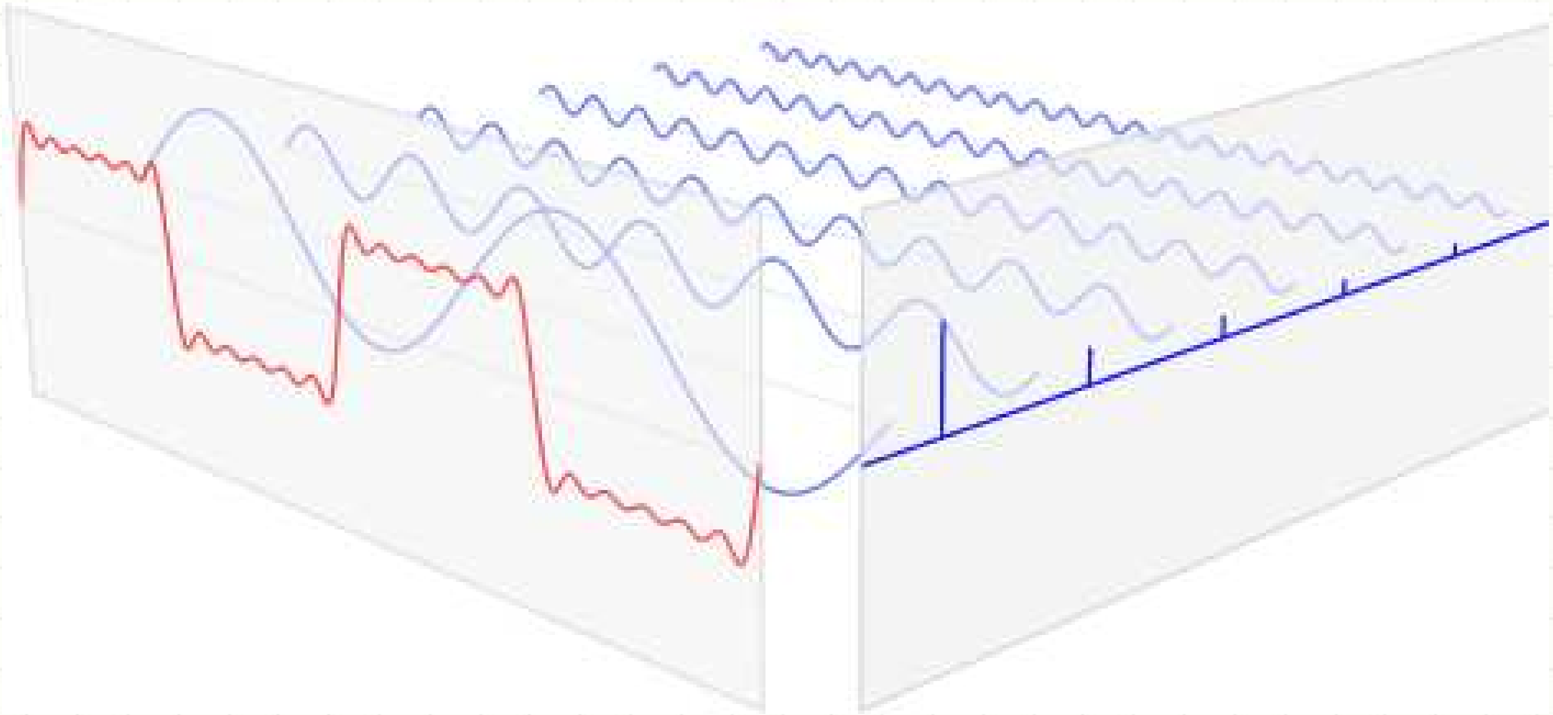
Aula 11 – Série e Transformada de Fourier

André Pinho

1º semestre 2019

Série de Fourier

- Decomposição de um sinal periódico em harmônicas:



Série de Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier
(21/03/1768 - 16/05/1830)

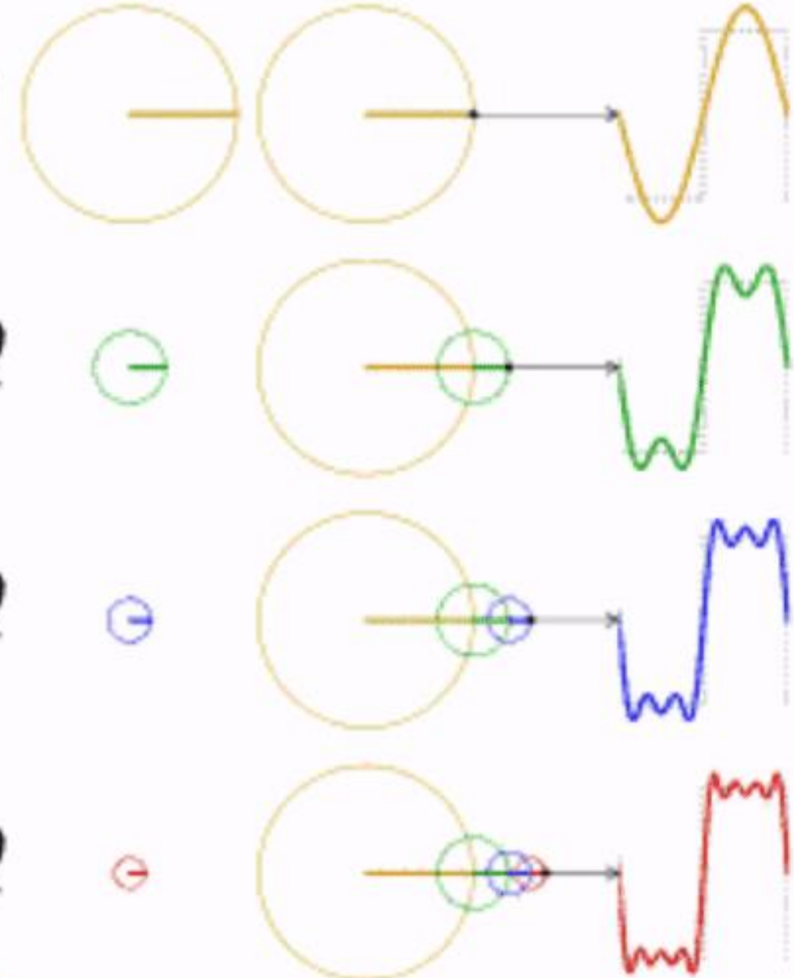
"Qualquer função periódica pode ser reescrita como uma soma ponderada de senos e co-senos de diferentes frequências."
Fourier J. B. J. (1807).

