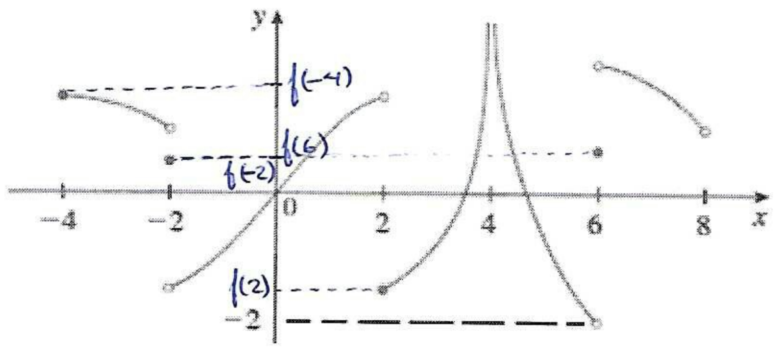
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Cálculo I – P1 (2017/1)
18/05/2017
Prof. Yoisell Rodríguez Núñez

Nome: YOISELL RODRÍGUEZ NÚÑEZ **Nº. Matrícula:** —

1. [3,00 *pontos*] Observando o gráfico correspondente à função $y = f(x)$. Determine e/ou analise segundo corresponda:



0,25 i. Domínio de $f(x)$

0,25 ii. Imagem de $f(x)$

1,00 iii. continuidade em $x = -4, -2, 2, 4, 6$ e 8

1,00 iv. derivabilidade em $x = -2, 2, 4, 6$ e 8

0,25 v. assíntotas horizontais

0,25 vi. assíntotas verticais

Justifique sua(s) resposta(s).

2. [2,50 *pontos*] Encontre os valores de a e b (caso existam) que tornam g contínua nos reais, sendo:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x < 2 \\ ax^2 - bx + \lambda, & 2 \le x < 3 \\ 2x - a + b, & x \ge 3 \end{cases}$$

3. [2,25 *pontos*] Calcule os seguintes limites:

0,75 i. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-5\lambda x^3 + 4x}{3x^2 + x - 7}$

0,75 ii. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(\lambda + 1)\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x - 1}$

0,75 iii. $\lim\limits_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$

4. [2,25 *pontos*] Compute as derivadas das funções abaixo:

0,75 i. $l(x) = \dfrac{x^3 e^{(\lambda + 1)x}}{x^2 + \ln x}$

0,75 ii. $m(x) = \ln(\sec x + \lambda \tan x)$

0,75 iii. $n(x) = (x^5 + \lambda)\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$

__Observação__: Nas questões 2, 3 e 4, use a constante λ como sendo o último número da sua matrícula.

Se não puder se destacar pelo talento, vença pelo esforço.

BOA PROVA!!!

Gabarito - P1

Cálculo I

Prof. Yoisell Rodríguez Núñez

2017/1

(1) Observando o gráfico, temos:

(i) $\text{Dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 8\,;\ x \neq 4\} = [-4, 8) \setminus \{4\}$

(ii) $\text{Im}\, f = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 < x < +\infty\} = (-2, +\infty)$

(iii) Continuidade:

- Em $x = -4 \rightsquigarrow \lim\limits_{x \to -4} f(x) = \lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = f(-4) \Rightarrow f$ é contínua em $x = -4$
- Em $x = -2 \rightsquigarrow \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) \neq f(-2) \Rightarrow f$ é descontínua em $x = -2$
- Em $x = 2 \rightsquigarrow \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow f$ é descontínua em $x = 2$
- Em $x = 4 \rightsquigarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = +\infty \\ \text{mas } 4 \notin \text{Dom}\, f \end{array}\right] \Rightarrow f$ é descontínua em $x = 4$.
- Em $x = 6 \rightsquigarrow \lim\limits_{x \to 6^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 6^-} f(x) \neq f(6) \Rightarrow f$ é descontínua em $x = 6$
- Em $x = 8 \rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 8} f(x) = \lim\limits_{x \to 8^-} f(x) \\ \text{mas } 8 \notin \text{Dom}\, f \end{array}\right] \Rightarrow f$ é descontínua em $x = 8$.

(iv) Sabe-se que se uma função f é descontínua em x_0
$\Longrightarrow f$ <u>não</u> é derivável em $x = x_0$.

Portanto, como f é descontínua em $x = -2, 2, 4, 6$ e 8 (item (iii)), então podemos concluir que:

f <u>não</u> é derivável em $x = -2, 2, 4, 6$ e 8.

(vi) Note que:

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^-} f(x) = +\infty \Longrightarrow x = 4 \text{ é uma assíntota vertical de } f(x).$$

De fato, $x = 4$ é a única assíntota vertical para a função $y = f(x)$

(v) Finalmente, do gráfico podemos observar que a função $y = f(x)$ <u>não</u> possui assíntotas horizontais, que são caracterizadas calculando limites no infinito (ou seja, quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$).

