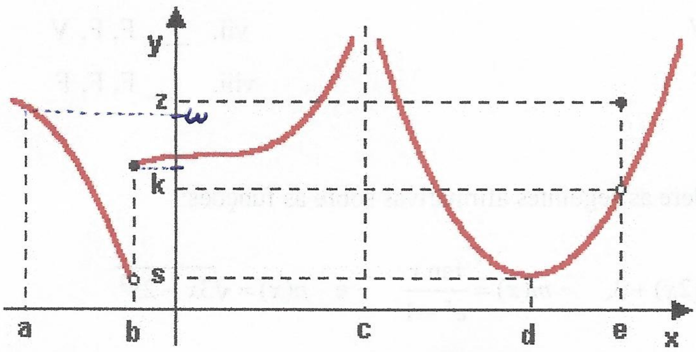
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Cálculo I – P1 (2016/2)
03/11/2016
Prof. Yoisell Rodríguez Núñez

Nome: Yoisell Rodríguez Núñez

N°. Matrícula: — **Curso:** —

1. [2,5 *pontos*] Observando o gráfico correspondente à função $y = f(x)$, assinale a(s) alternativa(s) **incorreta(s)**. **Justifique** sua(s) resposta(s):



0,4 i. X $\lim_{x \to a^+} f(x) = k$

ii. ____ $f(e) = z$

iii. ____ $\lim_{x \to d^-} f(x) = s$

0,4 iv. X $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

0,4 v. X $f(x)$ é contínua em $x = e$.

0,4 vi. X $f(x)$ é derivável em $x = b$.

0,4 vii. X $f(b) > f(e)$.

0,5 viii. X A reta $x = c$ representa uma assíntota horizontal para $f(x)$.

2. [2,5 *pontos*] Sejam a e b constantes reais não nulas e g uma função real de variável real dada por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{b + x}, & x \le 0 \\[2ex] \dfrac{sen(ax)}{sen(2x)}, & x > 0 \end{cases}$$

2,00

O valor de $a \cdot b$ para que g seja contínua em $x = 0$ é:

i. 1

0,5 X ii. -2

iv. 2

ii. 0

iii. 0,5

v. Nenhuma das opções anteriores

~~3.~~ [2,5 *pontos*] Analise os limites abaixo e marque V para o(s) resultado(s) verdadeiro(s) e F para o(s) resultado(s) falso(s). **Justifique** sua resposta.

0,75 i. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1-12x^3}{4x^2+3x-1} = +\infty$ 0,75 ii. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{12-x}-3} = 3$ 0,75 iii. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{2x - sen\, x} = 0$

Assinale a sequência correta:

0,25 i. _X_ V, V, V
ii. ___ V, V, F
iii. ___ V, F, V
iv. ___ V, F, F
v. ___ F, V, V
vi. ___ F, V, F
vii. ___ F, F, V
viii. ___ F, F, F

~~4.~~ [2,5 *pontos*] Considere as seguintes afirmativas sobre as funções:

$$l(x) = x\cos(2x) + 3, \qquad m(x) = \frac{\tan x}{e^x - 1} \qquad \text{e} \qquad n(x) = \sqrt{3x - 2x^2}$$

0,75 a. $l'(\pi) = 1$ 0,75 b. $m'(0) = 0$ 0,75 c. $n'(1) = -0{,}5$

Marque a alternativa <u>**correta**</u>:

i. Apenas as afirmativas a. e b. são verdadeiras
ii. Apenas as afirmativas b. e c. são verdadeiras
0,25 ~~iii.~~ Apenas as afirmativas a. e c. são verdadeiras
iv. Todas as afirmativas são verdadeiras
v. Todas as afirmativas são falsas
vi. Nenhuma das opções anteriores

Justifique sua resposta.

Não coloque limites em seus sonhos, coloque fé! **BOA PROVA!!!**

P1 - Cálculo I
03/11/2016
Prof. Yoisell Rodríguez Núñez
RESOLUÇÃO

1 i) Do gráfico de $y=f(x)$ observamos que:

$\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x) = w}$, onde w é um valor próximo de z.

Sendo que $w \neq k$.

Logo, a alternativa i) é incorreta

iv) Note que:

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \neq 0}$$

Portanto, a alternativa iv) é incorreta

v) É fácil notar que $f(x)$ é descontínua em $x=e$.

De fato: $\boxed{\lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^-} f(x) = k \neq f(e) = z}$

Assim, a alternativa v) é incorreta.

vi) $f(x)$ não é derivável em $x=b$, pois ela é descontínua nesse ponto. Já que:

$$\boxed{\lim_{x\to b^-} f(x) = s \neq k \approx \lim_{x\to b^+} f(x)}$$ ← Limites laterais distintos.

Logo, a alternativa vi) é incorreta.