$$\frac{4\sin\theta}{\pi}$$

$$\frac{4\sin 3\theta}{3\pi}$$

$$\frac{4\sin 5\theta}{5\pi}$$

$$\frac{4\sin 7\theta}{7\pi}$$



Integrando Conhecimento https://www.facebook.com/integrandoconhecimento

Série Trigonométrica de Fourier

- Todo sinal periódico $x(t)$ com período T_0 pode ser representado como uma combinação linear de senos e cossenos, conforme definição a seguir:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_t^{t+T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t)\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_t^{t+T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t)\, dt$$

Série Trigonométrica de Fourier

- $x(t)$ PAR:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t)]$$

- $x(t)$ ÍMPAR:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

Série Exponencial Complexa de Fourier

- Todo sinal periódico $x(t)$ com período T_0 pode ser representado como uma combinação linear de exponenciais complexas, conforme definição a seguir:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{t}^{t+T_0} x(t) \, e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Série de Fourier

- Relação entre os coeficientes da Série Trigonométrica e Exponencial complexa de Fourier

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k)$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k)$$

- Quando $x(t)$ real

$$a_k = 2\mathcal{R}e[c_k], \qquad b_k = 2Im[c_k]$$

Série de Fourier em forma harmônica

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_k \cos(k\omega_0 t - \theta_k)]$$

- Os coeficientes c_k e θ_k se relacionam com a_k e b_k da seguinte forma:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$|c_k| = \sqrt{{a_k}^2 + {b_k}^2}$$

$$\theta_k = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

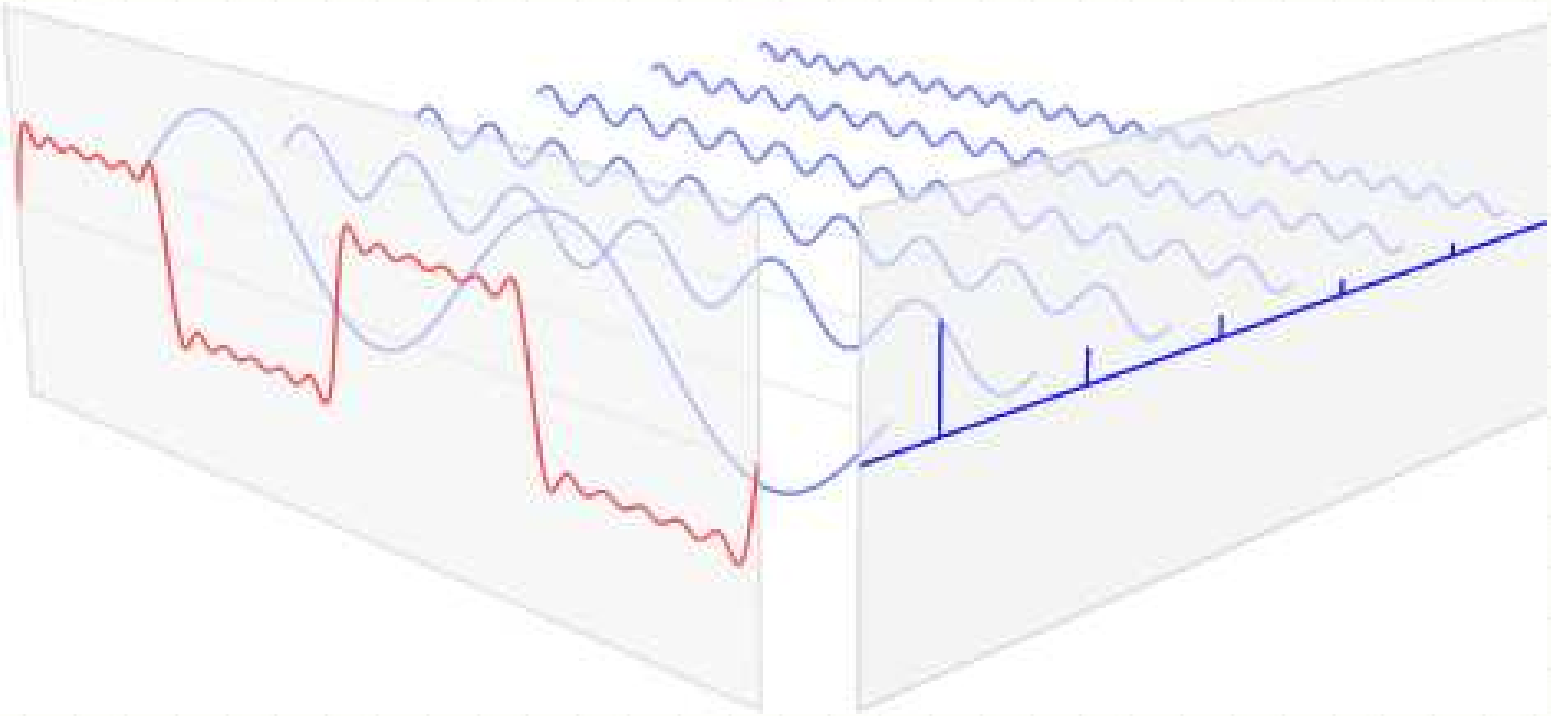
Espectro de Amplitude e Fase de Sinais Periódicos

$$c_k = |c_k| e^{j\theta_k}$$

- Espectro de Amplitude:
  - Gráfico $|c_k|$ versus f
- Espectro de Fase:
  - Gráfico θ_k versus f
- Como os valores de k são inteiros, gráficos de Amplitude e Fase são representados por impulsos nas frequências discretas $k\omega_0$, por isso também são conhecidos como Espectros de Linha.

