}{dx} + 4y = 0, \qquad x \neq 0$$

Procuramos uma solução da forma $y(x) = x^r,\ x > 0$. O polinômio característico é:

$$r^2 + 4\,r + 4 = (r+2)^2 = 0.$$

Logo, uma solução geral é:

$$y(x) = k_1\,x^{-2} + k_2\,\ln(x)\,x^{-2}, \quad x \neq 0.$$

Exemplo 63. *Considere a edo:*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{10}{4}y = 0, \qquad x \neq 0$$

Procuramos uma solução da forma $y(x) = x^r,\ x > 0$. O polinômio característico é:

$$r^2 - r + \frac{10}{4} = 0.$$

As raízes são:

$$r = \frac{1 \pm 3i}{2}.$$

Logo, uma solução geral é:

$$y(x) = |x|^{\frac{1}{2}}\left(k_1\,\cos\left(\frac{3}{2}\ln|x|\right) + k_2\,\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\ln|x|\right)\right), \quad x \neq 0$$

5.6 Edos não Homogêneas

Vamos, agora, voltar às equações não-homogêneas. Queremos resolver

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = r(x).$$

Já vimos que uma solução geral é dada por:

$$y(x) = y_p + y_h$$

e y_h é uma solução geral do problema homogêneo:

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

Veremos agora um método que consiste em obter uma solução particular para um problema não-homogêneo a partir da solução geral do homogêneo.

5.6.1 Método de Variação de Parâmetros

Seja

$$y_h(x) = k_1\, y_1(x) + k_2\, y_2(x)$$

uma solução geral do problema homogêneo:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Vamos tentar encontra uma solução particular do problema não-homogêneo da forma:

$$y_p(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x).$$

Observamos que esta é uma idéia similar à que utilizamos para obter uma segunda solução linearmente independente quando tínhamos raízes repetidas. Se queremos que y_p seja uma solução particular, devemos ter:

$$T(y_p) = r.$$

Como temos duas funções a determinar $c_1(x)$ e $c_2(x)$, estamos livres para impor mais uma condição adicional. Vamos impor uma condição que simplifique nossa resolução. Calculemos as derivadas de y_p

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x))' \\ &= c_1'(x)y_1(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_2(x)y_2'(x) \end{aligned}$$

Vamos simplificar esta expressão, impondo:

$$c_1'(x)\, y_1(x) + c_2'(x)\, y_2(x) = 0$$

Desse modo,
$$y_p'(x) = c_1(x)\, y_1'(x) + c_2(x)\, y_2'(x),$$
e
$$y_p''(x) = c_1'(x)\, y_1'(x) + c_1(x)\, y_1''(x) + c_2'(x)\, y_2'(x) + c_2(x)\, y_2''(x)$$
Lembrando que y_1 e y_2 são soluções do problema homogêneo, temos:
$$y_1'' = -p\, y_1' - q\, y_1 \qquad \text{e} \qquad y_2'' = -p\, y_2' - q\, y_2.$$
Portanto,
$$\begin{aligned} y_p'' &= c_1'\, y_1' + c_1\, (-p\, y_1' - q\, y_1) + c_2'\, y_2' + c_2\, (-p\, y_2' - q\, y_2) \\ &= (c_1'\, y_1' + c_2'\, y_2') - p\, (c_1\, y_1' + c_2\, y_2') - q\, (c_1\, y_1 + c_2\, y_2) \\ &= (c_1'\, y_1' + c_2'\, y_2') - p\, y_p' - q\, y_p. \end{aligned}$$
Como queremos $T(y_p) = r$:
$$y_p'' = r - p\, y_p' - q\, y_p,$$
devemos ter:
$$c_1'\, y_1' + c_2'\, y_2' = r.$$
Portanto, devemos resolver o sistema

$$c_1'(x)\, y_1(x) + c_2'(x)\, y_2(x) = 0 \qquad (5.10)$$
$$c_1'(x)\, y_1'(x) + c_2'(x)\, y_2'(x) = r \qquad (5.11)$$

Observe que o determinante da matriz associada a este sistema é:
$$W(y_1, y_2) \neq 0.$$
Logo, resolveremos o sistema e determinaremos expressões para as derivadas de c_1 e c_2; integrando estas expressões e obtemos os coeficientes da solução particular.

Exemplo 64. *Considere a edo:*
$$y'' - 3\, y' + 2\, y = e^x\, \operatorname{sen} x.$$
i) Vamos resolver o problema homogêneo:
$$y'' - 3\, y' + 2\, y = 0,$$

o polinômio associado a edo é: $r^2 - 3\,r + 2 = (r-1)(r-2)$; logo, a solução geral é:

$$y_h = k_1\,e^x + k_2\,e^{2x}.$$

ii) Vamos achar uma solução particular:

$$y_p = c_1(x)\,e^x + c_2(x)\,e^{2x}.$$

Temos:

$$y_p' = c_1'(x)\,e^x + c_1(x)\,e^x + c_2'(x)\,e^{2x} + 2\,c_2(x)\,e^{2x},$$

vamos impor que:

$$c_1'(x)\,e^x + c_2'(x)\,e^{2x} = 0$$

logo

$$\begin{aligned} y_p' &= c_1(x)\,e^x + 2\,c_2(x)\,e^{2x} \\ y_p'' &= c_1'(x)\,e^x + c_1(x)\,e^x + 2\,c_2'(x)\,e^{2x} + 4\,c_2(x)\,e^{2x}. \end{aligned}$$

Queremos que:

$$\begin{aligned} y_p'' &= e^x\,\operatorname{sen} x - y_p'' + 3\,y_p' - 2\,y_p \\ &= e^x\,\operatorname{sen} x - y_p'' + 3\,\big(c_1(x)\,e^x + 2\,c_2(x)\,e^{2x}\big) - 2\,\big(c_1(x)\,e^x + c_2(x\,)e^{2x}\big) \\ &= e^x\,\operatorname{sen} x + c_1(x)\,e^x + 4\,c_2(x)\,e^{2x} \end{aligned}$$

Logo, comparando os termos das duas expressões da derivada segunda de y_p, devemos ter:

$$c_1'(x)\,e^x + 2\,c_2'(x)\,e^{2x} = e^x\,\operatorname{sen} x$$

Portanto, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} c_1'(x)\,e^x + c_2'(x)\,e^{2x} = 0 \\ c_1'(x)\,e^x + 2c_2'(x)\,e^{2x} = e^x\,\operatorname{sen} x. \end{cases}$$

Isto é, multiplicando a primeira equação por -2 e somando as equações

$$\begin{aligned} -c_1'(x)e^x &= e^x\operatorname{sen} x \\ c_1'(x) &= -\operatorname{sen} x \\ c_2'(x) &= e^{-2x}\,(c_1'(x)\,e^x) = -e^{-x}\,\operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int \operatorname{sen} x\,dx = \cos x \\ c_2(x) &= -\int e^{-x}\,\operatorname{sen} x\,dx, \end{aligned}$$

e

$$\int e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x\, dx$$
$$= -e^{-x} \cos x - e^{-x} \operatorname{sen} x - \int e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx$$
$$= \frac{1}{2} e^{-x} (\operatorname{sen} x + \cos x)\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x)\, e^x + c_2(x)\, e^{2x} \\ &= e^x \cos x - \frac{1}{2} e^{-x} (\operatorname{sen} x + \cos x)\; e^{2x} \\ &= \frac{e^x}{2} (\cos x - \operatorname{sen} x) \end{aligned}$$

é uma solução particular de $y'' - 3\,y' + 2\,y = e^x \operatorname{sen} x$, e uma solução geral é dada por:

$$y(x) = y_p(x) + k_1\, e^x + k_2\, e^{2x} = \frac{e^x}{2} (\cos x - \operatorname{sen} x) + k_1\, e^x + k_2\, e^{2x}$$

Exemplo 65. *Considere a edo:*

$$y'' + y = \sec x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

i) Vamos resolver o problema homogêneo:

$$y'' + y = 0,$$

o polinômio associado a edo de Euler é: $r^2 + 1$; logo, a solução geral é:

$$y_h = k_1 \cos x + k_2 \operatorname{sen} x.$$

ii) Vamos achar uma solução particular:

$$y_p = c_1(x) \cos x + c_2(x) \operatorname{sen} x.$$

Como antes, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} c_1'(x) \operatorname{sen} x + c_2'(x) \cos x = 0 \\ c_1'(x) \cos x - c_2'(x) \operatorname{sen} x = \sec x. \end{cases}$$

Por outro lado, $W(y_1, y_2)(x) = 1$.

$$
\begin{aligned}
c_1'(x) &= 1 \\
c_2'(x) &= \operatorname{tg} x.
\end{aligned}
$$

Portanto:

$$
\begin{aligned}
c_1(x) &= \int dx = x \\
c_2(x) &= -\int \tan x \, dx = \ln(\cos x).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= c_1(x)\, \cos x + c_2(x)\, \operatorname{sen} x \\
&= x\, \operatorname{sen} x + \cos x\, \ln(\cos x)
\end{aligned}
$$

é uma solução particular da edo, e uma solução geral é dada por:

$$
y(x) = k_1\, \cos x + k_2\, \operatorname{sen} x + x\, \operatorname{sen} x + \cos x\, \ln(\cos x).
$$

Exemplo 66. *Considere a edo:*

$$
x^2\, y'' - 3\, x\, y' + 4\, y = x^4, \quad x > 0.
$$

i) Vamos resolver o problema homogêneo:

$$
x^2\, y'' - 3\, x\, y' + 4\, y = 0,
$$

o polinômio associado a edo de Euler é: $r^2 - 4\, r + 4 = (r-2)^2$; logo, a solução geral é:

$$
y_h = k_1\, x^2 + k_2\, \ln(x)\, x^2.
$$

ii) Vamos achar uma solução particular:

$$
y_p = c_1(x)\, x^2 + c_2(x)\, \ln(x)\, x^2.
$$

Primeramente escrevemos a edo da seguinte forma:

$$
y'' - \frac{3}{x}\, y' + \frac{4}{x^2}\, y = x^2.
$$

Como antes, devemos resolver o sistema:

$$
\begin{cases}
c_1'(x)\, x^2 + c_2'(x)\, \ln(x)\, x^2 = 0 \\
c_1'(x)\, 2\, x + c_2'(x)\, x\, (2 + \ln(x)) = x^2.
\end{cases}
$$

Por outro lado, $W(y_1, y_2)(x) = x^3$.

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= -x \, \ln(x) \\ c_2'(x) &= x. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= -\int x \, \ln(x) \, dx = \frac{x^2 - x^2 \, \ln(x)}{2} \\ c_2(x) &= \int x \, dx = \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_1(x) \, x^2 + c_2(x) \, x^2 \, \ln(x) \\ &= \frac{x^4}{2} \end{aligned}$$

é uma solução particular da edo, e uma solução geral é dada por:

$$y(x) = k_1 \, x^2 + k_2 \, \ln(x) \, x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

5.7 Método dos Coeficientes Indeterminados

Vamos agora estudar um método de obtenção de uma solução particular da equação não-homogênea que é mais simples do que o de variação de parâmetros porém de aplicação mais restrita. Trata-se do método dos coeficientes indeterminados.
Estamos interessados em resolver

$$y'' + a_1 \, y' + a_0 \, y = r(x).$$

Tentaremos encontrar uma solução particular dando um palpite quanto à sua forma baseados na expressão da função $r = r(x)$.

Exemplo 67. *Considere a edo:*

$$y'' - y' + 5 \, y = 3.$$

Sabemos resolver a equação homogênea associada, mas não vale a pena empregar o método de variação de parâmetros pois é bastante simples encontrarmos uma solução particular constante.Visto que sendo constante, suas derivadas se anulam, precisamos escolhê-la de modo que ao multiplicá-la por 5 obtenhamos 3. Isto é,

$$y_p(x) = \frac{3}{5}.$$

Exemplo 68. *Considere a edo:*

$$y'' - 3\,y' - 4\,y = 3\,e^{2x}.$$

Podemos tentar uma solução particular da forma $y_p(x) = A\,e^{2x}$, uma vez que as derivadas de uma função deste tipo seriam múltiplos de e^{2x}. Para que y_p seja solução, devemos ter

$$\begin{aligned} y_p'' - 3\,y_p' - 4\,y_p &= 4\,A\,e^{2x} - 6\,A\,e^{2x} - 4\,A\,e^{2x} = 3\,e^{2x} \\ -6\,A &= 3 \\ y_p(x) &= -\frac{e^{2x}}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 69. *Considere a edo:*

$$y'' - 3\,y' - 4\,y = 2\,\operatorname{sen} x.$$

Podemos tentar uma solução particular da forma $y_p(x) = A\,\operatorname{sen} x$, uma vez que combinações lineares das derivadas de uma função deste tipo podem resultar em um múltiplo de $\operatorname{sen} x$. Para que y_p seja solução, devemos ter:

$$\begin{aligned} &y_p'' - 3\,y_p' - 4\,y_p = -A\,\operatorname{sen} x - 3\,A\,\cos x - 4\,\operatorname{sen} x = 2\,\operatorname{sen} x \\ &(2 + 5\,A)\,\operatorname{sen} x + 3\,A\,\cos x = 0. \end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são funções li, tal equação se anulará para todo x, somente se os coeficientes forem nulos:

$$\begin{aligned} 2 + 5\,A &= 0 \\ 3\,A &= 0; \end{aligned}$$

logo, obtemos $y_p(x) = 0$ e tal solução não nos interessa, vamos tentar:

$$y_p(x) = A\,\operatorname{sen} x + B\,\cos x;$$

então,

$$\begin{aligned} &y_p'' - 3\,y_p' - 4\,y_p \\ &= (-A\,\operatorname{sen} x - B\,\cos x) - 3\,(A\,\cos x - B\,\operatorname{sen} x) - 4\,(A\,\operatorname{sen} x + B\,\cos x) \\ &= 2\,\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

de onde obtemos: $(2+5\,A-3\,B)\,\operatorname{sen} x+(3\,A+5\,B)\,\cos x=0$, e:

$$\begin{cases} 5\,A-3\,B & =-2 \\ 3\,A+5\,B & =0; \end{cases}$$

logo, $y_p(x)=-\dfrac{5}{17}\,\operatorname{sen} x+\dfrac{3}{17}\,\cos x$.

Exemplo 70. *Considere a edo:*

$$y''-3\,y'-4\,y=-8\,e^x\,\cos 2x.$$

Podemos tentar uma solução particular da forma:

$$y_p(x)=A\,e^x\,\cos 2\,x+B\,e^x\,\operatorname{sen} 2x,$$

uma vez que combinações lineares das derivadas de uma função deste tipo podem resultar em um múltiplo de $e^x\,\cos 2\,x$. Vamos calcular as derivadas de y_p:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (A+2\,B)\,e^x\cos 2x+(B-2\,A)\,e^x\operatorname{sen} 2x \\ y_p''(x) &= (A+2\,B+2\,B-4\,A)\,e^x\cos 2x+(B-2\,A-2\,A-4\,B)\,e^x\operatorname{sen} 2x \\ &= (-3\,A+4\,B)\,e^x\cos 2x+(-3\,B-4\,A)\,e^x\,\operatorname{sen} 2x. \end{aligned}$$

Para que y_p seja solução, devemos ter:

$$\begin{aligned} & y_p''-3\,y_p'-4\,y_p \\ & =(-10\,A-2\,B)\,e^x\,\cos 2x+(2\,A-10\,B)e^x\,\operatorname{sen} 2x \\ & =-8\,e^x\,\cos 2x; \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} 10\,A+2\,B &= 8 \\ 2\,A-10\,B &= 0. \end{aligned}$$

de onde obtemos $y_p(x)=\dfrac{10}{13}\,e^x\,\cos 2x+\dfrac{2}{13}\,e^x\,\operatorname{sen} 2x$

Vejamos agora um exemplo em que a função $r(x)$ é dada por uma soma

Exemplo 71. *Considere a edo:*

$$y''-3\,y'-4\,y=3\,e^{2x}+2\,\operatorname{sen} x-8\,e^x\cos 2x.$$

Observemos que se conhecermos soluções dos problemas

$$
\begin{aligned}
y_1'' - 3\,y_1' - 4\,y_1 &= 3\,e^{2x} \\
y_2'' - 3\,y_2' - 4\,y_2 &= 2\ \operatorname{sen} x \\
y_3'' - 3\,y_3' - 4\,y_3 &= -8\,e^{x}\cos 2x;
\end{aligned}
$$

então, temos uma solução particular da edo dada por

$$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_3(x).$$

Obtivemos nos exemplos anteriores

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= -\frac{1}{2}\,e^{2x} \\
y_2(x) &= -\frac{5}{17}\ \operatorname{sen} x + \frac{3}{17}\ \cos x \\
y_3(x) &= \frac{10}{13}\,e^{x}\ \cos 2x + \frac{2}{13}\,e^{x}\ \operatorname{sen} 2x.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}\,e^{2x} - \frac{5}{17}\ \operatorname{sen} x + \frac{3}{17}\ \cos x + \frac{10}{13}\,e^{x}\ \cos 2x + \frac{2}{13}\,e^{x}\ \operatorname{sen} 2x$$

é uma solução particular da edo.

Vemos nestes exemplos que para determinarmos uma solução particular, basta determinar certas constantes. Vamos tentar, a seguir, resumir alguns casos em que é simples aplicar o método dos coeficientes indeterminados. Antes de prosseguir, vejamos mais um exemplo.

Exemplo 72. *Consider a edo:*

$$y'' + 4\,y = 3\ \cos 2x.$$

Podemos tentar uma solução particular da forma:

$$y_p(x) = A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x,$$

uma vez que combinações lineares das derivadas de uma função deste tipo podem resultar em um múltiplo de $\cos 2x$. Para que y_p seja solução, devemos ter

$$y_p'' + 4\,y_p = (-4\,A + 4\,A)\ \cos 2x + (-4\,B + 4\,B)\ \operatorname{sen} 2x = 3\cos 2x$$

e vemos que não há escolhas de A e B que nos dêem uma solução particular na forma $y_p(x) = A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x$. Na verdade a substituição acima nos mostrou que soluções deste tipo na verdade são soluções do problema homogêneo associado o que pode ser verificado resolvendo a equação característica. De fato, a equação característica da edo é:

$$\begin{aligned} r^2 + 4 &= 0 \\ r_1 &= 2i \quad \text{e} \\ r_2 &= 2i \\ y(x) &= k_1\, \cos 2x + k_2\, \operatorname{sen} 2x. \end{aligned}$$

Qual é a diferença deste exemplo com os demais. Por que este problema não ocorreu antes? Como generalizar a aplicação do método dos coeficientes indeterminados, excluindo casos deste tipo?

5.7.1 Determinação dos Coeficientes

Queremos determinar uma solução particular da edo:

$$y'' + a_1\, y' + a_0\, y = r(x).$$

Vamos resumir a aplicação do método dos Coeficientes Indeterminados quando $r(x)$ é uma combinação linear de produtos (finitos) de funções do tipo:

1. Um polinômio $P_n(x)$, de grau n.

2. Uma função exponencial e^{kx}.

3. Combinações de $\cos kx$ ou $\operatorname{sen} kx$.

Vimos, através de um exemplo, que teríamos problemas se $r(x)$ contivesse termos tais que eles ou algumas de suas derivadas fosse linearmente dependente com uma base do espaço solução da equação homogênea associada. No que segue, veremos como tratar também estes casos.

Regra 1: Se $r(x) = P_n(x)$ é o polinômio de grau n; então:

$$y_p(x) = x^h(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0),$$

onde, h é a ordem da menor derivada presente na edo.

Exemplo 73. *Considere a edo:*

$$y'' - 4\, y' = x^2 + x.$$

Vamos resolver o problema homogêneo associado:

$$\begin{aligned}
&y'' - 4\,y' = 0\\
&r^2 - 4\,r = 0, \quad \text{eq. carac.}\\
&r_1 = 0, \quad r_2 = 4.
\end{aligned}$$

Então, $y_h(x) = k_1 \, + k_2\, e^{4x}$.
Como $r(x) = x^2 + x$, estamos nas condições da Regra 1. Como $h = 1$ e vamos tentar uma solução particular da forma:

$$y_p(x) = x(A\,x^2 + B\,x + C).$$

Derivando:

$$\begin{aligned}
&y_p'(x) = 3\,A\,x^2 + 2\,B\,x + C\\
&y_p(x)'' = 6\,A\,x + 2\,B.
\end{aligned}$$

Para que y_p seja solução da edo, devemos ter:

$$y_p'' - 4\,y_p' = -12\,A\,x^2 + (6\,A - 8\,B)\;x + (2\,B - 4\,C) = x^2 + x.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
-\,12\,A &= 1\\
6\,A - 8\,B &= 1\\
2\,B - 4\,C &= 0,
\end{aligned}$$

de onde obtemos: $A = -\dfrac{1}{12}$, $B = -\dfrac{3}{16}$ e $C = -\dfrac{3}{32}$; então:

$$y_p(x) = -\frac{x^3}{12} - \frac{3\,x^2}{16} - \frac{3\,x}{32}.$$

A edo tem uma solução geral:

$$y(x) = k_1 \, + k_2\, e^{4x} + -\frac{x^3}{12} - \frac{3\,x^2}{16} - \frac{3\,x}{32}.$$

Regra 2: Se $r(x) = e^{kx}$; então:

$$y_p(x) = A\,x^h\,e^{kx},$$

onde, h é o grau de multiplicidade de k como raiz da equação característica da edo.

Exemplo 74. *Considere a edo:*

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 2\,e^{2x}.$$

Vamos resolver o problema homogêneo associado:

$$\begin{aligned}
&y'' - 3\,y' + 2\,y = 0\\
&r^2 - 3\,r + 2 = 0, \quad \text{eq. carac.}\\
&r_1 = 1, \quad r_2 = 2.
\end{aligned}$$

Então, $y_h(x) = k_1\,e^x + k_2\,e^{2x}$.
Como $r(x) = 2\,e^{2x}$ e $k = 2$ é raiz de multiplicidade 1 da equação característica, estamos nas condições da Regra 2. Como $h = 1$ e vamos tentar uma solução particular da forma:

$$y_p(x) = A\,x\,e^{2x}.$$

Então, derivando:

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= \left(e^{2x} + 2\,x\,e^{2x}\right)\,A\\
y_p(x)'' &= \left(4\,e^{2x} + 4\,x\,e^{2x}\right)\,A.
\end{aligned}$$

Para que y_p seja solução da edo, devemos ter:

$$y_p'' - 3\,y_p' + 2\,y_p = A\,e^{2x} = 2\,e^{2x}.$$

Logo: $A = 2$, então:

$$y_p(x) = 2\,x\,e^{2x}.$$

A edo tem uma solução geral:

$$y(x) = k_1\;e^x + k_2\,e^{2x} + 2\,x\,e^{2x}.$$

Regra 3: Se $r = r(x)$ é da forma $\operatorname{sen} kx$ ou $\cos kx$; então:

$$y_p(x) = x^h\left(A\,\cos kx + B\,\operatorname{sen} kx\right),$$

onde, h é o grau de multiplicidade de $i\,k$ como raiz da equação característica da edo.

Exemplo 75. *Considere a edo:*

$$y'' + y = \cos x.$$

Vamos resolver o problema homogêneo associado:

$$\begin{aligned}
&y'' + y = 0\\
&r^2 + 1 = 0, \quad \text{eq. carac.}\\
&r_1 = i, \quad r_2 = -i.
\end{aligned}$$

Então, $y_h(x) = k_1 \cos x + k_2 \operatorname{sen} x$.
Como $i\,k = i$ é raiz de multiplicidade 1 da equação característica, estamos nas condições da Regra 3. Como $h = 1$ e vamos tentar uma solução particular da forma:

$$y_p(x) = x\ (A \cos x + B \operatorname{sen} x).$$

Então, derivando:

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= \cos x\ (A + B\,x) + \operatorname{sen} x\ (B - A\,x)\\
y_p(x)'' &= -\operatorname{sen} x\ (2\,A + B\,x) + \cos x\ (2\,B - A\,x)\,.
\end{aligned}$$

Para que y_p seja solução da edo, devemos ter:

$$y_p'' + y_p = -2\,A \operatorname{sen} x + 2\,B \cos x = \cos x.$$

Logo: $A = 0$ e $B = \dfrac{1}{2}$, então:

$$y_p(x) = \frac{x \operatorname{sen} x}{2}.$$

A edo tem uma solução geral:

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \operatorname{sen} x + \frac{x \operatorname{sen} x}{2}$$

5.8 Exercícios

1. Determine a solução geral das edo's:

a) $y'' = a^2 y$.

b) $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$.

c) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} 2x$.

d) $y'' = \dfrac{1}{2y'}$.

e) $\dfrac{d^2y}{dy^2} - 4 = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$.

f) $xy'' = y'$.

g) $xy'' + y' = 4x$.

h) $yy'' = 3(y')^2$.

i) $y^3 y'' = 1$.

j) $yy'' + (y')^2 = 0$.

k) $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.

l) $y'' = \dfrac{1}{a}\sqrt{1 + (y')^2}$.

2. Encontre as soluções particulares das equações que satisfazem às condições iniciais $y(0) = -1$ e $y'(0) = 0$.

a) $y'' = e^{2x} + \cos 2x$

b) $xy'' - y' = x^2 e^x$

3. Resolva os seguintes problemas de valor inicial

a) $\begin{cases} y'y'' - x = 0 \\ y(1) = 2, \\ y'(1) = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'y'' = 2 \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy'' + y' = 1, x > 0 \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} xy'' - y' = x^2 e^x, \\ y(1) = 0, \quad y'(1) = 0 \end{cases}$

e) $y'y'' = 2, \quad y(0) = 1;\ y'(0) = 3$

f) $\begin{cases} y'y'' = 4x, \\ y(1) = 5, \\ y'(1) = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y'' + 4y' = 5y = 35e^{-4x}, \\ y(0) = -3, \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \omega t, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

4. Encontre um segunda solução linearmente independente da solução dada:

a) $xy'' - y' + 4x^3 y = 0, \quad x > 0, \quad y_1(x) = \operatorname{sen} x^2$

b) $(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1, \quad y_1(x) = e^x$

c) $(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0, \quad y_1(x) = x+1$

d) $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0, \quad y_1(x) = e^{x^2}$

e) $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right) y = 0, \quad x > 0, \quad y_1(x) = x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x$

5. Determine a solução geral de:

a) $y'' + 5y' + 4y = 0$

b) $y'' - 3y + y = 0$

c) $y'' + y' + y = 0$

d) $y'' + 2y' + 3y = 0$

e) $y'' - 6y' + 9y = 0$

f) $y'' - y = 0$

g) $y'' + 4y = 0$

h) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$, $x > 0$

i) $x^2y'' + 2xy' + 2y = 0$, $x > 0$

j) $x^2y'' + 5xy' - 5y = 0$, $x > 0$

6. Encontre uma equação diferencial linear com coeficientes constantes cuja solução geral seja:

a) $k_1e^{-x} + k_2e^{2x}$

b) $(k_1 + k_2x)e^{-3x}$

c) $k_1e^x \operatorname{sen} 2x + k_2e^x \cos 2x$

7. Três soluções de uma certa equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea são: $\phi_1(x) = x^2$, $\phi_2(x) = x^2 + e^{2x}$, $\phi_3(x) = 1 + x^2 + 2e^{2x}$. Determine a solução geral dessa equação.

8. Três soluções de uma certa equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea $T(y) = g(x)$ são: $\phi_1(x) = 3e^x + e^{x^2}$, $\phi_2(x) = 7e^x + e^{x^2}$, $\phi_3(x) = 5e^x + e^{-x^3} + e^{x^2}$. Determine a solução do problema de valor inicial $T(y) = g(x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

9. Se o Wronskiano de $f(x)$ e $g(x)$ for $3e^{4x}$ e se $f(x) = e^{2x}$, ache $g(x)$.

10. Se a, b e c forem constantes positivas, mostre que todas as soluções da equação $ay'' + by' + cy = 0$ se aproximam de zero quando $x \to \infty$

11. Uma equação da forma

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \qquad x > 0$$

onde α e β são constantes reais, é chamada de equação de Euler. Mostre que a mudança de variável $x = e^z$ transforma uma equação de Euler em uma equação de coeficientes constantes.

12. (i) Verifique que $y_1(x) = 1$ e $y_2(x) = \sqrt{x}$ são soluções da equação diferencial $yy'' + (y')^2 = 0$ para $x > 0$. A combinação linear $k_1 + k_2\sqrt{x}$ também é solução desta equação? Comente sua resposta.

    (ii) É possível que $y(x) = \operatorname{sen} x^2$ seja uma solução da equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, com $p(x)$ e $q(x)$ funções contínuas em um intervalo que contenha $x = 0$? Explique sua resposta.

13. Sejam $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, uma equação diferencial linear de segunda ordem homogênea, onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas em um intervalo aberto I, e $y_1(x)$ e $y_2(x)$ duas soluções.

    (i) Prove que se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forem nulas em um mesmo ponto de I, então não podem constituir um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo.

    (ii) Prove que se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tiverem máximos ou mínimos em um mesmo ponto de I, então não podem constituir um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo.

    (iii) Prove que se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tiverem um ponto de inflexão em comum no ponto $x_0 \in I$ e $p(x_0) \neq 0$ ou $q(x_0) \neq 0$, então $y_1(x)$ e $y_2(x)$ não podem constituir um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo.

5.9 Aplicações

5.9.1 Sistema massa-mola

Já vimos, usando a Lei de Hooke, que uma equação que descreve o movimento de um corpo preso a uma mola é dada por:

$$m\,x'' = m\,a = F = -k\,x, \quad k > 0.$$

Se considerarmos a existência de uma força de amortecimento ou resitência agindo contra o movimento do corpo proporcional à velocidade, temos:

$$m\,x'' = m\,a = F = -k\,x - \gamma\,x', \quad k, \gamma > 0.$$

Podemos ainda ter a atuação de uma força externa $F(t)$. Neste caso, temos

$$m\,x'' = m\,a = F = -k\,x - \gamma\,x' + F(t), \quad k, \gamma > 0.$$

Vemos então que a equação de movimento da massa é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$m\,x'' + \gamma\,x' + k\,x = F(t), \quad m, k, \gamma > 0.$$

Vamos analisar este movimento de acordo com os tipos de força que estejam atuando. Na ausência de forças externas e de amortecimento, temos as

5.9.2 Oscilações livres não-amortecidas

$$m\,x'' + k\,x = 0, \quad m, k > 0.$$

A equação característica é:

$$\begin{aligned} r^2 + \frac{k}{m} &= 0 \\ r &= \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \pm i\,\omega_0, \end{aligned}$$

e uma solução geral é dada por:

$$x(t) = k_1\,\cos\omega_0 t + k_2\,\operatorname{sen}\omega_0 t.$$

Para analisar o movimento descrito por esta solução, consideremos constantes $A > 0$ e $\delta \in [0, 2\pi]$ tais que

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \\ \cos\delta &= \frac{k_1}{A}, \\ \operatorname{sen}\delta &= \frac{k_2}{A}. \end{aligned}$$

Observemos que podemos reescrever

$$\begin{aligned} x(t) &= A\,\cos\delta\cos\omega_0 t + A\,\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\omega_0 t \\ &= A\cos(-\delta)\cos\omega_0 t - A\operatorname{sen}(-\delta)\operatorname{sen}\omega_0 t \\ &= A\,\cos(\omega_0 t - \delta) \end{aligned}$$

Esta expressão nos diz que a massa oscila em torno de sua posição de equilíbrio $x = 0$ com amplitude constante igual a A. Tal fato é devido à ausência de amortecimento. Este movimento é chamado de Movimento Harmônico Simples.

Na ausência somente de forças externas, temos as

5.9.3 Oscilações livres amortecidas

$$m\,x'' + \gamma\,y' + k\,x = 0, \quad m, k, \gamma > 0.$$

A equação característica é:

$$\begin{aligned} r^2 + \frac{\gamma}{m}r + \frac{k}{m} &= 0, \\ r &= \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m} \end{aligned}$$

Sela $\Delta = \gamma^2 - 4\,m\,k > 0$, deveremos considerar 3 casos:

1. Oscilações livres superamortecidas: $\Delta > 0$.

   Como γ é relativamente grande, estamos lidando com uma forte resistência comparada a uma mola relativamente fraca ou a uma massa muito pequena. Uma solução geral é da forma:

   $$x(t) = k_1\,e^{r_1 t} + k_2\,e^{r_2 t},$$

   com

   $$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-\gamma + \sqrt{\Delta}}{2m}, \\ r_2 & \frac{-\gamma - \sqrt{\Delta}}{2m}, \\ \Delta &> 0, \\ r_1,\, r_2 &< 0. \end{aligned}$$

   Portanto, se $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ quando $t \to \infty$. Nos exercícios, veremos que isto ocorre sem que o corpo oscile em torno de sua posição de equlíbrio $x = 0$.

2. Oscilações livres criticamente amortecidas: $\Delta = 0$

   Neste caso, as raízes são repetidas:
$$\begin{aligned} & r_1 = r_2 = -\frac{\gamma}{2m}, \\ & m, \gamma > 0, \\ & r_1 < 0 \end{aligned}$$
   e uma solução geral é da forma
$$x(t) = \big(k_1 + k_2\, t\big)\, e^{-\frac{\gamma}{2m}t}.$$
   Como $e^{-\frac{\gamma}{2m}t} > 0$ e $k_1 + k_2\, t$ intersecta o eixo x no máximo uma vez, vemos que o corpo passa por sua posição de equlíbrio $x = 0$ no máximo uma vez. Além disso, se $x \to 0$ quando $t \to \infty$. Ainda que o comportamento do movimento, neste caso, se pareça com o do superamortecido, vemos que qualquer pequeno decréscimo na constante γ nos leva ao próximo caso.

3. Oscilações livres subamortecidas: $\Delta < 0$

   A equação característica tem raízes complexas, uma solução geral é dada por:
$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\,\big(k_1\, \cos\omega_1 t + k_2\, \operatorname{sen}\omega_1 t\big)$$
   com
$$\omega_1 = \frac{\sqrt{|\gamma^2 - 4mk|}}{2m}.$$
   Para analisar o movimento descrito por esta solução, consideremos constantes $A > 0$ e $\delta \in [0, 2\pi]$ tais que:
$$\begin{aligned} A &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \\ \cos\delta &= \frac{k_1}{A}, \\ \operatorname{sen}\delta &= \frac{k_2}{A} \end{aligned}$$
   Observemos que podemos reescrever $x(t)$ como:
$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\,\big(A\, \cos\delta\cos\omega_1 t + A\, \operatorname{sen}\delta\, \operatorname{sen}\omega_1 t\big) \\ &= A\, e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\cos(\omega_1 t - \delta). \end{aligned}$$
   Esta expressão nos diz que a massa oscila em torno de sua posição de equilíbrio $x = 0$ ficando confinada entre as curvas $\pm A e^{-\frac{\gamma}{2m}t}$. A "amplitude" da oscilação decresce com o tempo.

Vejamos agora casos em que há a atuação de uma força externa.

5.9.4 Oscilações Forçadas não-amortecidas

Vamos considerar uma força externa da forma $F(t) = F_0 \cos \omega t$ e o caso em que não há amortecimento:

$$m\,x'' + k\,x = F_0 \cos \omega t, \quad m, k > 0.$$

A equação característica é:

$$\begin{aligned} r^2 + \frac{k}{m} &= 0, \\ r = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} &= \pm i\omega_0 \end{aligned}$$

e uma solução geral da equação homogênea associada é da forma

$$x_h(t) = k_1 \operatorname{sen} \omega_0 t + k_2 \cos \omega_0 t.$$

ω_0 é chamada de frequência natural (circular) do sistema massa-mola. Vamos, inicialmente, analisar o caso onde $\omega \neq \omega_0$:
Neste caso, estamos nas consdições da Regra 1 do método dos coeficientes indeterminados (a forca externa F e suas derivadas são l.i com bases do espaço solução) e vamos procurar uma solução particular da forma:

$$x_p = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t.$$

Logo:

$$\begin{aligned} m\,x'' + k\,x &= m\left(-A\,\omega^2 \cos \omega t - B\,\omega^2 \operatorname{sen} \omega t\right) + k\left(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t\right) \\ &= A\left(k - m\,\omega^2\right) \cos \omega t + B\left(k - m\,\omega^2\right) \operatorname{sen} \omega t \\ &= F_0 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ A &= \frac{F_0}{k - m\,\omega^2} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2} \\ &= \frac{F_0}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)} \end{aligned}$$

Portanto, uma solução geral do problema não-homogêneo é dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ &= k_1 \operatorname{sen} \omega_0 t + k_2 \cos \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \end{aligned}$$

Analisemos o caso em que ω está muito próximo de ω_0. Batimentos: $\omega \approx \omega_0$. Vamos considerar a solução do seguinte PVI:

$$\begin{cases} mx'' + kx = F_0 \cos \omega t, \quad k, m > 0 \quad \omega \neq \omega_0 \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

Vimos que uma solução geral é dada por:

$$x(t) = k_1 \, \text{sen}\, \omega_0 t + k_2 \, \cos \omega_0 t + \frac{F_0}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)}. \cos \omega t$$

Impondo as condições iniciais, temos:

$$\begin{cases} 0 = x(0) = k_2 + \dfrac{F_0}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)} \\ 0 = x'(0) = k_1 \omega_0, \end{cases}$$

logo,

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t \\ &= \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \big(\cos \omega t - \cos \omega_0 t \big). \end{aligned}$$

Lembremos que:

$$\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2\, senA \ \text{sen}\, B$$

e consideremos:

$$A = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t \qquad \textbf{e} \qquad B = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t$$

Podemos reescrever $x(t)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)} \big(\cos \omega t - \cos \omega_0 t \big) \\ &= \big(\frac{2\,F_0}{m\,(\omega_0^2 - \omega^2)} \big) \ \text{sen}\, \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\,t) \ \text{sen}\, \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)\,t. \end{aligned}$$

Como $\omega \approx \omega_0$ o termo $\text{sen}\, \dfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\,t$ oscila muito mais lentamente do que o termo $\cos \dfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\,t$. Além disso, podemos interpretar $x(t)$ como tendo uma oscilação rápida com uma amplitude periódica que varia lentamente. Nestas circunstâncias temos o fenômeno de **Batimentos**.
Não vamos analisar o caso em que $\omega = \omega_0$. Quando completarmos o estudo de coeficientes indeterminados, voltaremos a ele. De qualquer modo, a solução acima nos dá uma indicação de que quando ω se aproxima de ω_0 a amplitude da oscilação cresce.