Questão (1) - Continuação ...

vii) Observe que: $\boxed{f(b) \approx K < z = f(e)}$

Portanto, a afirmativa é incorreta.

viii) Certamente a reta $x=c$ representa uma assíntota vertical para a função $f(x)$.

Assim, podemos concluir que a afirmativa viii) é incorreta.

(2)

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{b+x}, & \text{se } x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(2x)}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Para garantirmos que $g(x)$ seja contínua em $x=0$, precisamos que:

$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = g(0)}$$

Neste caso:

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2-1}{b+x} = \frac{0^2-1}{b+0} = -\frac{1}{b}$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(2x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{a \cos(ax)}{2\cos(2x)} = \frac{a}{2}$$

$\frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$\cos 0 = 1$

$\cos 0 = 1$

Ainda: $g(0) = \dfrac{0^2-1}{b+0} = -\dfrac{1}{b}$

Portanto, $g(x)$ é contínua em $x=0$ desde que $-\dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow \boxed{a \cdot b = -2}$

Resposta: alternativa iii).

Questão 2 (Continuação...)

Observação: Uma outra forma de calcular o $\lim_{x\to 0^+} g(x)$:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(2x)} \cdot \frac{2\cdot a\cdot x}{2\cdot a\cdot x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(2x)} \cdot \frac{(2\cdot x)\cdot a}{2\cdot (a\cdot x)}$$

$$= \frac{a}{2} \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{2x}{\operatorname{sen}(2x)}}_{\to 1} = \frac{a}{2}.$$

Limite Fundamental

---

3 a) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1-12x^3}{4x^2+3x-1} = \lim_{x\to -\infty} -\frac{\cancel{12}^{3}\,x^{\cancel{3}}}{\cancel{4}\,\cancel{x^2}} = \lim_{x\to -\infty} (-3x)$

parcelas representativas.

$$= (-3)\cdot(-\infty) = +\infty.$$

(2ª via)

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1-12x^3}{4x^2+3x-1} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{-36x^2}{8x+3} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{-72x}{8}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ (Indeterminação)

$$= \left(-\frac{72}{8}\right)\cdot(-\infty)$$

$$= \boxed{+\infty}$$

---

b) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{12-x}-3} \rightsquigarrow \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 3} \frac{-\cancel{\frac{1}{2}}(4-x)^{-\frac{1}{2}}}{-\cancel{\frac{1}{2}}(12-x)^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{\sqrt{4-x}}}{\frac{1}{\sqrt{12-x}}} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{12-x}}{\sqrt{4-x}}$$

$$= \frac{\sqrt{12-3}}{\sqrt{4-3}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{1}}$$

$$= \boxed{3}$$

---

c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{2x-\operatorname{sen} x} \rightsquigarrow \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2-\cos x} = \frac{e^0-1}{2-\cos 0} = \frac{1-1}{2-1} = \frac{0}{1} = \boxed{0}$$

→ Sequência correta: $\boxed{\text{i) V, V, V}}$

(4) $\ell(x) = x\cos(2x) + 3$

$$\Rightarrow \ell'(x) = [(1)\cdot\cos(2x) - 2x\,\text{sen}(2x)] + 0$$

$$= \cos(2x) - 2x\,\text{sen}(2x)$$

$$\Rightarrow \ell'(\pi) = \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - 2\pi\cdot\underbrace{\text{sen}(2\pi)}_{=0} = 1 - (2\pi)\cdot(0) = 1 - 0 = \boxed{1}$$

$$m(x) = \frac{\tan x}{e^x - 1}$$

$$\Rightarrow m'(x) = \frac{(\sec^2 x)(e^x - 1) - (\tan x)(e^x)}{(e^x-1)^2}$$

$$\Rightarrow m'(0) = \frac{\overbrace{(\sec^2 0)}^{=1}\cdot\overbrace{(e^0-1)}^{=0} - \overbrace{(\tan 0)}^{=0}\cdot\overbrace{(e^0)}^{=1}}{\underbrace{(e^0-1)^2}_{=0}} = \frac{0}{0} \leftarrow \text{Indeterminado}$$

$$n(x) = \sqrt{3x - 2x^2} = (3x - 2x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow n'(x) = \frac{1}{2}(3x - 2x^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(3x - 2x^2)'$$

$$= \frac{1}{2}(3x - 2x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(3 - 4x) = \frac{3 - 4x}{2\sqrt{3x - 2x^2}}$$

$$\Rightarrow n'(1) = \frac{3 - (4)\cdot(1)}{2\sqrt{(3)(1) - (2)\cdot(1)^2}} = \frac{3 - 4}{2\sqrt{3 - 2}} = \frac{-1}{2\cdot\sqrt{1}} = -\frac{1}{2}$$

$$= \boxed{-0{,}5}$$

→ Alternativa correta: $\boxed{\text{iii) Apenas as afirmativas a) e c) são verdadeiras.}}$