Eletromagnetismo I (2024.1)
GFI00220

A lei de Gauss

Professor: Carlos Eduardo Souza (Cadu)

E quando utilizar a lei de Gauss?

$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

E quando utilizar a lei de Gauss?

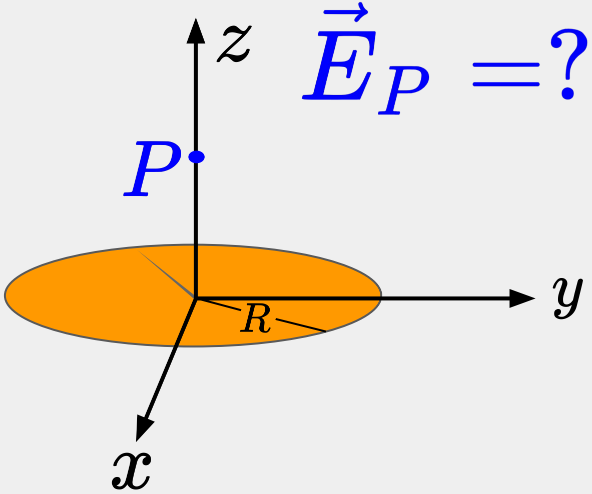
$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Resposta da maioria dos estudantes:

Problemas com simetria

E quando utilizar a lei de Gauss?

$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$



Resposta da maioria dos estudantes:

Problemas com simetria

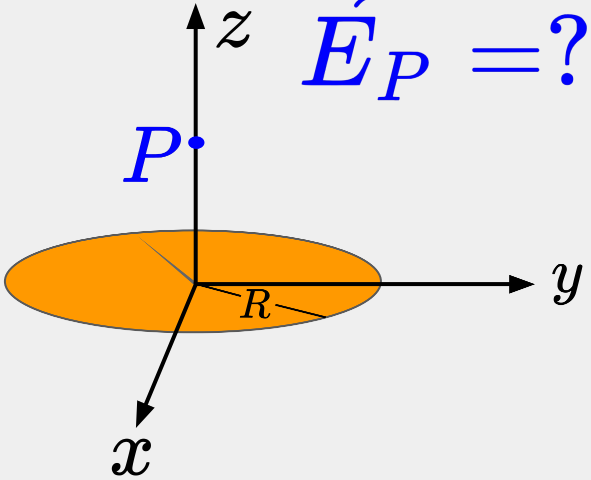
Esse é um problema com simetria de revolução em torno do eixo z. Portanto, seria adequado resolvê-lo via a lei de Gauss?

A integral é realizada em uma área e aqui, neste exemplo, a simetria se limita a uma linha ao longo da direção z.

E quando utilizar a lei de Gauss?

$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_P = ?$$



Resposta da maioria dos estudantes:

Problemas com simetria

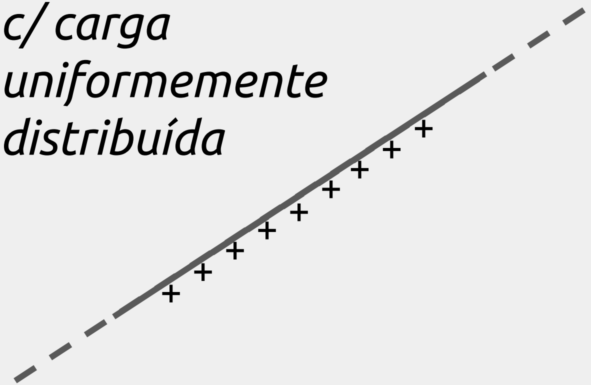
~~***Esse é um problema com simetria de revolução em torno do eixo z. Portanto, seria adequado resolve-lo via a lei de Gauss?***~~

E quando utilizar a lei de Gauss?