5.9.5 Oscilações Forçadas amortecidas

Vamos considerar uma força externa da forma $F(t) = F_0 \cos\omega t$ e o caso em que **há amortecimento**.

$$m\,x'' + \gamma\,k' + k\,x = F_0\,\cos\omega t, \quad m, k, \gamma > 0.$$

Vimos que uma solução geral da equação homogênea associada:

1. se $\gamma^2 - 4mk > 0$, é da forma
$$x_h(t) = k_1\,e^{r_1 t} + k_2\,e^{r_2 t}, \quad r_1, r_2 < 0$$

2. se $\gamma^2 - 4mk = 0$, é da forma:
$$\mathbf{x_h(t) = (k_1 + k_2\,t)\,e^{-\frac{\gamma}{2m}t}}$$

3. se $\gamma^2 - 4mk < 0$, é da forma:
$$x_h(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\,(k_1\,\cos\omega_1 t + k_2\,\operatorname{sen}\omega_1 t) \text{ com } \omega_1 = \frac{\sqrt{|\gamma^2 - 4mk|}}{2m}.$$

Vemos que $\mathbf{x_h(t)} \to \mathbf{0}$ quando $t \to \infty$. Por isso, x_h é chamada de solução transiente, isto é desaparece com o passar do tempo. Vamos utilizar o método dos coeficientes indeterminados. Procuraremos uma solução particular da forma $x_p = A\,\cos\omega t + B\,\operatorname{sen}\omega t$. Logo,

$$\begin{aligned} m\,x'' &+ \gamma\,x' + k\,x = \\ &= m\,\big(-A\,\omega^2\,\cos\omega t - B\,\omega^2\,\operatorname{sen}\omega t\big) + \gamma\,\big(-A\,\omega\,\operatorname{sen}\omega t + B\,\omega\,\cos\omega t\big) \\ &+ k\,\big(A\,\cos\omega t + B\,\operatorname{sen}\omega t\big) \\ &= \big(A\,(k - m\,\omega^2) + B\gamma\omega\big)\,\cos\omega t + \big(B\,(k - m\omega^2) - A\gamma\omega\big)\,\operatorname{sen}\omega t \\ &= F_0\,\cos\omega t. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{cases} A\,(k - m\omega^2) + B\,\gamma\omega = F_0 \\ B\,(k - m\omega^2) - A\,\gamma\omega = 0 \end{cases}$$

Isto é,

$$A = \frac{(k - m\omega^2)F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \qquad \text{e} \qquad B = \frac{\gamma\omega F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}.$$

como antes, tomando constantes $\rho > 0$ e $\delta \in [0, 2\pi]$ tais que:

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{A^2 + B^2}, \\
\cos\delta &= \frac{A}{\rho}, \\
\operatorname{sen}\delta &= \frac{B}{\rho},
\end{aligned}$$

podemos reescrever a solução particular:

$$\begin{aligned}
x_p(t) &= A\,\cos\omega t + B\,\operatorname{sen}\omega t & = \rho\cos(\omega t - \delta) \\
&= \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\,\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}\,\cos(\omega t - \delta).
\end{aligned}$$

Portanto, uma solução geral do problema não-homogêneo é dada por:

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\
&= x_h(t) + \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\,\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}\,\cos(\omega t - \delta).
\end{aligned}$$

A função $\dfrac{F_0}{\sqrt{(k - m\,\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}\,\cos(\omega t - \delta)$ é chamada de solução periódica estacionária. Ela é a solução que "permanece" após o desaparecimento da solução transiente.
Vejamos que as equações lineares homogêneas de coeficientes constantes descrevendo outros problemas interessantes..
Analisemos o movimento de um corpo que é atraído por uma força proporcional à distância do corpo a um certo ponto.

Exemplo 76. *Uma massa m move-se ao longo do eixo x (no setido positivo) e é atraída para a origem por uma força proporcional à distância da massa à origem. Achar a equação do movimento.*

Então:

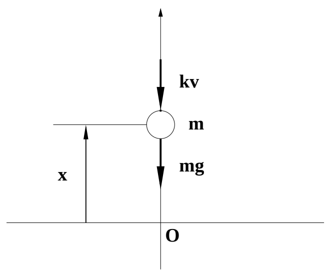
$$m\,x'' = m\,a = F = -k\,x, \quad k > 0,$$

pois a força se opõe ao movimento. Logo, temos exatamente a equação do movimento harmônico simples e uma solução geral é da forma

$$x(t) = k_1\,\operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}t + k_2\,\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Agora, analisemos o movimento de um corpo lançado pra cima sujeito a resistência do ar.

Exemplo 77. *Uma massa m é lançada verticalmente cima com velocidade inicial v_0. Achar a função que descreve o movimento do corpo.*



Tomemos a origem no ponto de lançamento e orientemos o eixo com sentido positivo para cima. Denotemos x a distância da massa em relação à origem O no instante t. Temos:

$$m\,x'' = m\,a = F = -m\,g - k\,v = -m\,g - k\,x'.$$

Resolvendo a equação característica:

$$r^2 + \frac{k}{m}r = 0,$$

obtemos uma solução geral da equação homogênea associada, na forma:

$$x_h(t) = k_1 + k_2\,e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Não podemos utilizar o método de coeficientes indeterminados pois as funções constantes são múltiplas de um dos elementos da base do espaço solução. Vamos usar variação dos parâmetros:

$$x_p(t) = c_1(t) + c_2(t)\,e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= c_1' + c_2' e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{k}{m}c_2 e^{-\frac{k}{m}t} \\ c_1' + c_2' e^{-\frac{k}{m}t} &= 0 \\ x_p''(t) &= -\frac{k}{m}c_2' e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k^2}{m^2}c_2 e^{-\frac{k}{m}t}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação diferencial

$$m\,x_p'' + k\,x_p' = -k\,c_2' e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k^2}{m}\,c_2\,e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{k^2}{m}\,c_2\,e^{-\frac{k}{m}t} = -m\,g$$

logo,

$$
\begin{aligned}
&c_1' + c_2'\, e^{-\frac{k}{m}t} = 0\\
&-k\, c_2'\, e^{-\frac{k}{m}t} = -m\, g\\
&k\, c_1' = -m\, g\\
&c_1 = -\frac{mg}{k}\, t\\
&c_2 = \frac{m^2 g}{k^2}\, e^{\frac{k}{m}t}.
\end{aligned}
$$

Uma solução geral da equação não-homogênea é da forma

$$
x(t) = x_h(t) + x_p(t) = x_h(t) - \frac{mg}{k}\, t + \frac{m^2 g}{k^2} = k_1 + k_2\, e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}\, t.
$$

As condições iniciais são $\mathbf{x(0) = 0}$ e $\mathbf{x'(0) = v_0}$

$$
\begin{cases}
0 = x(0) = k_1 + k_2\\
v_0 = x'(0) = -\frac{k}{m}k_2 - \frac{mg}{k},
\end{cases}
$$

então:

$$
-k_1 = k_2 = -\frac{v_0 m}{k} - \frac{m^2 g}{k^2}.
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
x(t) &= k_1 + k_2\, e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}\, t\\
&= -\frac{v_0\, m\, k + m^2\, g}{k^2}\left(1 + e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{mg}{k}\, t.
\end{aligned}
$$

Um outro exemplo da aplicação de equações de segunda ordem pode ser visto num modelo de fluxo de corrente elétrica em um circuito simples.
Podemos observar que tanto a equação para a carga quanto a da corrente são equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes tais como as que analisamos para o sistema massa-mola. Isto nos dá um exemplo do papel unificador da matemática: a análise e compreensão de vários situações físicas distintas pode ser feita através do conhecimento das equações lineares de segunda ordem de coeficientes constantes.

Capítulo 6

Edo's de Ordem Superior

Neste capítulo estamos interessados em estudar equações de ordem $n > 2$, isto é, edo's do tipo:

$$y^{(n)}(x) = f(x,\, y(x),\, y'(x), \dots,\, y^{(n-1)}(x)). \tag{6.1}$$

Novamente, achar soluções gerais de qualquer tipo de edo de ordem n está fora do contexto destas notas. Como antes só trataremos sistematicamente apenas as lineares.

Este capítulo é completamente análogo ao anterior, as generalizações que faremos são extensões naturais do capítulo anterior.

Lembremos que uma solução geral da edo (6.1) em I é uma função:

$$\Phi = \Phi(x;\, k_1,\, k_2, \dots,\, k_n),$$

n-vezes derivável, definida em I e que depende de n constantes arbitrárias $k_1,\, k_2, \dots,\, k_n$. Além disso, para cada $(k_1,\, k_2, \dots,\, k_n) \in \mathbb{R}^n$, Φ é solução da edo (6.1).

Um sistema formado por uma edo de ordem n e n condições complementares que determinam, em um mesmo valor da variável independente, o valor da função incógnita e de suas derivadas até ordem $n-1$ é chamado de problema de valor inicial (PVI). As condições complementares são denominadas condições iniciais.

Um problema de valor inicial para a edo de ordem n é do tipo:

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x,\, y(x),\, y'(x), \dots,\, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \quad\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Uma solução do problema de valor inicial é uma função que satisfaz tanto a edo como as condições complementares.

6.1 Edo's Lineares de Ordem n

Definição 24. *Uma edo de ordem n que pode ser escrita na forma:*

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)y = r(x), \tag{6.2}$$

é chamada **linear**. Se $r(x) \equiv 0$, dizemos que a edo (6.2) é linear **homogênea** e se $r(x) \not\equiv 0$, que ela é linear **não-homogênea**.
Para edo's lineares de ordem n, vale o seguinte teorema de existência e unicidade de solução:

Teorema 9. *Se as funções $p_0(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ e $r(x)$ forem contínuas em um intervalo aberto I contendo o ponto x_0, então o PVI:*

$$\begin{cases} \dfrac{d^n y}{dx^n} + p_{n-1}(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_1(x)\dfrac{dy}{dx} + p_0(x)y = r(x) \\ y(x_0) = y_0, \\ \dfrac{dy}{dx}(x_0) = y_1, \\ \quad\vdots \\ \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

tem solução, ela é única e está definida no intervalo I.
Nosso objetivo no estudo da equações lineares é determinar uma solução geral de (6.2).
Antes de prosseguirmos, observemos que o lado esquerdo da equação (6.2) pode ser visto como uma transformação linear T. Utilizando as notações do capítulo anterior, denotemos por V^n o espaço vetorial formado pelas funções de classe C^n no intervalo aberto I e V^0 o espaço vetorial formado pelas funções contínuas em$I$.
Consideremos $T : V^n \longrightarrow V^0$ o seguinte operador:

$$T(\phi) = \phi^{(n)} + p_{n-1}(x)\,\phi^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)\,\phi' + p_0(x)\,\phi. \tag{6.3}$$

É fácil ver que T é linear. Isto é, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g \in V^n$, temos:

$$\begin{aligned} T(f+g) &= T(f) + T(g) \\ T(\alpha\, f) &= \alpha\, T(f). \end{aligned}$$

Podemos reescrever a edo (6.2) na forma:

$$T(y) = r(x). \tag{6.4}$$

Definição 25. *Todo operador $L : V^n \longrightarrow V^0$ do tipo:*

$$L(\phi) = \phi^{(n)} + p_{n-1}(x)\, \phi^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)\, \phi' + p_0(x)\, \phi$$

é chamado Diferencial Linear de Ordem n.

Lembremos que que toda solução y do problema acima pode ser escrita como

$$y = y_p + y_h$$

onde y_p é uma solução particular de (6.4) e y_h, uma solução do problema homogêneo associado:

$$T(y) = 0. \tag{6.5}$$

Portanto, para determinarmos todas as soluções do problema não–homogêneo (6.4), basta conhecermos uma solução particular de (6.4) e descrever completamente o nucleo de T, onde estão as soluções do problema homogêneo associado (6.5).

6.1.1 Equações Lineares Homogêneas

Como antes, acharemos primeiramente as soluções da edo:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \cdots + p_1(x)\, y' + p_0(x)\, y = 0. \tag{6.6}$$

O próximo Teorema é análogo ao visto no capítulo anterior>

Teorema 10. **(Princípio de Superposição)** *Sejam $y_1, \ldots, y_n$ soluções da edo de ordem n linear homogênea:*

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_1(x) \frac{dy}{dx} + p_0(x) y = 0, \tag{6.7}$$

no intervalo aberto I, então a combinação linear $\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n$ também é solução de (6.7) quaisquer que sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

1. O Teorema acima nos implica que o conjunto formado por todas as soluções da edo de ordem n linear homogênea(6.7) é um espaço vetorial. Este espaço também é chamado de espaço solução.

2. Se mostrarmos que dimensão do espaço solução de (6.7) é igual a n, poderemos obter todos as soluções da edo (6.7); logo, basta conhecer as soluções que formem uma base para este espaço vetorial.

3. Então, mostraremos que a dimensão do espaço solução é n e estabeleceremos um critério para decidir se n soluções $y_1, \ldots, y_n$ formam uma base deste espaço.

Definição 26. *Sejam $f_1, \ldots, f_n$, funções definidas em I. Dizemos que estas funções são linearmente dependentes* **(l.d.)** *se existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$ tal que*

$$\lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0, \qquad \forall x \in I.$$

Caso contrário, são chamadas linearmente independentes **(l.i.)**.

Definição 27. *Sejam $f_1, \ldots, f_n \in V^{n-1}$, o Wronskiano de $f_1, \ldots, f_n$ no ponto x_0 é o determinante:*

$$W(f_1, \ldots, f_n)(x_0) = \det \begin{bmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \cdots & f_n(x_0) \\ f_1(x_0)' & f_2'(x_0) & \cdots & f_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix}$$

Exemplo 78. *Se $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x \ln x$ e $f_3(x) = x^2$, temos*

$$\begin{aligned} W(f_1, f_2, f_3)(x) &= \det \begin{bmatrix} x & x \ln x & x^2 \\ 1 & \ln x + 1 & 2\,x \\ 0 & \frac{1}{x} & 2 \end{bmatrix} \\ &= 2\,x \ln x + 2\,x + x - (2\,x \ln x - 2\,x) \\ &= x. \end{aligned}$$

Teorema 11. *Suponha que $y_1, \ldots, y_n$ são n soluções da edo linear homogênea (6.7) num intervalo aberto I em que as funções p_i são contínuas para $i = 0, \ldots, n-1$. Então, $y_1, \ldots, y_n$ são linearmente independentes, se e somente se $W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ em um pelo menos um ponto de I*

Para terminarmos nossa análise, resta saber se dadas $y_1, \ldots, y_n$, funções linearmente independentes, soluções da edo linear homogênea (6.7). Podemos afirmar que toda solução y de (6.7) é da forma:

$$y = \alpha_1\, y_1 + \cdots + \alpha_n\, y_n?$$

Teorema 12. *Sejam $y_1, \ldots, y_n$ soluções linearmente independentes da edo linear homogênea (6.7) num intervalo aberto I em que p_i, $i = 0, \ldots, n-1$ são contínuas. Se Y é solução da equação acima, então, existem constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que*

$$Y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \cdots \alpha_n y_n(x), \qquad \forall x \in I.$$

Definição 28. *Se $y_1, \ldots, y_n$ são n soluções linearmente independentes da equação homogênea (6.7), dizemos que $y_1, \ldots, y_n$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea.*

Observação 21. *O Teorema 12 nos diz que se $y_1, \ldots, y_n$ formam um conjunto fundamental, então*

$$y(x) = k_1 y_1(x) + \cdots + k_n y_n(x), \qquad k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$$

é solução geral da equação homogênea (6.7)).

Exemplo 79. *Sejam $y_1(x) = x, y_2(x) = x \ln x$ e $y_3 = x^2$. Verifique que estas funções são soluções da edo:*

$$x^3\, y''' - x^2\, y'' + 2\, x\, y' - 2\, y = 0, \quad x > 0. \tag{6.8}$$

e determine a solução geral da edo.

Verifiquemos que y_1, y_2 e y_3 são soluções da edo. Como

$$y_1'(x) = 1, \quad y_1''(x) = 0, \quad y_1'''(x) = 0,$$

temos:

$$x^3 y_1''' - x^2 y_1'' + 2x y_1' - 2y_1 = 0 - 0 + 2x - 2x = 0.$$

Analogamente,

$$y_2'(x) = \ln x + 1, \quad y_2''(x) = \frac{1}{x}, \quad y_2'''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

logo,

$$x^3 y_2''' - x^2 y_2'' + 2x y_2' - 2y_2 = -x - x + 2x(\ln x + 1) - 2x \ln x = 0.$$

Do mesmo modo,

$$y_3'(x) = 2x, \quad y_3''(x) = 2, \quad y_3'''(x) = 0$$

então

$$x^3 y_3''' - x^2 y_3'' + 2x y_3' - 2y_3 = 0 - 2x^2 + 4x^2 - 2x^2 = 0.$$

Vimos no Exemplo 78 que o Wronskiano de y_1, y_2, y_3 é diferente de zero para todo $x > 0$. Logo, como y_1, y_2, y_3 são soluções da edo linear homogênea (6.8), y_1, y_2, y_3 são funções linearmente independentes. Portanto,

$$y(x) = k_1\, y_1(x) + k_2\, y_2(x) + k_3\, y_3(x), \qquad k_1,\, k_2,\, k_3 \in \mathbb{R}$$

é solução geral da equação homogênea (6.8).

6.1.2 Redução de Ordem

Tal como nas equações de segunda ordem, se conhecemos uma solução $u(x)$ do problema homogêneo, podemos encontrar uma outra solução linearmente independente com $u(x)$ usando a variação de parâmetros. Isto é tentamos encontrar uma solução da forma $v(x) = c(x)\, u(x)$. A função $v = v(x)$ deve satisfazer:

$$\frac{d^n v}{dx^n} + p_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \cdots + p_1(x)\,\frac{dv}{dx} + p_0(x)\, v = 0,$$

logo:

$$\frac{d^k}{dx^k}\big(c(x)\, u(x)\big) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} c^{(i)} u^{(k-i)}.$$

Substituindo na equação, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d^n v}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \cdots + p_1(x)\frac{dv}{dx} + p_0(x)v = \\
&\quad = u(x)\frac{d^n c}{dx^n} + q_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}c}{dx^{n-1}} + \cdots + q_1(x)\frac{dc}{dx} \\
&\quad\quad + \left(\frac{d^n u}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \cdots + p_1(x)\frac{du}{dx} + p_0(x)u\right)c \\
&\quad = u(x)\frac{d^n c}{dx^n} + q_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}c}{dx^{n-1}} + \cdots + q_1(x)\frac{dc}{dx}
\end{aligned}$$

Como queremos que v seja solução, fazendo a mudança de variável $p = \dfrac{dc}{dx}$, temos

$$u(x)\, p^{n-1} + q_{n-1}(x)\, p^{n-2} + \cdots + q_1(x)\, p = 0.$$

Ou seja, o método de redução de ordem nos leva a resolver uma equação de ordem $n-1$. Se o n for grande, este método pode não ser muito eficiente pois a equação de ordem $n-1$ pode ser tão difícil de ser resolvida quanto a de ordem n. Na prática, o método de redução de ordem é útil principalmente para equações de segunda ordem.

Exemplo 80. *Considere a edo:*

$$y''' - y'' + 4\,y' - \frac{4}{x}\,y = 0,$$

onde $y_1(x) = x$ é uma solução.

É fácil verificar que y_1 é de fato uma solução. Tentemos encontra uma segunda solução da forma:

$$v(x) = c(x)\,y_1(x) = x\,c(x).$$

Logo:

$$v' = x\,c' + c \qquad v'' = x\,c'' + 2\,c' \qquad v''' = x\,c''' + 3\,c''$$

e

$$\begin{aligned}
&v''' - v'' + 4\,v' - \frac{4}{x}\,v = x\,c''' + (3-x)\,c'' + (-2+4\,x)\,c' + (4-4)\,c,\\
&p = c',\\
&x\,p'' + (3-x)\,p' + (4\,x-2)\,p = 0.
\end{aligned}$$

A equação acima não se encaixa em nenhum dos tipos de equação de segunda ordem que sabemos resolver.

Exemplo 81. *Considere a edo:*

$$y''' - 6\,y'' + 12\,y' - 8\,y = 0. \tag{6.9}$$

A função $y_1(x) = e^{2x}$ é solução de (6.9). Vamos procurar outras soluções na forma $y(x) = c(x)\,e^{2x}$. Para que y seja solução de (6.9), deve satisfazer:

$$y''' - 6\,y'' + 12\,y' - 8\,y = e^{2x}\,c''' = 0.$$

Isto é, o coeficiente $c(x)$ deve satisfazer:

$$c'''(x) = 0$$

cuja solução geral, facilmente obtida por integrações, é:

$$c(x) = k_1\,x^2 + k_2\,x + k_3.$$

Fazendo as escolhas $(k_1,\, k_2,\, k_3) = e_i$, obtemos as seguintes soluções linearmente independentes da edo (6.9): $y_1(x) = x^2\, e^{2x}$, $y_2(x) = x\, e^{2x}$ e $y_3(x) = e^{2x}$. Portanto,

$$y(x) = k_1\, x^2\, e^{2x} + k_2\, x\, e^{2x} + k_3\, e^{2x},$$

é solução geral da edo (6.9).

6.1.3 Edo's Homogêneas com Coeficientes Constantes

Estudaremos nesta Seção, edo's de ordem n lineares homogêneas em que as coeficientes $p_i(x)$, $i = 0, \ldots, n-1$, são funções constantes. Isto é, edo's que podem ser escritas na forma:

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = 0, \tag{6.10}$$

onde $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$.
Já sabemos que para determinar uma solução geral de (6.10), basta achar n soluções linearmente independentes. Tentemos encontrar tais soluções da forma $y(x) = e^{rx}$. Logo, deve satisfazer a edo (6.10):

$$\begin{aligned} y' &= r\, e^{rx} \\ y'' &= r^2\, e^{rx} \\ \cdots \\ \cdots \\ y^{(n)} &= r^n\, e^{rx}. \end{aligned}$$

De (6.10), obtemos:

$$(r^n + a_{n-1}\, r^{n-1} + \cdots + a_1\, r + a_0)\, e^{rx} = 0 \tag{6.11}$$

Isto é, o expoente r deve ser igual às raízes da equação característica:

$$r^n + a_{n-1}\, r^{n-1} + \cdots + a_1\, r + a_0 = 0.$$

Denotemos por $P(r) = r^n + a_{n-1}\, r^{n-1} + \cdots + a_1\, r + a_0$. $P(r)$ é um polinômio de grau n e da Álgebra sabemos que um polinômio possui n raízes (reais e/ou complexas). $P(r)$ é chamado polinômio caracteristíco da edo.

Raízes Distintas: Se $P(r)$ possui n raízes reais r_i distintas:

$$P(r) = (r - r_1)\,(r - r_2)\; \ldots\ldots (r - r_n).$$

Neste caso a solução de (6.10) é:

$$y_h(x) = k_1\, e^{r_1 x} + k_2\, e^{r_2 x} + \ldots\ldots + k_n\, e^{r_n x}.$$

Raízes Iguais: Se $P(r)$ possui uma raiz de multiplicidade $m \leq n$:

$$P(r) = (r - r_m)^m\, (r - r_{m+1})\, \ldots\ldots (r - r_n).$$

Neste caso a solução de (6.10) é:

$$y_h(x) = e^{r_m x}\big(k_1 + k_2\, x + k_3\, x^2 + \ldots\ldots + k_m\, x^{r_m - 1}\big) + k_{m+1}\, e^{r_{m+1} x} + \ldots\ldots + k_n\, e^{r_n x}.$$

Raízes Complexas: Se $P(r)$ possui raízes complexas, elas devem ocorrer aos pares; isto é:

$$r_1 = a + i\, b, \quad \text{e} \quad r_2 = a - i\, b.$$

Se a multiplicidade das raízes é $k \leq n$, a solução deve ter o termo:

$$e^{ax}\bigg(\big(\sum_{i=1}^{k} k_i\, x^{r_i - 1}\big)\, \cos k\, x + \big(\sum_{i=1}^{k} c_i\, x^{r_i - 1}\big)\, \cos k\, x\bigg).$$

Exemplo 82. *Considere a edo:*

$$y^{(3)} - 6\, y'' + 11\, y' - 6\, y = 0.$$

A equação característica da edo é:

$$r^3 - 6\, r^2 + 11\, r - 6 = (r-1)\,(r-2)\,(r-3) = 0$$
$$r_1 = 1,\ r_2 = 2 \quad \text{e} \quad r_3 = 3$$

Logo, uma soluções da edo é:

$$y_h(x) = k_1\, e^x + k_2\, e^{2x} + k_3\, e^{3x}.$$

Exemplo 83. *Considere a edo:*

$$y^{(4)} - 3\, y^{(3)} + 3\, y' - y = 0.$$

A equação característica da edo é:

$$r^4 - 3\, r^3 + 3\, r^2 - 1 = r\,(r-1)^2 = 0$$
$$r_1 = 0 \quad \text{e} \quad r_2 = r_3 = r_4 = 1$$

Logo, uma soluções da edo é:

$$y_h(x) = k_1 + k_2\, e^x + k_3\, x\, e^x + k_4\, x^2\ e^x.$$

Exemplo 84. *Considere a edo:*

$$y^{(3)} + y' = 0.$$

A equação característica da edo é:

$$\begin{aligned}
&r^3 + r = r\,(r^2+1) = r\,(r+i)\,(r-i) = 0\\
&r_1 = 0,\; r_2 = i \quad \text{e} \quad r_3 = -i
\end{aligned}$$

Logo, uma soluções da edo é:

$$y_h(x) = k_1 + k_2\, \cos x + k_3\, \operatorname{sen} x.$$

6.1.4 Estudo Detalhado das Raízes

Voltemos à equação característica. Como $P(r)$ é um polinômio do grau n, sabemos que ele tem n raízes. A introdução de operadores diferenciais permite entender o porquê do procedimento acima.
Vamos dividir as raízes da equação característica em dois grupos: raízes com parte imaginária igual a zero e raízes com parte imaginária diferente de zero. Suponhamos que a equação característica tenha j raízes reais e $n-j$ raízes complexas, com $0 \leq j \leq n$. Lembrando que as raízes complexas sempre aparecem em pares conjugados, $n-j$ deve ser um número par.

Exemplo 85. *O polinômio:*

$$P(r) = r^9 - 8\,r^8 + 26\,r^7 - 50\,r^6 + 72\,r^5 - 82\,r^4 + 70\,r^3 - 46\,r^2 + 23\,r - 6,$$

se fatora da seguinte forma:

$$P(r) = (r-2)\,(r+3)\,(r-1)^3\,(r-i)^2\,(r+i)^2,$$

este caso, $j = 5$, $n - j = 4$ e $k = 2$.
Analisemos todas as possibilidades para as raízes da equação característica. Elas podem ser:

Raízes Distintas

Neste caso, podemos fatorar a equação característica da seguinte maneira: j fatores envolvendo raízes com parte imaginária igual a zero e $2k = n-j$ fatores envolvendo as raízes com parte imaginária diferente de zero com $0 \leq j \leq n$. Isto é, a equação característica pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned}
&(r-r_1)\ldots(r-r_j)(r-(\alpha_1+i\beta_1))(r-(\alpha_1-i\beta_1))\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad\ldots(r-(\alpha_k+i\beta_k))(r-(\alpha_k-i\beta_k)) = 0
\end{aligned}$$

como as raízes são todas distintas, temos

$$r_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \le i \le j \qquad \text{e} \qquad r_i \neq r_l, \; 1 \le l \neq i \le j$$

$$(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^2, \quad \beta_i \neq 0, \; 1 \le i \le k, \qquad \text{e} \qquad (\alpha_i, \beta_i) \neq (\alpha_l, \beta_l), \qquad 1 \le l \neq i \le k.$$

As funções:

$$y_i(x) = e^{r_i x}, \quad 1 \le i \le j, \qquad y_m(x) = e^{(\alpha_m \pm i\beta_m)x}, \quad 1 \le m \le k$$

são soluções (algumas delas, com valores complexos) da edo (6.10). Como desejamoss obter soluções de valores reais, vamos considerar as partes reais e imaginárias das funções:

$$y_{m_\pm}(x) = e^{(\alpha_m \pm i\,\beta_m)x} = e^{\alpha_m x}\big(\cos\beta_m\, x \pm i\ \mathrm{sen}\,\beta_m\, x\big), \quad 1 \le m \le k.$$

Isto é, as funções:

$$\begin{aligned} y_{1m_-}(x) &= y_{1m_+}(x) = e^{\alpha_m x}\ \cos\beta_m x, \\ y_{2m_+}(x) &= e^{\alpha_m x}\ \mathrm{sen}\,\beta_m x, \\ y_{2m_-}(x) &= -e^{\alpha_m x}\ \mathrm{sen}\,\beta_m x, \end{aligned}$$

para $1 \le m \le k$. Deste, modo obtivemos as seguintes $j + 4\,k$ soluções da edo (6.10):

$$\begin{aligned} &y_i(x), \quad 1 \le i \le j \qquad \text{e} \\ &y_{1m_\pm}(x), y_{2m_\pm}(x), \quad 1 \le m \le k \end{aligned}$$

Como $j + 4\,k > n$ e desejamos um conjunto linearmente independente de soluções, podemos desconsiderar (por que?) as soluções y_{1m_-} e y_{2m_-}, $1 \le m \le k$. Para determinarmos um conjunto fundamental, basta mostrar que as $n = j + 2\,k$ soluções:

$$\begin{aligned} y_{1m_+}(x) &= e^{\alpha_m x}\ \cos\beta_m x, \\ y_{2m_+}(x) &= e^{\alpha_m x}\,\mathrm{sen}\,\beta_m x, \qquad 1 \le m \le k. \end{aligned}$$

são linearmente independentes. Fazendo $x_0 = 0 \in I = \mathbb{R}$, vemos que o Wrosnkiano de $y_1, \dots, y_j, y_{1m_+}, y_{2m_+}, \dots, y_{1k_+}, y_{2k_+}$ em x_0 satisfaz:

$$
\begin{aligned}
&2^k i^k W(y_1, \dots, y_j, y_{11_+}, y_{21_+}, \dots, y_{1k_+}, y_{2k_+})(x_0) = \\
&= 2^k i^k W\left(y_1, \dots, y_j, \frac{y_{1_+} + y_{1_-}}{2}, \frac{y_{1_+} - y_{1_-}}{2i}, \dots, \frac{y_{k_+} + y_{k_-}}{2}, \frac{y_{k_+} - y_{k_-}}{2i}\right)(x_0) \\
&= \frac{1}{2^k} W\left(y_1, \dots, y_j, y_{1_+} + y_{1_-}, y_{1_+} - y_{1_-}, \dots, y_{k_+} + y_{k_-}, y_{k_+} - y_{k_-}\right)(x_0) \\
&= \frac{1}{2^k} W\left(y_1, \dots, y_j, y_{1_+} + y_{1_-}, 2y_{1_+}, \dots, y_{k_+} + y_{k_-}, 2y_{k_+}\right)(x_0) \\
&= W\left(y_1, \dots, y_j, y_{1_+} + y_{1_-}, y_{1_+}, \dots, y_{k_+} + y_{k_-}, y_{k_+}\right)(x_0) \\
&= W\left(y_1, \dots, y_j, y_{1_-}, y_{1_+}, \dots, y_{k_-}, y_{k_+}\right)(x_0)
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
r_1 & \cdots & r_j & \alpha_1 - i\beta_1 & \alpha_1 + i\beta_1 & \cdots & \alpha_k - i\beta_k & \alpha_k + i\beta_k \\
r_1^2 & \cdots & r_j^2 & (\alpha_1 - i\beta_1)^2 & (\alpha_1 + i\beta_1)^2 & \cdots & (\alpha_k - i\beta_k)^2 & (\alpha_k + i\beta_k)^2 \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
r_1^{n-1} & \cdots & r_j^{n-1} & (\alpha_1 - i\beta_1)^{n-1} & (\alpha_1 + i\beta_1)^{n-1} & \cdots & (\alpha_k - i\beta_k)^{n-1} & (\alpha_k + i\beta_k)^{n-1}
\end{vmatrix}.
$$

Como a matriz acima é uma matriz de Vandermonde, mostramos que

$$W(y_1, \dots, y_j, y_{11_+}, y_{21_+}, \dots, y_{1k_+}, y_{2k_+})(x_0) \neq 0.$$

e, conseqüentemente, uma solução geral da edo de ordem n linear homogênea (6.10), cuja equação característica tem n raízes distintas

$$r_1, \dots, r_j, \alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_k \pm i\beta_k$$

é dada por:

$$
\begin{aligned}
y(x) = k_1 e^{r_1 x} + \cdots + k_j e^{r_j x} + e^{\alpha_1 x}(c_1 \cos\beta_1 x + d_1 \operatorname{sen}\beta_1 x) + \dots \\
\cdots + e^{\alpha_k x}(c_k \cos\beta_k x + d_k \operatorname{sen}\beta_1 x)
\end{aligned}
$$

com $k_i, c_l, d_l \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq j$ e $1 \leq l \leq k$.

Exemplo 86.

$$y^{(4)} - 1 = 0$$

A edo acima tem a equação característica dada por:

$$r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0$$

cujas raízes são

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = i, \quad r_4 = -i.$$

Portanto uma solução geral de $y^{(4)} - 1 = 0$ é

$$\begin{aligned} y(x) &= k_1\, e^{r_1 x} + k_2\, e^{r_2 x} + e^{0x}\,(c_1\, \cos x + d_1\, \operatorname{sen} x) \\ &= k_1\, e^{x} + k_2\, e^{-x} + k_3\, \cos x + k_4\, \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Raízes Repetidas

Vamos começar com um exemplo.

Exemplo 87.

$$y^{(4)} - 5\,y''' + 6\,y'' + 4\,y' - 8\,y = 0 \tag{6.12}$$

A edo acima tem equação característica

$$r^4 - 5\,r^3 + 6\,r^2 + 4\,r - 8 = (r+1)(r-2)^3 = 0$$

que tem $r = -1$ como raiz de multiplicidade um e $r = 2$ como raiz de multiplicidade três. Neste caso, temos apenas duas soluções da forma e^{rx}, a saber $y_1(x) = e^{-x}$ e $y_2(x) = e^{2x}$. Como a edo é de ordem quatro, precisamos de mais duas soluções linearmente independentes para determinarmos um conjunto fundamental. Vamos agora, fazer uso de uma propriedade das equações de coeficientes constantes. Para tanto, vamos associar ao fator $(r-2)^3$ da equação característica, uma edo linear homogênea com coeficientes constantes cuja equação caractarística seja dada por ele. Como $(r-2)^3 = r^3 - 6\,r^2 + 12\,r - 8$, podemos tomar:

$$y''' - 6\,y'' + 12\,y' - 8\,y = 0. \tag{6.13}$$

Por construção, sabemos que $y(x) = e^{2x}$ é solução de (6.13). No Exemplo 81, usamos o método de redução de ordem o obtivemos outras soluções de (6.13), na forma $y(x) = c(x)e^{2x}$. Vimos que o coeficiente $c(x)$ deve satisfazer

$$c'''(x) = 0.$$

Isto é,

$$c(x) = k_1\, x^2 + k_2\, x + k_3.$$

Fazendo as escolhas $(k_1,\, k_2,\, k_3) = e_i$, obtemos as seguintes soluções linearmente independentes (verifiquem) da edo (6.13): $y_1(x) = x^2\, e^{2x}$, $y_2(x) = x\, e^{2x}$ e $y_3(x) = e^{2x}$. Vamos verificar que y_1 também é solução da edo (6.12).

$$\begin{aligned} & y_1^{(4)} - 5\,y_1''' + 6\,y_1'' + 4\,y_1' - 8\,y_1 = \\ & = 2\,e^{2x}(x^2(8 - 20 + 12 + 4 - 4) + x(32 - 60 + 24 + 4) + 24 - 30 + 6) = 0. \end{aligned}$$

Fica como exercício verificar que que y_2 também é solução da edo (6.12) e que as soluções $y_1(x) = x^2\, e^{2x}$, $y_2(x) = x\, e^{2x}$, $y_3(x) = e^{2x}$ e $y_4(x) = e^{-x}$ formam um conjunto fundamental da edo (6.12). Portanto,

$$y(x) = k_1 x^2 e^{2x} + k_2 x e^{2x} + k_3 e^{2x} + k_4 e^{-x}$$

é solução geral da edo (6.12).

Vamos generalizar o procedimento acima no caso em que sua equação característica:

$$r^n + a_{n-1}\, r^{n-1} + \cdots + a_1\, r + a_0 = 0 \tag{6.14}$$

possui raízes repetidas. Seja r_p é uma raiz da equação característica (6.14) com multiplicidade k. Isto é, na fatoração de (6.14) encontramos um fator da forma $(r - r_p)^k$. Como no exemplo, para associar à raiz r_p, k soluções linearmente independentes da edo (6.10), cumpriremos duas etapas:

(i) Associaremos ao fator $(r - r_p)^k$ uma edo linear homogênea com coeficientes constantes que possui um conjunto fundamental dado por $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ com $y_i(x) = x^{i-1} e^{r_p x}$ para $i = 1, \ldots, k$.

(ii) Mostraremos que as funções $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ também são soluções da edo (6.10).

