ESCOLA DE ENGENHARIA DE VOLTA REDONDA (EEIMVR-UFF)
Departamento de Ciências Exatas (VCE)

Segunda Avaliação (P2) - 2019/1

Disciplina:	**Equações Diferenciais Ordinárias** | Data: **05/07/2019**	**Folhas**	**NOTA**
Professor:	Yoisell Rodríguez Núñez		
Aluno(a):	–		

1. (2,0 pontos) Assinale com a letra **V** para VERDADEIRA ou a letra **F** para FALSA, as afirmações abaixo, **justificando cada resposta** dada:

i) V A **Fórmula de Euler** é representada pela relação $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$

ii) V $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-12}{s^2-8s+25}\right\} = 3e^{4t}\cos(3t)$

Obs: Cada acerto valendo 0,40 pontos.

iii) V $\mathcal{L}\{u_{5\pi}(t)\cos(9(t-5\pi))\} = \dfrac{e^{-5\pi s}s}{s^2+81}$

iv) F $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{7}{s^2+16} - \dfrac{4}{s^3}\right\} = 7\,\text{sen}(4t) - 2t^2$

v) V Os autovalores da matriz do sistema $\overrightarrow{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\overrightarrow{X}$ são todos reais e distintos.

vi) F A EDO linear de 3^a-ordem: $x''' + 8x'' + 5x' - 3x = e^{2019t}$ pode ser reescrita como o sistema de 1^a-ordem:

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_3, \\ x_3' = 3x_1 - 5x_2 - 8x_3 + \ln(2019t). \end{cases}$$

2. (3,0 pontos) Calcule:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$ b) $\mathcal{L}\{(4+t^2)e^{-3t}\}$ c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s-1)e^{-2\pi s}}{s^2-2s+5}\right\}$

3. (2,5 pontos) Utilize a **transformada de Laplace** para resolver o problema de valor inicial (**PVI**):

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = 5e^{-t}\,\text{sen}(2t) \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Dica:

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)}\left[\frac{10}{(s+1)^2+4} + s + 1\right] = \frac{13}{12(s-1)} - \frac{1}{3(s+2)} + \frac{1}{4}\left[\frac{s-5}{(s+1)^2+4}\right]$$

4. (3,0 pontos) Encontre a **solução geral** para o seguinte **sistema de EDOs** homogêneo, utilizando o **método matricial**:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

Observação

- Todas as respostas devem estar justificadas, isto é, acompanhadas dos argumentos e/ou cálculos usados para obtê-las.

Investir em conhecimentos rende sempre melhores juros.
Benjamin Franklin

BOA PROVA!!!

Laplace transforms – Table

$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)$	$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)$
$a \quad t \geq 0$	$\frac{a}{s} \qquad s > 0$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$at \quad t \geq 0$	$\frac{a}{s^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s + a}$	$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin\theta + \omega \cos\theta}{s^2 + \omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s + a)^2}$	$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos\theta - \omega \sin\theta}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{2}t^2e^{-at}$	$\frac{1}{(s + a)^3}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$	$\frac{1}{(s + a)^n}$	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a} \qquad s > a$	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2} \qquad s > \lvert\omega\rvert$
te^{at}	$\frac{1}{(s - a)^2}$	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2} \qquad s > \lvert\omega\rvert$
$\frac{1}{b - a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s + a)(s + b)}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{a^2}[1 - e^{-at}(1 + at)]$	$\frac{1}{s(s + a)^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}} \qquad n = 1,2,3..$	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s - a)^2 + \omega^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}} \qquad s > a$	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s + a)^{n+1}} \qquad s > a$	$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s + a)}$
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s + a)}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}} \qquad s > 0$	$f(t - t_1)$	$e^{-t_1 s}F(s)$
$g(t) \cdot p(t)$	$G(s) \cdot P(s)$	$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(s) \pm F_2(s)$
$\int f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{-1}(0)}{s}$	$\delta(t)$ *unit impulse*	$1 \qquad$ *all s*
$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0)$	$\frac{d^2f}{df^2}$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$\frac{d^nf}{dt^n}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \cdots - f^{n-1}(0)$		

Gabarito - P2
EDO
2019/1

1) ii) Note que: $\frac{3s-12}{s^2-8s+25} = \frac{3(s-4)}{(s^2-8s+16)+9} = \frac{3(s-4)}{(s-4)^2+3^2}$

Logo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-12}{s^2-8s+25}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s-4)}{(s-4)^2+3^2}\right\} = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-4)}{(s-4)^2+3^2}\right\}$$

$$\underset{\uparrow}{=} 3e^{4t}\cos(3t)$$

Teorema de deslocamento

Assim, a afirmação é **VERDADEIRA (V)**.

---

iii) Do 2º Teorema de deslocamento, temos: $\mathcal{L}\{u_c(t).f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\}$

onde $u_c(t)$ é a função degrau unitário.

