ESCOLA DE ENGENHARIA DE VOLTA REDONDA (EEIMVR-UFF)
Departamento de Ciências Exatas (VCE)

Segunda Avaliação (P2) - 2017/2

Disciplina:	**Cálculo I** | Data: **05/12/2017**	**NOTA**
Professor:	Yoisell Rodríguez Núñez	
Aluno(a):		

1. (2,5 pontos) Seja a função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável e tal que:

   i) $f(x) \neq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(-1) = -2$ e $f(1) = 3$

   ii) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, e $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

   iii) $f''(x) < 0 \ \ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2)$, $f''(x) = 0$ se $x = 2$, e $f''(x) > 0 \ \ \forall x \in (2, +\infty)$

   Nestas condições, **esboce** um possível **gráfico** de f.

2. (1,5 pontos) Suponha que a diminuição na pressão sanguínea de uma pessoa dependa de uma determinada droga que ela deverá tomar. Assim, se x mg da droga forem tomados, a queda da pressão sanguínea será uma função de x. Seja $p(x)$ a função que modela esta situação, definida na forma:

$$p(x) = \frac{1}{2}x^2(3-x), \quad x \in [0, 4)$$

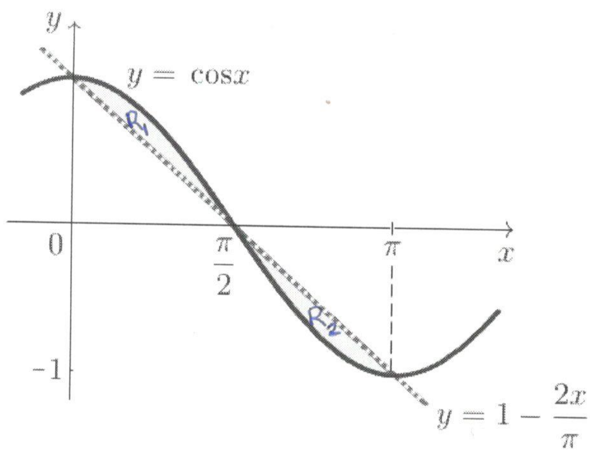
   Determine o valor de x que cause a **maior queda** de pressão sanguínea.

3. (1,0 pontos) Seja $h(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ definida em $[0, 3]$. Determine $x_0 \in (0, 3)$ tal que a reta tangente ao gráfico de h no ponto $(x_0, h(x_0))$ seja paralela à secante que liga os pontos $(0, h(0))$ e $(3, h(3))$.

4. (3,0 pontos) Calcule as seguintes **integrais**:

   1,0 I) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\operatorname{sen}(\ln(x))}{x}dx$ 1,0 II) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln(x)dx$ 1,0 III) $\displaystyle\int_0^1 (2x-1)^{2017}dx$

5. (2,0 pontos) Determine a **área da região sombreada**:



Observação

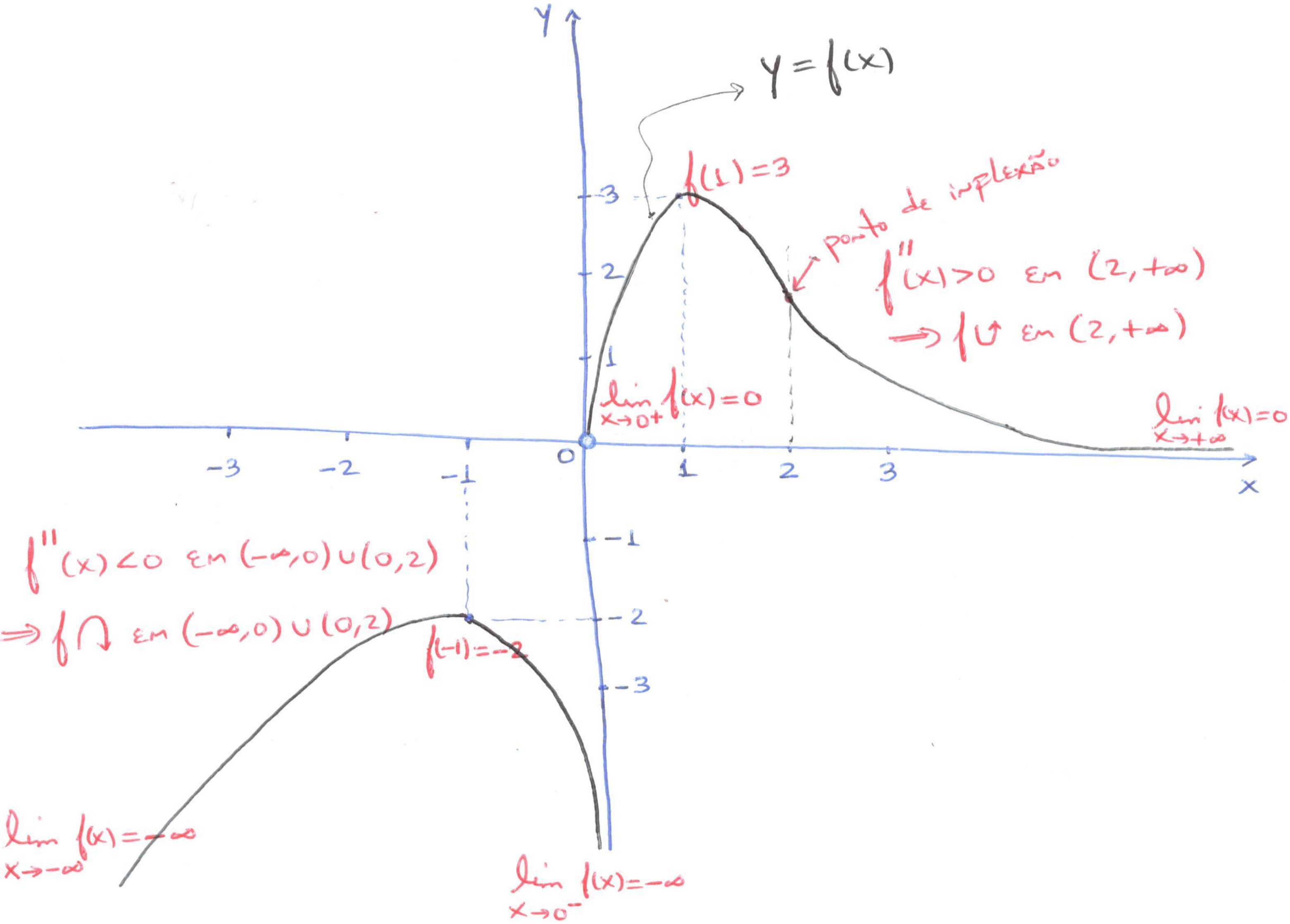
- Todas as respostas devem estar justificadas, isto é, acompanhadas dos argumentos e/ou cálculos usados para obtê-las.

Assim como problemas surgem, as soluções aparecem...

BOA PROVA!!!

P2 - Cálculo I
2017/2
Prof. Yoisell M. N.
GABARITO

1) Segundo as condições fornecidas, um possível esboço do gráfico da função $y=f(x)$ é o seguinte:



2) $p(x) = \frac{1}{2}x^2(3-x)$ ← Função que modela a "queda da pressão sanguínea".

$\Longrightarrow p(x) = \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2}$

Assim, para determinar o valor de x que cause a <u>maior queda</u> de pressão sanguínea, precisamos encontrar o(s) máximo(s) da função $p(x)$.

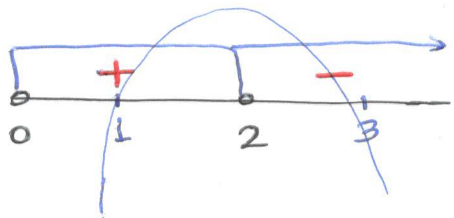
→ Primeiramente, procuremos o(s) ponto(s) crítico(s) de $p(x)$:

$$p'(x) = \frac{3}{\cancel{2}}\cdot(\cancel{2}x) - 3\frac{x^2}{2} = 3x - \frac{3x^2}{2} = 3x\left(1 - \frac{x}{2}\right) = 0$$

$\Longleftrightarrow 3x = 0$ ou $1 - \frac{x}{2} = 0$

$\Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$ ← pontos críticos de $p(x)$. (Candidatos a serem extremos da função (máx ou mín).)