Comecemos por (i). Vamos associar ao fator $(r - r_p)^k$ uma edo linear homgênea de coeficientes constantes de ordem k cuja equação característica seja dada por

$$(r - r_p)^k = 0.$$

Como: $(r - r_p)^k = A_k r^k + A_{k-1} r^{k-1} + \cdots + A_1 r + A_0$, onde:

$$A_i = (-1)^{k-i} \binom{k}{i} r_p^{k-i}, \qquad i = 0, \ldots, k,$$

podemos considerar:

$$A_k y^{(k)} + A_{k-1} y^{k-1} + \cdots + A_1 y' + A_0 y = 0. \tag{6.15}$$

Por construção, $A_k = 1$ e $y(x) = e^{r_p x}$ é solução de (6.15) (por quê?). Usando o método de redução de ordem, podemos obter outras soluções de (6.15), na forma $y(x) = c(x)\, e^{r_p x}$. Lembrando que denotamos $f^{(0)}(x) = f(x)$, a fórmula de derivação do produto nos diz que

$$(c(x)\, e^{r_p x})^{(j)} = e^{r_p x} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} r_p^{j-i}\, c^{(i)}(x).$$

Observe que na derivada de ordem j de $c(x)\, e^{r_p x}$ aparecem derivadas de ordem 0 a j da função $c(x)$. Portanto, ao avaliarmos o lado esquerdo de (6.15) para $y(x) = c(x)\, e^{r_p x}$, a derivada de ordem m da função $c(x)$ aparece somente nos termos $A_i y^{(i)}$ para $i = m, \ldots, k$. Portanto, se coletarmos este termos, obtemos:

$$
\begin{aligned}
c^{(m)}(x) \Bigg[A_k \binom{k}{m} r_p^{k-m} + A_{k-1} \binom{k-1}{m} r_p^{k-1-m} + \cdots + \ldots \\
\ldots + A_{m+1} \binom{m+1}{m} r_p^{m+1-m} + A_m \binom{m}{m} r_p^{m-m} \Bigg] &= c^{(m)}(x) \sum_{i=m}^{k} A_i \binom{i}{m} r_p^{i-m} \\
&= c^{(m)}(x) \sum_{i=m}^{k} \binom{k}{i} \binom{i}{m} (-1)^{k-i} r_p^{k-m}.
\end{aligned}
$$

Note que:

$$
\begin{aligned}
\binom{k}{i} \binom{i}{m} &= \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{i!}{m!(i-m)!} = \frac{k!}{m!(k-m)!} \frac{(k-m)!}{(k-i)!(i-m)!} \\
&= \frac{k!}{m!(k-m)!} \binom{k-m}{i-m}.
\end{aligned}
$$

Portanto, para $m = 0, \ldots, k-1$, temos

$$
\begin{aligned}
c^{(m)}(x) \sum_{i=m}^{k} A_i \binom{i}{m} r_p^{i-m} &= \frac{k! c^{(m)}(x)}{m!(k-m)!} \sum_{i=m}^{k} \binom{k-m}{i-m} (-1)^{k-i} r_p^{k-m} \\
&= \sum_{i=0}^{k-m} \binom{k-m}{i} (-1)^{k-m-i} r_p^{k-m-i} r_p^{i} \\
&= (r_p - r_p)^{k-m} = 0.
\end{aligned} \tag{6.16}
$$

Pelas observações anteriores,

$$
A_k y^{(k)} + A_{k-1} y^{k-1} + \cdots + A_1 y' + A_0 y = e^{r_p x} \sum_{m=0}^{k} \left(c^{(m)}(x) \sum_{i=m}^{k} A_i \binom{i}{m} r_p^{i-m} \right).
$$

Segue de (6.16) que

$$
A_k y^{(k)} + A_{k-1} y^{k-1} + \cdots + A_1 y' + A_0 y = e^{r_p x} c^{(k)}(x) \sum_{i=k}^{k} A_i \binom{i}{k} r_p^{i-k} = e^{r_p x} c^{(k)}(x)
$$

Por outro lado, para que $y(x)$ seja solução de (6.15), devemos ter

$$A_k y^{(k)} + A_{k-1} y^{k-1} + \cdots + A_1 y' + A_0 y = 0.$$

Logo, o coeficiente $c(x)$ deve satisfazer

$$c^{(k)}(x) = 0$$

cuja solução geral, facilmente obtida por integrações, é

$$c(x) = \alpha_k \, x^{k-1} + \alpha_{k-1} \, x^{k-2} + \cdots + \alpha_2 \, x + \alpha_1.$$

Fazendo as escolhas $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = e_i$, obtemos k soluções linearmente independentes $y_i(x) = x^{i-1} \, e^{r_p x}$ da edo (6.15).

Caso real

Vamos supor que r é raiz real da equação característica (6.10) com multiplicidade k. Neste caso, queremos associar a esta raiz k soluções linearmente independentes da edo (6.10). Basta que determinemos soluções da forma $y(x) = c(x) \, y_r(x) = c(x) e^{rx}$ com $c(x)$ solução da edo:

$$c^{(k)}(x) = 0.$$

Isto é, $c(x) = \alpha_k \, x^{k-1} + \cdots + \alpha_2 \, x + \alpha_1$, com $\alpha_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, k$. Logo,

$$y_1(x) = e^{rx}, \quad y_2(x) = x \, e^{rx}, \ldots, y_k(x) = x^{k-1} \, e^{rx}$$

linearmente independentes da edo (6.10).

Caso Complexo

Vamos supor que $r = \alpha \pm i\beta$ são raízes complexas da equação característica (6.10) com multiplicidade k. Neste caso, queremos associar a cada uma delas k soluções linearmente independentes da edo (6.10). Vimos que se $c(x)$ é solução da edo:

$$c^{(k)}(x) = 0,$$

então funções da forma $y(x) = c(x) \, y_r(x) = c(x) e^{rx}$ são soluções de(6.10). Logo,

$$y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad y_2(x) = x \, e^{(\alpha+i\beta)x}, \ldots, \quad y_k(x) = x^{k-1} \, e^{(\alpha+i\beta)x}$$

e

$$z_1(x) = e^{(\alpha-i\beta)x}, \quad z_2(x) = x \, e^{(\alpha-i\beta)x}, \ldots, \quad z_k(x) = x^{k-1} \, e^{(\alpha-i\beta)x}$$

são soluções a valores complexos de (6.10). Para obter soluções a valores reais, basta tomarmos as partes real e imaginária das funções $y_i(x)$ e $z_i(x)$ com $i = 1, \ldots, k$. Deste conjunto de $4\,k$ soluções, podemos obter as seguintes $2k$ soluções linearmente independentes da edo (6.10):

$$y_1(x) = e^{a\,x} \cos b\,x, \quad y_2(x) = x\,e^{a\,x} \cos b\,x, \ldots, \quad y_k(x) = x^{k-1}\,e^{a\,x} \cos b\,x$$

e

$$y_1(x) = e^{a\,x} \operatorname{sen} b\,x, \quad y_2(x) = x\,e^{a\,x} \operatorname{sen} b\,x, \ldots, \quad y_k(x) = x^{k-1}\,e^{a\,x} \operatorname{sen} b\,x$$

Vamos ver, através de um exemplo, o que fazer no caso geral:

Exemplo 88.

$$y^{(7)} - 5y^{(6)} + 9y^{(5)} - 13y^{(4)} + 15y''' - 11y'' + 7y' - 3y = 0 \tag{6.17}$$

Primeiramente, achamos as raízes da equação característica

$$r^7 - 5r^6 + 9r^5 - 13r^4 + 15r^3 - 11r^2 + 7r - 3 = (r+3)(r-1)^2(r-i)^2(r+i)^2 = 0$$

e consideremoas as soluções da forma $y(x) = e^{rx}$:

$$y_1(x) = e^{-3x}, \qquad y_2(x) = e^{x}, \qquad y_3(x) = e^{ix}, \qquad y_4(x) = e^{-ix}.$$

Estas soluções são linearmente independentes. No entanto, elas não formam um conjunto fundamental pois uma de ordem sete tem espaço solução de dimensão sete. Vamos obter outras soluções a partir das raízes repetidas. Procuraremos soluções da forma

$$u(x) = c_1(x)y_2(x), \qquad v(x) = c_2(x)y_3(x)$$

com $c_i(x)$ soluções das edos:

$$c_1''(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad c_2''(x) = 0.$$

Isto é, $u(x) = (k_1x + k_2)e^x$ e $v(x) = (k_3x + k_4)e^{ix}$. Para obter soluções a valores reais tomamos as partes real e imaginária de v. A solução geral de nos dois últimos, ficamos com as partes real e imaginária de $(k_4x + k_5)e^{ix}$. Portanto, uma solução geral de (6.17) é obtida tomando combinações das soluções linearmente independentes obtidas anteriormente. Isto é

$$y(x) = k_1e^{-3x} + (k_2x + k_3)e^x + (k_4x + k_5)\cos x + (k_6x + k_7)\operatorname{sen} x.$$

6.2 Equação de Euler-Cauchy Homogêneas

Definição 29. *Uma equação de Euler-Cauchy de ordem n é uma equação da forma:*

$$a_n\, x^n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, x^{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, x\, y' + a_0\, y = 0, \tag{6.18}$$

onde $a_n \neq 0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

Observação 22. *A equação de Euler (6.18) também é chamada de equação equidimensional pois o expoente de cada coeficiente é igual à ordem da derivada.*

De forma análoga ao capítulo anterior acharemos soluções de (6.18) da forma $y(x) = x^r$, para $x > 0$, substituindo $y(x)$ na edo (6.18), obtemos:

$$a_n\, x^n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, x^{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, x\, y' + a_0\, y = 0. \tag{6.19}$$

Isto é, r deve ser raiz da equação (6.19). Podemos associar à equação (6.19) uma edo de coeficientes constantes na variável t dada por

$$A_n \frac{d^n y}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + A_1 \frac{dy}{dt} + A_0 = 0 \tag{6.20}$$

com os coficientes A_i dado pelo coficiente de r^i de (6.19). É fácil ver que (6.19) é equação característica da edo (6.20). Denotemos por $y(t)$ uma solução geral de (6.20). É possível mostrar que uma solução geral da equação de Euler (6.18), pode ser obtida a partir de $y(t)$ através da seguinte mudança de variável:

$$x = e^t.$$

Portanto, toda a análise feita na Seção 6.1.3 para edo's de coeficientes constantes se estende para a edo (6.18) através da mudança de variável indicada acima. Desse modo, uma solução geral da edo (6.18) para $x > 0$ é:

$$y(x) = k_1\, y_1(\ln x) + \cdots + \, k_n\, y_n(\ln x),$$

onde $y_1(t), \ldots,\, y_n(t)$ formam um conjunto fundamental da edo (6.20) e $k_1, \ldots,\, k_n$ são contantes reais arbitrárias.

Observação 23. *É fácil verificar que se $y(x)$ é uma solução da edo (6.18) para $x > 0$, então $y(|x|)$ é solução da edo (6.18) para $x \neq 0$.*

Exemplo 89.

$$x^3\, y''' + 3\, x^2\, y'' - 2\, x\, y' + 2\, y = 0. \tag{6.21}$$

Vamos procurar soluções de (6.21) na forma $y(x) = x^r$ para $x > 0$. Substituindo na equação, obtemos

$$x^r\,(r(r-1)\,(r-2) + 3\,r\,(r-1) - 2\,r + 2) = 0.$$

Isto é, r deve satisfazer

$$r\,(r-1)\,(r-2) + 3\,r\,(r-1) - 2\,r + 2 = r^3 - 3\,r + 2 = (r-1)^2\,(r+2) = 0. \tag{6.22}$$

Consideremos a seguinte edo, na variável t, de coeficientes constantes que possui a equação acima como equação característica:

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

Pelo que foi apresentado na Seção 6.1.3,

$$y(t) = k_1\,e^t + k_2\,t\,e^t + k_3\,e^{-2t}$$

é sua solução geral. Usando a mudança de variável

$$x = e^t,$$

obtemos, observando que $t(x) = \ln x$, uma solução geral da edo (6.21) dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= y(t(x)) = k_1\,e^t(x) + k_2\,t(x)\,e^t(x) + k_3\,e^{-2t(x)} \\ &= k_1\,x + k_2\,\ln x\,x + k_3\,x^{-2}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

e, para $x \neq 0$,

$$y(x) = k_1\,|x| + k_2\,|x|\,\ln|x| + k_3\,x^{-2}$$

é uma solução geral da edo (6.21).
Vamos refazer o exemplo acima observando que a mudança de variável $x = e^t$ reduz a equação de Euler-Cauchy a um equação de coeficientes constantes. Vamos relacionar as derivadas com respeito a x com as derivadas com respeito a t. Temos:

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}x = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}, \\ &\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}x\right) = x\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dx} = x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dt} \quad \text{e} \\ &\frac{d^3y}{dt^3} = \frac{d}{dt}\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}\right) = x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

Portanto
$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\,\frac{dy}{dt} + 2\,y = x^3\,y''' + 3\,x^2\,y'' - 2\,x\,y' + 2\,y = 0 \tag{6.23}$$
A equação característica desta equação (compare com (6.22)) é:

$$r^3 - 3\,r + 2 = (r-1)\,(r-1)\,(r+2) = 0.$$

Portanto, uma solução geral da edo (6.23) é da forma:

$$y(t) = k_1\,e^{-2t} + \big(k_2\,t + k_3\big)\,e^t$$

desfazendo a mudança de variável $x = e^t$, obtemos uma solução geral da edo (6.21):
$$y(x) = k_1|x|^{-2} + (k_2 \ln|x| + k_3)|x|, \quad x \neq 0.$$
Resumindo, para resolver uma edo de Euler-Cauchy de ordem n homogênea:

$$a_n\,x^n\,y^{(n)} + a_{n-1}\,x^{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1\,x\,y' + a_0\,y = 0, \tag{6.24}$$

1. Procure soluções de (6.24) da forma x^r para $x > 0$. Verifique que os expoentes r devem ser raízes de:

$$a_n\,r\,(r-1)\ldots(r-n+1) + \cdots + a_1\,r + a_0 = 0. \tag{6.25}$$

2. Determine uma solução geral $y(t)$ da edo de coeficientes constantes que possui a equação (6.25) como equação característica. Isto é, $y(t)$ é composta por termos do tipo:

   (a) $k_i\,e^{r_i t}$, se r_i é raiz real simples de (6.25),

   (b) $(k_1\,t^j + \cdots + k_j\,t + k_{j+1})\,e^{r_k t}$, se r_i é raiz real de (6.25) com muktiplicidade $j+1$,

   (c) $c_m e^{\alpha_m t}\,\mathrm{sen}\,\beta_m t$ e $d_m e^{\alpha_m t}\cos\beta_m t$, se $\alpha_m \pm i\beta_m$ são raízes complexas simples de (6.25),

   (d) $(c_1 t^j + \cdots + c_j t + c_{j+1})e^{\alpha_k t}\,\mathrm{sen}\,\beta_k t$ e $(d_1 t^j + \cdots + d_j t + d_{j+1})e^{\alpha_k t}\cos\beta_k t$, se $\alpha_m \pm i\beta_m$ são raízes complexas de (6.25) com muktiplicidade $j+1$.

3. Obtenha uma solução geral de (6.24) avaliando a solução geral $y(t)$ obtida anteriormente em $t = \ln|x|$ para $x \neq 0$.

6.3 Método de Variação dos Parâmetros

Como antes, queremos resolver a edo linear de ordem n não homogênea

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)\, y' + p_0(x)\, y = r(x) \tag{6.26}$$

supondo que já conhecemos uma solução geral:

$$y_H(x) = k_1\, y_1(x) + \cdots + k_n\, y_n(x) \tag{6.27}$$

da equação homogênea associada:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)\, y' + p_0(x)\, y = 0 \tag{6.28}$$

Como uma solução geral da edo (6.26) é dada por

$$y(x) = y_p(x) + y_H(x),$$

com $y_p(x)$, uma solução particular da edo (6.26) e $y_H(x)$ uma solução geral da edo homogênea associada. Como já temos $y_H(x)$, resta apena determinar uma solução particular. Vamos tentar encontrá-la na forma:

$$y_p(x) = c_1(x)\, y_1(x) + \cdots + c_n(x)\, y_n(x).$$

Tal como no caso das equações de segunda ordem, a hipótese de que a expressão acima é uma solução particular nos fornece apenas uma equação. Como queremos determinar n funções, temos $n-1$ graus de liberdade. Introduziremos $n-1$ equações adicionais que simplifiquem nossas exepressões de derivadas bem como nos leve a um sistema que sempre tenha solução.

Vamos considerar, para $1 \leq k \leq n-1$, as seguintes condições adicionais:

$$c_1'\, y_1^{(k-1)} + \cdots + c_n'\, y_n^{(k-1)} = 0.$$

Desse modo, as derivadas de y_p serão dadas por:

$$y_p^{(k)} = c_1\, y_1^{(k)} + \cdots + c_n\, y_n^{(k)}. \tag{6.29}$$

Até o momento, temos $n-1$ equações. Resta obter a equação que exige que y_p seja solução da edo (6.26). Usando (6.29), obtemos:

$$\boxed{y_p^{(n)} = c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} + c_1 y_1^{(n)} + \cdots + c_n y_n^{(n)}}$$

Para que y_p seja solução, devemos ter:

$$
\begin{aligned}
&y_p^{(n)} + p_{n-1}(x)y_p^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y_p' + p_0(x)y_p \\
&\quad = c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n} c_j \left[y_j^{(n)} + p_{n-1}(x)y_j^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y_j' + p_0(x)y_j \right] \\
&\quad = c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} = r(x).
\end{aligned}
$$

Isto é as derivadas das funções coeficientes $c_i(x)$ devem satisfazer o seguinte sistema linear:

$$
\begin{cases}
c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n = 0 \\
c_1' y_1' + \cdots + c_n' y_n' = 0 \\
c_1' y_1'' + \cdots + c_n' y_n'' = 0 \\
\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\
c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} = r(x)
\end{cases}
\tag{6.30}
$$

cuja matriz associada é dada por

$$
\begin{bmatrix}
y_1 & \cdots & y_n \\
y_1' & \cdots & y_n' \\
y_1'' & \cdots & y_n'' \\
\vdots & & \vdots \\
y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)}
\end{bmatrix}.
$$

Observe que

$$
\det \begin{bmatrix}
y_1 & \cdots & y_n \\
y_1' & \cdots & y_n' \\
y_1'' & \cdots & y_n'' \\
\vdots & & \vdots \\
y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)}
\end{bmatrix} = W(y_1, \ldots, y_n).
$$

Isto é, o determinante da matriz associada é igual ao Wronnskiano das funções $y_1, \ldots, y_n$. Como estas funções formam uma base do espaço solução da equação homogênea (6.28), o determinante da matriz associada é diferente de zero. Isto nos diz que o sistema linear para $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$ sempre tem solução (única).

Exemplo 90.

$$
.x^3\, y''' + 3\, x^2\, y'' - 2\, x\, y' + 2\, y = 27\, x, \qquad x > 0 \tag{6.31}
$$

Vimos no Exemplo 89 que

$$y_H(x) = k_1\, x^{-2} + (k_2\, \ln x + k_3)x, \qquad x > 0$$

é uma solução geral da edo homogênea associada:

$$x^3\, y''' + 3\, x^2\, y'' - 2\, x\, y' + 2\, y = 0$$

Vamos procurar uma solução particular da edo não–homgênea (6.31) na forma:

$$y_p(x) = c_1(x)\, x^{-2} + (c_2(x)\, \ln x + c_3(x))x.$$

Acrescentaremos as seguintes condições:

$$\begin{aligned} c_1'(x)\, x^{-2} + c_2'(x)\, x\, \ln x + c_3'(x)\, x = 0 \quad \text{e} \\ -2c_1'(x)\, x^{-3} - 2c_2'(x)\, (\ln x + 1) + c_3'(x) = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= c_1'(x)\, x^{-2} + (c_2'(x)\, \ln x + c_3'(x))x - 2c_1(x)\, x^{-3} + c_2(x)(\ln x + 1) + c_3(x) \\ &= -2c_1(x)\, x^{-3} + c_2(x)(\ln x + 1) + c_3(x), \\ y_p''(x) &= -2c_1'(x)\, x^{-3} + c_2'(x)(\ln x + 1) + c_3'(x) + 6\, c_1(x)\, x^{-4} + c_2(x)\, x^{-1} \\ &= 6\, c_1(x)\, x^{-4} + c_2(x)\, x^{-1} \\ y_p'''(x) &= 6\, c_1'(x)\, x^{-4} + c_2'(x)\, x^{-1} - 24\, c_1(x)\, x^{-5} - c_2(x)\, x^{-2}. \end{aligned}$$

Queremos que y_p seja solução de (6.31). Isto é:

$$x^3\, y_p''' + 3\, x^2\, y_p'' - 2\, x\, y_p' + 2\, y_p = 6\, c_1'(x)\, x^{-1} + c_2'(x)\, x^2 = 27\, x.$$

Dividindo a última equação por x^3, vemos que as derivadas dos coeficientes de $c_i(x)$ devem satisfazer (compare com (6.30)):

$$\begin{cases} c_1'(x)\, x^{-2} + c_2'(x)\, x\, \ln x + x\, c_3'(x) = 0 \\ -\, 2c_1'(x)\, x^{-3} + c_2'(x)\, (\ln x + 1) + c_3'(x) = 0 \\ 6c_1'(x)\, x^{-4} + c_2'(x)\, x^{-1} = 27\, x^{-2}. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos as seguintes edo's:

$$\begin{aligned} & c_1'(x) = 3\, x^2, \\ & x\, c_2'(x) = 9 \quad \text{e} \\ & c_3'(x) = 6\, x^{-1} - 9x^{-1}\, \ln x - 9\, x^{-1}, \end{aligned}$$

que admitem soluções:

$$
\begin{aligned}
c_1(x) &= x^3, \\
c_2(x) &= 9\,\ln x \quad \text{e} \\
c_3(x) &= -3\,\ln x - \frac{9}{2}(\ln x)^2.
\end{aligned}
$$

Desse modo, uma solução particular de (6.31) é dada por:

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= c_1(x)x^{-2} + c_2(x)\,x\,\ln x + c_3(x)\,x \\
&= x + 9\,x\,(\ln x)^2 - 3\,x\,\ln x - \frac{9}{2}\,x\,(\ln x)^2 \\
&= x - 3\,x\,\ln x + \frac{9}{2}\,x\,(\ln x)^2.
\end{aligned}
$$

6.4 Método dos Coeficientes Indeterminados

Desejamos achar uma solução particular $y_p(x)$ para:

$$y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1\,y' + a_0\,y = r(x), \qquad a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}, \tag{6.32}$$

Como antes, vamos considerar somente os casos em que $r(x)$ é uma combinação linear de produtos (finitos) de funções do tipo:

1. um polinômio em x.
2. uma função exponencial e^{rx}
3. $\cos kx$ ou $\operatorname{sen} kx$

Já apresentamos este método para equações de ordem 2, e nosso argumento não dependeu da ordem da equação, portanto, podemos estender as Regras 1–3, que já havíamos estabelecido, para equações de ordem n:

Suponha que nenhum termo de $r(x)$ ou de qualquer de suas derivadas satisfaça a edo homogênea associada a:

$$y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1\,y' + a_0\,y = r(x). \tag{6.33}$$

Considere o espaço vetorial gerado pelos termos presentes em $r(x)$ e em suas derivadas. Considere:

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{k} A_i\,\phi_i(x)$$

com $\{\phi_1(x), \ldots, \phi_k\}$ uma base para este espaço . Determine os coeficientes A_i supondo que y_p é solução da edo não-homogênea (6.33).

Exemplo 91.

$$y''' + 9\,y' = x\,\operatorname{sen} x \tag{6.34}$$

Resolvemos o problema homogêneo associado:

$$y''' + 9\,y' = 0.$$

Como $r_1 = 0$, $r_2 = 3i$ e $r_3 = -3i$ são raízes de sua equação característica, $r^3 + 9\,r = 0$, uma solução geral da edo homogênea associada é dada por:

$$y_H(x) = k_1 + k_2\,\operatorname{sen} 3x + k_3\,\cos 3x.$$

Uma vez que a função $r(x) = x\,\operatorname{sen} x$ e suas derivadas: $x\,\operatorname{sen} x$, $x\,\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e o conjunto fundamental da edo homogênea $1,\ \operatorname{sen} 3x$, $\cos 3x$ são linearmente independentes, vamos combinar as Regras 1, 2 e 3 apresentadas na Subseção 5.7.1 e tentar encontrar uma solução particular da forma:

$$y_p(x) = A\,\operatorname{sen} x + B\,\cos x + C\,x\,\operatorname{sen} x + D\,x\cos x.$$

Observe que estas funções linearmente independentes que podem ser obtidas a partir de $r(x) = x\,\operatorname{sen} x$ e de suas derivadas. Temos:

$$\begin{aligned}
y_p' &= (A + D)\cos x + (C - B)\operatorname{sen} x + Cx\,\cos x - D\,x\,\operatorname{sen} x,\\
y_p'' &= -(A + 2\,D)\operatorname{sen} x + (2\,C - B)\cos x - C\,x\,\operatorname{sen} x - D\,x\,\cos x,\\
y_p''' &= -(A + 3\,D)\cos x + (-3\,C + B)\operatorname{sen} x - C\,x\,\cos x + D\,x\,\operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Para que y_p seja solução, devemos ter

$$y_p''' + 9\,y_p' = (8\,A + 6\,D)\cos x + (6\,C - 8\,B)\operatorname{sen} x + 8\,C\,x\,\cos x - 8\,D\,x\,\operatorname{sen} x = x\,\operatorname{sen} x.$$

Isto é,

$$\begin{cases}
8\,A + 6\,D = 0\\
6\,C - 8\,B = 0\\
8\,C = 0\\
-8\,D = 1.
\end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, obtemos:

$$y_p(x) = \frac{3}{32}\,\operatorname{sen} x - \frac{1}{8}\,x\,\cos x$$

Não tratamos ainda o caso em que algum termo de r ou de suas derivadas é linearmente dependente com os elementos da base do problema homogêneo.

Antes disso, vamos olhar para o método dos coeficientes indeterminados de outro maneira. Já vimos que o problema homogêneo:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

pode ser reescrito como:

$$T(y) = 0$$

para um certo operador T que é linear. Queremos resolver o problema não-homogêneo:

$$T(y) = r. \tag{6.35}$$

Se conhecermos um operador diferencial linear T_1 tal que:

$$T_1(r) = 0, \tag{6.36}$$

uma solução particular de (6.35) pode ser obtida de uma solução geral de (6.36) através de uma escolha conveniente das constantes arbitrárias.

Observação 24.

Se $r(x)$ resolve a edo homogênea associada $T(y) = 0$, então $r(x)$ contém algum termo da forma $e^{r_1 x}$ com r_1 raiz da equação característica de $T(y) = 0$. Por outro lado, para que $T_1(r(x)) = 0$, r_1 também deverá ser raiz da equação característica de $T_1(y) = 0$. Sejam m_1 e m_2 as multiplicidade de r_1 como raiz das equações características de $T(y) = 0$ e $T_1(y) = 0$, respectivamente. Portanto, a multiplicidade de r_1 como raiz da equação característica de $T_1\big(T(y)\big) = 0$ será igual à soma $m = m_1 + m_2$. Vimos que, neste caso, as funções:

$$\begin{aligned}
&y_m(x) = x^{m-1}\, e^{r_1 x}, \ldots,\ y_{m_1+1}(x) = x^{m_1}\, e^{r_1 x},\\
&y_{m_1}(x) = x^{m_1-1}\, e^{r_1 x}, \ldots,\ y_2(x) = x\, e^{r_1 x},\ y_1(x) = e^{r_1 x}
\end{aligned}$$

são soluções linearmente independentes da edo $T_1[T[y]] = 0$ e sabemos que $y_1(x), \ldots, y_{m_1}(x)$ são soluções de $T[y] = 0$. Uma solução particular de $T[y] = r(x)$ conterá termos das forma:

$$A_1\, y_m + \cdots + A_{m_2}\, y_{m_1+1}.$$

Os coeficientes são determinados por substituição de y_p na equação $T(y) = r(x)$.

Exemplo 92.

$$y'' + y = 3\,x^2 + 4 \tag{6.37}$$

Neste caso, $T(y) = y'' + y$. Como $r(x) = 3\,x^2 + 4$ é um polinômio de grau dois, se tomarmos $T_1(z) = z'''$, logo:

$$T_1[3\,x^2 + 4] = (3\,x^2 + 4)''' = 0.$$

Portanto, se aplicarmos T_1 na edo (6.37), obtemos $T_1\big(T(y)\big) = 0$, que, neste caso, corresponde à edo de coeficientes constantes:

$$y^{(5)} + y^{(3)} = T_1\big(T(y)\big) = (y'' + y)''' = 0 \tag{6.38}$$

cuja equação característica é dada por:

$$r^5 + r^3 = r^3\,(r^2 + 1) = 0.$$

Como zero é raiz de multiplicidade três, uma solução geral da edo (6.38) é

$$y_h(x) = k_1 x^2 + k_2\,x + k_3 + k_4\,\operatorname{sen} x + k_5\,\cos x.$$

Nosso objetivo agora é tentar encontrar uma solução da edo (6.37) escolhendo convenientemente valores para as constantes $k_1, \ldots, k_5$. Como $k_4 \operatorname{sen} x + k_5 \cos x$ é uma solução geral de

$$y'' + y = 0,$$

para acharmos uma solução particular da equação não-homogênea, podemos tomar $k_4 = k_5 = 0$ (por quê?) e vamos determinar as demais constantes de modo que $y_p(x) = k_1 x^2 + k_2 x + k_3$ seja solução particular de (6.37). Queremos que

$$y_p'' + y_p = 2\,k_1 + k_1\,x^2 + k_2\,x + k_3 = 3\,x^2 + 4.$$

Logo,

$$k_1 = 3, \quad k_2 = 0, \quad k_3 + 2k_1 = 4$$

e

$$y_p(x) = k_1\,x^2 + k_2\,x + k_3 = 3\,x^2 - 2$$

é solução de (6.37).
Consideremos agora a edo:

Exemplo 93.

$$y'' - 3\,y' + 2\,y = 2\,e^{2x}. \tag{6.39}$$

Como $r = 2$ é raiz de $r - 2$, podemos tomar $T_1(y) = y' - 2$. Temos

$$T_1\big(2\,e^{2x}\big) = (2\,e^{2x})' - 2(2\,e^{2x}) = 4\,e^{2x} - 4\,e^{2x} = 0.$$

Portanto, aplicando T_1 a (6.39), temos que resolver a edo

$$y''' - 5\,y'' + 8\,y' - 4\,y = T_1\big(y'' - 3\,y' + 2\,y\big) = T_1\big(2\,e^{2x}\big) = 0 \tag{6.40}$$

cuja equação característica é dada por:

$$r^3 - 5\,r + 8\,r - 4 = (r-2)^2(r-1) = 0,$$

sendo $r = 2$ raiz repetida de multiplicidade dois, uma solução geral da edo (6.40) é da forma:

$$y_h(x) = (k_1\,x + k_2)\,e^{2x} + k_3\,e^x$$

Como $k_2\,e^{2x}+k_3\,e^x$ é uma solução geral da edo homogênea associada à edo (6.39), para acharmos uma solução particular da edo não-homogênea, podemos tomar $k_2 = k_3 = 0$ e procurar uma solução particular de (6.39) na forma: $y_p(x) = k_1\,x\,e^{2x}$. Logo:

$$\begin{aligned} y_p'' - 3\,y_p' + 2\,y_p &= k_1(4\,x\,e^{2x} + 4\,e^{2x}) - 3\,k_1(2\,x\,e^{2x} + e^{2x}) + 2\,k_1(x\,e^{2x}) \\ &= (4\,x + 4 - 6\,x - 3 + 2\,x)k_1\,e^{2x} = 2\,e^{2x}. \end{aligned}$$

Logo, $k_1 = 2$ e

$$y_p(x) = k_1 x e^{2x} = 2\,x e^{2x}$$

Observação 25.

No exemplo acima tínhamos $T(y) = y'' - 3\,y' + 2\,y$, $T_1(y) = y' - 2$ e $r(x) = e^{2x}$. Além disso, $r = 2$ era raiz de multiplicidade um das equações características de $T(y) = 0$ e de $T_1(y) = 0$ e era raiz de multiplicidade $2 = 1 + 1$ da equação carcaterística da edo:

$$T_1\big(T(y)\big) = y''' - 5\,y'' + 8\,y' - 4\,y = 0$$

cuja solução geral é:

$$y(x) = A_1\,x\,e^{2x} + A_2\,e^{2x} + A_3\,e^x.$$

Como $A_2\,e^{2x}+A_3\,e^x$ resolvem a edo $T(y) = 0$ quaisquer que sejam os valores de A_2 e A_3, podemos tomá-los iguais a zero; tomar $y_p(x) = A_1\,x\,e^{2x}$ e determinar o valor da constante A_1 de modo que $y_p(x)$ seja uma solução de $T(y) = r(x)$.

Consideraremos os casos em que $r(x)$ é da forma:

$$P_m(x)\,e^{kx}\,\cos wx \qquad \text{ou} \qquad P_m(x)\,e^{kx}\,\operatorname{sen} wx \tag{6.41}$$

onde $P_m(x)$ é um polinômio de grau m.
Suponha que $r(x)$ é da forma (6.41), então tome como uma solução experimental para y_p uma função da forma

$$y_p(x) = x^s\,\big((A_m\,x^m + \cdots + A_1\,x + A_0)\,e^{kx}\,\cos wx + (B_m\,x^m + \cdots + B_1\,x + B_0)\,e^{kx}\,\operatorname{sen} wx\big)$$

com s o menor inteiro não-negativo tal que nenhum termo em y_p duplica um termo de uma base da equação homogênea associada. Determine os coeficientes de y_p susbtituindo y_p na equação não-homogênea.

6.5 Exercícios

1. Determine a solução geral das edo'shomogêneas:

a) $y''' + 2y'' = 0.$

b) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$

c) $y''' + 2y'' + 2y' = 0.$

d) $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0.$

e) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$

f) $y^{(4)} - 5y''' + 6y'' + 4y' - 8y = 0.$

g) $y^{(4)} + 16y = 0.$

h) $y^{(4)} - 2y''' + y'' + 2y' - 2y = 0.$

i) $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0.$

j) $y''' - 4y'' + 5y' = 0.$

k) $y''' - 2y'' = 3x^2 - 2x + 1.$

l) $y''' - y'' - 2y' = x - 2.$

2. Usando o método dos coeficientes indeterminados, determine a solução geral das edo's:

a) $y''' - y'' - y' + y = 2e^x + 3.$

b) $y''' - 3y' - 2y = e^x(1 + x).$

3. Use o método de redução de ordem para resolver os seguintes problemas:

a) $(2 - t)y''' + (2t - 3)y'' - ty' + y = 0, \quad t < 2; \quad y_1(t) = e^t.$

b) $t^2(t + 3)y''' - 3t(t + 2)y'' + 6(1 + t)y' - 6y = 0; \quad y_1(t) = t^2.$

4. Considerando $x > 0$, determine uma solução geral de:

a) $x^3y''' + 4x^2y'' - 2y = 0.$

b) $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^4.$

5. Resolva o problema de valor inicial

a)

$$\begin{cases} y''' + 4y' = x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 2y' = x + e^x \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -\dfrac{1}{4}, \quad y''(0) = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

6. Use o método de variação de parâmetros para resolver os seguintes problemas:

a) $x^2y'' - xy' + y = \ln x \ , x > 0.$

b) $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x \ \ x > 0.$

c) $2x^2y'' + 7xy' + 3y = \cos(\sqrt{x}).$

7. Mostre que, se y_1 é uma solução de

$$y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = 0$$

então a substituição $y = v(t)y_1(t)$ nos leva à seguinte equação de segunda ordem para $p = v'$

$$y_1p'' + (3y_1' + p_1y_1)p' + (3y_1'' + 2p_1y_1' + p_2y_1)p = 0$$

8. Encontre uma solução geral de:

a) $y'' - 2y' - 2y = 0$.

b) $y''' + 10y'' + 25y' = 0$.

c) $6x^2y''' + 5xy' - y = 0$.

d) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x^4 + x^2$.

e) $y'' - 7y' + 10y = 24e^x$.

f) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

g) $y''' - 6y'' = 3 - \cos x$.

h) $y'' + 25y = 6 \operatorname{sen} x$.

i) $3y''' + 10y'' + 15y' + 4y = 0$.

j) $y'' - 3y' + 5y = 4x^3 - 2x$.

k) $y''' - 5y'' + 6y' = 8 + 2 \operatorname{sen} x$.

l) $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{tg} x$.

m) $x^3y''' = 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$.

n) $y'' - 4y' + 4y = 2e^x + 4x - 12$.

o) $\dfrac{d^3u}{dt^3} + \dfrac{d^2u}{dt^2} - 2u = 0$.

p) $y^{(4)} + y''' + y'' = 0$.

q) $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$.

r) $y'' + 2y' + y = \operatorname{sen} x + 3\cos 2x$.

s) $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$.

t) $y'' + 2y' + y = \operatorname{sen} x + 3\cos 2x$.

u) $y^{(4)} + 2y'' + y = (x-1)^2$.

v) $y'' + y' = 3$.

w) $y''' + y'' = 8x^2$.

x) $y'' - y' - 12y = e^{4x}$.

y) $y'' + 6y' + 9y = -xe^{4x}$.

z) $y'' - y = x^2e^x + 5$.

9. Sabendo que $y_1(x)$ é uma solução da edo dada, determine uma solução geral de:

a) $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y_1(x) = e^{2x}$.

b) $y'' + 16y = 0,\ y_1(x) = \cos 4x$.

c) $y'' - 4y = 2,\ y_1(x) = e^{-2x}$.

d) $y'' - 3y' + 2y = 5e^{3x},\ y_1(x) = e^x$.

e) $x^2y'' - xy' + 2y = 0, \ y_1(x) = x \operatorname{sen}(\ln x)$.

f) $(1-2x-x^2)y'' + 2(1+x)y' - 2y = 0, \ y_1(x) = x+1$.

10. Encontre uma solução geral de:

a) $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen} e^x$.

b) $x^2y'' - xy' + y = 2x$.

c) $xy^{(4)} + 6y''' = 0$.

d) $xy'' - 4y' = x^4$.

e) $y'' - 2y' + 5y = e^x \operatorname{sen} x$.

f) $y''' + 8y'' = -6x^2 + 9x + 2$.

g) $y^{(4)} - 2y''' + y'' = e^x + 1$.

h) $y''' - 3y'' = 3y' - y = e^x - x + 16$.

i) $y'' + 3y' = 2y = \dfrac{1}{1+e^x}$.

j) $3y'' - 6y' + 6y = e^x \sec x$.

k) $x^3y''' - 6y = 0$.

l) $x^2y'' + 9xy' - 20y = 0$.

11. Resolva os PVI's:

a) $\begin{cases} y''' + 12y'' + 36y' = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1, \\ y''(0) = -7 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} y''' - 2y'' + y' = 2 - 24e^x + 40e^{5x}, \\ y(0) = \frac{1}{2}, \\ y'(0) = \frac{5}{2} \\ y''(0) = -\frac{9}{2} \end{cases}$.

12. Encontre soluções particulares de:

a)
$$y'' - 6y' + 5y = -9e^{2x} \qquad \text{e} \qquad y'' - 6y' + 5y = 5x^2 + 3x - 16.$$

b) Use o item anterior para encontrar soluções particulares de
$$y''-6y'+5y = 5x^2+3x-16-9e^{2x} \qquad \text{e} \qquad y''-6y'+5y = -10x^2-6x+32+e^{2x}.$$

13. Suponha que $m_1 = 3, \ m_2 = -5$ e $m_3 = 1$ sejam raízes de multiplicidade $1, \ 2$ e 3, respectivamente, de um polinômio de grau seis. Escreva a solução geral da edo linear homogênea correspondente, se ela for:

a) uma equação com coeficientes constantes;

b) uma equação de Euler–Cauchy.

14. As raízes de uma equação característica cúbica são $r_1 = 4$ e $r_2 = r_3 = -5$. Determine uma equação diferencial linear homogênea correspondente? Sua resposta é a única possível? Discuta.

