# AULA 4 – SINAIS E SISTEMAS

André Pinho

Revisão: expansão em série de potências

# Representação de funções em série de potências

- Uma série de potências centrada em $a$ ou em torno de $a$ é uma série da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 \ldots$$

em que $x$ é uma variável, $a$ é fixo e os $c_n$ são constantes

- Uma série de potências define uma função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

cujo domínio é o conjunto de todos os pontos para os quais a série converge, incluindo $x = a$

# Representação de funções em série de potências

- Intervalo de convergência:
  - Conjunto de valores para os quais $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge
- Raio de convergência:
  - Maior valor de $R$, tal que em $(a-R, a+R)$, a série converge
- Teste de convergência (Teste da Razão)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f(n+1)}{f(n)}\right| < 1$$

# Representação de funções em série de potências

- Teste da Razão (exemplo):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-3)^{n+1} x^{n+1}}{\sqrt{n+2}}}{\frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} 3|x| \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}$$

$$3|x| < 1 \rightarrow |x| < \frac{1}{3}$$

$$R = \frac{1}{3}$$

# Representação de funções em série de potências

- Série geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \,, \forall |x| < 1$$

- Utilizando o resultado da aula anterior:

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, que\ para\ n \to \infty, = \frac{1}{1 - x},$$

- Temos assim a representação em série de potências da função

$$f(x) = \frac{1}{1 - x},$$

Raio de convergência , r=1

# Representação de funções em série de potências

- Expresse as funções abaixo em série de potências e encontre o raio de convergência:

a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$b)$ $f(x) = \frac{x^3}{x+2}$

$c)$ $f(x) = \frac{x}{9+x^2}$

$d)$ $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-3x+2}$

# Solução

# Representação de funções em série de potências

- Derivação e integração termo a termo

Se uma série de potências tem raio de convergência R>0, então a função

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

é diferenciável no intervalo $|x-a| < R$ e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}, \forall |x-a| < R$$

$$\int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}, \forall |x-a| < R$$

# Representação de funções em série de potências

- Expresse as funções abaixo em série de potências e encontre o raio de convergência:

  a) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$

  b) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

  c) $f(x) = x^2 \ln(1-x)$

# Solução

# Representação de funções em série de potências

- Teorema: se $f$ tiver uma expansão em série de potências em $a$, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \forall |x-a| < R,$$

então seus coeficientes satisfazem

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

# Anotações

# Representação de funções em série de potências

- Série de Taylor de uma função centrada em $a$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \forall |x-a| < R$$

- Série de Maclaurin ($a = 0$)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \forall |x| < R$$

# Representação de funções em série de potências

- Expresse as funções abaixo na respectiva série de Maclaurin

  a) $f(x) = e^{x}$

  b) $f(x) = \cos(x)$

  c) $f(x) = \sin(x)$

  d) $f(x) = \int e^{x^2} dx$

  e) $f(x) = \sin^2(x)$

# Solução

# Solução