De fato, o domínio de $y = f(x)$ é restringido a um intervalo "finito".

(2) $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x<2 \\ ax^2-bx+\lambda, & 2 \le x < 3 \\ 2x-a+b, & x \ge 3 \end{cases}$$

Primeiramente, observe que:

- $g(x)$ é contínua em $(-\infty, 2)$ pois nesse intervalo a funsão é definida como sendo uma funsão racional, a qual é contínua em todo seu domínio de definisão.
- No intervalo $[2,3)$ a funsão é um polinômio (funsão polinomial) de grau 2 (funsão quadrática) que também é contínua em todo seu domínio
- Em $[3, +\infty)$ a funsão $g(x)$ é definida como sendo uma funsão linear, que também é contínua em seu domínio

Resumindo, analisar a continuidade da funsão $g(x)$ nos reais, é equivalente a analisar a continuidade em $x=2$ e $x=3$. De fato, a funsão $g(x)$ é definida de forma distinta à esquerda e à direita de esses dois valores.

→ Continuidade em $x=2$:

$$(*) \lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = \boxed{4}$$

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2}(ax^2-bx+\lambda) = a\cdot(2)^2 - b\cdot(2) + \lambda = \boxed{4a-2b+\lambda = g(2)}$$

Assim, $g(x)$ é contínua em $x=2$ desde que:

$$4a-2b+\lambda = 4$$

ou equivalentemente:

$$\boxed{4a-2b = 4-\lambda} \quad (I)$$

Obs: O limite em $(*)$ também pode ser calculado utilizando a Regra de L'Hôpital.

QUESTÃO (2) – CONTINUAÇÃO...

→ Continuidade em $x=3$:

$$\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3} (ax^2 - bx + \lambda) = a\cdot(3)^2 - b\cdot(3) + \lambda$$
$$= \boxed{9a - 3b + \lambda}$$

$$\lim_{x\to 3^+} g(x) = \lim_{x\to 3} (2x - a + b) = 2\cdot(3) - a + b$$
$$= \boxed{6 - a + b} = g(3)$$

Logo, $g(x)$ é contínua em $x=3$ se e somente se:

$$9a - 3b + \lambda = 6 - a + b$$

$$\iff 9a - 3b + \lambda + a - b = 6$$

$$\iff \boxed{10a - 4b = 6 - \lambda} \quad (\text{II})$$

Portanto, a função $g(x)$ será contínua em $\mathbb{R}$, desde que ela seja contínua simultâneamente em $x=2$ e $x=3$, isto é que as relações em (I) e (II) sejam satisfeitas. Em outras palavras, os valores de a e b (caso existam) que tornam g contínua nos reais são a(s) solução(ões) do sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 4a - 2b = 4 - \lambda & (\text{I}) \\ 10a - 4b = 6 - \lambda & (\text{II}) \end{cases}$$

De (I), temos: $b = \dfrac{4a + \lambda - 4}{2}$ (III)

Substituindo (III) em (II):

$$10a - \cancel{4}^{2}\left(\frac{4a + \lambda - 4}{\cancel{2}}\right) = 6 - \lambda \Rightarrow 10a - 8a - 2\lambda + 8 = 6 - \lambda$$
$$\Rightarrow 2a = 6 - \lambda + 2\lambda - 8$$
$$\Rightarrow 2a = \lambda - 2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{\lambda - 2}{2}} \quad (\text{IV})$$

Questão (2) - Continuação ...

Finalmente, substituindo (IV) em (III) podemos obter o valor de b:

$$b = \frac{\cancel{4}^{2}\left(\frac{\lambda-2}{\cancel{2}_{1}}\right) + \lambda - 4}{2} = \frac{2\lambda - 4 + \lambda - 4}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{3\lambda - 8}{2}}$$

Resposta: Os valores de a e b que tornam g contínua nos reais são: $\boxed{a = \frac{\lambda - 2}{2}}$ e $\boxed{b = \frac{3\lambda - 8}{2}}$,

com λ sendo o último número da sua matrícula.

---

(3) (i.) $\lim_{x \to +\infty} \frac{-5\lambda x^3 + 4x}{3x^2 + x - 7} \rightsquigarrow \frac{\infty}{\infty}$ Indeterminação.

Em particular, se $\boxed{\lambda = 0}$, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{3x^2 + x - 7} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4\cancel{x}}{3x^{\cancel{2}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{3x} = \frac{4}{3(+\infty)} = 0$$

• Outra forma:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{3x^2 + x - 7} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{3x} = \frac{2}{3 \cdot (+\infty)} = 0$$

$\frac{\infty}{\infty}$

• Uma outra via:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{3x^2 + x - 7} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}\left(3 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{0} - \underbrace{\frac{7}{x^2}}_{0}\right)} = \frac{4}{(+\infty) \cdot (3)} = 0.$$

Questão (3) - Continuação...