15. Ache a solução geral de $y''' + 6y'' + y' - 34y = 0$ sabendo que $y_1(x) = e^{-4x}\cos x$ é uma solução.

16. Considere a equação diferencial $ay'' + by' + cy = e^{kx}$, onde a, b, c e k são constantes com $a \neq 0$. A equação caracterísitca da equação homogênea associada é $ar^2 + br + c = 0$.

   a) Se k não for raiz da equação característica, mostre que podemos encontrar uma solução particular da forma $y_p(x) = Ae^{kx}$, onde $A = \dfrac{1}{ak^2 + bk + c}$.

   b) Se k for uma raiz de multiplicidade um da equação característica , mostre que podemos encontrar uma solução particular da forma $y_p(x) = Axe^{kx}$, onde $A = \dfrac{1}{2ak + b}$. Explique como sabemos que $k \neq \dfrac{b}{2a}$.

   c) Se k for uma raiz de multiplicidade dois da equação característica, mostre que podemos encontrar uma solução particular da forma $y_p(x) = Ax^2e^{kx}$, onde $A = \dfrac{1}{2a}$.

Capítulo 7

Exercícios Resolvidos

por Augusto César de Castro Barbosa

Neste capítulo, apresentamos uma coletânea de exercícios resolvidos relacionados a várias aplicações. Todo o conteúdo deste capítulo foi gentilmente cedido pelo professor Augusto César de Castro Barbosa do Departamento de Análise do IME/UERJ, a quem a autora agradece.

7.1 Aplicações à Biologia

1. Numa colméia, a razão de crescimento da população é uma função da população. Assim

$$\frac{dp}{dt} = f(p).$$

a) Calcular $p(t)$ para $f(p) = \beta p$, onde β é uma constante positiva, e determinar a população limite do sistema.

$$\frac{dp}{dt} = \beta p \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p}dp = \beta dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{p}dp = \beta \int dt \quad \Rightarrow \quad \ln p = \beta t + c$$

$$p = e^{\beta t + c} \quad \Rightarrow \quad p(t) = ke^{\beta t}, \quad \text{onde} \quad k = e^c$$

$$p(0) = p_0 \quad \Rightarrow \quad p_0 = ke^{\beta . 0} \quad \Rightarrow \quad k = p_0$$

$$p(t) = p_0 e^{\beta t}$$

No cálculo da população limite (supondo $p_0 > 0$) temos

$$p(t) = p_0 e^{\beta t} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} p(t) = +\infty$$

b) Encontrar $p(t)$ para $f(p) = \beta p - k^2p^2$, onde β e k são constantes positivas. Calcular novamente a população limite do sistema.

$$\frac{dp}{dt} = \beta p - kp^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\beta p - kp^2}dp = dt$$

$$\beta p - kp^2 = -(kp^2 - \beta p) = -k\left(p^2 - \frac{\beta}{k}p\right) = -k\left(p^2 - \frac{\beta}{k}p \pm \frac{\beta^2}{4k^2}\right)$$

$$= -k\left[\left(p - \frac{\beta}{2k}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4k^2}\right]$$

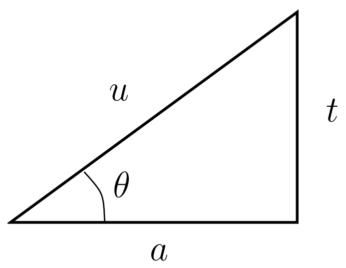
$$\int \frac{1}{\beta p - kp^2}dp = -\frac{1}{k}\int \frac{1}{\left(p - \frac{\beta}{2k}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4k^2}}dp \qquad \left(\text{Sejam} \quad u = p - \frac{\beta}{2k},\ a = \frac{\beta}{2k}\right)$$

$$\overset{\substack{u=a\sec\theta,\\ du=a\sec\theta\operatorname{tg}\theta d\theta}}{=} -\frac{1}{k}\int \frac{1}{u^2 - a^2}du = -\frac{1}{k}\int \frac{a\sec\theta\operatorname{tg}\theta}{a^2(\sec^2\theta - 1)}d\theta$$

$$= -\frac{1}{k}\int \frac{a\sec\theta\operatorname{tg}\theta}{a^2\operatorname{tg}^2\theta}d\theta = -\frac{1}{ak}\int \frac{\sec\theta}{\operatorname{tg}\theta}d\theta$$

$$= -\frac{1}{ak}\int \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}d\theta = -\frac{1}{ak}\int \operatorname{cossec}\theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{ak}\ln(\operatorname{cossec}\theta - \operatorname{cotg}\theta) + c$$



$$\sec\theta = \frac{u}{a} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{a}{u}$$

$$u^2 = a^2 + t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{u^2 - a^2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cossec}\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 - a^2}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{cotg}\theta = \frac{a}{\sqrt{u^2 - a^2}}$$

$$-\frac{1}{k}\int\frac{1}{u^2-a^2}du = -\frac{1}{ak}\ln\left[\frac{u-a}{\sqrt{u^2-a^2}}\right] = -\frac{1}{ak}\ln\left[\frac{u-a}{\sqrt{(u-a)(u+a)}}\right]$$
$$= -\frac{1}{ak}\ln\sqrt{\frac{u-a}{u+a}}$$

$$\int\frac{1}{\beta p-kp^2}dp = -\frac{1}{ak}\ln\sqrt{\frac{u-a}{u+a}}$$

Temos então que

$$-\frac{1}{ak}\ln\sqrt{\frac{u-a}{u+a}} = t+c_1 \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2ak}\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) = t+c_1$$
$$\Rightarrow\quad \ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) = -2akt+c_2 \quad \text{onde} \quad c_2=-2akc_1$$
$$\frac{u-a}{u+a} = c_3e^{-2akt} \quad\Rightarrow\quad u(1-c_3e^{-2akt}) = a(1+c_3e^{-2akt})$$
$$u = \frac{1+c_3e^{-2akt}}{1-c_3e^{-2akt}}a; \qquad u = p-\frac{\beta}{2k} \quad \text{e} \quad a=\frac{\beta}{2k}$$
$$-2akt = -2\frac{\beta}{2k}kt = -\beta t$$
$$p-\frac{\beta}{2k} = \frac{1+c_3e^{-\beta t}}{1-c_3e^{-\beta t}}\frac{\beta}{2k} \quad\Rightarrow\quad p=\frac{\beta}{2k}\left(\frac{1+c_3e^{-\beta t}+1-c_3e^{-\beta t}}{1-c_3e^{-\beta t}}\right)$$
$$p = \frac{\beta}{2k}\left(\frac{2}{1-c_3e^{-\beta t}}\right) = \frac{\beta}{k}\frac{1}{1-c_3e^{-\beta t}}$$
$$p(0)=p_0=\frac{\beta}{k}\frac{1}{1-c_3} \quad\Rightarrow\quad 1-c_3=\frac{\beta}{kp_0} \quad\Rightarrow\quad c_3=\frac{kp_0-\beta}{kp_0}$$

$$p = \frac{\beta}{k}\frac{1}{1-\frac{kp_0-\beta}{kp_0}e^{-\beta t}} = \frac{\beta}{k}\frac{kp_0}{kp_0+(\beta-kp_0)e^{-\beta t}}$$
$$= \frac{p_0\beta}{kp_0(1-e^{-\beta t})+\beta e^{-\beta t}} = \frac{p_0\beta e^{\beta t}}{kp_0(e^{\beta t}-1)+\beta}$$
$$= \frac{p_0e^{\beta t}}{1+\frac{kp_0}{\beta}(e^{\beta t}-1)}$$

Uma forma mais simples de obter $p(t)$:

$$\frac{dp}{dt} = \beta p - kp^2, \qquad f(p) = \beta p - kp^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\beta p - kp^2} dp = dt$$
$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{\beta p - kp^2} dp = \int dt$$

$$\frac{1}{\beta p - kp^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{\beta - kp} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\beta} \quad \text{e} \quad B = \frac{k}{\beta}$$
$$\frac{1}{\beta}\int \frac{1}{p} dp + \frac{k}{\beta}\int \frac{1}{\beta - kp} dp = \int dt$$
$$\frac{1}{\beta}\ln p + \frac{k}{\beta}\left(-\frac{1}{k}\right)\ln(\beta - kp) = t + c_1$$

$$\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{p}{\beta - kp}\right) = t + c_1 \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{p}{\beta - kp}\right) = \beta t + c_2$$
$$\frac{p}{\beta - kp} = c_3 e^{\beta t} \quad \Rightarrow \quad p = \beta c_3 e^{\beta t} - k c_3 e^{\beta t} p \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{\beta c_3 e^{\beta t}}{1 + k c_3 e^{\beta t}}$$
$$p(0) = p_0 \quad \Rightarrow \quad p_0 = \frac{\beta c_3}{1 + k c_3} \quad \Rightarrow \quad c_3 = \frac{p_0}{\beta - p_0 k}$$
$$p(t) = \frac{\dfrac{\beta p_0 e^{\beta t}}{\beta - p_0 k}}{1 + \dfrac{k p_0 e^{\beta t}}{\beta - p_0 k}} = \frac{\beta p_0 e^{\beta t}}{\beta - p_0 k + k p_0 e^{\beta t}} = \frac{p_0 e^{\beta t}}{1 - \dfrac{k}{\beta} p_0 (e^{\beta t} - 1)}$$

No cálculo da população limite temos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p_0 e^{\beta t}}{1 + \dfrac{k p_0}{\beta}(e^{\beta t} - 1)} = \lim_{t\to\infty} \frac{p_0 e^{\beta t}}{1 + \dfrac{k p_0}{\beta} e^{\beta t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{p_0 e^{\beta t}}{\dfrac{k p_0}{\beta} e^{\beta t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{p_0 \beta}{k p_0} = \frac{\beta}{k}$$

2. A população de uma cidade é de 1.000.000 de habitantes. Houve uma epidemia e 10% da população contraiu um vírus. Em sete dias esta percentagem cresceu para 20%. O vírus se propaga por contato direto entre indivíduos enfermos e sãos (logo, é proporcional ao número de contatos). A partir destes dados e supondo que o modelo seja fechado, isto é, a população se mantém constante, sem nascimentos, mortes ou migração, e os indivíduos tendo toda a liberdade de interagir, calcule:

a) A proporção de indivíduos enfermos e sãos, como uma função do tempo.

$$x = \frac{n_e}{n}, \qquad y = \frac{n_s}{n}, \qquad x + y = 1, \qquad n_e + n_s = n$$

onde

$$\begin{aligned} n &= \text{ número total de habitantes} \\ n_e &= \text{ número de indivíduos enfermos} \\ n_s &= \text{ número de indivíduos sãos} \\ x &= \text{ proporção de indivíduos enfermos} \\ y &= \text{ proporção de indivíduos sãos} \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} \propto xy, \qquad \frac{dx}{dt} = kxy$$

onde k é a constante de proporcionalidade dos contatos.

$$\begin{aligned} y = 1 - x \quad &\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = kx(1-x) \\ \frac{1}{x(1-x)}dx = kdt \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{1}{x(1-x)}dx = k\int dt \\ \frac{1}{x(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} \quad &\Rightarrow \quad 1 = A(1-x) + Bx \\ \Rightarrow \quad 1 = (B-A)x + A \quad &\Rightarrow \quad A = 1 \quad \text{e} \quad B = A = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{1-x}dx = k\int dt \\ \ln x - \ln(1-x) = kt + c \quad &\Rightarrow \quad \ln\frac{x}{1-x} = kt + c \\ \Rightarrow \quad \frac{x}{1-x} = Ae^{kt} \quad &\text{onde} \quad A = e^c \end{aligned}$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 10\% = \frac{1}{10}$$

$$\frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = Ae^{k.0} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{10}\frac{10}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{9}e^{kt}$$

$$t = 7 \quad \Rightarrow \quad x = 20\% = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{9}e^{7k}$$

$$\Rightarrow \quad e^{7k} = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{7}\ln\frac{9}{4}$$

Logo,

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{9}\exp\left(\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}\right)$$

Obs.: $\dfrac{x}{1-x} = z \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{z}{z+1}$

$$x = \frac{\exp\left(\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}\right)}{\exp\left(\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}\right) + 9}$$

$$y = 1 - x = 1 - \frac{\exp\left(\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}\right)}{\exp\left(\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}\right) + 9}$$

b) O tempo necessário para que a percentagem de indivíduos enfermos seja de 50%.

$$t? \mid x = 50\% = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{9}\exp\left(\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}\exp\left(\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}\right)$$

$$\exp\left(\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}\right) = 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{7}\ln\frac{9}{4} = \ln 9 \quad \Rightarrow \quad t = 7\frac{\ln 9}{\ln\frac{9}{4}} \approx 19 \text{ dias}$$

3. Em março de 1987, a população mundial atingiu 5.000.000.000, e estava crescendo à taxa de 380.000 pessoas por dia. Assumindo-se taxas de natalidade e mortalidade constantes, para quando se deve esperar uma população mundial de 10.000.000.000?

$$1987 \to P(0) = 5.10^9, \qquad \frac{dP}{dt}(0) = 3,8.10^5 d^{-1}$$

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{P}dP = kdt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{P}dP = k\int dt$$

$$\ln P = kt + c_1 \quad \Rightarrow \quad P(t) = ce^{kt} \quad \text{onde} \quad c = e^{c_1}$$

$$P(0) = 5.10^9 \quad \Rightarrow \quad 5.10^9 = ce^{k.0} \quad \Rightarrow \quad c = 5.10^9$$

$$P(t) = 5.10^9 e^{kt}$$

$$\frac{dP}{dt}(0) = 3,8 \times 10^5 \times 365 = 1,39.10^8 a^{-1}$$

$$\frac{dP}{dt} = kP = 5.10^9 k e^{kt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dt}(0) = 5.10^9 k$$

$$5.10^9 k = 1,39.10^8 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1,39.10^8}{5.10^9} = 2,78.10^{-2}$$

$$P(t) = 5.10^9 e^{0,028t}$$

$$t =? \mid P(t) = 10.10^9$$

$$10^{10} = 5.10^9 e^{0,028t} \quad \Rightarrow \quad 0,028t = \ln\frac{10^{10}}{5.10^9} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{0,028}\ln 2 \approx 25 \text{ anos}$$

A população atingirá 10^{10} em 2012.

7.2 Aplicações à Física

1. A velocidade de desintegração do Rádio é diretamente proporcional à sua massa no instante considerado.

   a) Determine a lei de variação da massa de Rádio em função do tempo, sabendo que no instante $t = 0$ a massa era m_0.

$$\frac{dm}{dt} = -km \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{m}dm = -kdt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{m}dm = -k\int dt$$
$$\ln m = -kt + c \quad \Rightarrow \quad m = Ae^{-kt} \quad \text{onde} \quad A = e^c$$
$$m(0) = m_0 \quad \Rightarrow \quad m_0 = Ae^{-k.0} \quad \Rightarrow \quad A = m_0$$
$$m(t) = m_0e^{-kt}$$

   b) Qual o intervalo de tempo necessário para que metade da massa inicial de Rádio se desintegre? ($k = 0,000436a^{-1}$)

$$\frac{m_0}{2} = m_0e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{1}{2} = -kt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{k}\ln 2 \approx 1590 \text{ anos}$$

2. Segundo a lei de Newton, a velocidade de resfriamento de um corpo no ar é proporcional à diferença da temperatura T do corpo e a temperatura T_a do ambiente. Se a temperatura do ambiente é de 20^oC e a temperatura do corpo cai em 20 minutos de 100^oC a 60^oC, dentro de quanto tempo sua temperatura descerá para 30^oC?

$$\frac{dT}{dt} = k(T_a - T) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T_a - T}dT = kdt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{T_a - T}dT = k\int dt$$
$$-\ln(T_a - T) = kt + c_1 \quad \Rightarrow \quad \ln(T_a - T) = -kt + c_2 \quad \Rightarrow \quad T_a - T = c_3e^{-kt}$$
$$\Rightarrow \quad T = T_a + c_3e^{-kt}$$

$$T(0) = 100^o\text{C} \quad \Rightarrow \quad 100 = 20 + c_3e^{-k.0} \quad \Rightarrow \quad c_3 = 80$$
$$T(t) = 20 + 80e^{-kt}$$
$$T(20) = 60^o\text{C} \quad \Rightarrow \quad 60 = 20 + 80e^{-20k} \quad \Rightarrow \quad e^{-20k} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \quad -20k = -\ln 2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{20}\ln 2$$
$$T(t) = 20 + 80\exp\left(-\frac{t}{20}\ln 2\right)$$

$$t? \mid T(t) = 30^o\text{C}$$

$$30 = 20 + 80\exp\left(-\frac{t}{20}\ln 2\right) \quad \Rightarrow \quad 10 = 80\exp\left(-\frac{t}{20}\ln 2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{8} = \exp\left(-\frac{t}{20}\ln 2\right)$$

$$-\ln 8 = -\frac{t}{20}\ln 2 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{20\ln 8}{\ln 2} = \frac{20.3.\ln 2}{\ln 2} = 60 \text{ min}$$

Obs.: $\ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2.$

3. Uma bola de golfe de massa $0,5kg$ recebe uma tacada que lhe imprime uma velocidade de $72km.h^{-1}$. Supondo-se que a bola permanece em contato permanente com o chão e sabendo-se que a força de atrito sobre ela é de $-5N$, qual a distância percorrida pela bola até ela parar?

$$m = 0,5kg, \qquad v = 72km.h^{-1} = 20m.s^{-1}, \qquad f_a = -5N$$

$$\frac{dp}{dt} = f_a \quad \Rightarrow \quad m\frac{dv}{dt} = f_a \quad \Rightarrow \quad dv = \frac{f_a}{m}dt$$

$$\int dv = \frac{f_a}{m}\int dt \quad \Rightarrow \quad v = \frac{f_a}{m}t + c_1$$

$$v(0) = 20 \quad \Rightarrow \quad 20 = \frac{f_a}{m}.0 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 20$$

$$v(t) = \frac{f_a}{m}t + 20 = -\frac{5}{0,5}t + 20 = -10t + 20$$

Como $\quad v = \dfrac{ds}{dt}$,

$$\frac{ds}{dt} = -10t + 20 \quad \Rightarrow \quad ds = (-10t + 20)dt$$

$$\int ds = \int(-10t + 20)dt \quad \Rightarrow \quad s = -5t^2 + 20t + c_2$$

$$s(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -5.0 + 20.0 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$s(t) = -5t^2 + 20t$$

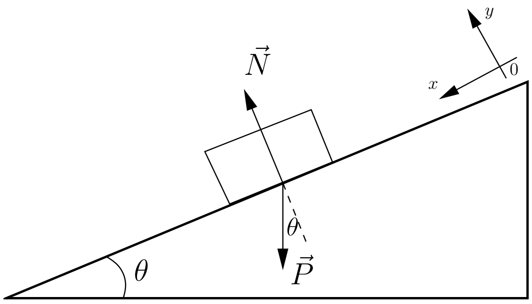
O tempo necessário para a bola parar $\rightarrow t \mid v(t) = 0$.

$$v(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad -10t + 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2s$$

$$s(2) = -5.2^2 + 20.2 = -20 + 40 = 20.$$

A bola percorre uma distância de $20m$ até parar.

4. Considere



Dadas as condições iniciais

$$\begin{cases} v(0) = v_0, \\ x(0) = x_0 \end{cases},$$

determine as expressões da velocidade e da posição em função do tempo.

$\vec{P} \quad \rightarrow \quad$ peso do corpo e

$\vec{N} \quad \rightarrow \quad$ reação normal da superfície do plano inclinado

Podemos decompor o movimento do corpo nas direções x e y.

1. **Direção** y.

$$P_y - N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P_y \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\theta \quad \text{onde} \quad P = mg$$

2. **Direção** x.

$$P_x = ma \quad \Rightarrow \quad mg\,\mathrm{sen}\,\theta = ma \quad \Rightarrow \quad g\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{dv}{dt} \quad \text{onde} \quad a = \frac{dv}{dt}$$

Obs.: $\quad v \equiv v_x$

$$dv = g\,\mathrm{sen}\,\theta dt \quad \Rightarrow \quad \int dv = g\,\mathrm{sen}\,\theta \int dt \quad \Rightarrow \quad v = g\,\mathrm{sen}\,\theta t + c$$

Como $\quad v(0) = v_0$,

$$v_0 = g\,\mathrm{sen}\,\theta.0 + c \quad \Rightarrow \quad c = v_0 \quad \Rightarrow \quad v = v_0 + g\,\mathrm{sen}\,\theta t$$

Temos também que

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = v_0 + g \operatorname{sen}\theta t$$

$$dx = (v_0 + g \operatorname{sen}\theta t)dt \quad \Rightarrow \quad \int dx = \int (v_0 + g \operatorname{sen}\theta t)dt$$

$$\Rightarrow \quad x = v_0 t + \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\theta t^2 + k$$

Como $\quad x(0) = x_0$,

$$x_0 = v_0.0 + \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\theta 0^2 + k \quad \Rightarrow \quad k = x_0$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\theta t^2$$

5. Vamos considerar agora o plano inclinado com atrito e o corpo sujeito à resistência do ar.

$\vec{f} \quad \rightarrow \quad$ força de atrito cinético de contato $\quad$ e $\quad \vec{R} \quad \rightarrow \quad$ resistência do ar

$$\vec{R} = -\gamma \vec{v}, \qquad \vec{f} = -\mu |\vec{N}| \widehat{u}_x$$

Direção x.

$$P_x + f + R = ma \quad \Rightarrow \quad mg \operatorname{sen}\theta - \mu N - \gamma v = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{1}{mg \operatorname{sen}\theta - \mu N - \gamma v} dv = \frac{1}{m} dt$$

$$\overset{(N = mg\cos\theta)}{\Rightarrow} \quad \int \frac{1}{mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - \gamma v} dv = \frac{1}{m} \int dt$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{\gamma} \ln\left[mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - \gamma v\right] = \frac{1}{m} t + c$$

$$\ln\left[mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - \gamma v\right] = -\frac{\gamma}{m} t + c_1$$

$$\Rightarrow \quad mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - \gamma v = c_2 e^{-\frac{\gamma t}{m}} \quad \text{onde} \quad c_2 = e^{c_1} \quad \text{e} \quad c_1 = -\gamma c$$

$$v = \frac{1}{\gamma}\left[mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - c_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right]$$

$$v(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{1}{\gamma}\left[mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - c_2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \gamma v_0 = mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - \gamma v_0$$

Temos então que

$$v(t) = \frac{1}{\gamma}\left\{mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - [mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) - \gamma v_0]\, e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right\}$$
$$v(t) = \frac{1}{\gamma}mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta)\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right) + v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$
$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \frac{1}{\gamma}mg(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) = v_L$$

6. Um assado pesando $2,5kgf$, inicialmente a 10^oC, é posto em um forno a 280^oC às cinco horas da tarde. Depois de $75min$ a temperatura $T(t)$ do assado é de 90^oC. Quando será a temperatura do assado igual a 150^oC?

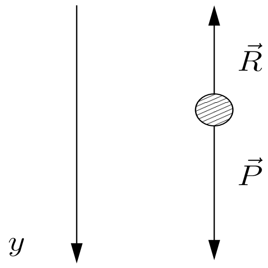
$$17\!:\!00 \quad \rightarrow \quad t = 0$$
$$T(0) = 10^o\text{C}, \qquad T(75) = 90^o\text{C}, \qquad T_a \quad \rightarrow \quad \text{ambiente}$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T_a - T) \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = k(280 - T)$$
$$\int \frac{1}{280 - T}dT = k\int dt \quad \Rightarrow \quad -\ln(280 - T) = kt + c$$
$$\Rightarrow \quad 280 - T = Be^{-kt} \quad \text{onde} \quad B = e^{-c}$$

$$T(0) = 10 \quad \Rightarrow \quad 280 - 10 = B.1 \quad \Rightarrow \quad B = 270$$
$$T(t) = 280 - 270e^{-kt}$$
$$T(75) = 90 \quad \Rightarrow \quad 280 - 270e^{-kt} = 90 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{1}{75}\ln\left(\frac{190}{270}\right)$$
$$k \approx 0,0047 \quad \Rightarrow \quad T(t) = 280 - 270e^{-0,0047t}$$

$$t = ? \mid T(t) = 150^o\text{C}$$
$$150 = 280 - 270e^{-0,0047t} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{0,0047}\ln\left(\frac{130}{270}\right)$$
$$t \approx 155min$$
$$T = 150^o\text{C} \qquad \text{por volta de } 19\!:\!35h$$

7. Considerando um pára-quedista em queda livre, sem o acionamento do pára-quedas, determine a sua velocidade como uma função do tempo e sua velocidade limite. Considere $v(0) = 0$.



$$\vec{P} = m\vec{g}$$
$$\vec{R} = -\gamma\vec{v}$$

$$mg - \gamma v = ma \quad \Rightarrow \quad mg - \gamma v = m\frac{dv}{dt}$$
$$\frac{1}{mg - \gamma v}dv = \frac{1}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{mg - \gamma v}dv = \frac{1}{m}\int dt$$
$$-\frac{1}{\gamma}\ln(mg - \gamma v) = \frac{t}{m} + c \quad \Rightarrow \quad \ln(mg - \gamma v) - \frac{\gamma t}{m} + k_1, \qquad k_1 = -\gamma c$$
$$mg - \gamma v = k_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t}, \qquad k_2 = e^{k_1}$$
$$\gamma v = mg - k_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{\gamma}\left(mg - k_2 e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)$$

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{\gamma}(mg - k_2) \quad \Rightarrow \quad k_2 = mg$$
$$v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)$$
$$v_L = \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{\gamma}(1 - 0) = \frac{mg}{\gamma}$$

8. Refaça o exercício anterior considerando o pára-quedas aberto. Considere $v(0) = v_0$.

$$m = m_1 + m_2, \qquad \vec{R} = -\lambda v^2 \widehat{u}_y$$
$$m_1 \quad \rightarrow \quad \text{massa do pára-quedista}$$
$$m_2 \quad \rightarrow \quad \text{massa do pára-quedas}$$

$$P - R = ma \quad \Rightarrow \quad mg - \lambda v^2 = m\frac{dv}{dt}$$
$$\frac{1}{mg - \lambda v^2}dv = \frac{1}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{mg - \lambda v^2}dv = \frac{1}{m}\int dt$$
$$\frac{1}{mg - \lambda v^2} = -\frac{1}{\lambda v^2 - mg} = \frac{A}{v\sqrt{\lambda} - \sqrt{mg}} + \frac{B}{v\sqrt{\lambda} + \sqrt{mg}}$$

$$-1 = (A+B)\sqrt{\lambda}v + (A-B)\sqrt{mg}$$
$$(A+B)\sqrt{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B$$
$$(A-B)\sqrt{mg} = -1 \quad \Rightarrow \quad -2B\sqrt{mg} = -1 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2\sqrt{mg}}$$
$$\frac{1}{mg-\lambda v^2} = -\frac{1}{2\sqrt{mg}}\left[\frac{1}{v\sqrt{\lambda}-\sqrt{mg}} - \frac{1}{v\sqrt{\lambda}+\sqrt{mg}}\right]$$

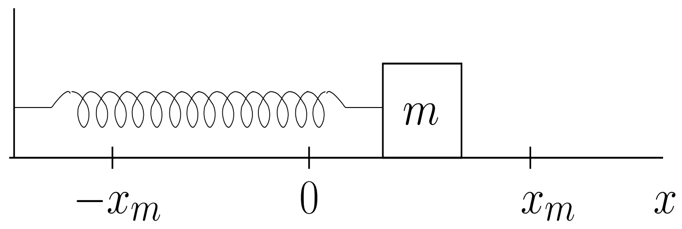
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{mg-\lambda v^2}dv &= -\frac{1}{2\sqrt{mg}}\left\{\int \frac{1}{v\sqrt{\lambda}-\sqrt{mg}}dv - \int \frac{1}{v\sqrt{\lambda}+\sqrt{mg}}dv\right\}\\ &= -\frac{1}{2\sqrt{mg\lambda}}\left[\ln(v\sqrt{\lambda}-\sqrt{mg}) - \ln(v\sqrt{\lambda}+\sqrt{mg})\right]\\ &= \frac{1}{m}\int dt = \frac{t}{m} + c\end{aligned}$$

$$\ln\left(\frac{v\sqrt{\lambda}-\sqrt{mg}}{v\sqrt{\lambda}+\sqrt{mg}}\right) = -2\sqrt{\frac{g\lambda}{m}}(t+c)$$
$$v\sqrt{\lambda}-\sqrt{mg} = (v\sqrt{\lambda}+\sqrt{mg})k\exp\left(-2t\sqrt{\frac{g\lambda}{m}}\right) \quad \text{onde} \quad k = \exp\left(-2c\sqrt{\frac{g\lambda}{m}}\right)$$

$$v\sqrt{\lambda}\left[1-k\exp\left(-2t\sqrt{\frac{g\lambda}{m}}\right)\right] = \sqrt{mg}\left(1+k\exp\left(-2t\sqrt{\frac{g\lambda}{m}}\right)\right)$$
$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}\frac{1+k\exp\left(-2t\sqrt{\frac{g\lambda}{m}}\right)}{1-k\exp\left(-2t\sqrt{\frac{g\lambda}{m}}\right)}$$

$$v(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}\frac{1+k}{1-k} \quad \Rightarrow \quad v_0 - v_0k = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}} + k\sqrt{\frac{mg}{\lambda}}$$
$$k\left(\sqrt{\frac{mg}{\lambda}} + v_0\right) = v_0 - \sqrt{\frac{mg}{\lambda}} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{v_0 - \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}}{v_0 + \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}}$$
$$v_L = \lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}$$

Movimento Harmônico Simples



$$F = ma, \quad \text{onde} \quad F = -kx$$

Logo,

$$-kx = ma \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = 0$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{onde} \quad \omega = \frac{k}{m} \qquad \text{obs.:} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Determine a solução de $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

Cálculo de x_h

Equação Homogênea: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

Equação Característica: $r^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \omega i \quad$ e $\quad r_2 = -\omega i$

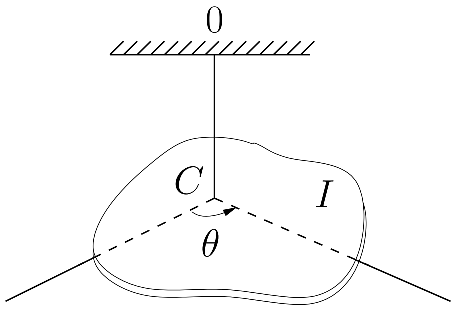
$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} = c_1(\cos\omega t + i \operatorname{sen}\omega t) + c_2(\cos\omega t - i\operatorname{sen}\omega t) \\ &= (c_1 + c_2)\cos\omega t + i(c_1 - c_2)\operatorname{sen}\omega t \end{aligned}$$

Fazendo

$$c_1 + c_2 = A\cos\phi \quad \text{e} \quad i(c_1 - c_2) = -A\operatorname{sen}\phi,$$
$$x(t) = A\cos\omega t\cos\phi - A\operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\phi \quad \Rightarrow \quad x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Oscilador de Torção

O pêndulo de torção consiste em um corpo suspenso por um fio (figura que segue) de modo que a linha OC passe pelo centro de massa do corpo.



Quando o corpo sofre uma rotação de ângulo θ, a partir de sua posição de equilíbrio, o fio é torcido e passa a exercer um torque τ sobre o corpo, em torno de OC, que se opõe ao deslocamento θ com módulo proporcional a θ. Podemos então escrever que, para pequenas torções,

$$\tau = -k\theta,$$

onde k é o coeficiente de torção do fio. Chamando de I o momento de inércia do corpo em relação ao eixo OC,

$$\tau = I\alpha \quad \Rightarrow \quad -k\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

onde α é a aceleração angular e

$$\omega^2 = \frac{k}{I}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$$

A partir da equação para o período, podemos determinar experimentalmente o momento de inércia de um corpo, deixando-o suspenso por um fio cujo coeficiente é conhecido e, em seguida, medindo o período T de oscilação.

Determine a solução de

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{I}\theta = 0.$$

Solução:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

Equação característica:

$$r^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \omega i \qquad \text{e} \qquad r_2 = -\omega i$$

$$\begin{aligned} \theta(t) &= c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} = c_1(\cos\omega t + i \operatorname{sen}\omega t) + c_2(\cos\omega t - i\operatorname{sen}\omega t) \\ &= (c_1 + c_2)\cos\omega t + i(c_1 - c_2)\operatorname{sen}\omega t \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \theta_0 \cos\phi \\ i(c_1 - c_2) = -\theta_0 \operatorname{sen}\phi \end{cases}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\omega t \cos\phi - \theta_0 \operatorname{sen}\omega t \operatorname{sen}\phi$$

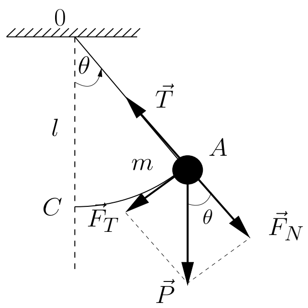
$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

ou

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{I}}t + \phi\right)$$

Pêndulo Simples

Um pêndulo simples consiste de uma partícula de massa m presa em um ponto O por um fio de comprimento l e massa desprezível.



As forças que agem no pêndulo são a tração $\vec{T}$ no fio e o peso $\vec{P}$, que está decomposto na figura em suas componentes tangencial e normal (radial).

Obs.:

$$\begin{array}{lcl} \text{Componente tangencial} & \rightarrow & \text{força restauradora} \\ \text{Componente normal} & \rightarrow & \text{força centrípeta} \end{array}$$

$$|\vec{F}_N| = |\vec{T}| = mg\cos\theta, \qquad |\vec{F}_T| = mg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Da figura

$$F_T = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

onde o sinal negativo indica que a força tem sentido oposto ao deslocamento. Mas,

$$F_T = ma_T = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d^2(l\theta)}{dt^2} = ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

onde $x = l\theta$. Logo,

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0.$$

No limite em θ, θ é muito pequeno,

$$\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta$$

e a equação se torna

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

Vemos desta equação que, dentro da aproximação de ângulos pequenos, o movimento do pêndulo simples é harmônico simples, com

$$w^2 = \frac{g}{l} \qquad \text{e} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Obs.: Em radianos

$$\begin{aligned} &\theta = 5^o \approx 0,087267 \text{ rad} \\ &\mathrm{sen}\,\theta = 0,087156 \\ &\mathrm{tg}\,\theta = 0,087489 \\ &\lim_{\theta\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\theta} = 1 \end{aligned}$$

Para um ângulo θ qualquer, pode ser demonstrado que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64}\operatorname{sen}^4\frac{\theta_0}{2} + \ldots\right)$$

Determine a solução da equação diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

Equação característica:

$$r^2 + \frac{g}{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}i = \omega i, \qquad r_2 = -\sqrt{\frac{g}{l}}i = -\omega i$$

$$\begin{aligned}\theta(t) &= c_1 e^{\omega i t} + c_2 e^{-\omega i t} = c_1(\cos\omega t + i\operatorname{sen}\omega t) + c_2(\cos\omega t - i\operatorname{sen}\omega t)\\ &= (c_1 + c_2)\cos\omega t + i(c_1 - c_2)\operatorname{sen}\omega t\\ &= \theta_0\cos\omega t\cos\phi - \theta_0\operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\phi = \theta_0\cos(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

onde

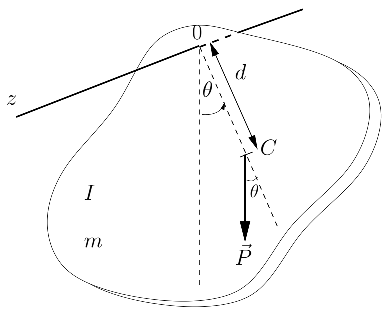
$$\theta_0\cos\phi = c_1 + c_2 \qquad \text{e} \qquad -\theta_0\operatorname{sen}\phi = i(c_1 - c_2)$$

Temos finalmente que

$$\theta(t) = \theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{l}{g}}t + \phi\right)$$

Pêndulo Físico

Denominamos pêndulo físico qualquer corpo rígido que pode oscilar livremente em torno de um eixo horizontal sob a ação da gravidade.



$$\begin{array}{rcl} C & \rightarrow & \text{centro de massa} \\ I & \rightarrow & \text{momento de inércia} \\ m & \rightarrow & \text{massa do corpo} \\ d & \rightarrow & \overline{OC} \end{array}$$

Obs.: Todos pêndulo reais são pêndulos físicos.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d \operatorname{sen} \theta & -d \cos \theta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = -dmg \operatorname{sen} \theta \vec{k}$$

A componente z do torque que age sobre o corpo é

$$\tau_z = -mgd \operatorname{sen} \theta.$$

Por outro lado,

$$\tau_z = I\alpha,$$

onde

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

é a aceleração angular. Daí

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd \operatorname{sen} \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \operatorname{sen} \theta = 0.$$

Supondo que as oscilações são pequenas ($\theta << 1$),

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0.$$

Neste caso,

$$\omega^2 = \frac{mgd}{I} \qquad \text{e} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}.$$

Determine a solução da equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0.$$

Equação característica:

$$r^2 + \frac{mgd}{I} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \sqrt{\frac{mgd}{I}} i = \omega i, \qquad r_2 = -\sqrt{\frac{mgd}{I}} i = -\omega i$$

$$\begin{aligned}\theta(t) &= c_1 e^{\omega i t} + c_2 e^{-\omega i t} = c_1(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) + c_2(\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t) \\ &= (c_1 + c_2) \cos \omega t + i(c_1 - c_2) \operatorname{sen} \omega t \\ &= \theta_0 \cos \omega t \cos \phi - \theta_0 \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \phi = \theta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{mgd}{I}} t + \phi \right)\end{aligned}$$

Movimento Harmônico Amortecido

Quando estudamos o oscilador harmônico, supomos as forças conservativas. Na prática, sempre existe dissipação de energia.

Vamos supor que, além da força restauradora

$$F = -kx,$$

age uma outra força de sentido oposto ao da velocidade

$$F' = -\lambda v,$$

onde λ é uma constante. Pela segunda lei de Newton,

$$ma = -kx - \lambda v \quad \Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Podemos reescrever esta equação como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

onde

$$2\gamma = \frac{\lambda}{m} \qquad \text{e} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

é a freqüência angular natural, sem amortecimento.