Análise do sinal de $p'(x)$ numa vizinhança dos pontos críticos:



$p'(x) = 3x\left(1 - \frac{x}{2}\right)$

Logo, $p\uparrow$ em $(0,2)$ e $p\downarrow$ em $(2,4)$.

$\Longrightarrow \boxed{x=2}$ é ponto de máximo de $p(x)$.

<u>Obs</u>: Note que,
$p(2) = \frac{1}{\cancel{2}}(2)^{\cancel{2}}(3-2)$
$= 2$

Portanto, podemos concluir que para termos a maior queda de pressão sanguínea, a pessoa deverá ingerir 2 mg da droga.

3) USAMOS O TEOREMA DO VALOR MÉDIO:

$\boxed{h(x) = x^3 + 2x^2 + 1}$ ⇝ Função polinomial de grau 3

- $h(x)$ contínua em todo $\mathbb{R}$, em particular contínua em $[0,3]$
- $h(x)$ derivável em todo $\mathbb{R}$, em particular derivável em $(0,3)$

Logo, pelo TEOREMA DO VALOR MÉDIO, existe (pelo menos) um $x_0 \in (0,3)$, tal que:

$$h'(x_0) = \frac{h(3) - h(0)}{3 - 0}$$

$h'(x) = 3x^2 + 4x$

$$\Longleftrightarrow 3x_0^2 + 4x_0 = \frac{[3^3 + 2(3)^2 + 1] - [\cancel{0^3} + \cancel{2(0)^2} + 1]}{3}$$

$$= \frac{27 + 18 + \cancel{1} - \cancel{1}}{3}$$

$$= \frac{45}{3}$$

$$= 15$$

$$\Longleftrightarrow 3x_0^2 + 4x_0 - 15 = 0$$

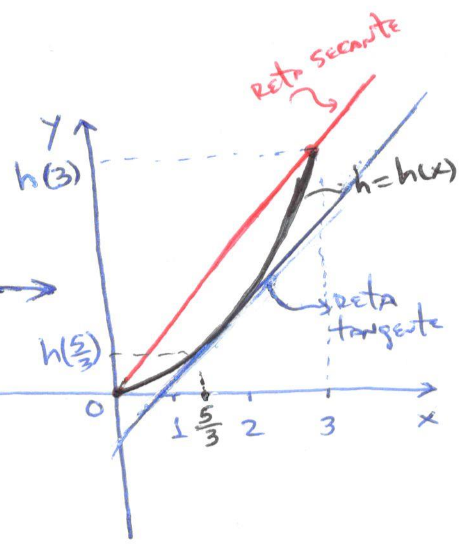
$$\begin{array}{cc} 3x_0 & -5 \\ x_0 & 3 \\ \hline \end{array}$$
$9x_0 - 5x_0 = 4x_0$

$$\Longleftrightarrow (3x_0 - 5)(x_0 + 3) = 0$$

$$\Longleftrightarrow 3x_0 - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad x_0 + 3 = 0$$

$$\Longleftrightarrow x_0 = \frac{5}{3} \in (0,3) \quad \text{ou} \quad x_0 = -3 \notin (0,3)$$

Assim, $x_0 = \frac{5}{3} \in (0,3)$ é tal que a reta tangente ao gráfico de h no ponto $(x_0, h(x_0))$ seja paralela à secante que liga os pontos $(0, h(0))$ e $(3, h(3))$.