(3) (i.) Se $\lambda \neq 0$, ou seja, $\lambda = 1$ até 9:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-5\lambda x^3+4x}{3x^2+x-7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5\lambda \cancel{x^3}}{3\cancel{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5\lambda x}{3}$$

$$= -\infty$$

$\uparrow$ pois $\lambda > 0$

• (2^a via):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-5\lambda x^3+4x}{3x^2+x-7} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-15\lambda x^2+4}{6x+1} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\overset{5}{\cancel{30}}\lambda x}{\underset{1}{\cancel{6}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -5\lambda x = -\infty.$$

• (3^a via):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-5\lambda x^3+4x}{3x^2+x-7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{\to+\infty}{x^{\cancel{3}}}\left(-5\lambda+\overset{\to 0}{\frac{4}{x^2}}\right)}{\cancel{x^2}\left(3+\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}-\underset{\to 0}{\frac{7}{x^2}}\right)} = \frac{(+\infty)(-5\lambda)}{3}$$

$$= -\infty$$

Resumindo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-5\lambda x^3+4x}{3x^2+x-7} = \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda = 0 \\ -\infty, & \text{se } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Com λ sendo o último número da sua matrícula.

Questão 3 - Continuação...

3 (ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\lambda+1)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1} \rightsquigarrow \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-(\lambda+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1} = -\frac{\pi(\lambda+1)}{2}\cdot \overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=1}$$

$$= -\frac{\pi(\lambda+1)}{2}$$

onde λ é o último número da sua matrícula.

---

3 (iii) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x \rightsquigarrow \boxed{0^0}$ (Indeterminação)

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \operatorname{sen} x \\ g(x) = x \end{array}\right] \rightsquigarrow f(x)^{g(x)} = (\operatorname{sen} x)^x$$

Metodologia:

1° Passo: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot \ln(\operatorname{sen} x) \rightsquigarrow \boxed{0\times\infty}$ (Indeterminação)

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\left(\frac{1}{x}\right)} \rightarrow \boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2\cos x}{\operatorname{sen} x} \rightsquigarrow \boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{-2x\cos x}^{\to 0} + \cancel{x^2 \operatorname{sen} x}^{\to 0}}{\cancel{\cos x}_{\to 1}} = 0$$

2° passo:

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^x = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(\operatorname{sen} x)^x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(\operatorname{sen} x)}$$

$$= e^0 = 1.$$

4 (i) $l(x) = \dfrac{x^3 e^{(\lambda+1)x}}{x^2 + \ln x}$

$$\Rightarrow l'(x) = \frac{\left(x^3 e^{(\lambda+1)x}\right)' \cdot (x^2 + \ln x) - \left(x^3 e^{(\lambda+1)x}\right) \cdot (x^2 + \ln x)'}{(x^2 + \ln x)^2}$$

$$= \frac{\left[3x^2 e^{(\lambda+1)x} + x^3 e^{(\lambda+1)x} \cdot (\lambda+1)\right](x^2 + \ln x) - \left(x^3 e^{(\lambda+1)x}\right) \cdot \left(2x + \frac{1}{x}\right)}{(x^2 + \ln x)^2}$$

$$= \boxed{\frac{x^2 e^{(\lambda+1)x} \left\{\left[3 + (\lambda+1)x\right] \cdot (x^2 + \ln x) - x\left(2x + \frac{1}{x}\right)\right\}}{(x^2 + \ln x)^2}}$$

onde λ representa o último número da sua matrícula.

---

4 (ii) $m(x) = \ln(\sec x + \lambda \tan x)$

$$\Rightarrow m'(x) = \frac{1}{(\sec x + \lambda \tan x)} \cdot (\sec x + \lambda \tan x)'$$

$$= \frac{1}{\sec x + \lambda \tan x} \cdot \left[(\sec x)' + \lambda \cdot (\tan x)'\right]$$

$$= \frac{1}{\sec x + \lambda \tan x} \cdot \left[(\sec x)(\tan x) + \lambda \cdot \sec^2 x\right]$$

Logo,

$$\boxed{m'(x) = \frac{\sec x(\tan x + \lambda \sec x)}{\sec x + \lambda \tan x}}$$

$(\sec x)' = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)' = \dfrac{0 \cdot \cos x + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos x} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \sec x \cdot \tan x$

$(\tan x)' = \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\cos x)(\cos x) + (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

Questão (4) - Continuação...

(4) (iii) $n(x) = (x^5+\lambda) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\Rightarrow n'(x) = (x^5+\lambda)' \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + (x^5+\lambda) \cdot \left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)'$$

$$= 5x^4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + (x^5+\lambda) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= \boxed{5x^4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}(x^5+\lambda)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$$