Série de Fourier

- Decomposição de um sinal periódico em harmônicas:



Série de Fourier (Propriedades)

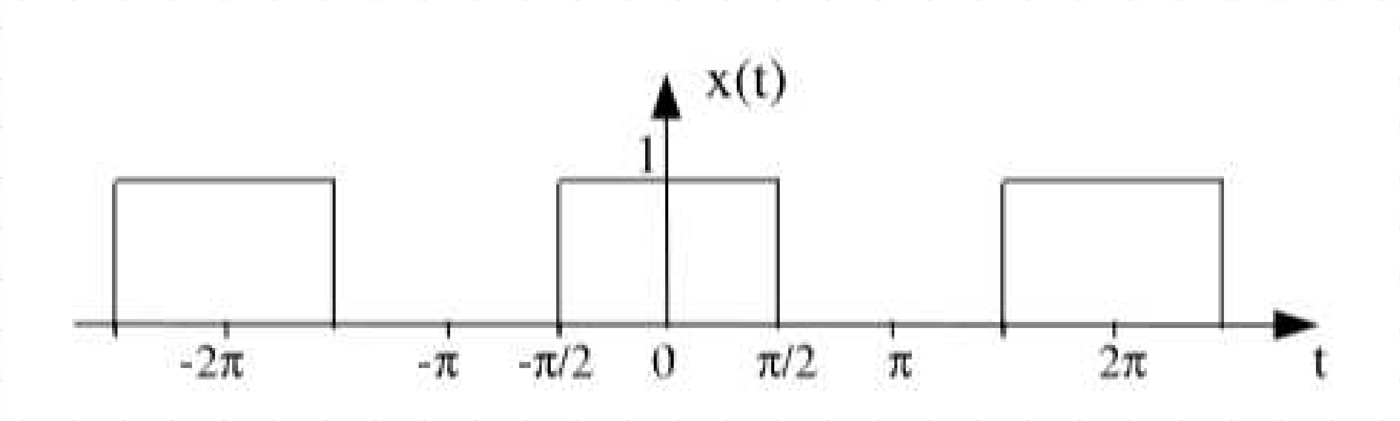
Propriedade	Seção	Sinal periódico	Coeficientes da série de Fourier
		$\left.\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}\right\}$ Periódicos com período T e frequência fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$	$\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}$
Linearidade	3.5.1	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Deslocamento no tempo	3.5.2	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Deslocamento em frequência		$e^{jM\omega_0 t} x(t) = e^{jM(2\pi/T)t} x(t)$	a_{k-M}
Conjugação	3.5.6	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Reflexão no tempo	3.5.3	$x(-t)$	a_{-k}
Mudança de escala no tempo	3.5.4	$x(\alpha t)$, $\alpha > 0$ (periódico com período T/α)	a_k
Convolução periódica		$\int_T x(\tau) y(t-\tau) d\tau$	$Ta_k b_k$
Multiplicação	3.5.5	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$

Série de Fourier (Propriedades)

Propriedade	Seção	Sinal periódico	Coeficientes da série de Fourier
		$\left.\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array}\right\}$ Periódicos com período T e frequência fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$	a_k b_k
Diferenciação		$\dfrac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk\dfrac{2\pi}{T}a_k$
Integração		$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$ (com valor finito e periódica somente se $a_0 = 0$)	$\left(\dfrac{1}{jk\omega_0}\right)a_k = \left(\dfrac{1}{jk(2\pi/T)}\right)a_k$
Simetria conjugada para sinais reais	3.5.6	$x(t)$ real	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \mathcal{R}e\{a_k\} = \mathcal{R}e\{a_{-k}\} \\ \mathcal{I}m\{a_k\} = -\mathcal{I}m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k\rvert = \lvert a_{-k}\rvert \\ \sphericalangle a_k = -\sphericalangle a_{-k} \end{cases}$
Sinais reais e pares	3.5.6	$x(t)$ real e par	a_k real e par
Sinais reais e ímpares	3.5.6	$x(t)$ real e ímpar	a_k puramente imaginário e ímpar
Decomposição par-ímpar de sinais reais		$\begin{cases} x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\} & [x(t)\text{ real}] \\ x_0(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\} & [x(t)\text{ real}] \end{cases}$	$\mathcal{R}e\{a_k\}$ $j\{a_k\}$

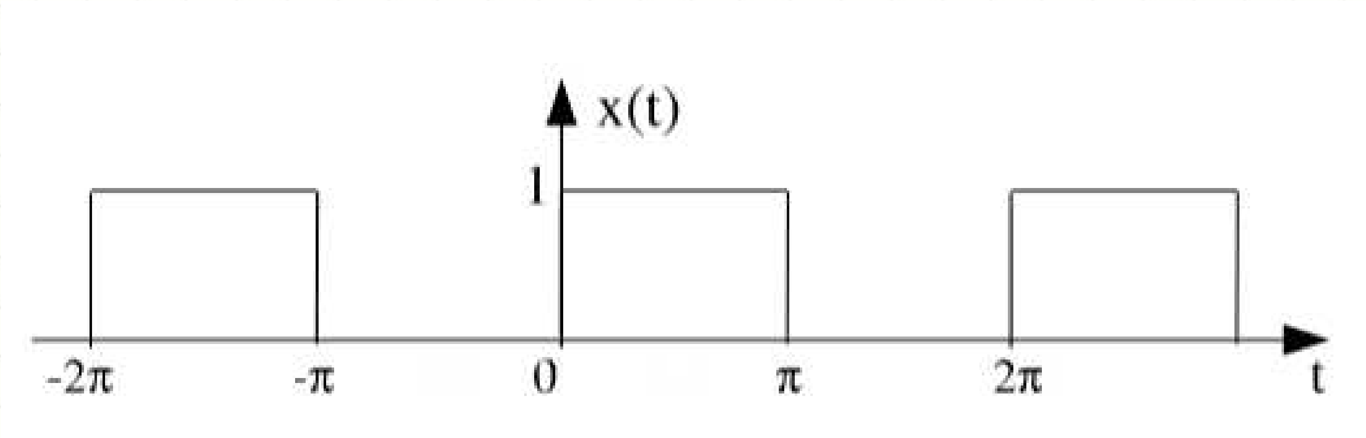
Espectro de Amplitude e Fase de Sinais Periódicos

- Exercício: determine a série Trigonométrica de Fourier do sinal abaixo:



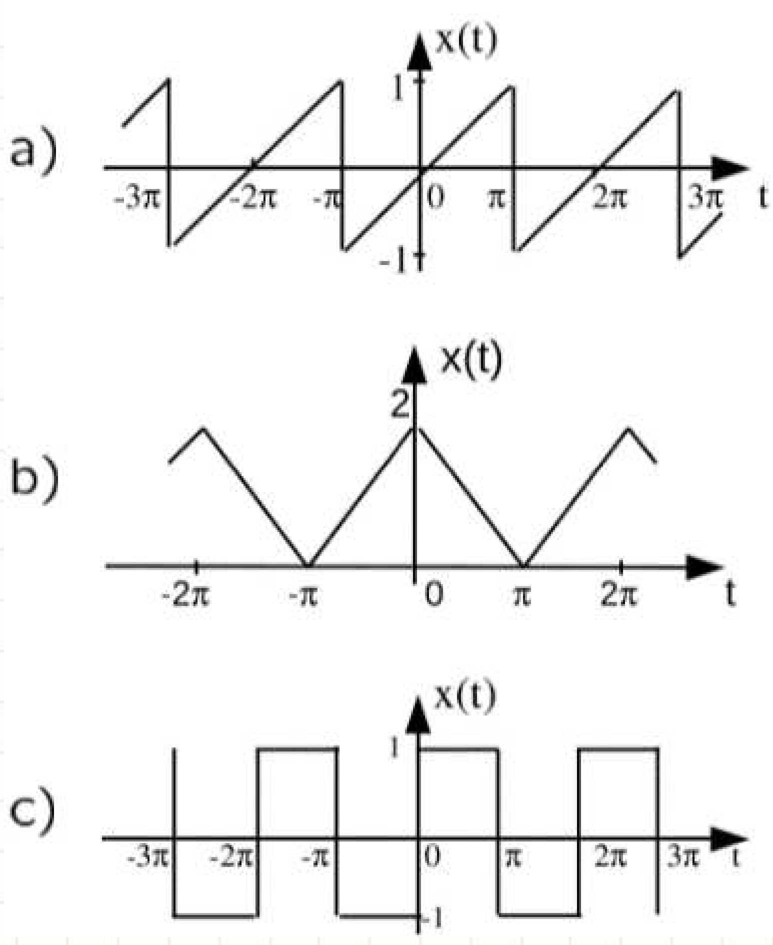
Espectro de Amplitude e Fase de Sinais Periódicos

- Exercício: determine a série Trigonométrica de Fourier e os respectivos espectros de linha do sinal abaixo:



Espectro de Amplitude e Fase de Sinais Periódicos

- Exercício: determine a série Trigonométrica de Fourier e os respectivos espectros de linha dos sinais abaixo:



Potência de Sinais Periódicos

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{t}^{t+T_0} |x(t)|^2 dt$$

- Se $x(t)$ for representado pela série exponecial complexa de Fourier:

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

(Teorema de Parseval da Série de Fourier)

Aplicações da Série de Fourier em SEP

- Idealmente, os sinais alternados dos sistemas de potência devem ser compostos apenas por uma componente de frequência

- Cargas não lineares (inversores de tensão, inversores de corrente, etc...), saturação de transformadores, entre outros fatores produzem componentes harmônicas que contaminam o sinal original

- A distorção harmônica é uma métrica de qualidade dos sistemas de energia

Aplicações da Série de Fourier em SEP

- Distorção Harmônica Total (THD)

$$THD = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{H} {G_n}^2}}{G_1},$$

  - G_n é o valor RMS da n-ésima componente harmônica
  - H é a máxima ordem de componente harmônica presente (tipicamente 50)

$$G_n = \frac{c_n}{\sqrt{2}}$$

  - c_n é a amplitude da n-ésima harmônica (coeficientes da Série de Fourier) T_0

Aplicações da Série de Fourier em SEP

- O valor da THD traz uma estimativa de quanto os equipamentos da rede estão aquecendo em função da referida distorção

- O valor RMS de um sinal distorcido é dado por

$$S_{RMS} = \sqrt{\sum_{n=1}^{H} {G_n}^2} = G_1\sqrt{1 + THD^2}$$

Aplicações da Série de Fourier em SEP

- Exercício: uma linha monofásica de 127V e 60Hz alimenta uma sala de equipamentos que tem comportamento não linear, gerando 20% de THD. Considerando uma carga com $Z = 10\measuredangle 30\ \Omega$, calcule a potência aparente desperdiçada devido a THD.

Série de Fourier em tempo discreto

- Sinal periódico em tempo discreto:
$$x[n] = x[n + N]$$

- O período fundamental é o menor inteiro positivo N que valida a expressão acima.

- A frequência fundamental é dada por:
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Série de Fourier em tempo discreto

- Considerando uma exponencial complexa:

$$f_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk\left(2\pi/_N\right)n}$$

- É fato que existam apenas N sinais distintos, uma vez que exponenciais complexas de tempo discreto cujas frequências diferem de múltiplos de 2π, são idênticas
- A representação em série de Fourier de um sinal periódico de tempo discreto é uma série finita.