$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Resposta:
em Problemas com alta simetria

fio infinito
c/ carga
uniformemente
distribuída



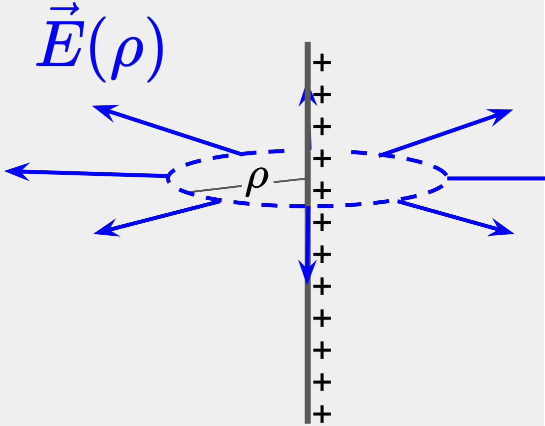
E quando utilizar a lei de Gauss?

$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Resposta:
em Problemas com alta simetria

Neste caso, sabendo que o campo é radial com simetria cilíndrica com dependência em ρ.

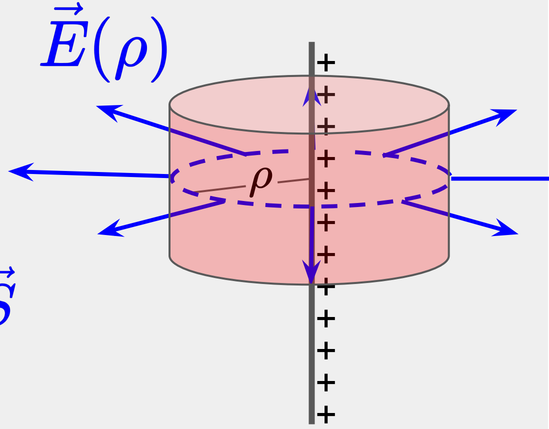
fio infinito



E quando utilizar a lei de Gauss?

$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

fio infinito



Resposta:
em Problemas com alta simetria

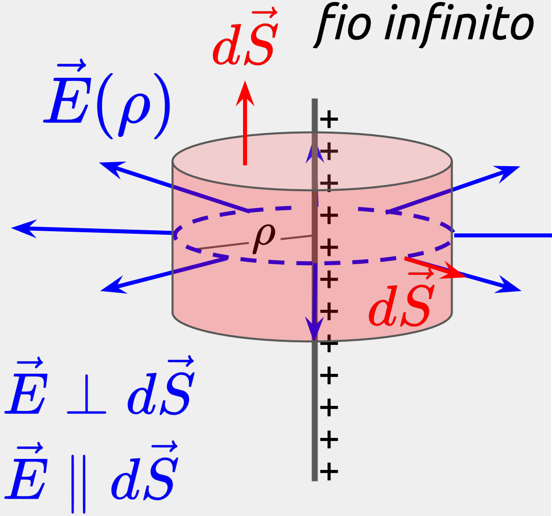
*Neste caso, sabendo que o campo é radial com simetria cilíndrica com dependência em ρ. Assim, podemos imaginar uma sup. gaussiana na qual temos **duas situações simplificadoras**:*

$$\vec{E} \perp d\vec{S}$$
$$\vec{E} \parallel d\vec{S}$$

E quando utilizar a lei de Gauss?

Neste caso, o campo elétrico é cte e // a dS, podendo sair da integral...

$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$



E quando utilizar a lei de Gauss?