Nosso caso:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\,f(t-c)\}$$

2º Teo deslocamento

$$= \mathcal{L}\{u_{5\pi}(t).\cos(9(t-5\pi))\} = e^{-5\pi.s}.\mathcal{L}\{\cos(9t)\} = e^{-5\pi.s}.\frac{s}{s^2+9^2}$$

$c = 5\pi$
$f(t-c) = \cos(9(t-5\pi))$

$f(t) = \cos(9t)$

Tabela da Transformada de Laplace

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{u_{5\pi}(t).\cos(9(t-5\pi))\} = \frac{e^{-5\pi.s}.s}{s^2+81}$$

$\therefore$ a afirmação é **VERDADEIRA (V)**.

Questão (1). Continuação...

(1) iv) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s^2+16}-\frac{4}{s^3}\right\} = 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+16}\right\} - 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$

pela Linearidade da Transformada inversa de Laplace

$= 7\cdot\frac{1}{4}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+4^2}\right\} - 4\cdot\frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^{2+1}}\right\}$

$= \frac{7}{4}\cdot \text{sen}(4t) - \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2!}}\cdot t^2 = \frac{7}{4}\text{sen}(4t) - 2t^2 \neq 7\,\text{sen}(4t) - 2t^2$

Tabela de Transf. imediatos

Logo, a afirmação é **FALSA (F)**

---

v) $\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\vec{X}$ ⟶ autovalores da matriz do sistema:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$?

Eq. característica:

$\det(A - rI_2) = 0$

$A - rI_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & -2-r \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(A - rI_2) = \det\begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & -2-r \end{pmatrix} = (1-r)(-2-r) - 4 = 0$

$\Rightarrow -2 - r + 2r + r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r^2 + r - 6 = 0 \Rightarrow (r+3)(r-2) = 0$

$\Rightarrow r_1 = -3$ ou $r_2 = 2$

$r \;\; 3$
$r \;\; -2$
$3r - 2r = r$

autovalores reais distintos

Assim, a afirmação é **VERDADEIRA (V)**.

Questão (1): Continuação ...

vi) $\boxed{x''' + 8x'' + 5x' - 3x = e^{2019t}}$ (I)

A Mudança de variável:

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad x_3 = x''$$

$$\Rightarrow x_1' = x' = x_2, \quad x_2' = x'' = x_3, \quad x_3' = x'''$$

$$= 3x - 5x' - 8x'' + e^{2019t}$$

Permite reescrever a EDO (I), como o

$$= 3x_1 - 5x_2 - 8x_3 + e^{2019t}$$

sistema de 1ª ordem:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = 3x_1 - 5x_2 - 8x_3 + e^{2019t} \end{cases}$$

$\hookrightarrow \neq \ln(2019t)$

Desta forma, podemos concluir que a afirmação é <u>FALSA (F)</u>.

---

(2) a) $$\frac{1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{A(s^2+1) + (Bs+C)(s-1)}{(s-1)(s^2+1)}$$

Decomposição em frações parciais

$$= \frac{As^2 + A + Bs^2 - Bs + Cs - C}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{(A+B)s^2 + (C-B)s + (A-C)}{(s-1)(s^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{II} \; A + B = 0 \\ C - B = 0 \\ \text{III} \; A - C = 1 \end{cases} \; + \rightsquigarrow \quad \begin{array}{r} A + C = 0 \\ A - C = 1 \\ \hline 2A = 1 \end{array} \; + \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

$$\text{II}: \; \frac{1}{2} + B = 0 \Rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{2}}$$

$$\text{III}: \; \frac{1}{2} - C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow \boxed{C = -\frac{1}{2}}$$

Logo, $$\frac{1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \frac{1}{2}\frac{(s+1)}{s^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{s+1}{s^2+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right]$$

Questão (2). Continuação...

Assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\right]$$

Pela Linearidade de $\mathcal{L}^{-1}$

$$= \frac{1}{2}\left[e^t - \cos t - \operatorname{sen} t\right]$$

Tabela de Transformadas

---

b) $$\mathcal{L}\{(4+t^2)e^{-3t}\} = \mathcal{L}\{4e^{-3t} + t^2e^{-3t}\}$$

$$= 4\,\mathcal{L}\{e^{-3t}\} + \mathcal{L}\{t^2e^{-3t}\}$$

Linearidade de $\mathcal{L}$

$$= 4\left(\frac{1}{s+3}\right) + \frac{2}{(s+3)^3} = \frac{4}{s+3} + \frac{2}{(s+3)^3}$$

Tabela de Transf. de Laplace + Teo de deslocamento

---

c) $$\frac{(s-1)e^{-2\pi s}}{s^2-2s+5} = \frac{(s-1)e^{-2\pi s}}{(s^2-2s+1)+4} = \underbrace{\frac{(s-1)\,e^{-2\pi s}}{(s-1)^2+2^2}}_{F(s)}$$

Pelo 2° teorema de deslocamento, temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}\cdot F(s)\} = u_c(t)\cdot f(t-c) \quad \text{, onde: } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s).$$

Nosso caso:

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}\cdot F(s)\} \overset{c=2\pi}{=} \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2\pi s}\cdot\frac{(s-1)}{(s-1)^2+2^2}\right\}$$

Questão ②. Continuação...