Equação característica:

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$
$$r_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \qquad r_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Consideremos o caso em que o amortecimento é pequeno, isto é $\gamma < \omega_0$. Assim,

$$r_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = -\gamma + \sqrt{-(\omega_0^2 - \gamma^2)} = -\gamma + \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, i$$
$$r_2 = -\gamma - \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, i$$
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad \Rightarrow \quad r_1 = -\gamma + wi, \qquad r_2 = -\gamma - wi$$
$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = c_1 e^{(-\gamma + i\omega)t} + c_2 e^{(-\gamma - i\omega)t} \\ &= e^{-\gamma t}\left[c_1(\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) + c_2(\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t)\right] \\ &= e^{-\gamma t}\left[(c_1 + c_2)\cos \omega t + i(c_1 - c_2)\operatorname{sen} \omega t\right] \\ &= e^{-\gamma t}\left[A \cos \omega t \cos \phi - A \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \phi\right] \end{aligned}$$

onde

$$c_1 + c_2 = A\cos\phi \qquad \text{e} \qquad i(c_1 - c_2) = -A \operatorname{sen} \phi$$
$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$$

Obs.:

1. Se o amortecimento é muito grande, γ pode se tornar maior do que ω_0. Neste caso, não há oscilações.

   $$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

   onde

   $$r_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \in \mathbb{R}$$
   $$r_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \in \mathbb{R}$$

2. A energia perdida pela partícula que executa oscilações amortecidas é absorvida pelo meio ambiente.
3. A freqüência é menor e o período é maior quando existe atrito.

9. Quando um corpo se move através de um fluido viscoso sob a ação de uma força $\vec{F}$, a força resultante é $F - K\eta v$, onde K depende da forma do corpo, v é a velocidade do corpo e η é o coeficiente de viscosidade. Obter a velocidade como função do tempo. Suponha que o movimento seja retilíneo, que a força aplicada seja constante e que $v(0) = v_0$.

$$F = ma \quad \Rightarrow \quad F - K\eta v = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{K\eta}{m}\left(v - \frac{F}{K\eta}\right) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{v - \dfrac{F}{K\eta}} dv = -\frac{K\eta}{m}\int dt$$

$$\ln\left(v - \frac{F}{K\eta}\right) = -\frac{K\eta}{m}t + c_1 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{F}{K\eta} + ce^{-\frac{K\eta}{m}t}$$

$$v(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{K\eta} + c = v_0 \quad \Rightarrow \quad c = v_0 - \frac{F}{K\eta}$$

$$v(t) = \frac{F}{K\eta} + \left(v_0 - \frac{F}{K\eta}\right)e^{-\frac{K\eta}{m}t}$$

Oscilações Forçadas

Consideremos uma força externa periódica agindo sobre um oscilador (amortecido). Podemos supor que, em geral, o período desta força não coincidirá com o período natural do oscilador. A força externa tem o papel de suprir continuamente o oscilador com energia, compensando a dissipação.

Considere

$$F = F_0 \cos\omega_f t,$$

a força aplicada e ω_f sua freqüência. Vamos supor que a partícula esteja sujeita também a uma força

$$F = -kx$$

e a uma força amortecedora

$$F' = -\lambda v.$$

A equação do movimento é

$$-kx - \lambda v + F_0\cos\omega_f t = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_f t \tag{7.1}$$

onde

$$2\gamma = \frac{\lambda}{m} \qquad \text{e} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

A solução de (7.1) tem a forma

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{7.2}$$

Cálculo de $x_h(t)$

Equação homogênea: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$

Do Exercício 8,

$$x_h(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi) \tag{7.3}$$

Cálculo de $x_p(t)$

Temos que

$$x_p(t) = B\cos\omega_f t + C\,\mathrm{sen}\,\omega_f t \tag{7.4}$$

$$x_p'(t) = -B\omega_f\,\mathrm{sen}\,\omega_f t + C\omega_f\cos\omega_f t \tag{7.5}$$

$$x_p''(t) = -B\omega_f^2\cos\omega_f t - C\omega_f^2\,\mathrm{sen}\,\omega_f t \tag{7.6}$$

Levando (7.4), (7.5) e (7.6) em (7.1),

$$-B\omega_f^2\cos\omega_f t - C\omega_f^2\,\mathrm{sen}\,\omega_f t + 2\gamma\left[-B\omega_f\,\mathrm{sen}\,\omega_f t + C\omega_f\cos\omega_f t\right] + \omega_0^2\left[B\cos\omega_f t + C\,\mathrm{sen}\,\omega_f t\right] = \frac{F_0}{m}\cos\omega_f t$$

$$\begin{cases} -B\omega_f^2 + 2C\gamma\omega_f + \omega_0^2 B = \dfrac{F_0}{m} \\ -C\omega_f^2 + 2B\gamma\omega_f + \omega_0^2 C = 0 \end{cases}$$

$$C(\omega_0^2 - \omega_f^2) = 2B\gamma\omega_f \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}B$$

$$-B\omega_f^2 + 2\gamma\omega_f\frac{2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}B + \omega_0^2 B = \frac{F_0}{m}$$

$$B\left[\frac{4\gamma^2\omega_f^2 + (\omega_0^2 - \omega_f^2)^2}{\omega_0^2 - \omega_f^2}\right] = \frac{F_0}{m} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega_f^2}{4\gamma^2\omega_f^2 + (\omega_0^2 - \omega_f^2)^2}$$

$$C = \frac{F_0}{m}\frac{2\gamma\omega_f}{4\gamma^2\omega_f^2 + (\omega_0^2 - \omega_f^2)^2}$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\
&= Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi) + \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega_f^2}{4\gamma^2\omega_f^2 + (\omega_0^2 - \omega_f^2)^2}\cos\omega_f t \\
&\qquad + \frac{F_0}{m}\frac{2\omega_f\gamma}{4\gamma^2\omega_f^2 + (\omega_0^2 - \omega_f^2)^2}\operatorname{sen}\omega_f t
\end{aligned}
$$

O primeiro termo do segundo membro, solução da equação homogênea, representa oscilações amortecidas. Este termo decresce quanto t cresce e, ao fim de certo tempo, os outros dois termos, que representam oscilações forçadas, são os que desempenham papel principal.

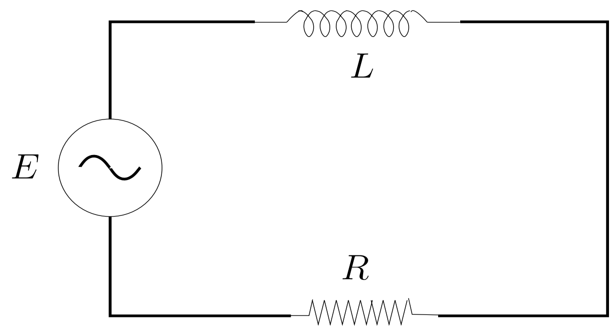
Fazendo

$$
A^*\cos\phi^* = \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega_f^2}{4\gamma^2\omega_f^2 + (\omega_0^2 - \omega_f^2)^2} \quad \text{e} \quad A^*\operatorname{sen}\phi^* = -\frac{F_0}{m}\frac{2\omega_f\gamma}{4\gamma^2\omega_f^2 + (\omega_0^2 - \omega_f^2)^2}
$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
x(t) &= Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi) + A^*\cos\phi^*\cos\omega_f t - A^*\operatorname{sen}\phi^*\operatorname{sen}\omega_f t \\
&= Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi) + A^*\cos(\omega_f t + \phi^*)
\end{aligned}
$$

Circuito RL



O comportamento dos elementos que constituem este circuito é regido por uma equação linear de primeira ordem que resulta da aplicação das seguintes leis:

1. Lei de Kirchoff

   A soma das quedas de potencial elétrico ao longo de uma malha do circuito é igual a zero.

2. Lei de Ohm

   A queda de tensão elétrica num condutor percorrido por uma corrente de intensidade I é proporcional a esta corrente. A lei se exprime pela equação

$$E = RI.$$

   A constante de proporcionalidade é a resistência do condutor.

3. A queda de tensão através de um indutor é proporcional à taxa de variação da corrente.

$$E = L\frac{dI}{dt},$$

   onde L é a indutância do indutor.

Temos então que

$$E(t) - RI - L\frac{dI}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

Determine a corrente como função do tempo para:

1. $E = K$ (constante)

$$\begin{aligned}
L\frac{dI}{dt} + RI = K \quad &\Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = \frac{K}{L} - \frac{RI}{L} \\
\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L}(K - RI) \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{K - RI}dI = \frac{1}{L}dt \\
\int \frac{1}{K - RI}dI &= \frac{1}{L}\int dt
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{R}\ln(K - RI) = \frac{1}{L}t + c_1 \quad \Rightarrow \quad \ln(K - RI) = -\frac{R}{L}t + c_2, \qquad c_2 = -Rc_1$$

$$K - RI = \exp\left\{-\frac{R}{L}t + c_2\right\} \quad \Rightarrow \quad RI = K - c\exp\left\{-\frac{R}{L}t\right\}, \qquad c = e^{c_2}$$

$$I(t) = \frac{K}{R} + c\exp\left\{-\frac{R}{L}t\right\}.$$

   Obs.: $\displaystyle\lim_{t\to\infty} I(t) = \frac{K}{R}.$

2. $E(t)=E_0 \operatorname{sen}\omega t$

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E_0\operatorname{sen}\omega t \quad\Rightarrow\quad \frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E_0}{L}\operatorname{sen}\omega t$$

$$I=uv \quad\Rightarrow\quad \frac{dI}{dt}=u\frac{dv}{dt}+v\frac{du}{dt}$$

$$u\frac{dv}{dt}+v\frac{du}{dt}+\frac{R}{L}uv=\frac{E_0}{L}\operatorname{sen}\omega t$$

$$u\left(\frac{dv}{dt}+\frac{R}{L}v\right)+v\frac{du}{dt}=\frac{E_0}{L}\operatorname{sen}\omega t$$

Cálculo de v

$$\frac{dv}{dt}+\frac{R}{L}v=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{v}dv=-\frac{R}{L}dt$$

$$\int\frac{1}{v}dv=-\frac{R}{L}\int dt \quad\Rightarrow\quad v=\exp\left\{-\frac{R}{L}t+c_1\right\}$$

$$v(t)=c_2e^{-\frac{R}{L}t}, \qquad c_2=e^{c_1}$$

Cálculo de u

$$v\frac{du}{dt}=\frac{E_0}{L}\operatorname{sen}\omega t \quad\Rightarrow\quad c_2e^{-\frac{R}{L}t}\frac{du}{dt}=\frac{E_0}{L}\operatorname{sen}\omega t$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{c_2}\frac{E_0}{L}e^{\frac{R}{L}t}\operatorname{sen}\omega t \quad\Rightarrow\quad \int du=\frac{1}{c_2}\frac{E_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\operatorname{sen}\omega t dt$$

Cálculo de $\int e^{ax}\operatorname{sen}bxdx$

$$\int wdz=wz-\int zdw; \qquad \begin{array}{l} z=e^{ax}, \quad dz=ae^{ax}dx \\ w=-\frac{1}{b}\cos bx, \quad dw=\operatorname{sen}bxdx \end{array}$$

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\operatorname{sen}bxdx &= -\frac{1}{b}\cos bxe^{ax}+\int\frac{1}{b}\cos bxae^{ax}dx \\ &= -\frac{1}{b}\cos bxe^{ax}+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx\end{aligned}$$

Cálculo de $\int e^{ax}\cos bxdx$

$$\int w'dz'=w'z'-\int z'dw'; \qquad \begin{array}{l} z'=e^{ax}, \quad dz'=ae^{ax}dx \\ w'=\frac{1}{b}\operatorname{sen}bx, \quad dw'=\cos bxdx \end{array}$$

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\cos bx dx &= \frac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx - \int \frac{1}{b}\operatorname{sen} bx a e^{ax} dx\\ &= \frac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\operatorname{sen} bx dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\operatorname{sen} bx dx &= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\left\{\frac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\operatorname{sen} bx dx\right\}\\ &= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\operatorname{sen} bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\operatorname{sen} bx dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\operatorname{sen} bx dx &= \frac{e^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{b^2}\\ \int e^{ax}\operatorname{sen} bx dx &= \frac{e^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}\\ a\equiv \frac{R}{L}, &\qquad b\equiv\omega\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int e^{\frac{R}{L}t}\operatorname{sen}\omega t dt &= \frac{e^{\frac{R}{L}t}\left(\dfrac{R}{L}\operatorname{sen}\omega t - \omega\cos\omega t\right)}{\dfrac{R^2}{L^2}+\omega^2} + c_3\\ &= \frac{Le^{\frac{R}{L}t}\left(R\operatorname{sen}\omega t - \omega L\cos\omega t\right)}{R^2+\omega^2L^2} + c_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u(t) &= \frac{1}{c_2}\frac{E_0}{L}\frac{Le^{\frac{R}{L}t}\left(R\operatorname{sen}\omega t - \omega L\cos\omega t\right)}{R^2+\omega^2L^2} + c_4\\ &= \frac{E_0e^{\frac{R}{L}t}}{c_2(R^2+\omega^2L^2)}\left(R\operatorname{sen}\omega t - \omega L\cos\omega t\right) + c_4\end{aligned}$$

Observação:

$$A\operatorname{sen} x - B\cos x = C\operatorname{sen} x\cos\delta - C\cos x\operatorname{sen}\delta = C\operatorname{sen}(x-\delta)$$

onde

$$A = C\cos\delta \qquad \text{e} \qquad B = C\operatorname{sen}\delta$$

Mas,

$$\cos\delta = \frac{A}{C} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\delta = \frac{B}{C}$$

Daí,

$$\cos^2\delta + \operatorname{sen}^2\delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}$$
$$A \operatorname{sen} x + B\cos x = \sqrt{A^2 + B^2}\operatorname{sen}(x - \delta)$$

com

$$\frac{\operatorname{sen}\delta}{\cos\delta} = \frac{\frac{B}{C}}{\frac{A}{C}} = \frac{B}{A} = \operatorname{tg}\delta \quad \Rightarrow \quad \delta = \operatorname{arctg}\frac{B}{A}$$

Temos então que

$$u(t) = \frac{E_0 e^{\frac{R}{L}t}}{c_2(R^2 + \omega^2 L^2)}\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\operatorname{sen}(\omega t - \delta) + c_4$$

onde

$$\delta = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}$$
$$u(t) = \frac{E_0 e^{\frac{R}{L}t}}{c_2\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\operatorname{sen}(\omega t - \delta) + c_4$$

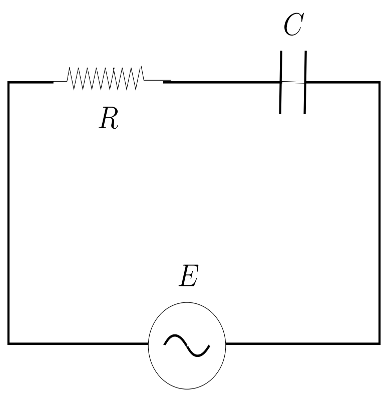
Portanto,

$$I(t) = u(t)v(t) = c_2 e^{-\frac{R}{L}t}\left\{\frac{E_0 e^{\frac{R}{L}t}}{c_2\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\operatorname{sen}(\omega t - \delta) + c_4\right\}$$
$$I(t) = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\operatorname{sen}(\omega t - \delta)$$

Note que o termo exponencial se aproxima de zero à medida que t tende para o infinito. Isto significa que, após um tempo suficientemente longo, a corrente $I(t)$ oscila de maneira praticamente harmônica.

Obs.: Se $L = 0$, as oscilações de $I(t)$ se encontram em fase com as de $E(t)$.

Circuito RC



O comportamento dos elementos que constituem este circuito é regido por uma equação diferencial que resulta da aplicação das seguintes leis:

1. Lei de Kirchoff

   A tensão aplicada em um circuito fechado é igual à soma das quedas de tensão no resto do circuito.

2. Lei de Ohm

   A queda de tensão E através de um resistor é proporcional à corrente instantânea I,
   $$E = RI,$$
   onde R é a resistência do resistor.

3. A queda de tensão através de um capacitor é proporcional ao valor da carga elétrica instantânea armazenada no condutor,
   $$E = \frac{Q}{C},$$
   onde C é a capacitância.

Como $\quad I(t) = \dfrac{dQ}{dt},$

$$dQ = I(t)dt \quad \Rightarrow \quad Q = \int I(t)dt$$

e

$$E(t) = \frac{1}{C}\int I(t)dt.$$

Logo,

$$RI + \frac{1}{C}\int I(t)dt = E(t)$$

Derivando em relação ao tempo,

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}$$

Obtenha uma expressão para I em função do tempo, a partir da última equação.

Temos então que

$$\begin{aligned} I = uv \quad &\Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt} \\ u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt} &+ \frac{1}{CR}uv = \frac{1}{R}\frac{dE}{dt} \\ v\left(\frac{du}{dt} + \frac{u}{CR}\right) &+ u\frac{dv}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dE}{dt} \end{aligned}$$

Cálculo de u

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \frac{u}{CR} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{u}du = -\frac{1}{CR}dt \\ \int \frac{1}{u}du = -\frac{1}{CR}\int dt \quad &\Rightarrow \quad \ln u = -\frac{1}{CR}t + c_1 \\ u = c_2 \exp\left\{-\frac{1}{CR}t\right\}, &\qquad c_2 = e^{c_1} \end{aligned}$$

Cálculo de v

$$\begin{aligned} c_2 e^{-\frac{t}{CR}}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dE}{dt} \quad &\Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{c_2 R}\frac{dE}{dt}e^{\frac{t}{CR}} \\ v &= \frac{1}{c_2 R}\int e^{\frac{t}{CR}}\frac{dE}{dt}dt + c_3 \\ I &= uv \\ I(t) &= c_2 e^{-\frac{t}{RC}}\left\{\frac{1}{c_2 R}\int e^{\frac{t}{CR}}\frac{dE}{dt}dt + c_3\right\} \\ &= e^{-\frac{t}{RC}}\left\{\frac{1}{R}\int e^{\frac{t}{CR}}\frac{dE}{dt}dt + k\right\}, \qquad k = c_2 c_3 \end{aligned}$$

10. Na última equação, obtenha $I(t)$ para:

1. $E = A$ (constante)

$$I(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \left\{ \frac{1}{R} \int e^{\frac{t}{CR}} \frac{dE}{dt} dt + k \right\},$$
$$E = A \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = 0$$
$$I(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \{k_1 + k\} = k_2 e^{-\frac{t}{RC}}$$

2. $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \omega t$

$$\frac{dE}{dt} = \omega E_0 \cos \omega t$$
$$I(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \left\{ \frac{1}{R} \int e^{\frac{t}{CR}} \omega E_0 \cos \omega t dt + k \right\}$$
$$= e^{-\frac{t}{RC}} \left\{ \frac{\omega E_0}{R} \int e^{\frac{t}{CR}} \cos \omega t dt + k \right\}$$

Cálculo de $\displaystyle\int e^{ax} \cos bx dx$

$$\int u dv = uv - \int v du; \qquad \begin{array}{l} u = e^{ax}, \quad du = a e^{ax} dx \\ v = \dfrac{1}{b} \operatorname{sen} bx, \quad dv = \cos bx dx \end{array}$$
$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx - \int \frac{1}{b} \operatorname{sen} bx a e^{ax} dx$$
$$= \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx$$

Cálculo de $\displaystyle\int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx$

$$\int u' dv' = u'v' - \int v' du'; \qquad \begin{array}{l} u' = e^{ax}, \quad du' = a e^{ax} dx \\ v' = -\dfrac{1}{b} \cos bx, \quad dv' = \operatorname{sen} bx dx \end{array}$$
$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \int \frac{1}{b} \cos bx a e^{ax} dx$$
$$= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

Logo,

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx - \frac{a}{b}\left\{-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx\right\}$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx dx$$

$$\frac{a^2+b^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}(b\operatorname{sen} bx + a\cos bx)}{b^2}$$

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\operatorname{sen} bx)}{a^2+b^2}$$

$$a \equiv -\frac{1}{RC}, \qquad b \equiv \omega$$

$$I(t) = e^{-\frac{t}{RC}}\left\{\frac{\omega E_0}{R}\frac{e^{\frac{t}{RC}}\left(\frac{1}{RC}\cos\omega t + \omega\operatorname{sen}\omega t\right)}{\frac{1}{R^2C^2}+\omega^2} + k\right\}$$

$$= \frac{\omega E_0}{R(1+R^2C^2\omega^2)}\frac{R^2C^2}{RC}\left(\cos\omega t + \omega RC\operatorname{sen}\omega t\right) + ke^{-\frac{t}{RC}}$$

Mas,

$$\cos\omega t + \omega RC\operatorname{sen}\omega t = -c'\operatorname{sen}\delta\cos\omega t + c'\cos\delta\operatorname{sen}\omega t$$

onde

$$-c'\operatorname{sen}\delta = 1 \qquad \text{e} \qquad c'\cos\delta = \omega RC$$

$$\cos\omega t + \omega RC\operatorname{sen}\omega t = c'(\cos\delta\operatorname{sen}\omega t - \operatorname{sen}\delta\cos\omega t) = c'\operatorname{sen}(\omega t - \delta)$$

$$(-c'\operatorname{sen}\delta)^2 + (c'\cos\delta)^2 = 1 + (\omega RC)^2 \quad \Rightarrow \quad c'^2(\operatorname{sen}^2\delta + \cos^2\delta) = 1 + (\omega RC)^2$$

$$\Rightarrow \quad c' = \sqrt{1+(\omega RC)^2}$$

$$\cos\omega t + \omega RC\operatorname{sen}\omega t = \sqrt{1+(\omega RC)^2}\operatorname{sen}(\omega t - \delta)$$

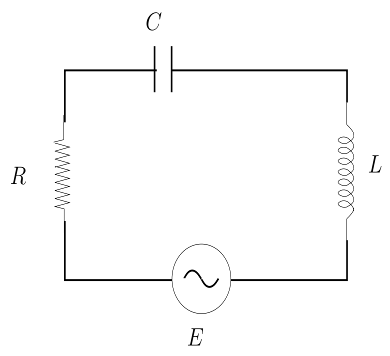
$$I(t) = \frac{\omega E_0 C}{1+R^2C^2\omega^2}\sqrt{1+(\omega RC)^2}\operatorname{sen}(\omega t - \delta) + ke^{-\frac{t}{RC}}$$

$$= \frac{\omega E_0 C}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\operatorname{sen}(\omega t - \delta) + ke^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\begin{cases} -c'\operatorname{sen}\delta = 1 \\ c'\cos\delta = \omega RC \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{-c'\operatorname{sen}\delta}{c'\cos\delta} = \frac{1}{\omega RC}$$

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{1}{\omega RC} \qquad \text{ou} \qquad \delta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Circuito RLC



A equação diferencial de segunda ordem que descreve o comportamento da corrente elétrica em função do tempo nesse circuito resulta da aplicação das seguintes leis:

1. Lei de Kirchoff

   A tensão aplicada em um circuito fechado é igual à soma das quedas de tensão no resto do circuito.

2. Lei de Ohm

   A diferença de potencial aplicada aos terminais de um resistor metálico mantido à temperatura constante, é diretamente proporcional à intensidade de corrente elétrica que o atravessa. Escrevemos
   $$E = RI.$$

3. A queda de tensão através de um indutor é proporcional à taxa de variação da corrente. Isto é,
   $$E = L\frac{dI}{dt}.$$

4. A queda de tensão através de um capacitor é proporcional ao valor da carga elétrica armazenada no condutor. Temos então que
   $$E = \frac{Q}{C}.$$

Portanto
$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t).$$

Derivando em relação ao tempo, obtemos

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}.$$

Considerando $\quad E = E_0 \operatorname{sen} \omega_l t$,

$$\frac{dE}{dt} = \omega_l E_0 \cos \omega_l t$$

e ficamos com

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \omega_l E_0 \cos \omega_l t$$
$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = \frac{\omega_l E_0}{L} \cos \omega_l t$$

ou

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2b\frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = F \cos \omega_l t$$

onde

$$\frac{R}{L} = 2b, \qquad \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{\omega_l E_0}{L} = F.$$

Resolva a equação diferencial acima.

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2b\frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = F \cos \omega_l t \quad \Rightarrow \quad I(t) = I_h(t) + I_p(t)$$

Solução da equação homogênea

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2b\frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0$$

Equação Característica: $\quad r^2 + 2br + \omega_0^2 = 0$

$$r = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$$

Consideremos o caso em que $b^2 < \omega_0^2$. Neste caso,

$$I_h(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = c_1 \exp[(-b + i\omega)t] + c_2 \exp[(-b - i\omega)t]$$

onde $\quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$

$$\begin{aligned} I_h(t) &= e^{-bt}\left[c_1(\cos\omega t + i\operatorname{sen}\omega t) + c_2(\cos\omega t - i\operatorname{sen}\omega t)\right] \\ &= e^{-bt}\left[(c_1+c_2)\cos\omega t + (c_1-c_2)\operatorname{sen}\omega t\right] \\ &= e^{-bt}\left[A\cos\phi\cos\omega t - A\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\omega t\right] \\ I_h(t) &= e^{-bt}A\cos(\omega t+\phi) \end{aligned}$$

onde

$$c_1 + c_2 = A\cos\phi \qquad \text{e} \qquad c_1 - c_2 = -A\operatorname{sen}\phi$$

Solução particular

$$I_p(t) = P\cos\omega_l t + Q\operatorname{sen}\omega_l t \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dI}{dt} = -P\omega_l\operatorname{sen}\omega_l t + Q\omega_l\cos\omega_l t \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2I}{dt^2} = -P\omega_l^2\cos\omega_l t - Q\omega_l^2\operatorname{sen}\omega_l t$$

Levando na equação

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2b\frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = F\cos\omega_l t,$$

obtemos

$$\begin{aligned} -P\omega_l^2\cos\omega_l t - Q\omega_l^2\operatorname{sen}\omega_l t + 2b\left[-P\omega_l\operatorname{sen}\omega_l t + Q\omega_l\cos\omega_l t\right] \\ + \omega_0^2\left[P\cos\omega_l t + Q\operatorname{sen}\omega_l t\right] = F\cos\omega_l t \end{aligned}$$

$$\left[-P\omega_l^2 + 2bQ\omega_l + \omega_0^2 P\right]\cos\omega_l t + \left[-Q\omega_l^2 - 2bP\omega_l + \omega_0^2 Q\right]\operatorname{sen}\omega_l t = F\cos\omega_l t$$

$$\begin{cases} -P\omega_l^2 + 2Qb\omega_l + \omega_0^2 P = F \\ -Q\omega_l^2 - 2Pb\omega_l + \omega_0^2 Q = 0 \end{cases}$$

$$2Pb\omega_l = Q(\omega_0^2 - \omega_l^2) \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{2b\omega_l}{\omega_0^2 - \omega_l^2}P$$

$$-P\omega_l^2 + 2b\omega_l\frac{2b\omega_l}{\omega_0^2-\omega_l^2}P + \omega_0^2 P = F \quad \Rightarrow \quad P\left[\frac{4b^2\omega_l^2 + (\omega_0^2-\omega_l^2)^2}{\omega_0^2-\omega_l^2}\right] = F$$

$$P = \frac{\omega_0^2-\omega_l^2}{4b^2\omega_l^2 + (\omega_0^2-\omega_l^2)^2}F \qquad \text{e} \qquad Q = \frac{2b\omega_l}{4b^2\omega_l^2 + (\omega_0^2-\omega_l^2)^2}F$$

$$I(t) = Ae^{-bt}\cos(\omega t + \phi) + F\frac{\omega_0^2 - \omega_l^2}{4b^2\omega_l^2 + (\omega_0^2 - \omega_l^2)^2}\cos\omega_l t$$
$$+ F\frac{2b\omega_l}{4b^2\omega_l^2 + (\omega_0^2 - \omega_l^2)^2}\,\mathrm{sen}\,\omega_l t$$

Observe que primeiro termo do segundo membro da última equação representa oscilações amortecidas. Quando t cresce, este termo decresce, de modo que ao final de um certo intervalo de tempo, os outros dois termos desempenharão o papel principal.

Fazendo

$$G\cos\delta = F\frac{\omega_0^2 - \omega_l^2}{4b^2\omega_l^2 + (\omega_0^2 - \omega_l^2)^2} \qquad \text{e} \qquad G\,\mathrm{sen}\,\delta = F\frac{2b\omega_l}{4b^2\omega_l^2 + (\omega_0^2 - \omega_l^2)^2},$$

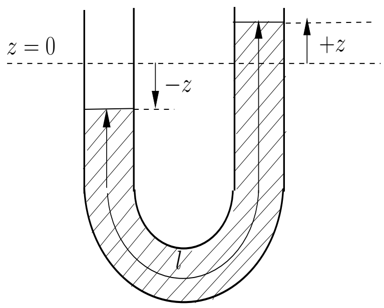
obtemos

$$I(t) = Ae^{-bt}\cos(\omega t + \phi) + G\cos(\omega_l t + \delta)$$

onde

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{2b\omega_l}{\omega_0^2 - \omega_l^2}.$$

11. Um tubo em U está cheio com um líquido homogêneo, que é levemente comprimido em um dos lados do pistão. O pistão é removido e o nível do líquido em cada ramo oscila. Determine a altura do nível do líquido em um dos ramos em função do tempo.



Consideramos o fluido ideal.

Características do fluido ideal:

1. Escoamento uniforme $\quad\rightarrow\quad$ a velocidade do fluido em qualquer ponto não muda com o tempo, em magnitude, em direção e em sentido.

2. Escoamento incompressível $\rightarrow$ a densidade do fluido é constante.
3. Escoamento não-viscoso $\rightarrow$ um objeto se movendo através do fluido não experimenta nenhuma força resistiva devido à viscosidade.
4. Escoamento irrotacional $\rightarrow$ um corpo imerso no fluido não gira em torno do eixo que passa pelo seu centro de massa.

Quando o nível em um dos ramos do tubo em U desce de uma quantidade z, a diferença de pressão do líquido entre os dois ramos é

$$\Delta p = 2\rho g z,$$

onde ρ é a densidade do líquido e g é a aceleração da gravidade. Dessa forma, a força restauradora pode ser escrita como

$$F = -A\Delta p = 2\rho A g z,$$

onde A é a área da seção transversal do tubo. Temos então que

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -2\rho A g z \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{2\rho A g}{m} z = 0.$$

Mas,

$$\frac{2\rho A g}{m} = \frac{2\rho A g}{\rho V} = \frac{2\rho A g}{\rho A l} = \frac{2g}{l}$$

Daí,

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{2g}{l} z = 0,$$

onde l é o comprimento total da coluna líquida e $m = \rho V$ é a massa total de líquido.

Equação Característica: $r^2 + \dfrac{2g}{l} = 0$

$$r_1 = \sqrt{\frac{2g}{l}}\,i, \qquad r_2 = -\sqrt{\frac{2g}{l}}\,i$$

$$z(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

onde $\quad \omega = \sqrt{\dfrac{2g}{l}}$

$$\begin{aligned} z(t) &= c_1(\cos\omega t + i\,\mathrm{sen}\,\omega t) + c_2(\cos\omega t - i\,\mathrm{sen}\,\omega t) \\ &= (c_1 + c_2)\cos\omega t + (c_1 - c_2)\,\mathrm{sen}\,\omega t \\ &= A\cos\phi\cos\omega t - A\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\omega t = A\cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

onde

$$c_1 + c_2 = A\cos\phi \qquad \text{e} \qquad c_1 - c_2 = -A\,\mathrm{sen}\,\phi$$

$$z(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{l}}t + \phi\right)$$

Capítulo 8

Transformada de Laplace

A transformada de Laplace permitirá que obtenhamos a solução de uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes através da resolução de uma equação algébrica.
A transformada de Laplace de uma função f é uma transformada integral. Isto é, ela é da forma:

$$Y(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t)\, f(t)\, dt. \tag{8.1}$$

A função $K(s,t)$ é chamada de núcleo da transformada.
Para definir a transformada de Laplace, precisaremos da noção de integral imprópria. Veja **[L]**.

Definição 30. *Seja $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. A transformada de Laplace da função $f(t)$ é denotada e definida por:*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\, f(t)\, dt,$$

se a integral imprópria converge, pelo menos para algum valor de s.

No caso da transformada de Laplace, o núcleo da transformada é e^{-st}.

Exemplo 94. $f(t) = 1,\ t \geq 0$

Aplicamos a definição:

$$F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-st}\, dt = \lim_{A\to\infty} \big(-\frac{e^{-sA}}{s} + \frac{1}{s}\big) = \frac{1}{s},$$

se $s > 0$.

Exemplo 95. $f(t) = e^{kt},\ t \geq 0$

Aplicamos a definição:

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}\{e^{kt}\} &= \int_0^\infty e^{-st}\, e^{kt}\, dt = \int_0^\infty e^{(k-s)t}\, dt \\ &= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{(k-s)t}\, dt = \lim_{A\to\infty} \big(-\frac{e^{(k-s)A}}{k-s} - \frac{1}{k-s}\big) \\ &= \frac{1}{s-k}, \end{aligned}$$

se $s > k$.

Exemplo 96. $f(t) = t^3,\ t \geq 0$

Aplicando a definição:

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}\{t^3\} &= \int_0^\infty e^{-st}\, t^3\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st}\, t^3\, dt \\ &= \lim_{A\to\infty} \left[-\frac{e^{-sA}A^3}{s} - \frac{3e^{-sA}A^2}{s^2} - \frac{6e^{-sA}A}{s^3} - \frac{6e^{-sA}}{s^4} + \frac{6}{s^4} \right] = \frac{6}{s^4}, \end{aligned}$$

se $s > 0$.

Exemplo 97. $f(t) = \begin{cases} 0 & se \quad 0 \leq t < 5 \\ 5 & se \quad 5 \leq t \end{cases}$

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\, f(t) dt = \lim_{A\to\infty} \int_5^A 5\, e^{-st}\, dt \\ &= 5 \lim_{A\to\infty} \left[\frac{e^{-5s}}{s} - \frac{e^{-sA}}{s} \right] = \frac{5\, e^{-5s}}{s}, \end{aligned}$$

se $s > 0$.

Como a transformada de Laplace envolve integração, é natural que a transformada herede propriedades da integral. Uma destas propriedades é a linearidade.

Sejam f e g duas funções cujas transformada de Laplace existem para $s > a_1$ e $s > a_2$, respectivamente. Então, para $s > \max\{a_1, a_2\}$, então:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)\, dt \\ &= \alpha \int_0^\infty e^{-st}\, f(t) + \beta \int_0^\infty e^{-st}\, g(t) dt \\ &= \alpha\, \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\, \mathcal{L}\{g(t)\}, \quad \text{para todo} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Acabamos de provar o seguinte teorema:

Teorema 13. *Se α e β são constantes, então*

$$\mathcal{L}\{\alpha\, f(t) + \beta\, g(t)\} = \alpha\, \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\, \mathcal{L}\{g(t)\}$$

para todo s tal que as transformadas tanto de f quanto de g existam.

O resultado acima permitem que calculemos a transformada de algumas funções a partir de outras transformadas já conhecidas.

Exemplo 98. *Calcule $\mathcal{L}(5 + 8\, t^3)$ se $t \geq 0$.*

Como $\mathcal{L}(1) = \dfrac{1}{s}$ e $\mathcal{L}(t^3) = \dfrac{6}{s^4}$; aplicando o teorema:

$$\mathcal{L}(5 + 8\, t^3) = 5\, \mathcal{L}(1) - 8\, \mathcal{L}(t^3) = \frac{5}{s} - \frac{48}{s^4},$$

se $s > 0$.

Exemplo 99. *Calcule $\mathcal{L}(\cosh kx)$ e $\mathcal{L}(\sinh kx)$ se $t \geq 0$.*

Como $\cosh kx = \dfrac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}$ e $\mathcal{L}(e^{kx}) = \dfrac{1}{s-k}$, se $s > k$; aplicando o teorema:

$$\mathcal{L}(\cosh kx) = \frac{1}{2}\, \mathcal{L}(e^{kx}) + \frac{1}{2}\, \mathcal{L}(e^{-kx}) = \frac{s}{s^2 - k^2},$$

se $s > k$. Analogamente $\mathcal{L}(\sinh kx) = \dfrac{1}{s^2 - k^2}$, se $s > k$.

8.1 Funções de ordem exponencial

Agora, desejamos saber que tipo de funções possuim transformadas de Laplace.

Definição 31. *Uma função f é contínua por partes em um intervalo $[\alpha, \beta]$ se o intervalo puder ser particionado em um número finito de subintervalos*

$$(t_i, t_{i+1}), \quad \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$$

tais que

1. *f é contínua em cada subintervalo aberto (t_i, t_{i+1})*

2. *São finitos os limites laterais:*

$$\lim_{t \to t_i^+} f(t) \qquad e \qquad \lim_{t \to t_{i+1}^-} f(t), \qquad 0 \leq i \leq n-1,$$

   existem

Exemplo 100. *Consideremos*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & para\ t < 2 \\ 1, & para\ t \geq 2 \end{cases}$$

A função f é contínua por partes em $\mathbb{R}$, pois f é contínua nos subintervalos $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$

$$\lim_{t \to 2^+} f(t) = 1, \qquad \lim_{t \to 2^-} f(t) = 0.$$

Exemplo 101. *A função*

$$f(t) = \frac{t+1}{t-1}$$

não é contínua por partes em $[0, 4]$ *pois*

$$\lim_{t \to 1^{\pm}} f(t) = \pm\infty.$$

Definição 32. *Uma função f é de ordem exponencial em $[0, \infty)$ se existem constantes $C > 0$ e k, tais que*

$$|f(t)| \leq C\, e^{kt},$$

para todo $t \in (0, \infty) \cap Dom_f$.

Exemplo 102. *A função $f(t) = \cos 2t$ é de ordem exponencial em $[0, \infty)$, pois para $C = 1$ e $k = 0$,*

$$|f(t)| = |\cos 2t| \leq C\, e^{kt} = 1, \quad \forall t > 0$$

Para a classe da funções que são contínuas por partes e de ordem exponencial, a transformada de Laplace está bem definida e vale o seguinte teorema:

Teorema 14. *Suponha que*

1. *f seja contínua por partes no intervalo $[0, A]$ para qualquer $A > 0$;*
2. *existem $C, k, M \in \mathbb{R}$ com $C > 0,\ M \geq 0$ tais que $|f(t)| \leq Ce^{kt}$ quando $t \geq M$.*

Então, a transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

existe para $s > k$.

Note que:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^M e^{-st} f(t)\, dt + \int_M^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

$$\int_M^A |e^{-st} f(t)|\, dt \leq C \int_M^A |e^{-st} e^{kt}|\, dt = C \frac{e^{(k-s)t}}{k-s}\bigg|_M^A$$

$$= C\frac{e^{(k-s)A}}{k-s} - C\frac{e^{(k-s)M}}{k-s}.$$

Logo

$$\lim_{A\to\infty} \int_M^A |e^{-st} f(t)|\, dt < \infty$$

e isto implica:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt < \infty.$$

O Teorema acima nos diz que se uma função for contínua por partes e de ordem exponencial, então esta função tem transformada de Laplace e sabemos também que a transformada está bem definida para todos os valores de s maiores do que uma certa constante k.