Série de Fourier em tempo discreto

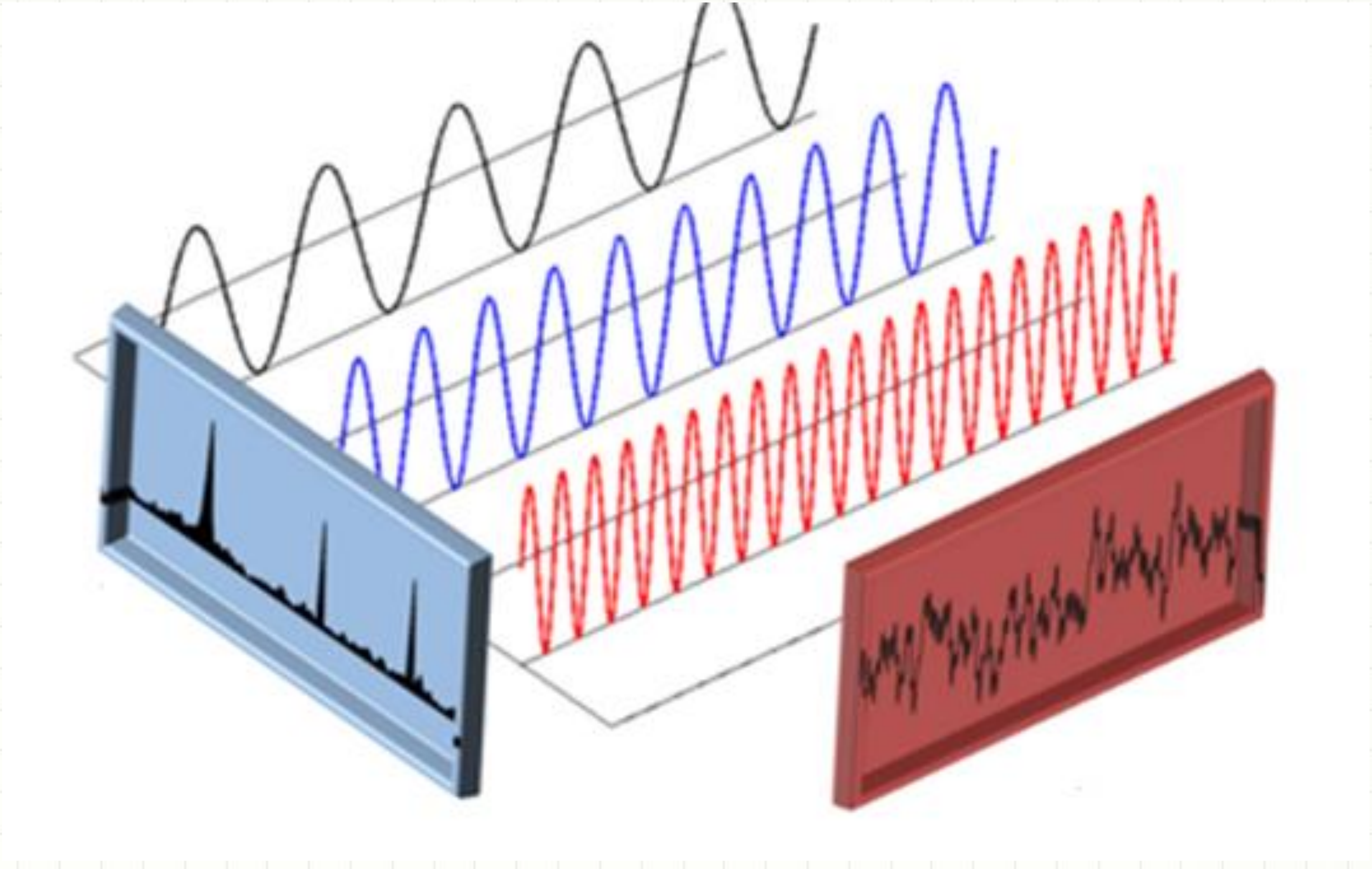
- As equações de análise e síntese para a série de Fourier em tempo discreto são respectivamente:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} c_k e^{jk\left(2\pi/_N\right)n}$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\left(2\pi/_N\right)n}$$

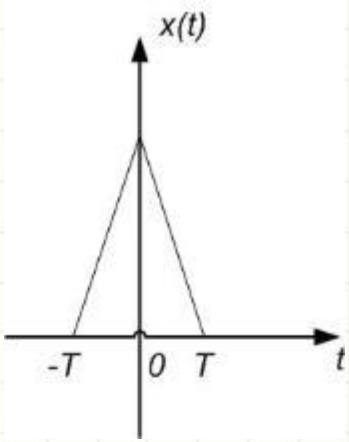
Transformada de Fourier

- Decomposição de um sinal não periódico:

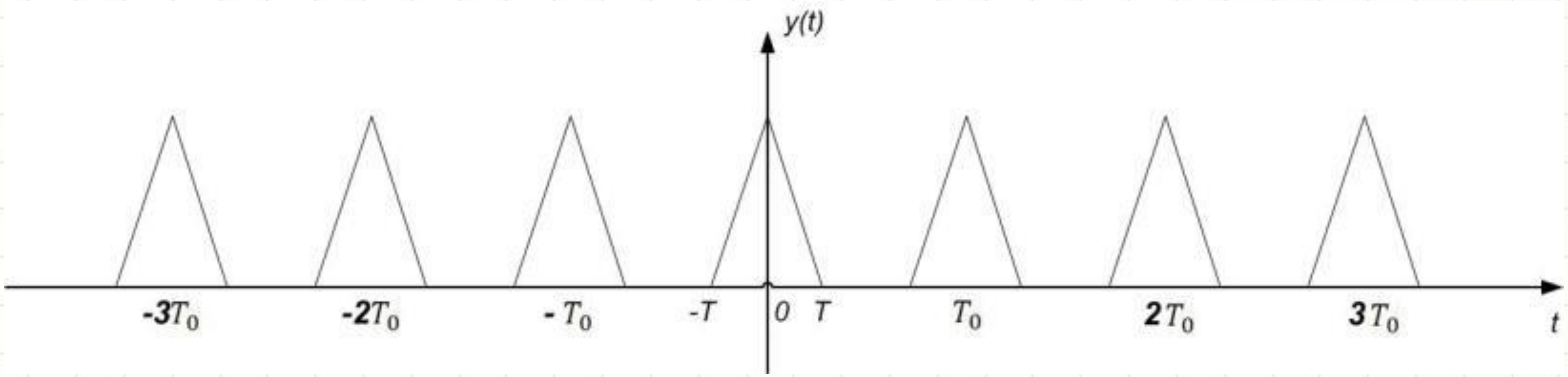


Transformada de Fourier

- Seja um sinal não periódico $x(t)$ com duração finita:



- Seja um sinal $y(t)$, periódico, como repetição de $x(t)$



$$\lim_{T_0 \to \infty} y(t) = x(t)$$

Transformada de Fourier

- Tomando a expansão em série de exponenciais complexas:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} y(t) \, e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- Como $y(t) = x(t)$, para $|t| < {}^{T_0}\!/_2$ e $x(t) = 0$, fora desse intervalo:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \, e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Transformada de Fourier