Por outro lado: $\mathcal{L}\{\underbrace{e^t \cos(2t)}_{f(t)}\} = \frac{s-1}{(s-1)^2+2^2} = F(s)$

Logo, pelo 2° TEOREMA DE DESLOCAMENTO:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2\pi s}\frac{(s-1)}{(s-1)^2+2^2}\right\} = u_{2\pi}(t).\ f(t-2\pi)$$

$$= u_{2\pi}(t).\ e^{t-2\pi}.\ \cos(2(t-2\pi)).$$

$$= u_{2\pi}(t).\ e^{t-2\pi}.\ \cos(2t-4\pi)$$

$$= u_{2\pi}(t).\ e^{t-2\pi}.\ \cos(2t)$$

$\cos(2t-4\pi)$
$= \cos(2t).\cancel{\cos(4\pi)}^{1}$
$+ \operatorname{sen}(2t).\cancel{\operatorname{sen}(4\pi)}^{0}$

$= \cos(2t).$

---

③ (**) $\begin{cases} y''+y'-2y = 5e^{-t}.\operatorname{sen}(2t) \quad (*) \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

Aplicando a transformada de Laplace em (*):

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{5e^{-t}.\operatorname{sen}(2t)\}$$

$$\Rightarrow \left[s^2\mathcal{L}\{y\} - s\cancel{y(0)}^{1} - \cancel{y'(0)}^{0}\right] + \left[s\mathcal{L}\{y\} - \cancel{y(0)}^{1}\right] - 2\mathcal{L}\{y\} = 5\mathcal{L}\{e^{-t}.\operatorname{sen}(2t)\}$$

$$\Rightarrow s^2\mathcal{L}\{y\} - s + s\mathcal{L}\{y\} - 1 - 2\mathcal{L}\{y\} = 5\left[\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right]$$

$$\Rightarrow (s^2+s-2)\mathcal{L}\{y\} = \frac{10}{(s+1)^2+4} + s+1$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2+s-2}\left[\frac{10}{(s+1)^2+4} + s+1\right] = \frac{1}{(s-1)(s+2)}\left[\frac{10}{(s+1)^2+4} + s+1\right]$$

$s^2+s-2 = (s+2)(s-1)$

$s \quad 2$
$s \quad -1$

$2s - s = s$

Questão 3. Continuação...

Dica:

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)}\left[\frac{10}{(s+1)^2+4}+s+1\right]=\frac{13}{12}\left(\frac{1}{s-1}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+2}\right)+\frac{1}{4}\left[\frac{s-5}{(s+1)^2+4}\right]$$

$$=\frac{13}{12}\left(\frac{1}{s-1}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+2}\right)+\frac{1}{4}\left[\frac{(s+1)-6}{(s+1)^2+4}\right]$$

$$=\frac{13}{12}\left(\frac{1}{s-1}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+2}\right)+\frac{1}{4}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+4}-\frac{6}{(s+1)^2+4}\right]$$

Assim,

$$\mathcal{L}\{y\}=\frac{13}{12}\left(\frac{1}{s-1}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s+2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right)-\frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{4}_{\,2}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{(s+1)^2+4}\right)$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{13}{12}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\}-\frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\}$$

pela Linearidade de $\mathcal{L}^{-1}$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{13}{12}e^{t}-\frac{1}{3}\cdot e^{-2t}+\frac{1}{4}e^{-t}\cdot\cos(2t)-\frac{3}{4}\cdot e^{-t}\cdot\operatorname{sen}(2t)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t)=\frac{13}{12}e^{t}-\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{e^{-t}}{4}\left[\cos(2t)-3\operatorname{sen}(2t)\right]}$$

Solução do PVI (**).

④ $$(***)\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases} \rightsquigarrow \vec{X}' = A\vec{X}$$

onde $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Autovalores de A?

$$A - rI_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 1-r \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A - rI_2) = \begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 + 1 = 0 \quad \text{(Eq. característica)}$$

$$\Rightarrow (1-r)^2 = -1 \Rightarrow 1-r = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow 1-r = \pm i$$

$$\Rightarrow r = 1 \pm i$$

$$\Rightarrow r_1 = 1+i \quad \text{e} \quad r_2 = 1-i$$

Autovalores complexos conjugados. (Caso 3)

Solução geral (complexa) do sistema $(***)$:

$$\vec{Z}(t) = C_1 \cdot \vec{\xi}_1 e^{r_1 t} + C_2 \vec{\xi}_2 e^{r_2 t} = C_1 \cdot \vec{\xi}_1 e^{(1+i)t} + C_2 \vec{\xi}_2 e^{(1-i)t}$$

$$(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Precisamos encontrar autovetores $\vec{\xi}_1$ e $\vec{\xi}_2$, associados aos autovalores: r_1 e r_2, respectivamente.