Corolário 1. *Se $f(t)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 14, então:*

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

Até agora, estabelecemos no Teorema 14, condições suficientes para que possamos calcular a transformada de Laplace de uma certa classe de funções e conhecemos, no Corolário, uma propriedade das transformadas de Laplace de funções pertencentes a esta classe. É conveviente observar, que há funções que não satisfazem as hipóteses do Teorema 14 e ainda assim têm transformada de Laplace. Além disso, dentre estas funções encontramos exemplos cujas transformadas não têm a propriedade apontada no Corolário.

Exemplo 103. $f(t) = \operatorname{sen} t,\ t \geq 0.$

Claramente f satisfaz as hipóteses do Teorema 14.

$$\begin{aligned}
\int_0^A e^{-st}\operatorname{sen} t\,dt &= -\frac{e^{-st}\operatorname{sen} t}{s}\bigg|_0^A + \frac{1}{s}\int_0^A e^{-st}\cos t\,dt \\
&= -\frac{e^{-sA}\operatorname{sen} A}{s} - \frac{e^{-st}\cos t}{s^2}\bigg|_0^A - \frac{1}{s^2}\int_0^A e^{-st}\operatorname{sen} t\,dt \\
\frac{s^2+1}{s^2}\int_0^A e^{-st}\operatorname{sen} t\,dt &= -\frac{e^{-sA}\operatorname{sen} A}{s} - \frac{e^{-sA}\cos A}{s^2} + \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
F(s) = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} &= \int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen} t\,dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\operatorname{sen} t\,dt \\
&= \frac{s^2}{s^2+1}\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{e^{-sA}\operatorname{sen} A}{s} - \frac{e^{-sA}\cos A}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right) \\
&= \frac{1}{s^2+1}, \quad s>0
\end{aligned}$$

Lembremos que estamos interessados em introduzir a transformada de Laplace para simplificar a resolução de equações diferenciais. Queremos determinar uma função $y(t)$, solução de uma equação diferencial, resolvendo um problema associado para $Y(s)$, a transformada de Laplace de $y(t)$. Logo, uma vez determinada $Y(s)$, queremos encontrar $y(t)$. Ou seja, queremos inverter o operador transformada de Laplace. Para tanto, devemos provar que se $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$, temos $f = g$. O próximo resultado nos dirá que f e g são "quase idênticas".

Teorema 15. *Se $f(t)$ e $g(t)$ satisfazem as hipóteses do Teorema 14 e $F(s) = \mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\} = G(s)$ para todo $s > a$ (para algum a); então, $f(t) = g(t)$ exceto nos pontos de descontinuidade.*

8.2 Transformada Inversa de Laplace

O Teorema 3 nos diz quando equação:

$$\mathcal{L}\{y\} = \phi(s)$$

puder ser resolvida para $y(t)$, a solução é "essencialmente" única. Esta solução se chama Transformada Inversa de Laplace da função $\phi(s)$, e é denotada por:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\phi(s)\}.$$

A transformada inversa também é um operador linear. De fato, consideremos $\phi(s) = F_1(s) + F_2(s)$ e $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$ e $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$, temos para $s > s_0$,

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\} = \phi(s)$$

Portanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s) + F_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\phi(s)\} = f_1(t) + f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$$

Exemplo 104. *Calcule* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6s^2 - 2s^4 + 24}{s^4(s^2+4)}\right\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s^2 - 2s^4 + 24}{s^4(s^2+4)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^4} - \frac{2}{s^2+4}\right\}\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^4}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}\\ &= t^3 - \operatorname{sen} 2t\end{aligned}$$

Teorema 16 (1º Teorema do deslocamento)**.** *Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ existe para $s > a$ e se $c \in \mathbb{R}$, então a transformada de Laplace da função $e^{ct}f(t)$ existe para $s > a + c$ e é dada por*

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s-c).$$

Reciprocamente, se $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, então

$$e^{ct}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\}$$

Para $s - c > a$, temos

$$F(s-c) = \int_0^\infty e^{-(s-c)t}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-st}[e^{ct}f(t)]dt = \mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}$$

A relação acima nos diz que

$$e^{ct}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\}$$

O Teorema acima nos diz que uma translação no eixo s corresponde a uma multiplicação da função em t por uma exponencial.

Exemplo 105. *Calcule* $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ *com*

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}$$

Completando quadrados:

$$\frac{1}{s^2-4s+5}=\frac{1}{s^2-4s+4+1}=\frac{1}{(s-2)^2+1}.$$

Como:

$$F(s)=\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}=\frac{1}{s^2+1},\quad s>1;$$

logo:

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{F(s-2)\}=e^{2t}\operatorname{sen} t$$

Teorema 17 (Mudança de Escala)**.** *Se $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$ existe para $s>a\geq 0$ e se $c>0$, então a transformada de Laplace da função $f(ct)$ existe para $s>ac$ e é dada por:*

$$\mathcal{L}\{f(c\,t)\}=\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right).$$

De fato:

$$\mathcal{L}\{f(c\,t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}\,f(c\,t)\,dt=\frac{1}{c}\int_0^{\infty}e^{-\frac{s}{c}u}\,f(u)\,du$$

$$=\mathcal{L}\left(\frac{s}{c}\right)=F\left(\frac{s}{c}\right),\quad \text{se}\quad \frac{s}{c}>a.$$

Exemplo 106. *Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$, com $f(t)=\operatorname{sen} 3t$*

Como:

$$F(s)=\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}=\frac{1}{s^2+1},\quad s>0,$$

logo:

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 3t\}=\frac{1}{3}F\left(\frac{s}{3}\right)=\frac{1}{3}\frac{1}{\left(\frac{s}{3}\right)^2+1}=\frac{1}{3}\frac{9}{s^2+9}=\frac{3}{s^2+9},\qquad s>0.$$

Teorema 18. *Suponha que*

1. *f seja contínua por partes no intervalo $[0,A]$ para qualquer $A>0$;*
2. *existem $C,k,M\in\mathbb{R}$ com $C>0$, $M\geq 0$ tais que $|f(t)|\leq Ce^{kt}$ quando $t\geq M$*

Então, a transformada de Laplace da função $-tf(t)$ existe para $s > k$ e é dada por:

$$\mathcal{L}\{-tf(t)\} = \frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{d}{ds}F(s).$$

A aplicação repetida do resultado acima nos diz que:

$$\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\} = \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

A propriedade acima é útil para se encontrar uma transformada inversa quando é mais fácil trabalhar com a derivada da transformada do que com a própria transformada.

Exemplo 107. *Determine*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{s}\right)\right\}.$$

Considere:

$$G(s) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{s}\right) \qquad \text{e} \qquad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

Logo:

$$\mathcal{L}\{-tg(t)\} = \frac{d}{ds}\,G(s) = \frac{-\dfrac{1}{s^2}}{1+\dfrac{1}{s^2}} = -\frac{1}{s^2+1}.$$

Calculando a transformada inversa, obtemos

$$-tg(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s^2+1}\right\} = -\operatorname{sen} t.$$

Portanto,

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{s}\right)\right\} = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$$

Teorema 19. *Suponha que*

1. *f seja contínua em $[0, A]$ e que f' seja contínua por partes no intervalo $[0, A]$ para qualquer $A > 0$;*

2. *existem $C, k, M \in \mathbb{R}$ com $C, M > 0$ tais que $|f(t)| \leq Ce^{kt}$ quando $t \geq M$*

Então, a transformada de Laplace de $f'(t)$ existe para $s > k$ e é dada por

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0)$$

Sejam $t_1 < t_2 < \cdots < t_n,\ t_i \in [0, A]$ os (possíveis) pontos de descontinuidade de f', logo:

$$\int_0^A e^{-st}\, f'(t)\, dt = \int_0^{t_1} e^{-st}\, f'(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st}\, f'(t)\, dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st}\, f'(t)\, dt.$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{-st}\, f'(t)\, dt &= e^{-st} f(t)\Big|_a^b + s\int_a^b e^{-st}\, f(t)\, dt \\
&= e^{-sb} f(b) - e^{-sa} f(a) + s\int_a^b e^{-st} f(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^A e^{-st}\, f'(t)\, dt &= e^{-st_1} f(t_1) - f(0) + s\int_0^{t_1} e^{-st} f(t)\, dt \\
&\quad + e^{-st_2} f(t_2) - e^{-st_1} f(t_1) + s\int_{t_1}^{t_2} e^{-st}\, f(t)\, dt \\
&\quad + \cdots + e^{-sA} f(A) - e^{-st_n}\, f(t_n) + s\int_{t_n}^{A} e^{-st}\, f(t)\, dt \\
&= e^{-sA} f(A) - f(0) + s\int_0^A e^{-st}\, f(t)\, dt
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st}\, f'(t)\, dt \\
&= \lim_{A\to\infty} e^{-sA}\, f(A) - f(0) + s\,\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\, f(t)\, dt \\
&= s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0), \quad s > k,
\end{aligned}$$

como $|f(t)| \le C\, e^{kt}$, se $t \ge M$; então:

$$\lim_{A\to\infty} e^{-sA}\, |f(A)| \le C \lim_{A\to\infty} e^{(k-s)}\, A = 0 \Rightarrow \lim_{A\to\infty} e^{-sA}\, f(A) = 0$$

Se f' for contínua e de ordem exponencial e f'' for conítnua por partes em intervalos $[0, A],\ A > 0$, pelo Teorema 19, temos

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)$$

e se, além disso, f for contínua e de ordem exponencial, temos

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

Na verdade, podemos generalizar o resultado acima para derivadas de ordem superior.

Teorema 20. *Suponha que*

1. *$f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ sejam contínuas em $[0, A]$ e que $f^{(n)}$ seja contínua por partes no intervalo $[0, A]$ para qualquer $A > 0$;*

2. *existem $C, k, M \in \mathbb{R}$ com $C, M > 0$ tais que $|f(t)| \leq Ce^{kt}, |f'(t)| \leq Ce^{kt}, \ldots, |f^{(n-1)}(t)| \leq Ce^{kt}$ quando $t \geq M$*

Então, a transformada de Laplace de $f^{(n)}(t)$ existe para $s > k$ e é dada por

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Exemplo 108. *Calcule $\mathcal{L}\{t^n\}$*

Seja $f(t) = t^n$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = \mathcal{L}\{n!\} = n!\mathcal{L}\{1\} = \frac{n!}{s}, \quad s > 0.$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} + s^{n-1}f(0) + s^{n-2}f'(0) + \cdots + sf^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0),$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\{t^n\},$$
$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$$

Teorema 21. *Seja $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$; então:*

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\,dx\right) = \frac{F(s)}{s}, \quad \text{se} \quad s > 0.$$

Seja $g(t) = \int_0^t f(x)\,dx$; então $g'(t) = f(t)$:

$$F(s) = \mathcal{L}(g'(t)) = s\,\mathcal{L}(g(t)).$$

8.3 Resolução de PVI

Com a teoria desenvolvida até aqui, podemos aplicar a Transformada de Laplace para resolver problemas de valor inicial.

Exemplo 109. *Resolva o PVI:*

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = 0 \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

Usando o Teorema 20, temos

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = s\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0).$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' - y' - 6y\} = \mathcal{L}\{y''(t)\} - \mathcal{L}\{y'(t)\} - 6\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{0\} = 0 \\ \mathcal{L}\{y'' - y' - 6y\} = (s^2 - s - 6)\mathcal{L}\{y(t)\} - 2s + 1 + 2 = 0 \\ Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{2s-3}{s^2 - s - 6} \end{aligned}$$

Observe que para determinarmos a solução $y(t)$ do PVI, basta invertermos a transformada acima. Para tanto, vamos escrever a fração que aparece no lado direito de um modo mais conveniente. Observe que $s^2 - s - 6 = 0$ nada mais é do que a equação característica da equação diferencial $y'' - y' - 6y = 0$. Como:

$$\frac{2s-3}{s^2-s-6} = \frac{2s-3}{(s-3)(s+2)} = \frac{3}{5(s-3)} + \frac{7}{5(s+2)},$$

e $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$; logo:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-3}{s^2-s-6}\right\} = \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \frac{7}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\ &= \frac{3}{5}e^{3t} + \frac{7}{5}e^{-2t} \end{aligned}$$

Observemos que, para resolver o PVI, não encontramos primeiro a solução geral equação homogênea. O método da Transformada de Laplace fornece diretamente a solução particular desejada.

Exemplo 110. *Encontre uma solução geral da edo:*

$$y'' - 2\,y' + 1 = 0$$

Sejam $y(0) = k_1$ e $y'(0) = k_2$. Usando o Teorema 20, obtemos

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = s\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0).$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\{y'' - 2\,y' + 1\} = \mathcal{L}\{y''(t)\} - 2\mathcal{L}\{y'(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{0\} = 0$$
$$\mathcal{L}\{y'' - 2\,y' + 1\} = (s^2 - 2\,s + 1)\mathcal{L}\{y(t)\} - sk_1 + 2k_1 - k_2 = 0$$

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{(s-2)k_1 + k_2}{s^2 - 2s + 1}$$

Como:

$$\frac{(s-2)k_1 + k_2}{(s-1)^2} = \frac{(s-1)k_1 - k_1 + k_2}{(s-1)^2} = \frac{k_1}{s-1} + \frac{-k_1 + k_2}{(s-1)^2},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = t\,e^t$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-2)k_1 + k_2}{(s-1)^2}\right\}$$

$$= k_1\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + (k_2 - k_1)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$$

$$= k_1e^t + (k_2 - k_1)te^t = k_3e^t + k_4te^t$$

Exemplo 111. *Resolva o PVI:*

$$\begin{cases} y'' + y = t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2 \end{cases}$$

Usando o Teorema 20, temos

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0).$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\{y''+y\} = \mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1!}{s^2}, \quad s>0\\
&s^2\mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}\{y(t)\} = [s^2+1]\mathcal{L}\{y(t)\} - s + 2 = \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s^2+1}\left[\frac{1}{s^2} + s - 2\right] = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}\\
&Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{3}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}\right\}\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = t - 3\,\mathrm{sen}\,t + \cos t
\end{aligned}$$

Exemplo 112. *Resolva o PVI:*

$$\begin{cases} y'' + 4\,y' + 13\,y = 2\,t + 3\,e^{-2t}\cos 3t\\ y(0)=0, \quad y'(0) = -1\end{cases}$$

Usando o Teorema 20,

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0)$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y''+4\,y'+13\,y\} &= \mathcal{L}\{y''(t)\} + 4\big(s\,\mathcal{L}\{y(t)\} - y(0)\big) + 13\,\mathcal{L}\{y(t)\}\\
&= \mathcal{L}\{2\,t + 3\,e^{-2t}\,\cos 3t\}\\
&= \frac{2}{s^2} + 3\,\frac{s+2}{(s+2)^2+9}, \quad s>0,
\end{aligned}$$

Fazendo $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$:

$$\big(s^2+4\,s+13\big)\,Y(s) + 1 = \frac{2}{s^2} + \frac{3(\,s+2)}{(s+2)^2+9}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4s+13}\left(\frac{2}{s^2} + \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+9} - 1\right).$$

Por outro lado:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+13}\right\} = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+2)^2+9}\right\} = \frac{1}{3}e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,3t,$$

separando em frações parciais:

$$\begin{aligned}\frac{2}{s^2(s^2+4\,s+13)} &= \frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C\,s+D}{s^2+4\,s+13}\\ &= -\frac{4}{169}\,\frac{1}{s}+\frac{1}{13}\,\frac{1}{s^2}+\frac{1}{169}\,\frac{3+4\,s}{s^2+4\,s+13};\end{aligned}$$

logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2(s^2+4\,s+13)}\right\} = -\frac{8}{169}+\frac{2}{13}t+\frac{8}{169}\,e^{-2t}\,\cos 3t-\frac{10}{3(169)}\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,3t.$$

Seja $F(s)=\mathcal{L}\{\mathrm{sen}\,3t\}$, pelo Teorema 18,

$$-\,t\,\mathrm{sen}\,3t = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\frac{3}{s^2+9}\right\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6\,s}{(s^2+9)^2}\right\},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3\,(s+2)}{[(s+2)^2+9]^2}\right\} = \frac{1}{2}\,e^{-2t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6\,s}{(s^2+9)^2}\right\} = \frac{1}{2}\,e^{-2t}\,t\,\mathrm{sen}\,3t$$

Portanto,

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+13}\left(\frac{2}{s^2}+\frac{3\,(s+2)}{(s+2)^2+9}-1\right)\right\}\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2(s^2+4s+13)}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s+2)}{\left((s+2)^2+9\right)^2}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4\,s+13}\right\}\\ &= -\frac{8}{169}+\frac{2}{13}\,t+\frac{8}{169}\,e^{-2t}\,\cos 3t-\frac{179}{3(169)}\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}\,3t+\frac{1}{2}\,e^{-2t}\,t\,\mathrm{sen}\,3t.\end{aligned}$$

8.4 Função Degrau Unitário

Em aplicações que envolvem circuitos elétricos, é comum que a força externa que atua na equação seja descontínua. A transformada de Laplace se mostrará mais útil e simples para resolver problemas deste tipo do que os método que conhecemos até agora.

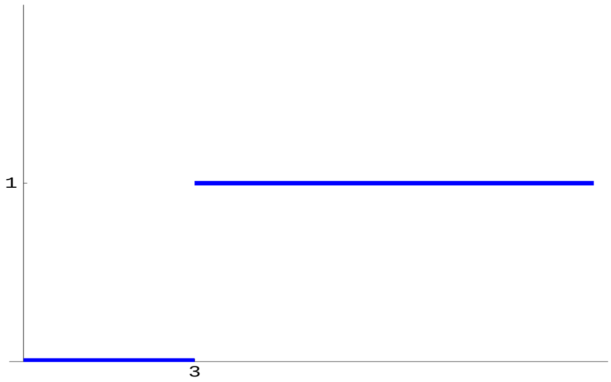


Figura 8.1: Gráfico de $u_3(t)$

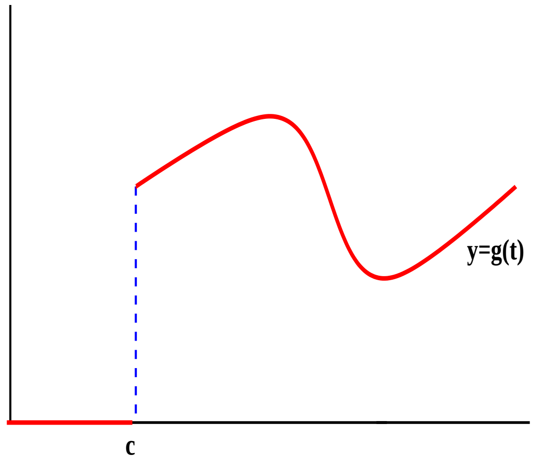
Definição 33. *A função degrau unitário e definida e denotada por:*

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \quad c \geq 0 \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$

Calculemos a transformada de Laplace de u_c:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{u_c(t)\} &= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st}\, u_c(t)\, dt \\
&= \lim_{A\to\infty} \left(+ \int_c^A e^{-st}\, dt \right) \\
&= \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{e^{-sA}}{s} + \frac{e^{-sc}}{s} \right) \\
&= \frac{e^{-sc}}{s}, \quad s > 0.
\end{aligned}$$

Podemos usar a função degrau para expressar funções descontínuas que podem ser obtidas por translação de funções conhecidas. Por exemplo, se tivermos a função $g(t)$ cujo gráfico é igual ao gráfico da função $f(t)$ transladado de uma distância c no sentido positivo do eixo t,



Podemos escrever g usando a função f e a função degrau

$$g(t) = u_c(t)f(t-c) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ f(t-c), & t \geq c \end{cases}$$

Veremos no próximo Teorema como se relacionam as transformada de g e f.

Teorema 22 (2º Teorema do deslocamento). *Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ existe para $s > a$ e se $c \in \mathbb{R}$, então a transformada de Laplace da função $g(t) = u_c(t)f(t-c)$ existe para $s > a$ e é dada por*

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\, f(t-c)\} = e^{-cs}\,\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs}\,F(s).$$

Reciprocamente, se $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}\,F(s)\} = u_c(t)\, f(t-c).$$

Dea fato, para $s > a$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt &= \int_c^A e^{-st}f(t-c)dt \overset{(u=t-c)}{=} \int_0^{A-c} e^{-s(u+c)}f(u)du \\ &= e^{-sc}\int_0^{A-c} e^{-su}f(u)du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} &= \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt = \lim_{A\to\infty} e^{-sc}\int_0^{A-c} e^{-su}f(u)du \\ &= e^{-sc}\int_0^{\infty} e^{-su}f(u)du = e^{-sc}\mathcal{L}\{f(t)\} \end{aligned}$$

A relação acima nos diz que

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\} = u_c(t)f(t-c)$$

O Teorema 22 nos diz que uma translação no eixo t de uma distância c no sentido positivo de t corresponde a uma multiplicação da transformada em t por uma exponencial.

Exemplo 113. *Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$, com*

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{4} \\ \operatorname{sen} t + \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right), & t \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Podemos escrever a função $f(t)$ da seguinte forma:

$$f(t) = \operatorname{sen} t + \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \dfrac{\pi}{4} \\ \cos\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right), & t \geq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$= \operatorname{sen} t + u_{\frac{\pi}{4}}(t)\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Pelo Teorema 22, temos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} t + u_{\frac{\pi}{4}}(t)\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right\} = \mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} t\right\} + \mathcal{L}\left\{u_{\frac{\pi}{4}}(t)\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{s^2+1} + e^{-\frac{\pi}{4}s}\mathcal{L}\left\{\cos t\right\} = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\frac{\pi}{4}s}\frac{s}{s^2+1}.$$

Exemplo 114. *Calcule $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, com*

$$F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}.$$

Pelo Teorema 22, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-2s}}{s^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} \\ &= t - u_2(t)(t-2) \\ &= t - \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ t-2, & t \geq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 2, & t \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Exemplo 115. *Resolva o PVI:*

$$\begin{cases} y'' + 4\,y = g(t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases} \qquad \textit{com} \qquad g(t) = \begin{cases} \cos 2t, & 0 \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases}$$

Inicialmente, vamos reescrever a função g

$$g(t) = \big(1 - u_{2\pi}(t)\big)\,\cos 2t.$$

Usando o Teorema 20 e o Teorema 22:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t)\} &= s^2\,\mathcal{L}\{y(t)\} - s\,y(0) - y'(0) \\ &= s^2\,\mathcal{L}\{y(t)\}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos 2t - u_{2\pi}(t)\,\cos 2(t-2\pi)\} &= \mathcal{L}\{\cos 2t\} - \mathcal{L}\{u_{2\pi}(t)\cos 2(t-2\pi)\} \\ &= \frac{s}{s^2+4} - e^{-2\pi s}\mathcal{L}\{\cos 2t\} \\ &= \frac{s}{s^2+4} - \frac{e^{-2\pi s}s}{s^2+4}. \end{aligned}$$

Denotando, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, obtemos:

$$\begin{aligned} s^2\,Y(s) + 4\,Y(s) &= \frac{s(1-e^{-2\pi s})}{s^2+4} \qquad \text{isto é:} \\ Y(s) &= \frac{s(1-e^{-2\pi s})}{(s^2+4)^2}. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+4}\right\} = \operatorname{sen} 2t$, usando o Teorema 18, podemos calcular:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{4}\frac{d}{ds}\frac{2}{s^2+4}\right\} = -\frac{1}{4}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\frac{2}{s^2+4}\right\} = \frac{t\operatorname{sen} 2t}{4}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s(1-e^{-2\pi s})}{(s^2+4)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2} - \frac{e^{-2\pi s}s}{(s^2+4)^2}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}s}{(s^2+4)^2}\right\} \\ &= \frac{t\,\operatorname{sen} 2t}{4} - \frac{u_{2\pi}(t)\,(t-2\pi)\,\operatorname{sen} 2(t-2\pi)}{4}. \end{aligned}$$

Portanto, a a solução do PVI é:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2\pi \\ t - (t - 2\pi), & t \geq 2\pi \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{4}t\,\mathrm{sen}\,2t, & 0 \leq t < 2\pi \\ \\ \dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{sen}\,2t, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

8.5 Funções Periódicas

A seguir estudaremos outra classe de funções que aparece com frequência como força externa em sistemas mecânicos e elétricos.

Definição 34. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período $p > 0$ se $f(t+p) = f(t)$ para todo t. O menor período positivo é chamado de período fundamental.*

Exemplo 116. *As funções $f(x) = \mathrm{sen}\,x$ e $g(t)\cos(t)$ são periódicas com período fundamental $T = 2\pi$*

Teorema 23. *Se f é uma função contínua por partes, de ordem exponencial e periódica de período p, então a transformada de Laplace de f existe para $s > 0$ e é dada por*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st}\, f(t)\, dt.$$

De fato, seja $A = (k+1)p$, logo:

$$\int_0^A e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^p e^{-st} f(t) dt + \int_p^{2p} e^{-st}\, f(t)\, dt + \cdots + \int_{kp}^{(k+1)p} e^{-st}\, f(t)\, dt.$$

Fazendo $t = u + kp$, obtemos:

$$\int_{kp}^{(k+1)p} e^{-st}\, f(t)\, dt = \int_0^p e^{-s(u+kp)}\, f(u + kp)\, du = e^{-ksp} \int_0^p e^{-su}\, f(u)\, du.$$

Então:

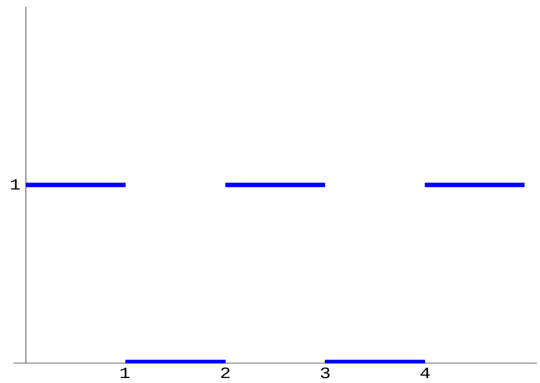
$$\int_0^A e^{-st} f(t) dt = \left[\int_0^p e^{-su} f(u)\, du\right] \sum_{n=0}^{k} e^{-nsp} = \left[\int_0^p e^{-su} f(u)\, du\right] \frac{1 - e^{-(k+1)sp}}{1 - e^{-ps}}$$

$$F(s) = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-st}\, f(t)\, dt = \left[\int_0^p e^{-su}\, f(u)\, du\right] \lim_{k \to \infty} \frac{1 - e^{-(k+1)sp}}{1 - e^{-ps}}$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st}\, f(t)\, dt.$$

Exemplo 117. *Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$, com*

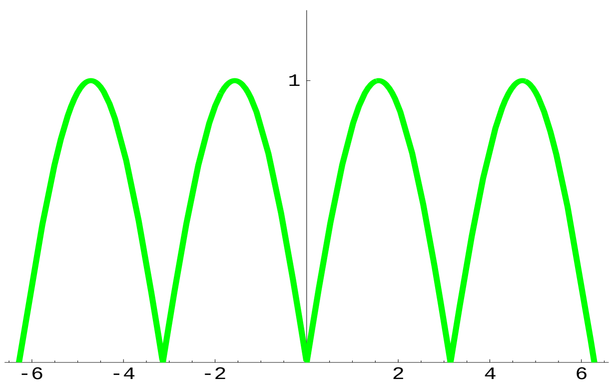
$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2, \end{cases}$$
$$f(t+2) = f(t).$$



$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t)\, dt = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^1 e^{-st}\, dt$$
$$= \frac{1}{1-e^{-2s}} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right|_0^1 = \frac{1-e^{-s}}{s(1-e^{-2s})} = \frac{1}{s(1+e^{-s})}, \qquad s > 0.$$

Exemplo 118. *Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$, com*

$$f(t) = \operatorname{sen} t,\ 0 \leq t < \pi, \qquad f(t+\pi) = f(t).$$



$$
\begin{aligned}
F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} f(t)\, dt = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} \operatorname{sen} t\, dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \frac{s^2}{s^2+1} \frac{e^{-s\pi}+1}{s^2} = \frac{1+e^{-\pi s}}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}, \qquad s > 0.
\end{aligned}
$$

8.6 Convolução

Exemplo 119. *Resolva o PVI*

$$
\begin{cases} y'' + y = \cos t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}
$$

Usando o Teorema 20,

$$
\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) = s^2\mathcal{L}\{y(t)\}.
$$

Portanto:

$$
\mathcal{L}\{y'' + y\} = \mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{\cos t\},
$$

$$
s^2\mathcal{L}\{y(t)\} + 6\mathcal{L}\{y(t)\} = [s^2+1]\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{\cos t\}.
$$

Logo,

$$
Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s^2+1}\mathcal{L}\{\cos t\} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}\mathcal{L}\{\cos t\}.
$$

É de se esperar que possamos relacionar as funções $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ com a tranformada inversa do produto das transformadas de $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$. O próximo teorema nos dirá que a função

$$
h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad \text{é tal que} \quad H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}.
$$

Definição 35 (Convolução)**.** *Seja f e g funções contínuas por partes. A convolução das funções f e g é denotada e definida para $t \geq 0$ por:*

$$
(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau.
$$

Exemplo 120. *Calcule* $\mathcal{L}\{(\cos t) * (\operatorname{sen} t)\}$

Usando a identidade: $\cos A\,\operatorname{sen} B = \dfrac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B)\big)$, temos:

$$\begin{aligned}
(\cos t) * (\operatorname{sen} t) &= \int_0^t \cos\tau\,\operatorname{sen}(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \big(\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}(2\tau - t)\big)\,d\tau \\
&= \frac{1}{2}\left(\tau\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}\cos(2\tau - t)\right)\Big|_0^t \\
&= \frac{1}{2}\,t\,\operatorname{sen} t + \frac{1}{4}\,\cos t - \frac{1}{4}\,\cos(-t) \\
&= \frac{t\,\operatorname{sen} t}{2}.
\end{aligned}$$

Teorema 24. *Se f e g são funções contínuas por partes e de ordem exponencial, então a transformada da convolução $(f * g)(t)$ existe para $s > k$ e é dada por:*

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\,\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)\,G(s).$$

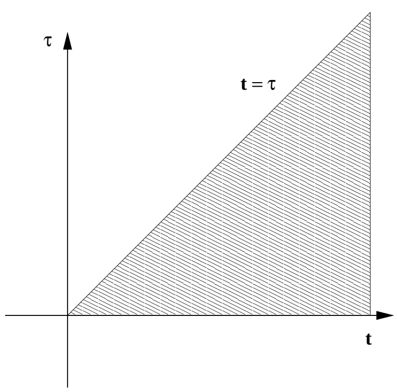
Análogamente,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\} = (f * g)(t)$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st}\,(f * g)(t)\,dt &= \int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\,dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st}\,f(\tau)\,g(t-\tau)d\tau\,dt
\end{aligned}$$

A integração acima está ocorrendo na seguinte região do plano $t\tau$:



que pode ser descrita por:

$$0 \le \tau \le t, \quad 0 \le t < \infty \quad \text{ou} \quad \tau \le t < \infty, \quad 0 \le \tau < \infty$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}\,(f*g)(t)\,dt &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st}\,f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\,dt\\ &= \int_0^\infty f(\tau)\int_\tau^\infty e^{-st}\,g(t-\tau)\,dt\,d\tau,\end{aligned}$$

fazendo a mudança de variável $u = t - \tau$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}\,(f*g)(t)\,dt &= \int_0^\infty f(\tau)\int_0^\infty e^{-s(u+\tau)}\,g(u)\,du\,d\tau\\ &= \int_0^\infty e^{-s\tau}\,f(\tau)\,d\tau\int_0^\infty e^{-su}\,g(u)\,du,\end{aligned}$$

logo, obtemos:

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Exemplo 121. *Resolva o PVI:*

$$\begin{cases} y'' + y = \cos t,\\ y(0) = y'(0) = 0,\end{cases}$$

Usando os Exemplos 119 e 120 e o Teorema 24, vemos que

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}\mathcal{L}\{\cos t\}\} = (\cos t)*(\operatorname{sen} t) = \frac{t\ \operatorname{sen} t}{2}.$$

é a solução do PVI.

8.7 Função de Impulso

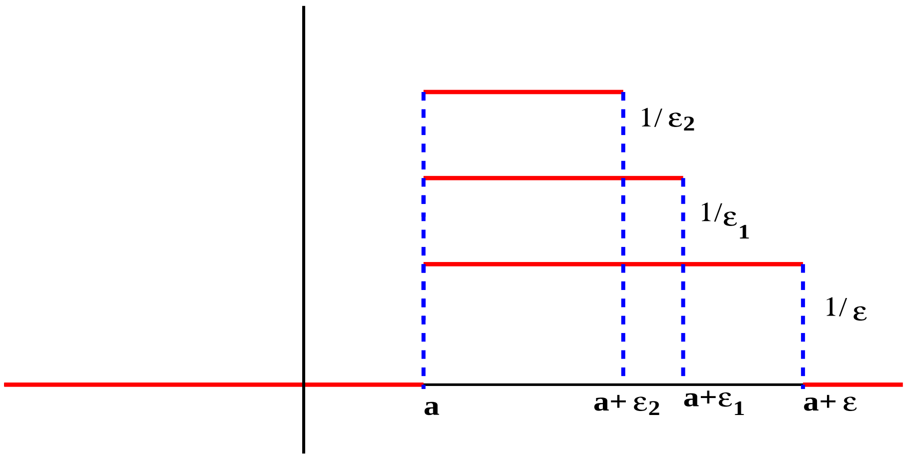
Vamos agora estudar equações diferenciais lineares com coeficientes constantes sujeitas a forças externas de natureza impulsiva. Isto é, forças $g(t)$ que agem apenas em um curto período de tempo. É comum em fenômenos deste tipo, que o efeito principal desta força não dependa precisamente de como f varia com respeito a t e sim dependa do valor da integral

$$I_{b-a} = \int_a^b g(t)dt$$

I é chamado o impulso da força f no intervalo $[a, b]$.

Devido a esta característica, vamos substituir a função $g(t)$ por uma função simples que tenha o mesmo impulso. Consideremos as funções

$$d_{a,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & a \le t < a+\varepsilon \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Vemos que para todo $\varepsilon > 0$, a função $d_{a,\varepsilon}(t)$ tem um impuslo unitário no intervalo $[a, a+\varepsilon]$. De fato:

$$I_\varepsilon = \int_a^{a+\varepsilon} d_{a,\varepsilon}(t)\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\left(a+\varepsilon-a\right) = 1.$$

Como a função $d_{a,\varepsilon}(t)$ se anula fora do intervalo $[a, a+\varepsilon]$, temos:

$$I_\varepsilon = \int_0^{\infty} d_{a,\varepsilon}(t)\,dt = 1.$$

Vamos agora considerar que a força atue em intervalos cada vez menores. Isto é, com ε cada vez menores, isto é:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} d_{a,\varepsilon}(t) = 0, \quad t \neq a,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{\infty} d_{a,\varepsilon}(t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = 1.$$

As condições acima nos dão elementos para definir o chamado impulso instantâneo que teria as seguintes propriedades:

$$\delta_a(t) = 0, \quad t \neq a,$$
$$\int_0^{\infty} \delta_a(t)\,dt = 1.$$

$\delta_a(t)$ definida pelas condiçõea acima não é uma função no sentido usual e é chamada δ de Dirac.
Podemos definir formalmente a transformada de Laplace da função δ de Dirac motivados pelo Teorema do valor médio para integrais. Se $g(t)$ é contínua em $[a, a+\varepsilon]$, então existe $\overline{t} \in [a, a+\varepsilon]$, tal que

$$\int_a^{a+\varepsilon} g(t)\, dt = g(\overline{t})\,\big(a+\varepsilon-a\big) g(\overline{t})\, \varepsilon.$$

Logo:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\infty} g(t)\, d_{a,\varepsilon}(t)\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{a+\varepsilon} g(t) \frac{1}{\varepsilon}\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} g(\overline{t}) = g(a),$$

uma vez que $\overline{t} \in [a, a+\varepsilon]$ e g é contínua em $[a, a+\varepsilon]$. Em particular:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{L}\{d_{a,\varepsilon}(t)\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\infty} e^{-st}\, d_{a,\varepsilon}(t)\, dt = e^{-sa}.$$

Definiremos a transformada de Laplace do δ de Dirac, como:

$$\mathcal{L}\{\delta_a(t)\} = e^{-sa}$$

e

$$\int_0^{\infty} g(t) \delta_a(t)\, dt = g(a).$$

Notação: $\delta(t) = \delta_0(t)$

8.7.1 Princípio de Duhamel

Consideremos o PVI

$$\begin{cases} x'' + a_1 x' + a_0 x = g(t) \\ x'(0) = x(0) = 0 \end{cases}$$

Pelo Teorema 20, temos:

$$\mathcal{L}\{x(t)\}[s^2 + a_1\, s + a_0] = G(s),$$
$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{G(s)}{s^2 + a_1 s + a_0}.$$

A função

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

é chamada função transferência e

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\}$$

é chamada função peso, pelo Teorema 24,

$$x(t) = w(t) * g(t) = \int_0^t w(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau.$$

Esta fórmula é o princípio de Duhamel para o sistema. Observe que a função peso é completamente determinada pelos parâmetros da equação. Uma vez conhecida $w(t)$ uma solução do PVI é sempre dada pela expressão acima. Observemos que:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{1}{s^2 + a_1\, s + a_0} = \frac{e^{-0s}}{s^2 + a_1\, s + a_0} \\ &= \frac{\mathcal{L}\{\delta_0(t)\}}{s^2 + a_1\, s + a_0} = \frac{\mathcal{L}\{\delta(t)\}}{s^2 + a_1\, s + a_0}. \end{aligned}$$

Isto é, a função peso é a resposta do sistema à função δ de Dirac. Por isso, $w(t)$ é também chamada de resposta ao impulso unitário. O princípio de Duhamel nos mostra como podemos usar o teorema da convolução para expressar a solução de um problema de valor inicial em função de uma integral.