- Assim, define-se:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

- Voltando a C_k

$$C_k = \frac{1}{T_0} X(jk\omega_0)$$

- Assim

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}$$

Transformada de Fourier

- Quando $T_0 \to \infty, \quad \omega_0 \to 0\ (d\omega)$

$$\lim_{T_0 \to \infty} y(t) = \lim_{d\omega \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} X(jkd\omega)\, e^{jkd\omega t}\, d\omega$$

$$\lim_{T_0 \to \infty} y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega = x(t)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

Transformada de Fourier

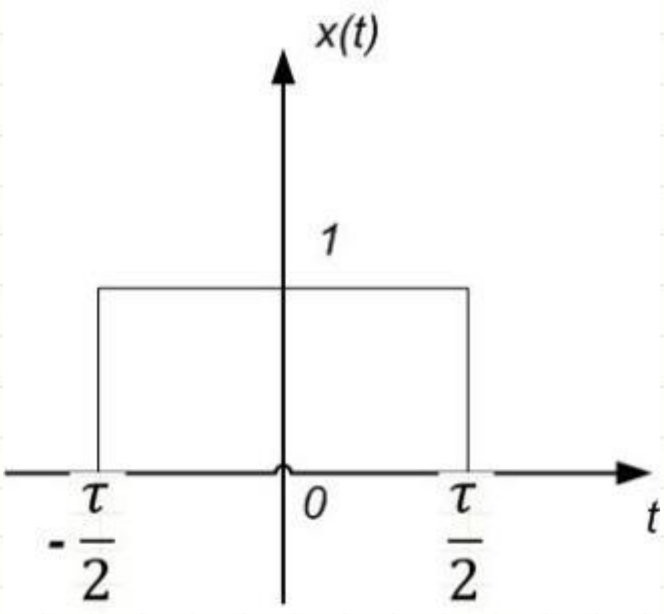
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt \qquad \text{(análise)}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega \qquad \text{(síntese)}$$

- A transformada de Fourier de um sinal em tempo contínuo é uma função contínua de valores no domínio dos complexos.
- A resposta em frequência é obtida em função da magnitude e fase desta função

Transformada de Fourier

- Exercício: determine a Transformada de Fourier do pulso retangular abaixo:



Transformada de Fourier

- Exercício: determine a resposta em frequência do sinal abaixo:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, t > 0 \\ 0, \qquad\qquad cc \end{cases}, a > 0$$

Transformada de Fourier: propriedades

Seção	Propriedade	Sinal aperiódico	Transformada de Fourier
		$x(t)$	$X(j\omega)$
		$y(t)$	$Y(j\omega)$
4.3.1	Linearidade	$ax(t)+by(t)$	$aX(j\omega)+bY(j\omega)$
4.3.2	Deslocamento no tempo	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
4.3.6	Deslocamento em frequência	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega-\omega_0))$
4.3.3	Conjugação	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
4.3.5	Reflexão no tempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
4.3.5	Mudança de escala no tempo e na frequência	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
4.4	Convolução	$x(t)*y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
4.5	Multiplicação	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\theta)\ Y(j(\omega-\theta))d\theta$

Transformada de Fourier: propriedades

Seção	Propriedade	Sinal aperiódico	Transformada de Fourier
		$x(t)$	$X(j\omega)$
		$y(t)$	$Y(j\omega)$
4.3.4	Diferenciação no tempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
4.3.4	Integração	$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$
4.3.6	Diferenciação em frequência	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$
4.3.3	Simetria conjugada para sinais reais	$x(t)$ real	$\begin{cases} X(j\omega)=X^*(-j\omega) \\ \mathcal{R}e\{X(j\omega)\}=\mathcal{R}e\{X(-j\omega)\} \\ \mathcal{I}m\{X(j\omega)\}=-\mathcal{I}m\{X(-j\omega)\} \\ \lvert X(j\omega)\rvert=\lvert X(-j\omega)\rvert \\ \sphericalangle X(j\omega)=-\sphericalangle X(-j\omega) \end{cases}$

Transformada de Fourier: propriedades

Seção	Propriedade	Sinal aperiódico	Transformada de Fourier
		$x(t)$	$X(j\omega)$
		$y(t)$	$Y(j\omega)$
4.3.3	Simetria para sinais reais e pares	$x(t)$ real e par	$X(j\omega)$ real e par
4.3.3	Simetria para sinais reais e ímpares	$x(t)$ real e ímpar	$X(j\omega)$ puramente imaginário e ímpar
4.3.3	Decomposição par-ímpar para sinais reais	$x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\}$ [$x(t)$ real] $x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\}$ [$x(t)$ real]	$\mathcal{R}e\{X(j\omega)\}$ $j\mathcal{I}m\{X(j\omega)\}$
4.3.7	Relação de Parseval para sinais aperiódicos		

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Transformada de Fourier

- A relação da transformada de Fourier e Sistemas LIT definidos por equações diferenciais segue o mesmo modelo da Transformada de Laplace, substituindo-se s por $j\omega$

- Determine a resposta a resposta ao impulso de um sistema LIT, caracterizado pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

Transformada de Fourier

- Filtragem:
  - A magnitude da frequência de corte ocorre quando o nível de tensão do sinal de saída está 3 dB abaixo do sinal de entrada:

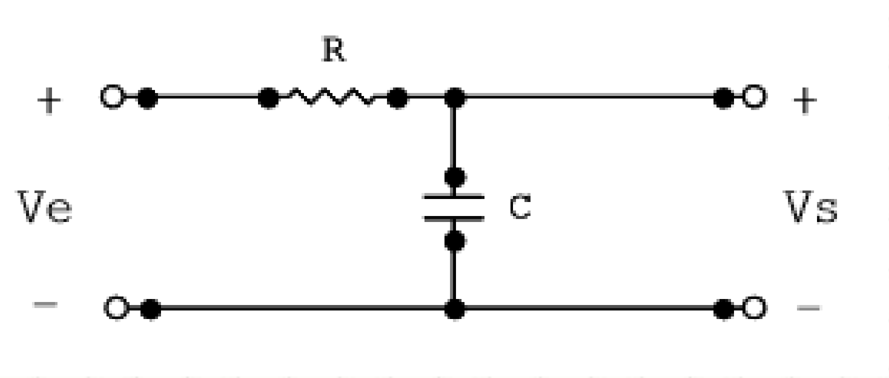
$$|X(j\omega)|_{\omega=\omega_c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$$