- Autovetor $\vec{\xi}_1$?

$$(A - r_1 I_2)\vec{\xi}_1 = \vec{0}, \quad \vec{\xi}_1 \neq \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-(1+i) & -1 \\ 1 & 1-(1+i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cancel{1}-\cancel{1}-i & -1 \\ 1 & \cancel{1}-\cancel{1}-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} \\ \xi_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} -i\xi_1^{(1)} - \xi_1^{(2)} = 0 \\ \xi_1^{(1)} - i\xi_1^{(2)} = 0 \end{cases} \rightarrow \xi_1^{(1)} = i\xi_1^{(2)}$$

Sistema algébrico (complexo) possível indeterminado (infinitas soluções)

Questão (4). Continuação...

$$\text{Se } \xi_1^{(2)} = 1 \Rightarrow \xi_1^{(1)} = i \Longrightarrow \vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• Autovetor $\vec{\xi}_2$?

$$(A - r_2 I_2)\vec{\xi}_2 = \vec{0} \quad , \quad \vec{\xi}_2 \neq \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-(1-i) & -1 \\ 1 & 1-(1-i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2^{(1)} \\ \xi_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2^{(1)} \\ \xi_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{cases} i\xi_2^{(1)} - \xi_2^{(2)} = 0 \\ \xi_2^{(1)} + i\xi_2^{(2)} = 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \xi_2^{(2)} = i\xi_2^{(1)} \xrightarrow[\text{Se } \xi_2^{(1)} = 1]{} \xi_2^{(2)} = i \Rightarrow \vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\vec{Z}(t) = C_1 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+i)t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1-i)t}$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^t \cdot e^{it} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^t \cdot e^{-it}$$

$$= \begin{pmatrix} iC_1 e^t \\ C_1 e^t \end{pmatrix} (\cos t + i \operatorname{sen} t) + \begin{pmatrix} C_2 e^t \\ iC_2 e^t \end{pmatrix} (\cos(-t) + i \cdot \operatorname{sen}(-t))$$

utilizando a Fórmula de Euler

$$= \begin{pmatrix} iC_1 e^t \cdot \cos t + i^2 C_1 e^t \cdot \operatorname{sen} t \\ C_1 e^t \cdot \cos t + iC_1 e^t \cdot \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2 e^t \cdot \cos t - iC_2 e^t \cdot \operatorname{sen} t \\ iC_2 e^t \cos t - i^2 C_2 e^t \cdot \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

Função par: $\cos(-t) = \cos t$

$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$ ↳ Função ímpar

$$= \begin{pmatrix} iC_1 e^t \cdot \cos t - C_1 e^t \operatorname{sen} t + C_2 e^t \cos t - \cancel{iC_2 e^t \operatorname{sen} t} \\ C_1 e^t \cdot \cos t + \cancel{iC_1 e^t \cdot \operatorname{sen} t} + \cancel{iC_2 e^t \cdot \cos t} + C_2 e^t \cdot \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

Questão (4). Continuação...

$$\vec{Z}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} e^t(c_2\cos t - c_1 \operatorname{sen} t) \\ e^t(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) \end{pmatrix}}_{= \operatorname{Re}(\vec{Z}(t))} + i \underbrace{\begin{pmatrix} e^t(c_1 \cos t - c_2 \operatorname{sen} t) \\ e^t(c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t) \end{pmatrix}}_{= \operatorname{Im}(\vec{Z}(t))}$$

Portanto, a solução geral do sistema $(***)$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \tilde{C}_1 \begin{pmatrix} e^t(c_2\cos t - c_1 \operatorname{sen} t) \\ e^t(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} e^t(c_1 \cos t - c_2 \operatorname{sen} t) \\ e^t(c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t) \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 e^t(c_2\cos t - c_1 \operatorname{sen} t) + \tilde{C}_2 e^t(c_1 \cos t - c_2 \operatorname{sen} t) \\ \tilde{C}_1 e^t(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) + \tilde{C}_2 e^t(c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t) \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x(t) = \tilde{C}_1 e^t(c_2\cos t - c_1 \operatorname{sen} t) + \tilde{C}_2 e^t(c_1 \cos t - c_2 \operatorname{sen} t) \\ y(t) = \tilde{C}_1 e^t(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) + \tilde{C}_2 e^t(c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t). \end{cases}$$

$\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{R}$.