4) I) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\overbrace{\operatorname{sen}(\ln x)}^{u}}{x}\,\overbrace{dx}^{du} = \int_0^{\ln 2} \operatorname{sen} u\, du = -\cos u \Big|_{u=0}^{u=\ln 2}$

Substituição

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}\,dx$

Obs: (limites de integração)

Quando $x=1 \Rightarrow u = \ln 1 = 0$

" $x = 2 \Rightarrow u = \ln 2$

$$= -\left[\cos(\ln 2) - \cos 0\right]$$

$$= -\cos(\ln 2) + \cos 0$$

$$= -\cos(\ln 2) + 1$$

$$= \boxed{1 - \cos(\ln 2)}$$

II) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln(x)\,dx = \underbrace{\int x^{\frac{1}{2}} \ln(x)\,dx}_{\int u\,dv}$

$$= \underbrace{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln x}_{u \cdot v} - \underbrace{\int \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x}\,dx}_{\int v\,du}$$

Integração × partes

$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}\,dx$

$dv = \underbrace{x^{\frac{1}{2}}}_{v'}dx \qquad v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{3}{2}-1}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{3}{2}} + C$$

Logo, $\boxed{\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln(x)\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left[\ln x - \frac{2}{3}\right] + C}$ $\quad C \in \mathbb{R}$

Questão 4) Continuação...

4) c) $\displaystyle\int_0^1 \underbrace{(2x-1)^{2017}}_{u^{2017}} \underbrace{dx}_{\frac{du}{2}} = \int_{-1}^{1} u^{2017}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} u^{2017}\,du$

Substituição

$u = 2x-1$

$du = (2x-1)'dx$

$= 2dx$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

Obs Quando: $x=0 \Rightarrow u = 2\cancelto{0}{(0)}-1$
$= -1$

$x=1 \Rightarrow u = 2(1)-1$
$= 2-1$
$= 1$

$$= \frac{1}{2}\frac{u^{2018}}{2018}\Bigg|_{u=-1}^{u=1} = \frac{1}{4036}\left[1^{2018} - (-1)^{2018}\right]$$

$$= \frac{1}{4036}\left[1-1\right]$$

$$= \cancelto{0}{\frac{1}{4036}\cdot(0)} = 0$$

Obs: Note que $g(u) = u^{2017}$ é uma função ímpar.

De fato, $g(-u) = (-u)^{2017} = (-1)^{2017}\cdot u^{2017} = -u^{2017} = -g(u)$

Portanto, $\boxed{\displaystyle\int_{-1}^{1} u^{2017}\,du = 0}$

Resultado estudado em Sala:
A integral definida sobre um intervalo simétrico de uma função ímpar é sempre nula.

→ Exercício 7 – Pág 309 – "Apostila – Cálculo I" (IME-UERJ).

5) Observe que:

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2)$$

Área da região sombreada

$$= \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos x - \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\right] dx}_{A(R_1)} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) - \cos x\right] dx}_{A(R_2)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x - 1 + \frac{2x}{\pi}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(1 - \frac{2x}{\pi} - \cos x\right) dx$$

$$= \left(\operatorname{sen} x - x + \frac{x^2}{\pi}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} + \left(x - \frac{x^2}{\pi} - \operatorname{sen} x\right)\Bigg|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi}$$

$$= \left[\left(\cancelto{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\pi}\right) - \left(\cancelto{0}{\operatorname{sen} 0} - \cancelto{0}{0} + \cancelto{0}{\frac{0^2}{\pi}}\right)\right]$$

$$+ \left[\left(\pi - \frac{\pi^{\cancel{2}}}{\cancel{\pi}} - \cancelto{0}{\operatorname{sen}\pi}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\pi} - \cancelto{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}\right)\right]$$

$$= \left[\left(1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^{\cancel{2}}}{4\cancel{\pi}}\right) - 0\right] + \left[\left(\cancel{\pi} - \cancel{\pi} - 0\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^{\cancel{2}}}{4\cancel{\pi}} - 1\right)\right]$$

$$= 1 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 1$$

$$= 2 - \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$= 2 - \frac{\pi}{2} = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \text{ unidades de área}$$

(2ª via) Pela simetria da região, podemos calcular a área da região situada no primeiro quadrante e multiplicar o resultado por 2; ou seja:

$$A(R) = 2A(R_1) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos x - \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\right] dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos x - 1 + \frac{2x}{\pi}\right] dx$$

$$= 2\left(\operatorname{sen} x - x + \frac{x^2}{\pi}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \text{ u.a.}$$