  - Para filtros passivos, a frequência central ocorre quando a magnitude da resposta em frequência é unitária, ou seja, na própria frequência de ressonância.

$$|X(j\omega)|_{\omega=\omega_r} = 1$$

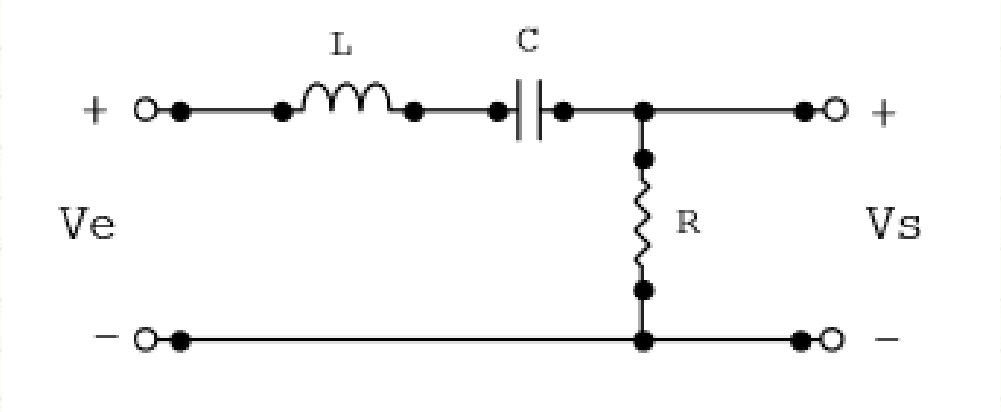
Transformada de Fourier

- Filtragem:
  - Exemplo 1: obtenha a resposta em frequência do filtro abaixo:



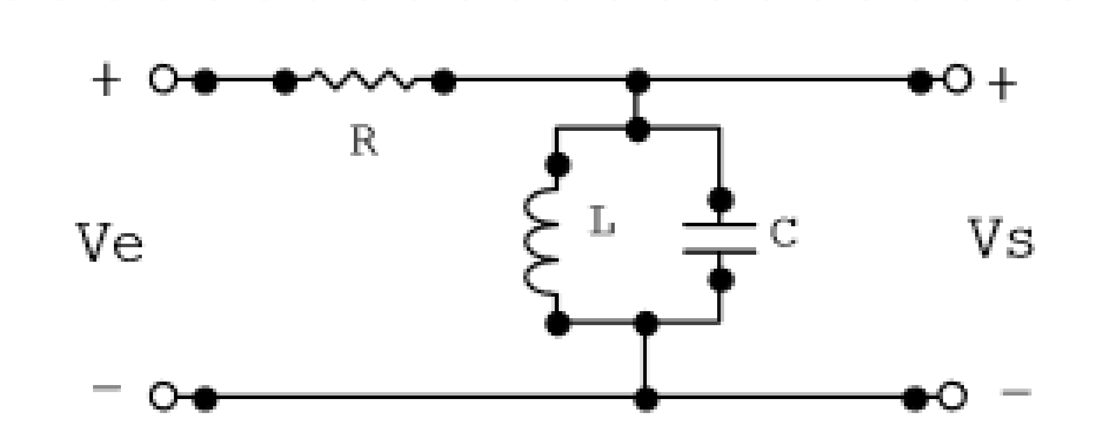
Transformada de Fourier

- Filtragem:
  - Exemplo 2: obtenha a resposta em frequência do filtro abaixo:



Transformada de Fourier

- Filtragem:
  - Exemplo 2: obtenha a resposta em frequência do filtro abaixo:
    - $L = 0{,}1H\,; C = 10uF\,; R = 10\Omega$



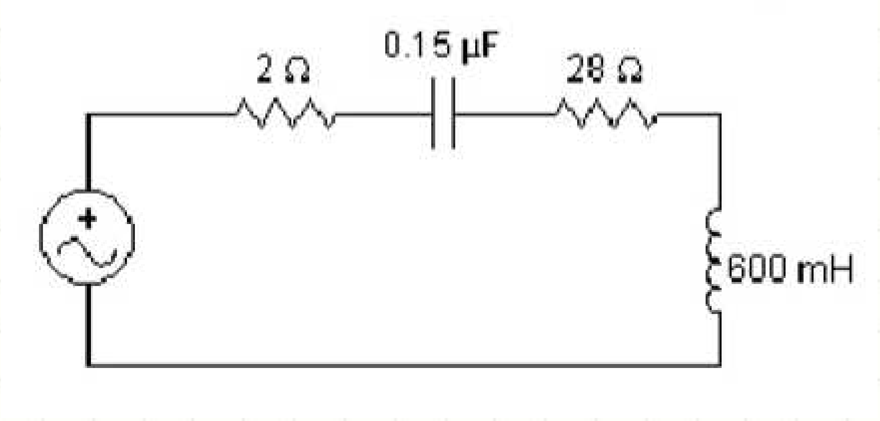
Filtros

- Largura de faixa e seletividade:
  - Largura de faixa ou banda passante é definida como a faixa de frequência onde o filtro atua (relacionada às frequências de corte): BW
  - Seletividade é a medida de qualidade do filtro:
    - Fator de qualidade: F_q

$$F_q = \frac{f_R}{BW}$$

Filtros

- Exercício:
  - Dado o circuito abaixo, determine:
    a) A frequência de ressonância
    b) O fator de qualidade
    c) A banda passante
    d) A frequência de corte



Teorema da Amostragem

- Considere a sequência discreta $x[n]$ que representa as amostras de um sinal analógico $x_a(t)$:

$$x[n] = x_a(nT_s)$$

$$X_a(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)\ e^{-j\omega t} dt$$

- Pela propriedade seletiva da função impulso unitário:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$x_p(t) = x_a(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)\,\delta(t - nT_s)$$