Exemplo 122. *Consideremos o PVI:*

$$\begin{cases} x'' + a_1 x' + a_0 x = g(t) \\ x'(0) = b_1, \quad x(0) = b_0. \end{cases}$$

Ele tem solução da forma:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

com

$$\begin{cases} x_h'' + a_1 x_h' + a_0 x_h = 0 \\ x_h'(0) = b_1, \quad x_h(0) = b_0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x_p'' + a_1 x_p' + a_0 x_p = g(t) \\ x_p'(0) = 0, \quad x_p(0) = 0. \end{cases}$$

De fato, para $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, temos:

$$\begin{aligned} x'' + a_1\, x' + a_0\, x &= (x_h + x_p)'' + a_1 (x_h + x_p)' + a_0 (x_h + x_p) \\ &= x_h'' + a_1\, x_h' + a_0\, x_h + x_p'' + a_1\, x_p' + a_0\, x_p \\ &= 0 + g(t) \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
x(0) &= x_h(0) + x_p(0) = b_0 + 0 = b_0, \\
x'(0) &= x_h'(0) + x_p'(0) = b_1 + 0 = b_1.
\end{aligned}
$$

Exemplo 123. *Resolva o PVI:*

$$
\begin{cases}
y'' + 4\,y = g(t), \\
y(0) = 3 \quad y'(0) = -1,
\end{cases}
$$

Aplicando o Teorema 20, temos

$$
\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2\,\mathcal{L}\{y(t)\} - s\,y(0) - y'(0) = s^2\,\mathcal{L}\{y(t)\} - 3\,s + 1.
$$

Logo:

$$
s^2\mathcal{L}\{y(t)\} + 4\,\mathcal{L}\{y(t)\} = \left(s^2 + 4\right)\mathcal{L}\{y(t)\} = 3\,s - 1 + \mathcal{L}\{g(t)\} = 3\,s - 1 + G(s).
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} &= 3\,\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2}\,\frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{s^2+4}\,G(s) \\
&= 3\,\mathcal{L}\{\cos 2t\} - \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\} + \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\}G(s)
\end{aligned}
$$

Portanto:

$$
\begin{aligned}
y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= 3\,\cos 2t - \frac{1}{2}\,\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}\,(\operatorname{sen} 2t) * (g(t)) \\
&= 3\,\cos 2t - \frac{1}{2}\,\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}\,\int_0^t \operatorname{sen} 2\tau\, g(t-\tau)\,d\tau,
\end{aligned}
$$

é a solução do PVI. Logo:

$$
\begin{aligned}
w(t) &= \frac{1}{2}\,\operatorname{sen} 2t, \\
x_h(t) &= 3\,\cos 2t - \frac{1}{2}\,\operatorname{sen} 2t, \\
x_p(t) &= w(t) * g(t) = \frac{1}{2}\,\int_0^t \operatorname{sen} 2\tau\, g(t-\tau)\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Vejamos agora, no caso de uma equação de ordem 2, como interpretaremos equações diferenciais sujeitas à uma força do tipo δ de Dirac. Queremos dar sentido a um problema do tipo

$$
x'' + a_1 x' + a_0 x = \delta_a(t) \tag{8.2}
$$

Diremos que $x(t)$ é uma solução da equação diferencial (8.2) se

$$x(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t)$$

com $x_\varepsilon(t)$ uma solução de

$$x'' + a_1 x' + a_0 x = d_{a,\varepsilon}(t)$$

Pelo que vimos anterioremente, em uma solução da equação acima, a influência da força externa é dada por

$$x_{p,\varepsilon}(t) = \int_0^t w(\tau) d_{a,\varepsilon}(t-\tau) d\tau, \qquad w(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0}\right\}$$

É possível mostrar que a solução que obtemos ao tomarmos o limite de $x_{p,\varepsilon}(t)$ quando ε tende a zero também pode ser obtida se aplicarmos diretamente a transformada de Laplace diretamente no PVI que contem a função δ de Dirac como força externa.

Exemplo 124. *Uma massa $m = 1$ é presa a uma mola com constante $k = 4$. Não há resitência. A massa é solta do repouso com $x(0) = 3$. No instante $t = 2\pi$, a massa é atingida por um martelo, proporcionando um impulso igual a $I = 8$. Determine a função que descreve o movimento da massa.*

Devemos resolver o PVI:

$$\begin{cases} x'' + 4\,x = 8\,\delta_{2\pi}(t), \\ x(0) = 3 \quad x'(0) = 0, \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Laplace, temos

$$\mathcal{L}\{x''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{x(t)\} - s\,x(0) - x'(0) = s^2\mathcal{L}\{x(t)\} - 3s$$

Portanto:

$$\mathcal{L}\{x''(t)\} + 4\,\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{\delta_{2\pi}(t)\},$$

logo,

$$\begin{aligned} X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} &= \frac{1}{s^2+4}\big(3\,s + 8\,e^{-2\pi s}\}\big) = 3\,\frac{s}{s^2+4} + 4\,\frac{2\,e^{-2\pi s}}{s^2+4} \\ &= 3\,\mathcal{L}\{\cos 2t\} + 4\,e^{-2\pi s}\,\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 2t\} \end{aligned}$$

e:

$$
\begin{aligned}
x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} &= 3\,\cos 2t + 4u_{2\pi}(t)\operatorname{sen} 2(t-2\pi) \\
&= \begin{cases} 3\,\cos 2\,t, & t < 2\pi \\ 3\,\cos 2\,t + 4\operatorname{sen} 2(t-2\pi), & t \geq 2\pi \end{cases} \\
&= \begin{cases} 3\,\cos 2t, & t < 2\pi \\ 3\,\cos 2t + 4\operatorname{sen} 2t, & t \geq 2\pi. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Para $A = 25$, seja δ, tal que:

$$
\operatorname{sen}\delta = \frac{4}{A} \qquad \text{e} \qquad \cos\delta = \frac{3}{A}.
$$

Como $\delta \approx 0,9273$, utilizando identidades trigonométricas, podemos reescrever $x(t)$, na forma:

$$
x(t) = \begin{cases} 3\,\cos 2t, & t < 2\pi \\ 5\,\cos(2t - 0,9273), & t \geq 2\pi. \end{cases}
$$

A função $x(t)$ é a solução do PVI. Vemos que o efeito do impulso em $t = 2\pi$ altera a amplitude do movimento oscilatório instantaneamente. Isto provoca uma descontinuidade na velocidade.

8.8 Exercícios

1. Das seguintes funções, quais são contínuas por partes em $[0, \infty)$? Justifique sua resposta.

a) $f(t) = e^{t^2}$ b) $f(t) = \ln(t^2 + 1)$ c) $f(t) = \dfrac{t+1}{t-1}$

d) $f(t) = \dfrac{t-2}{t^2 - t - 2}$ e) $f(t) = e^{\frac{1}{t}}$

2. Calcule (sem consultar uma tabela), sendo a constante, a transformada de Laplace de:

a) $f(t) = e^{at}$ b) $f(t) = te^{at}$

c) $f(t) = t\cos at$ d) $f(t) = \cos^2 at$

e) $f(t) = e^{at}\,\mathrm{sen}\, bt$ f) $f(t) = e^{at}\cos bt$

g) $f(t) = t^n e^{at},\ n \in \mathbb{N}$ h) $f(t) = \cosh at$

i) $f(t) = \mathrm{senh}\, at$ j) $f(t) = \mathrm{sen}\, at$

k) $f(t) = 1$ l) $f(t) = t$

m) $f(t) = t^2$ n) $f(t) = \cos at$

o) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

3. Ache a transformada inversa de Laplace da função dada

a) $\dfrac{3}{s^2+4}$ b) $\dfrac{4}{(s-1)^3}$

c) $\dfrac{2}{s^2+3s-4}$ d) $\dfrac{2s+2}{s^2+2s+5}$

e) $\dfrac{8s^2-4s+12}{s(s^2+4)}$ f) $\dfrac{3s}{s^2-s-6}$

g) $\dfrac{2s-3}{s^2-4}$

4. Calcule:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^3}\right\}$ b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1-e^{-\pi s}}{s^2+4}\right\}$ c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+2}\right\}$

5. Use a transformada de Laplace para resolver os seguintes problemas de valor inicial

a) $y'' + y = t, \;\; y(0) = 1, \; y'(0) = -2$

b) $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}, \;\; y(0) = -3, \; y'(0) = 5$

c) $y'' + 9y = \cos 2t, \;\; y(0) = 1, \; y'(0) = 1$

d) $y'' - y' - 6y = 10e^{2t}, \;\; y(0) = 3, \; y'(0) = 2$

6. Use a transformada de Laplace para resolver os seguintes problemas de valor inicial:

a) $y'' + 4y = \operatorname{sen} 3t, \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 0$

b) $y^{(4)} - y = 0, \;\; y(0) = y''(0) = 1, \; y'(0) = y'''(0) = 0$

c) $y'' + 3y' + 2y = 0, \;\; y(0) = 1, \; y'(0) = 0$

d) $y'' - 5y' + 6y = e^t, \;\; y(0) = 1, \; y'(0) = 1$

e) $y'' - 4y' + 4y = 0, \;\; y(0) = 1, \; y'(0) = 1$

f) $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}, \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 1$

g) $y''' - y = 5, \;\; y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

h) $y'' + y = t^2 + 1, \;\; y(0) = \pi^2, \; y'(0) = 2\pi$

i) $y'' + 4y = \operatorname{sen} t - u_{2\pi}(t)\operatorname{sen}(t - 2\pi), \;\; y(0) = y'(0) = 0$

j) $y'' + 2y' + y = f(t), \;\; y(0) = 1, \; y'(0) = 0;$ com $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$

k) $y'' + y = g(t),\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ com $g(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$

l) $2y'' + 8y = 4\delta_\pi(t),\ \ y(0) = y'(0) = 0$

m) $y'' + 4y = 4\delta_{\frac{\pi}{6}}(t) \operatorname{sen} t,\ \ y(0) = y'(0) = 0$

n) $y^{(4)} + 3y''' + y'' - 3y' - 2y = t,\ \ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

o) $y'' + 2y' + y = \delta(t) + u_{2\pi}(t),\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

p) $y'' + 2y' + 2y = \delta_\pi(t),\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

7. Use a transformada de Laplace para encontrar uma solução geral das seguintes equações:

a) $y'' - 2y' + 2y = 0$

b) $y'' - y' - 6y = 0$

c) $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}$

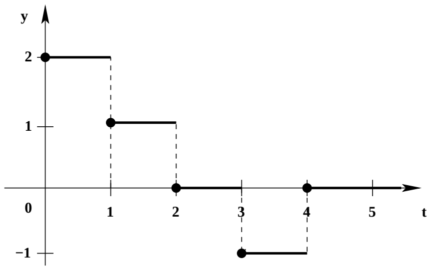
d) $y'' - 2y' + 2y = \cos t$

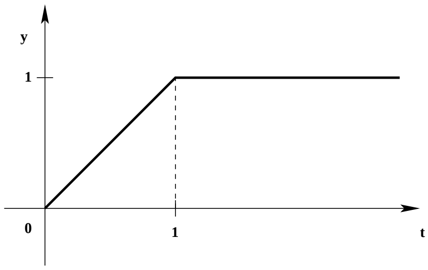
8. Ache a transformada de Laplace de:

a) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ (t-2)^2, & t \geq 2 \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t^2 - 2t + 2, & t \geq 1 \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ t - \pi, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \end{cases}$

d) 

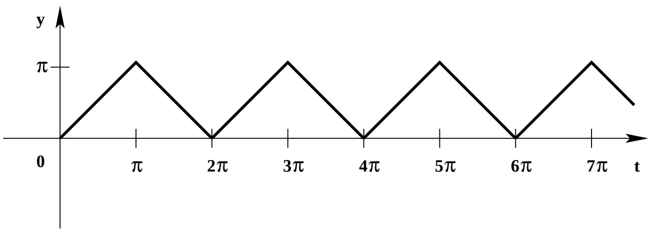
e) 

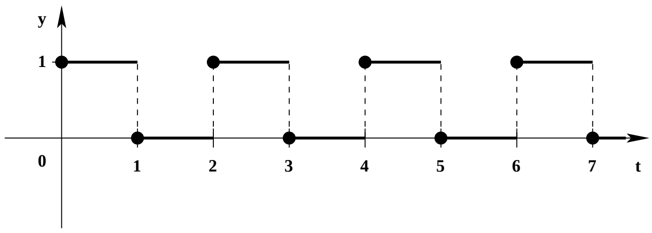
f) $f(t) = t^2 u_1(t)$

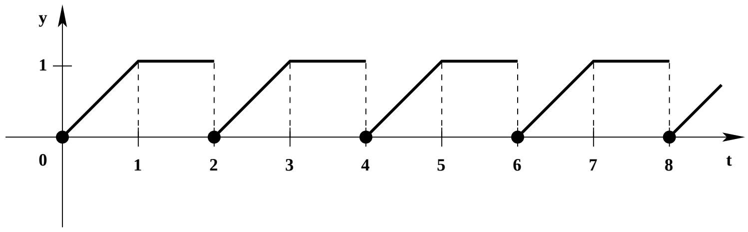
g) $f(t) = e^{-2t} u_\pi(t)$

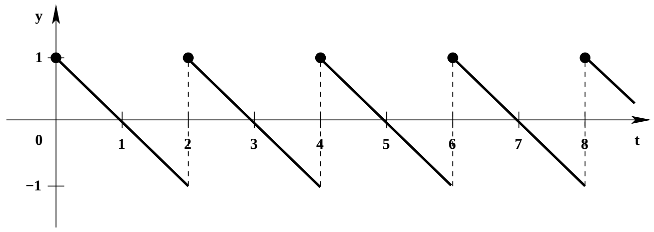
h) $f(t) = (t-3)u_2(t) - (t-2)u_3(t)$

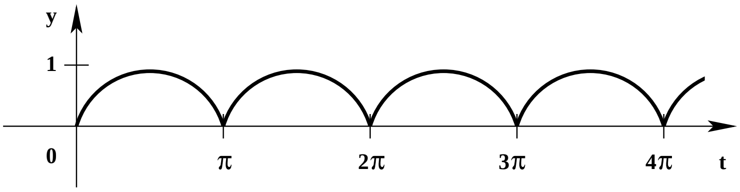
9. Determine a transformada de Laplace das seguintes funções periódicas:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

$$f(t) = \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t < \pi,$$
$$f(t + \pi) = f(t)$$

10. Mostre que $f * g = g * f$

11. Use a convolução para calcular:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$ b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}$ c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}, \quad a \neq 0$

12. Determine a solução do problema de valor inicial em termos de uma integral de convolução

a) $y'' + \omega^2 y = g(t), \ \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1$

b) $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sen} at, \ \ y(0) = y'(0) = 0$

13. Seja $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Mostre que $f(t) = -\dfrac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}$.

14. Use o resultado do exercício anterior para determinar $f(t)$ quando $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ é dada por:

a) $\ln\left(\dfrac{s+a}{s-a}\right)$ b) $\operatorname{arctg}\dfrac{a}{s}$ c) $\ln\left(1+\dfrac{a^2}{s^2}\right)$

15. Calcule $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\cos at - 1}{t}\right\}$

16. Usando a transformada de Laplace, resolva os seguintes problemas de valor inicial:

a) $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x - y \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$

b) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 4x + y \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 3$

c) $\begin{cases} x' - 3x - 4y = -1 \\ y' - 2x - y = 1 \end{cases}$ $x(0) = 2, \quad y(0) = 1$

d) $\begin{cases} x'' - 2y = 2 \\ y' + x = 5e^{2t} + 1 \end{cases}$ $x(0) = x'(0) = 2, \quad y(0) = 1$

e) $\begin{cases} x' + y + z = 1 \\ y' - x + z = 2\,\mathrm{sen}\,t \\ z' - x = 0 \end{cases}$ $x(0) = y(0) = z(0) = 1$

17. Decomponha em frações parciais:

a) $\dfrac{2x+3}{x^2+3x-10}$ b) $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+5x+6)}$ c) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

d) $\dfrac{x}{x^2+x-6}$ e) $\dfrac{2x-1}{x^2-4}$ f) $\dfrac{x^2+1}{x^3-4x}$

g) $\dfrac{3x+5}{2x^3+12x^2+10x}$ h) $\dfrac{x+7}{(x+1)(x^2-4x+3)}$ i) $\dfrac{x^3+2x^2-3x+1}{x^2+2x-8}$

j) $\dfrac{x^2+1}{(x-3)(x^2+4x+3)}$ k) $\dfrac{x+1}{x^2(x-1)}$ l) $\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}$

m) $\dfrac{x-3}{x^2-4x+4}$ n) $\dfrac{2x+5}{x^3+3x^2-4}$ o) $\dfrac{x^2}{(x^2-3x+2)^2}$

p) $\dfrac{x-1}{x(x^2+2x+4)}$ q) $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+1)}$ r) $\dfrac{1}{x^4-1}$

s) $\dfrac{x^4+1}{x^4+x^2}$ t) $\dfrac{u^2+1}{u^3+1}$ u) $\dfrac{2x+1}{(x^2-4)^2}$

v) $\dfrac{x^3+x+1}{x^2-2x^2+1}$ w) $\dfrac{x^3-1}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$

Capítulo 9

Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

Agora, estamos interessados em estudar sistemas de equações diferenciais lineares de primeira ordem:

Definição 36. *Um sistema da linear da forma*

$$\begin{cases} x_1' = p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x_2' = p_{21}(t)x_1 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ \quad \vdots \\ x_n' = p_{n1}(t)x_1 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases}$$

é chamado de sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Se todas as funções $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ forem indeticamente nulas no intervalo $I = (\alpha, \beta)$, dizemos que o sistema (36) é homogêneo; caso contrário, ele é não-homogêneo.

Definição 37. *Dizemos as funções*

$$x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$$

são uma solução do sistema (36) no intervalo $I = (\alpha, \beta)$ se elas: i) são diferenciáveis em todos os pontos do intervalo I e ii) satisfazem o sistema (36) em todo $t \in I$.

Definição 38. *Se associarmos ao sistema (36), n condições iniciais:*

$$x_1(t_0) = x_1^0, \ldots, x_n(t_0) = x_n^0, \tag{9.1}$$

dizemos que (36) e (9.1) formam um problema de valor inicial (PVI).

Vejamos, através de um exemplo, que sistemas lineares envolvendo derivadas de ordem mais altas podem ser reduzidos a sistemas de primeira ordem:

Exemplo 125. *Consideremos o sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem:*

$$\begin{cases} 2x'' = -6x + 2y \\ y'' = 2x - 2y + 40 \operatorname{sen} 3t \end{cases}$$

A mudança de variável

$$x_1 = x \quad x_2 = x' \quad x_3 = y \quad x_4 = y'$$

nos diz que

$$x_1' = x_2 \quad x_2' = x'' \quad x_3' = x_4 \quad x_4' = y''$$

e permite que reescrevamos o sistema (125), como um sistema de primeira ordem:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ 2x_2' = -6x_1 + 2x_3 \\ x_3' = x_4 \\ x_4' = 2x_1 - 2x_3 + 40 \operatorname{sen} 3t \end{cases}$$

Se tivéssemos as quatro condições iniciais relativas ao sistema de segunda ordem (125), elas seriam naturalmente traduzidas nas quatro condições iniciais correspondentes para o sistema de primeira ordem acima.

Equações lineares de ordem n também podem ser vistas como sistemas lineares de primeira ordem:

Exemplo 126. *Consideremos a edo linear de terceira ordem:*

$$x''' + 3x'' + 2x' - 5x = \operatorname{sen} 2t. \tag{9.2}$$

A mudança de variável

$$x_1 = x \quad x_2 = x' \quad x_3 = x''$$

nos diz que

$$x_1' = x_2 \quad x_2' = x_3 \quad x_3' = x'''$$

e permite que reescrevamos a edo (9.2), como um sistema de primeira ordem:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = -3x_3 - 2x_2 + 5x_1 + \operatorname{sen} 2t \end{cases}$$

Teorema 25. *Se as funções $p_{11}, \ldots, p_{nn}$, $g_1, \ldots, g_n$ são contínuas em um intervalo aberto $I = (\alpha, \beta)$, então existe uma única solução $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ do sistema (36), definida em todo o intervalo I, que também satisfaz as condições iniciais (9.1), onde t_0 é um ponto qualquer de I e $x_1^0, \ldots, x_n^0$ são números reais arbitrários.*

Podemos usar uma notação matricial para os sistemas lineares, se denotarmos

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) \cdots\cdots p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) \cdots\cdots p_{2n}(t) \\ \vdots \\ p_{n1}(t) \cdots\cdots p_{nn}(t) \end{bmatrix}, \qquad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \vec{g}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix},$$

podemos reescrever o sistema (36) na forma:

$$\vec{x}' = P(t)\vec{x} + \vec{g}$$

Vamos considerar o sistema homogêneo

$$\vec{x}' = P(t)\vec{x} \tag{9.3}$$

Veremos abaixo que o Princípio de superposição também é válido para sistemas de edo's.

Teorema 26 (Princípio de Superposição). *Sejam $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ soluções do problema homogêneo (9.3) no intervalo I, então a combinação linear $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$ também é solução de (9.3) quaisquer que sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.*

Ou seja, o conjunto de soluções do sistema homogêneo é um espaço vetorial. A dimensão destes espaço é n. Portanto, para descrevermos completamente o conjunto de soluções do sistema homogêneo, basta encontrarmos n soluções linearmente independentes. Sejam $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ n soluções do sistema homogêneo (9.3). Consideremos a matriz

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \cdots\cdots x_{n1}(t) \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ x_{n1}(t) \cdots\cdots x_{nn}(t) \end{bmatrix} \tag{9.4}$$

Para cada t fixado, sabemos que as colunas da matriz acima são linearmente independentes se e somente se o $\det X(t) \neq 0$.

Definição 39. *O determinante da matriz definida em (9.4), $\det X(t)$, é chamado de Wronskiano das n soluções do sistema homogêneo (9.3) e é denotado por $W[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n] = \det X(t)$.*

Teorema 27. *Se* $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ *são soluções do problema homogêneo (9.3) no intervalo* I*, então* $W[\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n]$ *ou é identicamente nulo ou nunca se anula nesse intervalo.*

O Teorema 27 nos diz que $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ são soluções de (9.3) no intervalo $I = (\alpha, \beta)$, então $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ são linearmente independentes se, e somente se, $\det X(t) \neq 0$ em algum ponto do intervalo I.

Teorema 28. *Sejam* $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ *soluções linearmente independentes do problema homogêneo (9.3) em um intervalo aberto* I *em que* $p_{11}, \ldots, p_{nn}$ *são contínuas. Então cada solução* $\vec{x} = \vec{\phi}(t)$ *do sistema (9.3) pode ser expressa, de modo único, como uma combinação linear de* $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$

$$\vec{\phi}(t) = \alpha_1 \vec{x}_1(t) + \cdots + \alpha_n \vec{x}_n(t), \qquad \forall t \in I$$

Por esta propriedade, damos um nome especial a um conjunto de n soluções linearmente independentes.

Definição 40. *Se* $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ *soluções linearmente independentes do sistema homogêneo (9.3), dizemos que* $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ *formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea.*

Vejamos o caso não-homogêneo. Se tivermos

$$\vec{x}' = P(t)\,\vec{x} + \vec{g}, \tag{9.5}$$

pela linearidade, uma solução geral de (9.5) é dada por

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_p(t) + \alpha_1\,\vec{x}_1(t) + \cdots + \alpha_n\,\vec{x}_n(t)$$

onde $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ formam um conjunto fundamental do problema homogêneo (9.3) e $\vec{x}_p(t)$ é uma solução particular do problema não homogêneo. Isto é,

$$\vec{x}_p' = P(t)\,\vec{x}_p + \vec{g},$$

9.1 Sistemas de Equações Diferenciais Lineares com coeficientes constantes

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n + g_1(t) \\ x_2' = a_{21}x_1 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n + g_2(t) \\ \quad \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \cdots\cdots + a_{nn}x_n + g_n(t) \end{cases}$$

Vejamos como resolver sistemas lineares com coeficientes constantes usando a transformada de Laplace. Voltemos ao Exemplo 125. Já sabemos que se associarmos a este sistema quatro condições iniciais, ele tem solução e ela é única. Veremos que podemos usar a transformada de Laplace diretamente no sistema de segunda ordem tal como fizemos com as equações lineares de coeficientes constantes.

Exemplo 127. *Resolva o PVI*

$$\begin{cases} 2x'' = -6x + 2y \\ y'' = 2x - 2y + 40 \operatorname{sen} 3t \end{cases}$$
$$x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$$

Vamos aplicar a transformada nas equações do sistema e usar as propriedades que já conhecemos

$$\begin{cases} 2\left(s^2\mathcal{L}\{x\} - s\,x(0) - x'(0)\right) = \mathcal{L}\{2\,x''\} = \mathcal{L}\{-6\,x + 2\,y\} = -6\,\mathcal{L}\{x\} + 2\,\mathcal{L}\{y\} \\ s^2\,\mathcal{L}\{y\} - s\,y(0) - y'(0) = \mathcal{L}\{y''\} = \mathcal{L}\{2\,x - 2\,y + 40 \operatorname{sen} 3t\} \\ \qquad = 2\,\mathcal{L}\{x\} - 2\,\mathcal{L}\{y\} + 40\,\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen} 3t\right\} \end{cases}$$

Observemos que novamente a transformada de Laplace nos dará um problema algébrico

$$\begin{cases} (2\,s^2 + 6)\,\mathcal{L}\{x\} - 2\,\mathcal{L}\{y\} = 0 \\ -2\mathcal{L}\{x\} + (s^2 + 2)\,\mathcal{L}\{y\} = 40\,\dfrac{3}{s^2+9} = \dfrac{120}{s^2+9} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x\} &= \frac{240}{2\left((s^2+2)\,(s^2+3) - 2\right)(s^2+9)} = \frac{120}{\left(s^4 + 5\,s^2 + 6 - 2\right)(s^2+9)} \\ &= \frac{5}{s^2+1} - \frac{8}{s^2+4} + \frac{3}{s^2+9}, \end{aligned}$$

logo,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+1} - \frac{8}{s^2+4} + \frac{3}{s^2+9}\right\} = 5 \operatorname{sen} t - 4 \operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen} 3t.$$

Por outro lado:

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{(2\,s^2+6)\mathcal{L}\{x\}}{2} = \frac{120\,(s^2+3)}{(s^2+1)\,(s^2+4)\,(s^2+9)} = \frac{10}{s^2+1} + \frac{8}{s^2+4} - \frac{18}{s^2+9},$$

Então

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s^2+1} + \frac{8}{s^2+4} - \frac{18}{s^2+9}\right\} = 10 \operatorname{sen} t + 4 \operatorname{sen} 2t - 6 \operatorname{sen} 3t.$$

Exemplo 128. *Resolva o PVI*

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = -3x + y \end{cases}$$
$$x(0) = 5 \quad y(0) = 0$$

Vamos aplicar a transformada de Laplace nas equações do sistema e usar as propriedades que já conhecemos:

$$\begin{cases} (s-2)\mathcal{L}\{x\} + 2\mathcal{L}\{y\} = x(0) = 5 \\ 3\mathcal{L}\{x\} + (s-1)\mathcal{L}\{y\} = y(0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{x\} &= \frac{5\,(s-1)}{s^2 - 3\,s - 4} = \frac{2\,(s-4) + 3\,(s+1)}{(s-4)\,(s+1)} \\
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1} + \frac{3}{s-4}\right\} = 2\,e^{-t} + 3\,e^{4t} \\
2\,\mathcal{L}\{y\} = 5 - (s-2)\,\mathcal{L}\{x\} &= \frac{5\left(s^2 - 3\,s - 4\right) - 5\,(s-2)\,(s-1)}{s^2 - 3\,s - 4} \\
&= \frac{5\left(s^2 - 3\,s - 4\right) - 5\,(s^2 - 3\,s + 2)}{s^2 - 3\,s - 4} \\
&= -\frac{30}{(s-4)\,(s+1)} \\
&= -\frac{6\left((s+1) - (s-4)\right)}{(s-4)\,(s+1)}
\end{aligned}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{3}{s-4} + \frac{3}{s+1}\right\} = 3\,e^{-t} - 3\,e^{4t}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,e^{-t} + 3\,e^{4t} \\ e^{-t} - e^{4t} \end{bmatrix}$$

Exemplo 129. *Resolva o PVI*

$$\begin{cases} x' = 2\,x - 3\,y \\ y' = y - 2\,x \end{cases}$$
$$x(0) = 8 \quad y(0) = 3$$

Vamos aplicar a transformada de Laplace nas equações do sistema e usar as propriedades que já conhecemos:

$$\begin{cases} (s-2)\mathcal{L}\{x\} + 3\mathcal{L}\{y\} = x(0) = 8 \\ 2\mathcal{L}\{x\} + (s-1)\mathcal{L}\{y\} = y(0) = 3 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{8\,s - 17}{s^2 - 3\,s - 4} = \frac{5\,(s-4) + 3\,(s+1)}{(s-4)\,(s+1)}$$
$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}\right\} = 5\,e^{-t} + 3\,e^{4t}$$

$$\begin{aligned} 3\,\mathcal{L}\{y\} = 8 - (s-2)\mathcal{L}\{x\} &= \frac{8\left(s^2 - 3\,s - 4\right) - (s-2)(8\,s - 17)}{s^2 - 3\,s - 4} \\ &= \frac{\left(8\,s^2 - 24\,s - 32\right) - (8\,s^2 - 33\,s + 34)}{s^2 - 3\,s - 4} \\ &= \frac{9\,s - 66}{(s-4)\,(s+1)} \\ &= \frac{-6\,(s+1) + 15\,(s-4)}{(s-4)\,(s+1)} \end{aligned}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2}{s-4} + \frac{5}{s+1}\right\} = 5\,e^{-t} - 2\,e^{4t}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\,e^{-t} + 3\,e^{4t} \\ 5\,e^{-t} - 2\,e^{4t} \end{bmatrix}$$

Vejamos agora, como determinar a solução geral de um sistema de primeira ordem usando a transformada de Laplace:

Exemplo 130. *Encontre uma solução geral de:*

$$\begin{cases} x' = 4\,x - 3\,y \\ y' = 6\,x - 7\,y \end{cases}$$

Vamos aplicar a transformada nas equações do sistema e usar as propriedades que já conhecemos:

$$\begin{cases} s\,\mathcal{L}\{x\} - x(0) = \mathcal{L}\{x'\} = \mathcal{L}\{4\,x - 3\,y\} = 4\,\mathcal{L}\{x\} - 3\,\mathcal{L}\{y\} \\ s\mathcal{L}\{y\} - y(0) = \mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{6\,x - 7\,y\} = 6\,\mathcal{L}\{x\} - 7\,\mathcal{L}\{y\} \end{cases}$$

Observemos que novamente a transformada de Laplace nos dará um problema algébrico:

$$\begin{cases} (s-4)\,\mathcal{L}\{x\} + 3\,\mathcal{L}\{y\} = x(0) \\ -\,6\,\mathcal{L}\{x\} + (s+7)\,\mathcal{L}\{y\} = y(0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x\} &= \frac{x(0)(s+7) - 3\,y(0)}{(s+5)(s-2)} = \frac{A}{s+5} + \frac{B}{s-2} \\ &= \frac{-2\,x(0) + 3\,y(0)}{7\,(s+5)} + \frac{9\,x(0) - 3\,y(0)}{7\,(s-2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{-2\,x(0) + 3\,y(0)}{7\,(s+5)} + \frac{9\,x(0) - 3\,y(0)}{7\,(s-2)} \right\} \\ &= \frac{-2\,x(0) + 3\,y(0)}{7}\,e^{-5t} + \frac{9\,x(0) - 3\,y(0)}{7}\,e^{2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y\} &= \frac{x(0)}{3} - \frac{(s-4)\,\mathcal{L}\{x\}}{3} = \frac{x(0)}{3} - \frac{(s-4)\,\big(x(0)\,(s+7) - 3\,y(0)\big)}{3\,(s+5)(s-2)} \\ &= \frac{x(0)\,\big(s^2 + 3\,s - 10 - (s^2 + 3\,s - 28)\big)}{3\,(s+5)\,(s-2)} + \frac{A}{s+5} + \frac{B}{s-2} \\ &= \frac{18\,x(0)}{3\,(s+5)\,(s-2)} + \frac{y(0)}{7\,(s+5)} - \frac{y(0)}{7\,(s-2)} \\ &= \frac{-6\,x(0) + y(0)}{7\,(s+5)} + \frac{6\,x(0) - y(0)}{7\,(s-2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{-6\,x(0) + y(0)}{7\,(s+5)} + \frac{6\,x(0) - y(0)}{7\,(s-2)} \right\} \\ &= \frac{-6\,x(0) + y(0)}{7}\,e^{-5t} + \frac{6\,x(0) - y(0)}{7}\,e^{2t} \end{aligned}$$

Para obter a solução geral, precisamos obter dois pares de soluções linearmente independentes. Sabemos que duas soluções $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ do sistema serão linearmente independentes se tiverem Wronskiano diferente de zero em pelo menos um ponto. Isto é, se

$$\det X(t) = \det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{bmatrix} \neq 0$$

Podemos tomar $t = 0$ e fazer escolhas dos valores das condições iniciais de modo que o determinante acima seja diferente de zero. Por exemplo:

$$x_1(0) = 1, \quad y_1(0) = 2 \qquad \text{e} \qquad x_2(0) = 3, \quad y_2(0) = 2,$$

então:

$$W[\vec{x}_1, \vec{x}_2](0) = \det \begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ y_1(0) & y_2(0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\vec{x}_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-5t} \\ -\frac{3}{7}e^{-5t} + \frac{3}{7}e^{2t} \end{bmatrix}, \qquad \vec{x}_2(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ \frac{16}{21}e^{-5t} - \frac{16}{21}e^{2t} \end{bmatrix}$$

formam uma base para o espaço solução do sistema e uma solução geral é da forma:

$$\vec{x}(t) = \alpha_1\vec{x}_1(t) + \alpha_2\vec{x}_2(t) = \alpha_1 \begin{bmatrix} e^{-5t} \\ -\frac{3}{7}e^{-5t} + \frac{3}{7}e^{2t} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ \frac{16}{21}e^{-5t} - \frac{16}{21}e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{-5t} + \alpha_2 e^{2t} \\ \\ \alpha_1\left[-\frac{3}{7}e^{-5t} + \frac{3}{7}e^{2t}\right] + \alpha_2\left[\frac{16}{21}e^{-5t} - \frac{16}{21}e^{2t}\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{-5t} + \alpha_2 e^{2t} \\ \\ \frac{16\alpha_2 - 9\alpha_1}{21}e^{-5t} + \frac{9\alpha_1 - 16\alpha_2}{21}e^{2t} \end{bmatrix}$$

9.2 Método de Eliminação

Exemplo 131. *Resolva o PVI*

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 6x - 7y \end{cases}$$
$$x(0) = 2 \quad y(0) = -1$$

Vamos resolver a segunda equação para x

$$
\begin{aligned}
&x = \frac{1}{6}\,y' + \frac{7}{6}\,y \qquad x' = \frac{1}{6}\,y'' + \frac{7}{6}\,y' \\
&\frac{1}{6}\,y'' + \frac{7}{6}\,y' = x' = 4\,x - 3\,y = \frac{4}{6}\,y' + \frac{28}{6}\,y - 3\,y \\
&y'' + 7\,y' - 4\,y' - 28\,y + 18\,y = 0 \qquad y'' + 3\,y' - 10\,y = 0 \\
&r^2 + 3\,r - 10 = (r-2)\,(r+5) = 0 \qquad y(t) = k_1\,e^{2t} + k_2\,e^{-5t} \\
&x(t) = \frac{1}{6}\,y' + \frac{7}{6}\,y = \frac{1}{6}\big(2\,k_1\,e^{2t} - 5\,k_2\,e^{-5t}\big) + \frac{7}{6}\left(k_1\,e^{2t} + k_2\,e^{-5t}\right) \\
&\quad\;\; = \frac{3}{2}\,k_1\,e^{2t} + \frac{1}{3}\,e^{-5t} \\
&2 = x(0) = \frac{3}{2}\,k_1 + \frac{1}{3}\,k_2 \\
&-1 = y(0) = k_1 + k_2, \quad \text{logo,} \\
&k_1 = 2, \quad k_2 = -3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{2t} - e^{-5t} \\ 2e^{2t} - 3e^{-5t} \end{bmatrix}
$$

Um procedimento mais geral para o método de eliminação se baseia na propriedade dos operadores diferenciais associados a equações de coeficientes constantes se comportarem como polinômios. Vejamos novamente o exemplo acima

$$
\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 6x - 7y \end{cases} \qquad \begin{cases} (D-4)x + 3y = 0 \\ -6x + (D+7)y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1x + L_2y = f_1(t) \\ L_3x + L_4y = f_2(t) \end{cases}
$$

Onde

$$
L_1 = D - 4 \qquad L_2 = 3 \qquad L_3 = -6 \qquad L_4 = D + 7 \qquad f_1(t) = 0 \qquad f_2(t) = 0.
$$

Logo,

$$
\begin{cases} L_3L_1x + L_3L_2y = L_3f_1(t) \\ L_1L_3x + L_1L_4y = L_1f_2(t) \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
&L_3L_1x - L_3L_1x + L_3L_2y - L_1L_4y = L_3f_1(t) - L_1f_2(t) \\
&(L_3L_2 - L_1L_4)y = L_3f_1(t) - L_1f_2(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(L_3L_2 - L_1L_4)y &= (18 - (D-4)(D+7))\, y = \big(-18 - D^2 - 3D + 28\big)\, y \\
&= -D^2y - 3Dy + 10y = -y'' - 3y' + 10y = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
L_4L_1x + L_4L_2y = L_4f_1(t) \\
L_2L_3x + L_2L_4y = L_2f_2(t),
\end{cases}
$$

então:

$$
\begin{gathered}
(L_4L_1 - L_2L_3)x = L_4f_1(t) - L_2f_2(t) \\
0 = L_4f_1(t) - L_2f_2(t) = (L_4L_1 - L_2L_3)x = -(L_3L_2 - L_1L_4)x = x'' + 3x' - 10x \\
x(t) = \alpha_1 e^{2t} + \alpha_2 e^{-5t} \qquad y(t) = \beta_1 e^{2t} + \beta_2 e^{-5t}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = x' - 4x + 3y &= 2\alpha_1 e^{2t} - 5\alpha_2 e^{-5t} - 4\alpha_1 e^{2t} - 4\alpha_2 e^{-5t} + 3\beta_1 e^{2t} + 3\beta_2 e^{-5t} \\
&= (-2\alpha_1 + 3\beta_1)e^{2t} + (-9\alpha_2 + 3\beta_2)e^{-5t}
\end{aligned}
$$

como as funções e^{2t} e e^{-5t} são l.i.

$$
\begin{aligned}
-2\alpha_1 + 3\beta_1 &= 0 \\
-9\alpha_2 + 3\beta_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \beta_1 e^{2t} + \beta_2 e^{-5t} \\
x(t) &= \alpha_1 e^{2t} + \alpha_2 e^{-5t} = \frac{3}{2}\beta_1 e^{2t} + \frac{1}{3}\beta_2 e^{-5t}
\end{aligned}
$$

9.3 Exercícios

1. Usando a transformada de Laplace, encontre uma solução geral para os seguintes sistemas

a) $\begin{cases} x' = y - x \\ y' = -x - 3y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x' - y' + 3x = \operatorname{sen} t \\ x' + y = \cos t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' + 2x + y = \operatorname{sen} t \\ y' - 4x - 2y = \cos t \end{cases}$

d) $\begin{cases} x'' + y' + x = e^t \\ x' + y'' = 1 \end{cases}$

2. Resolva os sistemas abaixo por substituição

a) $\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = 2y \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = -3x + 2y \\ y' = -3x + 4y \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = -3x - 4y \\ y' = 2x + y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = 4x + y + 2t \\ y' = -2x + y \end{cases}$

e) $\begin{cases} x' = 2x - 3y + 2\operatorname{sen} 2t \\ y' = x - 2y - \cos 2t \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2y' - x' = x + 3y + e^t \\ 3x' - 4y' = x - 15y + e^{-t} \end{cases}$

g) $\begin{cases} x'' = -5x + 2y \\ y'' = 2x - 8y \end{cases}$

h) $\begin{cases} x'' - 3y' - 2x = 0 \\ y'' + 3x' - 2y = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x'' + y'' - 3x' - y' - 2x + 2y = 0 \\ 2x'' + 3y'' - 9x' - 2y' - 4x + 6y = 0 \end{cases}$

Capítulo 10

Respostas

Exercícios 2.10

1. $\dfrac{dp}{dt} = kp, \quad k \in \mathbb{R}.$

2. $\dfrac{dQ}{dt} = -kQ, \quad k > 0, \quad \begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = -kq \\ Q(0) = Q_0 \end{cases}$; Sim; Sim.