Teorema da Amostragem

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)\,\delta(t - nT_s)$$

- Aplicando a transformada de Fourier:

$$X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)\,\Im\{\delta(t - nT_s)\}$$

$$X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)e^{-j\omega nT_s}$$

$$X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega nT_s}$$

Teorema da Amostragem

- Como o trem de impulsos unitários é um sinal periódico, ele pode ser expresso pela série de Fourier:

$$p(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} x(t) \, e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}$$

$$x_p(t) = x_a(t) p(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t} \, x_a(t)$$

Teorema da Amostragem

$$x_p(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t}\, x_a(t)$$

- Usando a propriedade de deslocamento na frequência da Transformada de Fourier:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\omega - jk\omega_s)$$

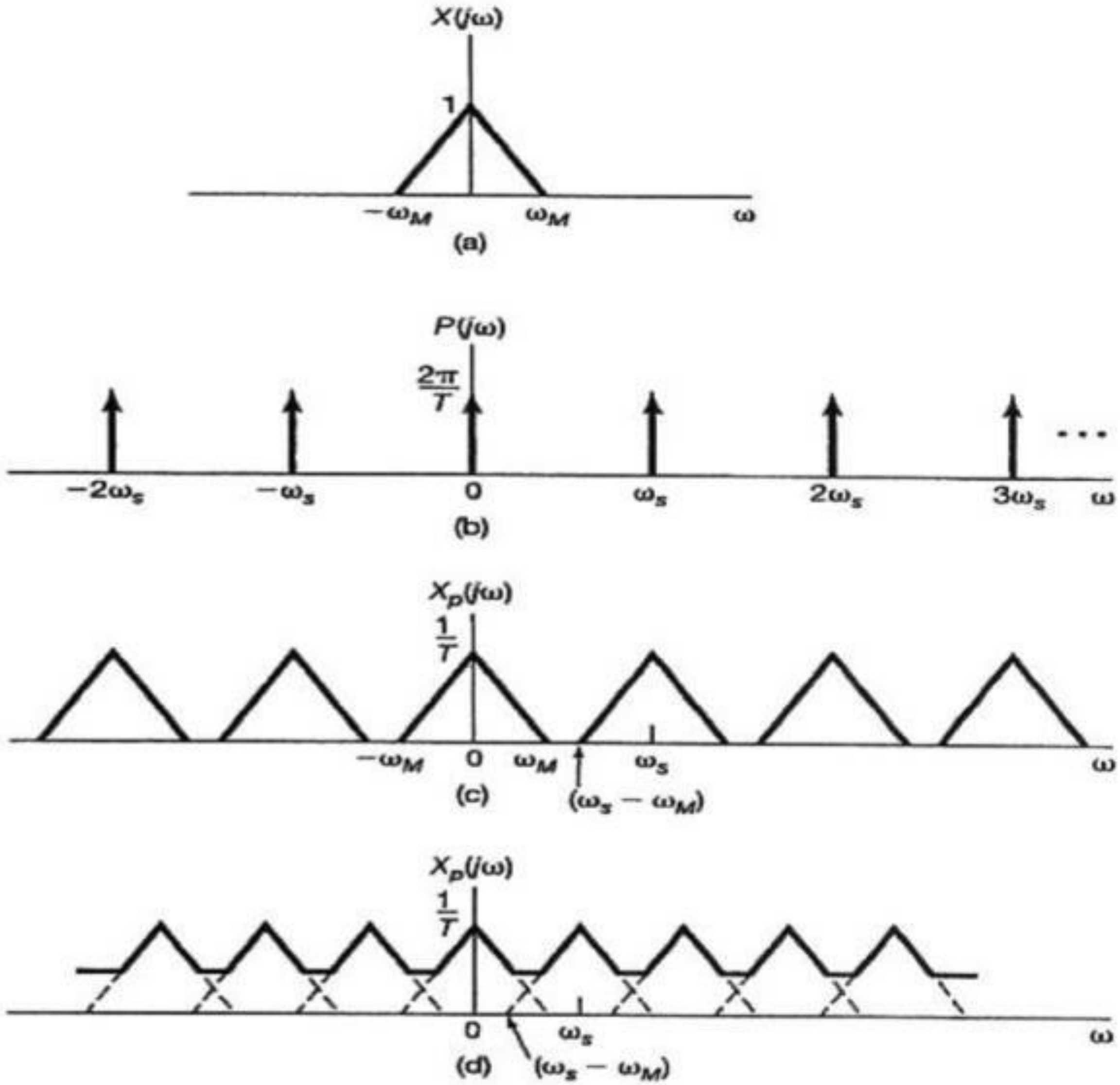
- Conclui-se que $X_p(j\omega)$ é uma função periódica de período ω_s

Teorema da Amostragem

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\omega - jk\omega_s)$$

- A frequência de amostragem deve ser, no mínimo, o dobro da maior componente de frequência do sinal analógico a ser amostrado. (Frequência de Nyquist)
- Sinais amostrados com frequência de amostragem inferior à frequência de Nyquist geram sobreposição espectral (*ALIASING*)

Teorema da Amostragem



Teorema da Amostragem

- Exercícios:
  1. (7.3)Determine a frequência de Nyquist correspondente a cada um dos sinais abaixo:

$$a)\ x(t) = 1 + \cos(2000\pi t) + \sin(4000\pi t)$$

$$b)\ x(t) = \frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}$$

$$c)\ x(t) = \left(\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}\right)^2$$

Teorema da Amostragem

- Exercícios:
  2. (7.4) Seja $x(t)$ um sinal com taxa de Nyquist ω_0. Determine a taxa de Nyquist para os seguintes sinais:

     a) $x(t) + x(t-1)$

     b) $\frac{dx(t)}{dt}$

     c) $x^2(t)$

     d) $x(t)\cos\omega_0 t$

Teorema da Amostragem

- Exercício (7.9):

$$x(t) = \left(\frac{\sin 50\pi t}{\pi t}\right)^2$$

3. Deseja-se amostrar o sinal acima com a taxa de amostragem $\omega_s = 150\pi$ para obter um sinal $g(t)$ com transformada de Fourier $G(j\omega)$. Determine o valor máximo de ω_0 para o qual se pode garantir que

$$G(j\omega) = 75X(j\omega) \; para \; |\omega| \leq \omega_0,$$

ou seja, o máximo valor de ω_0 para que não haja sobreposição espectral (*aliasing*)