3.

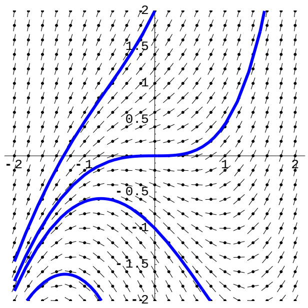


Figura 10.1: Campo de direções e algumas curvas integrais.

Exercícios 3.11

1 .

a. $(2w-1)(1+3z)=kz.$

b. $\dfrac{y^2}{2}+e^y=\dfrac{x^2}{2}+e^{-x}+k.$

c. $u=\dfrac{v+k}{1-kv}.$

d. $(1+y)(x+1)=ke^x.$

e. $y(y+2)=ke^{x^2}.$

f. $\operatorname{arctg} y=x+\dfrac{x^2}{2}+k.$

2 .

a. $s=\operatorname{sen} t-1+ke^{-\operatorname{sen} t}.$

b. $y=e^{-x}+ke^x$

c. $\rho(\theta)=k\cos\theta.$

d. $s=\operatorname{sen} t+\dfrac{k}{t}.$

e. $y(x)=e^{-x^2}(x^2+k).$

f. $y=e^x+\dfrac{k}{x}.$

3 .

a. $kx^2y^n+xy^n-1=0.$

b. $a^2y^3=ke^{ax}-a(x+1)-1.$

c. $y=\dfrac{\operatorname{tg} x+\sec x}{\operatorname{sen} x+k}.$

d. $kx^2y^2+2xy^2-1=0.$

e. $y=\dfrac{2}{x(x^2+k)}.$

f. $y^2\left(x^2+1+ke^{x^2}\right)=1.$

4 .

a. $y(x)=\dfrac{e^{-x^2}}{\int e^{-x^2}dx+k}+x.$

b. $y(x)=-\dfrac{1}{x+k}+x.$

5 $y(x)=\dfrac{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x\cos x+ke^x\operatorname{sen} x}{\cos x-\operatorname{sen} x+ke^x}$

6 .

a. $x^4+3x^2y^2+y^3=k.$

b. $x^4+4xy^3=k.$

c. $2y^2-xy+x^3=k.$

d. $\dfrac{xy}{x-y}=k.$

e. $\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|-\dfrac{xy}{x-y}=k.$

f. $y^4=4xy+k.$

7 .

a. $y^4 = 4x^4 \ln x + kx^4$.

b. $ye^{3x}\left[x^2 + \frac{y^2}{3}\right] = k$.

c. $xe^{2y} - \ln|y| = k$.

d. $e^x \operatorname{sen} y + y^2 = k$.

e. $2\ln x + y^3 = ky$.

f. $\ln \sec x + \sec y = k$.

g. $xy + \ln|y| = k$.

h. $\frac{y^2}{2x^2} - \ln|x| = k$.

8 .

a. $(y + 3x)^2(y + x)^3 = k$.

b. $(x + y)^2(x + 2y) = k$.

c. $x^3 + 6x^2y = k$.

d. $x^3 + 3xy^2 + y^3 = k$.

e. $\frac{x}{x+y} + \ln|x| = k$.

f. $\frac{2x}{y} + \ln|y| = k$.

9 .

a. $\ln|4x + 8y + 5| + 8y - 4x = k$.

b. $\frac{x + y - 3}{(x - y - 1)^3} = k$.

c. $-6x + 24y - \ln|6x + 12y + 5| = k$.

d. $(x + y - 1)^5(x - y - 1)^2 = k$.

e. $(x + y - 1)^2 = k(x - y + 3)$.

f. $2x + 6y + k = \ln|6x - 2y + 1|$.

10 .

a. $9(k-y)^2 = 4(k-x)^3$ e $y(x) = x + \frac{1}{3}$.

b. $y = kx + k$.

c. $4kx = 4k^2 - y^2$.

d. $y = kx + \sqrt{1 + k^2}$ e $y = \sqrt{1 - x^2}$

e. $(3ky + 1)^2 = 4k^3x^3$ e $y + x = 0$.

f. $y = kx + \frac{1}{k}$ e $y^2 = 4x$.

11 .

a. $y = kx(x + 3)$

b. $s\sqrt{1 - 4t^2} + 2t\sqrt{1 - s^2} = k$.

c. $y = -\frac{a}{\ln|ax + b| + k}$.

d. $s = e^t + k \operatorname{sen} t$.

e. $y = x^2\left(1 + ke^{\frac{1}{x}}\right)$.

f. $2y = (x + 1)^4 + k(x + 1)^2$.

g. $y = ke^{-\operatorname{sen} x}$.

h. $y^2 = \dfrac{2ke^{2x^2}}{1-ke^{2x^2}}$.

i. $y = nx + kx^3$.

j. $s = t + 2 + k \operatorname{sen} t$.

k. $y(x) = \dfrac{3x-1}{9} + e^{-2x} + ke^{-3x}$.

l. $s = t^2 + k\cos t$.

m. $x + (1-\cos x)y = k$.

n. $y = x^n(e^x + k)$.

o. $y = \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + k\right)\sec x$.

p. $x(t) = -\dfrac{1}{2}(3\operatorname{sen} 2t + \cos 2t) + ke^{6t}$.

q. $y^2(x) = v(x) = -x\ln|x| + kx$.

12

a. $y(x) = -\sqrt{2[\ln(1+x^2)+2]}, \quad x \in \mathbb{R}$.

b. $y(x) = \dfrac{-1+\sqrt{4x^2-15}}{2}, \quad x > \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

16(i) $y(x) = \dfrac{2-ke^x}{ke^x-1}$. **16(ii)** $y(x) = \dfrac{1}{x+k} + 1$. **17.** $A = 5$.

18 .

a. $3x^2 - y^2 = k$

b. $\ln|2x-3| - \dfrac{4y+5}{2x-3} = k$.

c. $y = (\sqrt{x+1}+k)^2$ e $y = 0$.

d. $y = kx - \dfrac{1}{k^2}$ e $y^3 = -\frac{27}{4}x^2$.

e. $2x^3 + 3xy^2 + 3y^3 = k$.

f. $\begin{cases} x(p) & = \frac{k}{3p^2} - \frac{2}{3}p, \\ y(p) & = \frac{2k-p^3}{3p} \end{cases}$ e $y = 0$.

g. $10y - 5x + 7\ln|10x+5y+9| = k$.

h. $y = kx + \sqrt{1-k^2}$ e $y^2 - x^2 = 1$.

i. $e^{3x}y - x^2 = k$.

j. $y(x) = \dfrac{x^3}{(x+k)^2} + 1$.

k. $y\ln x + 3x^2 - 2y = k$.

l. $\frac{x^2}{2y^2} + \ln|y| = k$.

m. $x\cos y + y\operatorname{sen} x = k$.

n. $x^3 + 3xy^2 + y^3 = k$.

o. $xy\cos\dfrac{y}{x} = k$.

p. $1 + 2ky - k^2x^2 = 0$.

q. $\ln|6x+12y+5| - 24y + 6x = k$.

r. $k\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2}}$.

s. $1 + 4kz - k^2x^2 = 0$.

19 $b = 1$ e $\dfrac{e^{2xy}+x^2}{2} = k$

20 .

a. $(2+y)(3-x)=k.$

b. $s=\operatorname{sen} t+k\cos t.$

c. $kx^2y+2xy-1=0.$

d. $y(x)=x^4\left[\dfrac{\ln|x|}{2}+k\right]^2.$

e. $y=kx+k-k^2, \quad 4y=(x+1)^2.$

f. $y=3x+kx^2.$

g. $ky^2=1+x^2.$

h. $y=kx^a+\dfrac{x}{1-a}-\dfrac{1}{a}.$

i. $x^3+x^2y=k.$

j. $\operatorname{arcsen} y=\ln k(x+\sqrt{1+x^2}).$

k. $\dfrac{x^2}{2}-xy-\dfrac{y^2}{2}=k.$

l. $y=-\frac{2x}{x^2+k}.$

m. $\ln|2x-3|-\dfrac{4y+5}{2x-3}=k.$

n. $y=x+ke^{2x}.$

a. $\ln|x+y|-\dfrac{x}{x+y}=k.$

b. $y(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x}+\dfrac{k}{x}.$

c. $x^2+y^2=kx^3.$

d. $(k\sqrt{1-x^2}-a)y=1.$

e. $\ln\left|\dfrac{1+y}{1-y}\right|=2\operatorname{arctg} x+k.$

f. $y(x)=(\sqrt{x+1}+k)$, $y=0.$

g. $y(x)=kx-\ln k \qquad y(x)=1+\ln x.$

h. $(y+k)^2 \quad = \quad 4kx$
e solução singular: $\quad y=x.$

i. $\begin{cases} x(p) & =\frac{1}{3}(kp^{-\frac{1}{2}}-p) \\ y(p) & =-\frac{1}{6}(2kp^{\frac{1}{2}}+p^2) \end{cases}$

j. $\frac{y-4x-2}{y-4x+2}=ke^{4x}.$

Exercícios 4.7

1a. $p(t)=p_0e^{\beta t}$; população limite: ∞.

1b. $p(t)=\dfrac{Ce^{\beta t}}{1+\frac{k}{\beta}Ce^{\beta t}}$; população limite: $\dfrac{\beta}{k}$.

2. 112.500 habitantes.

3. ≈ 17 anos.

4. 20m

5. $v(t)=\dfrac{mg}{\gamma}(1-e^{-\frac{\gamma}{m}t}).$

6a. $y(t)=-\dfrac{2000}{3}+\dfrac{3500}{3}e^{\frac{3}{2\pi}}e^{-\frac{3}{2\pi}\cos 2\pi t}.$

6b. $\approx 2.365.$

7. ≈ 35 anos.

8. ≈ 14.735 anos.

9. 23h 12min.

10. ≈ 34 dias.

11. $\approx 55,5$.

12. 48%.

13a. $Q(t) = \dfrac{V(kr+P)}{r} + \left(c_0V - \dfrac{V(kr+P)}{r}\right)e^{-\frac{r}{V}t}$, $c(t) = \dfrac{Q(t)}{V}$; $\dfrac{V(kr+P)}{r}$.

13b. $\dfrac{V\ln 10}{r}$.

14a. $E(t) = \dfrac{e^{\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}}}{9 + e^{\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}}}$, $\quad E + S = 1$.

14b. ≈ 19 dias.

16. 400 s.

17. $m(t) = 201.977,31 - 1.977,31e^{(\ln 2)t}$.

18. 60 min.

19a. $c(t) = 0,048(1 - e^{-\frac{1}{12.000}t})$.

19b. $\tau \approx 30$ min.

20. $v(t) = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}\dfrac{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t} + 1}$; $\quad v_L = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$.

21. $P(T) = Ce^{-\frac{k}{T}}$.

22. aproximadamente 18kg.

23. aproximadamente 2h 49min.

24. $v(t) = \dfrac{F}{k\eta} + \left(v_0 - \dfrac{F}{k\eta}\right)e^{-\frac{k\eta}{m}t}$.

Exercícios 5.8

a. $\ln|ay + \sqrt{a^2y^2 + k_1}| = ax + k_2$ ou $ay = k_1e^{ax} + k_2e^{-ax}$.

b. $y + k_1\ln|y| = x + k_2$.

c. $y = k_2 + k_1 \operatorname{sen} x - x - \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x.$

d. $y = \pm\dfrac{2}{3}(x + k_1)^{\frac{3}{2}} + k_2.$

e. $y(x) = \ln|\sec(2x + 2k_1)| + k_2.$

f. $y = k_1 x^2 + k_2.$

g. $y = x^2 + k_1 \ln|x| + k_2.$

h. $y^2 = \dfrac{1}{k_1 x + k_2}.$

i. $y^2 = k_1(x + k_2)^2 + \dfrac{1}{k_1}.$

j. $\dfrac{y^2}{2} = k_1 x + k_2.$

k. $e^y = (x + k_2)^2 + k_1.$

l. $y(x) = a \operatorname{senh}\left(\dfrac{x}{a} + k_1\right) + k_2.$

2 .

a. $y(x) = \dfrac{e^{2x} - \cos 2x}{4} - \dfrac{1}{2}x - 1.$

b. $y(x) = e^x(x - 1).$

3 .

a. $y(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}.$

b. $y(x) = \dfrac{4}{3}(x + 1)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{3}.$

c. $y(x) = x - \ln x - 1.$

d. $y(x) = e^x(x - 1) + \dfrac{e}{2}(1 - x^2).$

e. $y = \dfrac{4}{3}(t + 1)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{3}.$

f. $y(x) = x^2 + 4.$

g. $y(x) = -10e^{-2x} \cos x + 9e^{-2x} \operatorname{sen} x + 7e^{-4x}.$

h. $y(x) = \dfrac{F_0}{2\omega^2} \operatorname{sen} \omega t - \dfrac{F_0}{2\omega^2} t \cos \omega t.$

4 .

a. $y_2(x) = \cos x^2.$

b. $y_2(x) = x.$

c. $y(x) = k_1(x + 1) + k_2 e^{2x}.$

d. $y(x) = (k_1 + k_2 x)e^{x^2}.$

e. $y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cos x.$

5 .

a. $y(x) = k_1 e^{-4x} + k_2 e^{-x}.$

b. $y(x) = e^{\frac{3}{2}x}\left(k_1 e^{\frac{\sqrt{5}}{2}} + k_2 e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}\right).$

c. $y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\left(k_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + k_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$

d. $y(x) = e^{-x}(k_1 \cos \sqrt{2}x + k_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}x).$

e. $y(x) = (k_1 + k_2 x)e^{3x}.$

f. $y(x) = k_1 e^x + k_2 e^{-x}.$

g. $y(x) = k_1 \cos 2x + k_2 \operatorname{sen} 2x.$

h. $y(x) = \frac{k_1 + k_2 \ln x}{x}.$

i. $y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(k_1 \cos\frac{\sqrt{7}}{2}\ln x + k_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{7}}{2}\ln x\right)$

j. $y(x) = k_1 x + k_2 x^{-5}$.

6 .

a. $y'' - y' - 2y = 0$.

b. $y'' + 6y' + 9y = 0$.

c. $y'' - 2y' + 5y = 0$.

7. $y(x) = k_1 + k_2 e^{2x} + x^2$

8. $y(x) = e^{x^2} + 2e^{x} - 2e^{-x^3}$

9. $g(x) = 3xe^{2x} + ke^{2x}$

Exercícios 6.5

1 .

a. $y(x) = k_1 + k_2 x + k_3 e^{-2x}$.

b. $y(x) = k_1 e^{x} + k_2 e^{-x} + k_3 e^{2x}$.

c. $y(x) = k_1 + (k_2 \cos x + k_3 \operatorname{sen} x)e^{-x}$.

d. $y(x) = k_1 e^{2x} + k_2 \cos 2x + k_3 \operatorname{sen} 2x$.

e. $y(x) = k_1 \operatorname{sen} x + k_2 \cos x + x(k_3 \operatorname{sen} x + k_4 \cos x)$.

f. $y(x) = (k_1 x^2 + k_2 x + k_3)e^{2x} + k_4 e^{-x}$.

g. $y(x) = (k_1 \operatorname{sen}\sqrt{2}x + k_2 \cos\sqrt{2}x)e^{\sqrt{2}x} + (k_3 \operatorname{sen}\sqrt{2}x + k_4 \cos\sqrt{2}x)e^{-\sqrt{2}x}$.

h. $y(x) = k_1 e^{x} + k_2 e^{-x} + k_3 e^{x}\cos x + k_4 e^{x} \operatorname{sen} x$.

i. $y(x) = k_1 e^{-2x} + k_2 e^{2x} + k_3 e^{3x} + k_4 e^{-3x}$.

j. $y(x) = k_1 + e^{2x}[k_2 \cos x + k_3 \operatorname{sen} x]$.

k. $y(x) = k_1 + k_2 x + k_3 e^{2x} - \dfrac{x^4}{8} - \dfrac{x^3}{12} - \dfrac{3x^2}{8}$.

l. $y(x) = k_1 + k_2 e^{-x} + k_3 e^{2x} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{5x}{4}$.

2 .

a. $y(x) = k_1 e^{x} + k_2 xe^{x} + k_3 e^{-x} + \dfrac{1}{2}x^2 e^{x} + 3$.

b. $y(x) = k_1 e^{-x} + k_2 xe^{-x} + k_3 e^{2x} - \dfrac{1}{4}e^{x} - \dfrac{1}{4}xe^{x}$.

3 .

a. $y(t) = k_1 e^t + k_2 t + k_3 t e^t.$ **b.** $y(t) = k_1 t^2 + k_2 t^3 + k_3(t+1).$

4 .

a. $y(x) = k_1 \frac{1}{x} + k_2 x^{\sqrt{2}} + k_3 x^{-\sqrt{2}}.$ **b.** $y(x) = k_1 \frac{1}{x} + k_2 x^{\sqrt{2}} + k_3 x^{-\sqrt{2}}.$

5 .

a. $y(x) = \frac{3}{16}(1 - \cos 2x) + \frac{1}{8}x^2.$ **b.** $y(x) = 1 + \frac{1}{4}(x^2 + 3x) - xe^x.$

6 .

a. $y(x) = k_1 x + k_2 x \ln x + 2 + \ln x.$ **b.** $y(x) = k_1 x^{-1} + k_2 x^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{9}x^2 - \frac{1}{3}x + 2.$

c. $y_p(x) = -2\cos(\sqrt{x})x^{-1} + 4\,\text{sen}(\sqrt{x})x^{-\frac{3}{2}}.$

8 .

a. $y(x) = k_1 e^{(1+\sqrt{3})x} + k_2 e^{(1-\sqrt{3})x}.$ **d.** $y(x) = k_1 x^2 + k_2 x^3 + x^4 - x^2 \ln x.$

b. $y(x) = k_1 + k_2 e^{-5x} + k_3 x e^{-5x}.$ **e.** $y(x) = k_1 e^{2x} + k_2 e^{5x} + 6e^x.$

c. $y(x) = k_1 e^{-\frac{1}{3}} + k_2 x^{\frac{1}{2}}$, $x > 0.$ **f.** $y(x) = k_1 e^{-x} + k_2 x e^{-x} + k_3 x^2 e^{-x}.$

g. $y(x) = k_1 + k_2 x + k_3 x^2 e^x - x - 3 - \frac{2}{3}x^3 e^x.$

h. $y(x) = k_1 \cos 5x + k_2 \,\text{sen}\, 5x + \frac{1}{4}\,\text{sen}\, x.$

i. $y(x) = k_1 e^{-\frac{x}{3}} + e^{-\frac{3x}{2}}\left(k_2 \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x + k_3 \,\text{sen}\, \frac{\sqrt{11}}{2}x\right).$

j. $y(x) = e^{\frac{3x}{2}}\left(k_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x + k_2 \,\text{sen}\, \frac{\sqrt{11}}{2}x\right) + \frac{4}{5}x^3 + \frac{36}{25}x^2 + \frac{46}{125}x - \frac{222}{625}.$

k. $y(x) = k_1 + k_2 e^{2x} + k_3 e^{3x} + \frac{1}{5}\,\text{sen}\, x - \frac{1}{5}\cos x + \frac{4}{3}x.$

l. $y(x) = e^x(k_1 \cos x + k_2 \,\text{sen}\, x) = e^x \cos x \ln|\sec x + \text{tg}\, x|.$

m. $y(x) = k_1 x + k_2 x^{-2} + k_3 x^{-2} \ln x$, $x > 0.$

n. $y(x) = k_1e^{2x} + k_2xe^{2x} + x^2e^{2x} + x - 2.$

o. $y(t) = k_1e^{t} + e^{-t}(k_2\cos t + k_3 \operatorname{sen} t).$

p. $y(x) = k_1 + k_2x + e^{-\frac{x}{2}}\left(k_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + k_4 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$

q. $y(x) = k_1e^{x}\cos 2x + k_2e^{x}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}xe^{x}\operatorname{sen} 2x.$

r. $y(x) = k_1e^{-x} + k_2xe^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{12}{15}\operatorname{sen} 2x - \frac{9}{25}\cos 2x.$

s. $y(x) = k_1e^{x}\cos 2x + k_2e^{x}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}xe^{x}\operatorname{sen} 2x.$

t. $y(x) = k_1e^{-x} + k_2xe^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{12}{15}\operatorname{sen} 2x - \frac{9}{25}\cos 2x.$

u. $y(x) = k_1\cos x + k_2 \operatorname{sen} x + k_3x\cos x + k_4x\operatorname{sen} x + x^2 - 2x - 3.$

v. $y(x) = k_1 + k_2e^{-x} + 3x.$

w. $y(x) = k_1 + k_2x + k_3e^{-x} + \frac{2}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 8x^2.$

x. $y(x) = k_1e^{-3x} + k_2e^{4x} + \frac{1}{7}xe^{4x}.$

y. $y(x) = k_1e^{-3x} + k_2xe^{-3x} - \frac{1}{49}xe^{4x} + \frac{2}{343}e^{4x}.$

z. $y(x) = k_1e^{-x} + k_2e^{x} + \frac{1}{6}x^3e^{x} - \frac{1}{4}x^2e^{x} + \frac{1}{4}xe^{x} - 5.$

9 .

a. $y(x) = k_1e^{2x} + k_2xe^{2x}.$

b. $y(x) = k_1\cos 4x + k_2\operatorname{sen} 4x.$

c. $y(x) = k_1e^{-2x} + k_2e^{2x} - \frac{1}{2}.$

d. $y(x) = k_1e^{x} + k_2e^{2x} + \frac{5}{2}e^{3x}.$

e. $y(x) = k_1x\operatorname{sen}(\ln x) + k_2x\cos(\ln x).$

f. $y(x) = k_1(x+1) + k_2(x^2 + x + 2).$

10 .

a. $y(x) = k_1e^{-2x} + k_2e^{-x} - e^{-2x}\operatorname{sen} e^{x}.$

b. $y(x) = k_1x + k_2x\ln x + x(\ln x)^2.$

c. $y(x) = k_1 + k_2x + k_3x^2 + k_4x^{-3}.$

d. $y(x) = k_1 + k_2x^5 + \frac{1}{5}x^5\ln x.$

e. $y(x) = e^x(k_1 \cos 2x + k_2 \operatorname{sen} 2x) + \dfrac{1}{3}e^x \operatorname{sen} x.$

f. $y(x) = k_1 + k_2x + k_3e^{-8x} + \dfrac{11}{256}x^2 + \dfrac{7}{32}x^3 - \dfrac{1}{16}x^4.$

g. $y(x) = k_1 + k_2x + k_3e^x + k_4xe^x + \dfrac{1}{2}x^2e^x + \dfrac{1}{2}x^2.$

h. $y(x) = k_1e^x + k_2xe^x + k - 3x^2e^x + \dfrac{1}{6}x^3e^x + x - 13.$

i. $y(x) = k_1e^{-x} + k_2e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(1 + e^x).$

j. $y(x) = k_1e^x \operatorname{sen} x + k_2e^x \cos x + \dfrac{1}{3}xe^x \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{3}xe^x \cos x \ln|\cos x|.$

k. $y(x) = k_1x^3 + k_2 \cos(\sqrt{2}\ln x) + k_3 \operatorname{sen}(\sqrt{2}\ln x).$

l. $y(x) = x^2(k_1 \cos(3\ln x) + k_2 \operatorname{sen}(3\ln x)) + \dfrac{4}{13} + \dfrac{3}{10}x.$

11 .

a. $y(x) = 3x - 4x\ln x.$

b. $y(x) = 11 - 11e^x + 9xe^x + 2x - 12x^2e^x + \dfrac{1}{2}e^{5x}.$

12 .

a. $y_p(x) = 3e^{2x}$ e $y_p(x) = x^2 + 3x.$

b. $y_p(x) = x^2 + 3x + 3e^{2x}$ e $y_p(x) = -2x^2 - 6x - \dfrac{1}{3}e^{2x}.$

13 .

a. $y(x) = k_1e^{3x} + k_2e^{-5x} + k_3xe^{-5x} + k_4e^x + k_5xe^x + k_6x^2e^x.$

b. $y(x) = k_1x^3 + k_2x^{-5} + k_3x^{-5}\ln x + k_4x + k_5x\ln x + k_6x(\ln x)^2.$

Exercícios 8.8

1 . (a), (b) e (d)

2 .

a. $\dfrac{1}{s-a},\ s > a.$

b. $\dfrac{1}{(s-a)^2},\ s > a.$

c. $\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}.$

d. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s}+\dfrac{s}{s^2+4a^2}\right).$

e. $\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > a.$

f. $\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2},\ s > a.$

g. $\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ s > a.$

h. $\dfrac{s}{s^2-a^2},\ s > |a|.$

i. $\dfrac{a}{s^2-a^2},\ s > |a|.$

j. $\dfrac{a}{s^2+a^2},\ s > 0.$

k. $\dfrac{1}{s},\ s > 0.$

l. $\dfrac{1}{s^2},\ s > 0.$

m. $\dfrac{2}{s^3},\ s > 0.$

n. $\dfrac{s}{s^2+a^2},\ s > 0.$

o. $\dfrac{1}{s}(1-e^{-s}),\ s \neq 0$ e $F(0) = 0.$

3 .

a. $\dfrac{3}{2}\operatorname{sen} 2t$

b. $2t^2e^t$

c. $\dfrac{2}{5}(e^t - e^{-4t})$

d. $2e^{-t}\cos 2t$

e. $3 - 2\operatorname{sen} 2t + 5\cos 2t$

f. $\dfrac{6}{5}e^{-2t} + \dfrac{9}{5}e^{3t})$

g. $\dfrac{2}{5}(e^t - e^{-4t})$

4 .

a. $f(t) = \dfrac{1}{2}u_1(t)(t-1)^2.$

b.

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t, & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$$

c. $f(t) = 2u_2(t)e^{t-2}\cos(t-2).$

5 .

a. $y(t) = \cos t - 3 \operatorname{sen} t + t.$

b. $y(t) = -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}.$

c. $y(t) = \dfrac{4}{5} \cos 3t + \dfrac{1}{3} \operatorname{sen} 3t + \dfrac{1}{5} \cos 2t.$

d. $y(t) = -\dfrac{5}{2}e^{2t} + \dfrac{18}{5}e^{3t} + \dfrac{19}{10}e^{-2t}.$

6 .

a. $y(t) = \dfrac{3}{10} \operatorname{sen} 2t - \dfrac{1}{5} \operatorname{sen} 3t.$

b. $y(t) = \cosh t.$

c. $y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}.$

d. $y(t) = -\dfrac{1}{2}e^{3t} + e^{2t} + \dfrac{1}{2}e^t.$

e. $y(t) = e^{2t} - te^{2t}.$

f. $y(t) = \dfrac{1}{5}(e^{-t} - e^t \cos t + 7e^t \operatorname{sen} t).$

g. $y(t) = -5 + \dfrac{5}{3}e^t + \dfrac{10}{3}e^{-\frac{t}{2}} \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2}t.$

h. $y(t) = (\pi^2+1) \cos t + 2\pi \operatorname{sen} t - 1 + t^2.$

i. $y(t) = \dfrac{1}{6}(1 - u_{2\pi}(t))[2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t].$

j. $y(t) = 1 - u_1(t) \left[1 - te^{-(t-1)}\right].$

k. $y(t) = t - u_1(t) [t - 1 - \operatorname{sen}(t-1)].$

l. $y(t) = u_\pi(t) \operatorname{sen} 2\,(t - \pi)$

m. $y(t) = u_{\frac{\pi}{6}}(t) \operatorname{sen} 2 \left(t - \dfrac{\pi}{6}\right)$

n. $y(t) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{12}e^t - \dfrac{1}{12}e^{-2t} - \dfrac{3}{4}e^{-t} - \dfrac{1}{2}te^{-t}.$

o. $y(t) = 2te^{-t} + u_{2\pi}(t) \left[1 - e^{-(t-2\pi)} - (t-2\pi)e^{-(t-2\pi)}\right].$

p. $y(t) = e^{-t} \cos t + e^{-t} \operatorname{sen} t + u_\pi(t) e^{-(t-\pi)} \operatorname{sen}\,(t - \pi)$

7 .

a. $y(t) = k_1 e^t \cos t + k_2 e^t \operatorname{sen} t.$

b. $y(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{3t}.$

c. $y(t) = k_1 e^{-t} + k_2 te^{-t} + 2t^2 e^{-t}.$

d. $y(t) = k_1 4e^t \cos t + k_2 e^t \operatorname{sen} t + \dfrac{1}{5} \cos t - \dfrac{2}{5} \operatorname{sen} t.$

8 .

a. $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{2e^{-2s}}{s^3}.$

b. $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{e^{-s}(s^2+2)}{s^3}.$

c. $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s^2}$.

e. $f(t) = \dfrac{1 - e^{-s}}{s^2}$.

d. $f(t) = \dfrac{1}{s}(2 - e^{-s} - e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s})$.

f. $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \left(\dfrac{2}{s^3} + \dfrac{2}{s^2} + \dfrac{1}{s}\right) e^{-s}$.

g. $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{e^{-\pi(s+2)}}{s+2}$.

h. $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{(1-s)e^{-2s} - (1+s)e^{-3s}}{s^2}$.

9 .

a. $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1 - e^{-s\pi}}{s^2(1 + e^{-\pi s})}$.

d. $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{e^{-2s}(s+1) + s - 1}{s^2(1 - e^{-2s})}$.

b. $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{s(1 + e^{-s})}$.

e. $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1 + e^{-\pi s}}{(s^2+1)(1 - e^{-\pi s})}$.

c. $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1 - e^{-s} - se^{-2s}}{s^2(1 - e^{-2s})}$.

11 .

a. $\dfrac{1}{2} t \operatorname{sen} t$.

b. $(t-2) + (t+2)e^{-t}$.

c. $\dfrac{t \operatorname{sen} at}{2a}$.

12 .

a. $y(t) = \dfrac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + \dfrac{1}{\omega} \displaystyle\int_0^t \operatorname{sen}[\omega(t-\tau)] g(\tau) d\tau$.

b. $y(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-(t-\tau)} \operatorname{sen}(t-\tau) \operatorname{sen} a\tau d\tau$.

14 .

a. $f(t) = \dfrac{e^{at} - e^{-at}}{t}$.

b. $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen} at}{t}$.

c. $f(t) = \dfrac{2}{t}(1 - \cos at)$.

15 . $F(s) = \ln \dfrac{s}{\sqrt{s^2 - a^2}}$.

16 .

a. $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{bmatrix}$

b. $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{7}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$

c. $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{5t} + e^{-t} - 1 \\ e^{5t} - e^{-t} + 1 \end{bmatrix}$

d. $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} + 1 \\ 2e^{2t} - 1 \end{bmatrix}$

e. $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ 1 \\ \cos t + \operatorname{sen} t \end{bmatrix}$

17 .

a. $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+5}$

b. $-\dfrac{1}{2(x+1)} + \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{3}{2(x+3)}$

c. $-\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2}$

d. $\dfrac{2}{5(x-2)} + \dfrac{3}{5(x+3)}$

e. $\dfrac{3}{4(x-2)} + \dfrac{5}{4(x+2)}$

f. $-\dfrac{1}{4x} + \dfrac{5}{8(x-2)} + \dfrac{5}{8(x+2)}$

g. $\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{4(x+1)} - \dfrac{1}{4(x+5)}$

h. $\dfrac{3}{4(x+1)} - \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{5}{4(x-3)}$

i. $x + \dfrac{11}{6(x-2)} + \dfrac{19}{6(x+4)}$

j. $\dfrac{5}{12(x-3)} + \dfrac{5}{6(x+3)} - \dfrac{1}{4(x+1)}$

k. $-\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x-1}$

l. $\dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{2(x-1)}$

m. $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{(x-2)^2}$

n. $\dfrac{7}{9(x-1)} - \dfrac{7}{9(x+2)} - \dfrac{1}{3(x+2)^2}$

o. $\dfrac{4}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{4}{x-2} + \dfrac{4}{(x-2)^2}$

p. $-\dfrac{1}{4x} + \dfrac{x+6}{4[(x+1)^2+3]}$

q. $\dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{x}{2(x^2+1)} + \dfrac{1}{2(x^2+1)}$

r. $\dfrac{1}{4(x-1)} - \dfrac{1}{4(x+1)} - \dfrac{1}{2(x^2+1)}$

s. $1 - \dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2+1}$

t. $\dfrac{2}{3(u+1)} + \dfrac{u+1}{3(u\,2-u+1)}$

u. $-\dfrac{1}{32(x-2)} + \dfrac{5}{16(x-2)^2} + \dfrac{1}{32(x+2)} - \dfrac{3}{32(x+2)^2}$

v. $\dfrac{1}{4(x-1)} + \dfrac{3}{4(x-1)^2} + \dfrac{3}{4(x+1)} - \dfrac{1}{4(x+1)^2}$

w. $-\dfrac{1}{4(x+1)} - \dfrac{1}{2(x+1)^2}\dfrac{x+1}{4(x^2+1)} + \dfrac{x-1}{2(x^2+1)^2}$

Exercícios 9.3

1 .

a. $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} te^{-2t} \\ (1-t)e^{-2t} \end{bmatrix}$

b. $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 e^{-t} + k_2 e^{-3t} \\ k_1 e^{-t} + 3k_2 e^{-3t} + \cos t \end{bmatrix}$

c. $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 t + 2\,\mathrm{sen}\, t \\ -2k_1 - k_2(2t+1) - 3\,\mathrm{sen}\, t - 2\cos t \end{bmatrix}$

d. $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 + k_2 t + k_1 t^2 - \frac{1}{6}t^3 + e^t \\ k_4 - (k_3 + 2k_1)t - (k_2 - 1)\frac{t^2}{2} - k_1\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{24} - e^t \end{bmatrix}$

2 .

a. $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 e^{-t} + k_2 e^{2t} \\ k_2 e^{2t} \end{bmatrix}$

b. $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}(e^{3t} - e^{-2t}) \\ \frac{2}{5}(6e^{3t} - e^{-2t}) \end{bmatrix}$

c. $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}(k_1 \cos 2t + k_2\,\mathrm{sen}\, 2t) \\ -\frac{1}{2}e^{-t}((k_1 - k_2)\cos 2t + (k_2 - k_1)\,\mathrm{sen}\, 2t) \end{bmatrix}$

d. $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 e^{2t} + k_2 e^{3t} - \frac{t}{3} + \frac{1}{18} \\ -2k_1 e^{2t} - k_2 e^{3t} - \frac{2t}{3} - \frac{5}{9} \end{bmatrix}$

e. $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k_1 e^{t} + k_2 e^{-t} - \frac{1}{5}(7\cos 2t + 4\,\mathrm{sen}\, 2t) \\ k_1 e^{t} + k_2 e^{-t} - \frac{1}{5}(2\cos 2t + 4\,\mathrm{sen}\, 2t) \end{bmatrix}$

f. $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \cos 3t + k_2\,\mathrm{sen}\, 3t - \frac{11}{20}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{1}{3}((k_1 - k_2)\cos 3t + (k_1 + k_2)\,\mathrm{sen}\, 3t) + \frac{1}{10}e^t \end{bmatrix}$

g. $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \cos 2t + k_2 \operatorname{sen} 2t + k_3 \cos 3t + k_4 \operatorname{sen} 3t \\ \dfrac{1}{2}(k_1 \cos 2t + k_2 \operatorname{sen} 2t) - 2(k_3 \cos 3t + k_4 \operatorname{sen} 3t) \end{bmatrix}$

h. $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t + k_3 \cos 2t + k_4 \operatorname{sen} 2t \\ k_2 \cos t - k_1 \operatorname{sen} t + k_4 \cos 2t - k_3 \operatorname{sen} 2t \end{bmatrix}$

i. $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \cos t + k_2 \operatorname{sen} t + k_3 e^{2t} + k_4 e^{-2t} \\ 3k_2 \cos t - 3k_1 \operatorname{sen} t + k_3 e^{2t} - k_4 e^{-2t} \end{bmatrix}$

Bibliografia

[Ab] S. Abunahman, *Equações Diferenciais*, EDC, (1991)

[Ay] F. Ayres Jr., *Equações Diferenciais*, Coleção Schaum, Ao Livro Técnico, (1963)

[BD] W. E. Boyce R. e C. DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, LTC, (2002).

[EP] C. H. Edwards Jr. e D. E. Penney, *Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Valores de Contorno*, Prentice–Hall do Brasil, (1995)

[FN] D. G. Figueiredo e A. F. Neves, *Equações Diferenciais Aplicadas*, IMPA, (1997)

[In] E. L. Ince, *Integracion de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, DOSSAT, (1943)

[KL] W. Kaplan e D. J. Lewis, *Cálculo e Álgebra Linear*, LTC, (1976)

[KO] D. Kreider, D. R. Ostberg, R. C. Kuller, F. W. Perkins, *Introdução à Análise Linear – Equações Diferenciais Lineares*, vol. 1, Ao Livro Técnico, (1996)

[L] S. Lang, *A First Course in Calculus*, Addison-Wesley Series in Mathematics, (1978)

[Pi] N. Piskunov, *Cálculo Diferencial e Integral*, vol. 2, Mir, (1978)

[Zi] D. G. Zill, *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem* Thomson, (2003)