Neste caso, o campo elétrico é cte e // a dS, podendo sair da integral

$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

ou seja,

$$\Phi_{\vec{E}} = \iint_{S1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$S_1 \equiv$ área da lateral do cilindro gaussiano

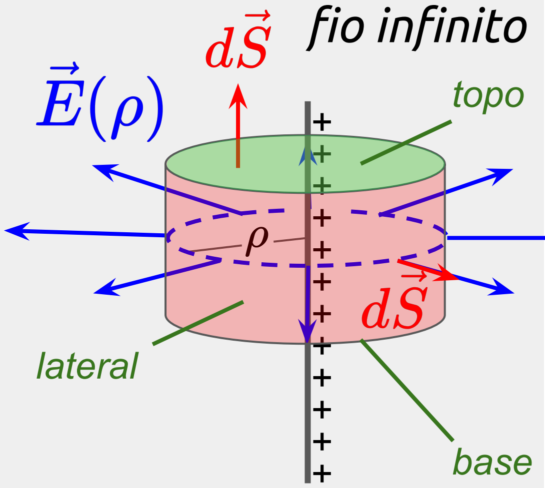
Observe que nestas superfícies:

$$\vec{E} \parallel d\vec{S}$$

$S_2 \equiv$ área do topo + área da base do cilindro gaussiano

Observe que nestas superfícies:

$$\vec{E} \perp d\vec{S}$$



E quando utilizar a lei de Gauss?

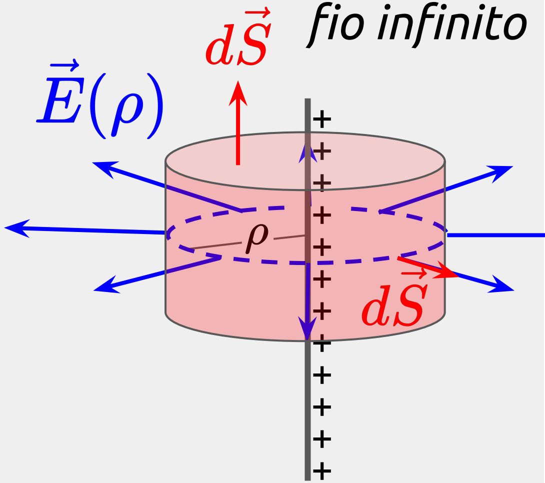
Neste caso, o campo elétrico é cte e // a dS, podendo sair da integral

$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

ou seja,

$$\Phi_{\vec{E}} = \underbrace{\iint_{S1} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{\vec{E} \parallel d\vec{S}} + \underbrace{\cancel{\iint_{S2} \vec{E} \cdot d\vec{S}}}_{\vec{E} \perp d\vec{S}} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$= \iint_{S1} E dS + 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$



E quando utilizar a lei de Gauss?

Neste caso, o campo elétrico é cte e // a dS, podendo sair da integral

$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

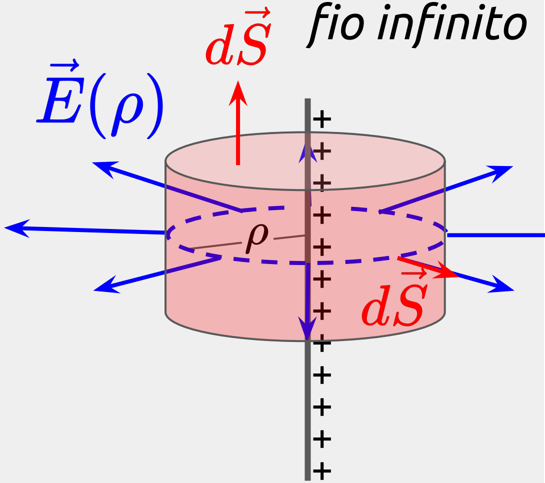
ou seja,

$$\Phi_{\vec{E}} = \underbrace{\iint_{S1} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{\vec{E} \parallel d\vec{S}} + \underbrace{\cancel{\iint_{S2} \vec{E} \cdot d\vec{S}}}_{\vec{E} \perp d\vec{S}} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$= \iint_{S1} E dS \quad + \quad 0 \quad = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$= E \iint_{S1} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

fio infinito



E quando utilizar a lei de Gauss?

Neste caso, o campo elétrico é cte e // a dS, podendo sair da integral

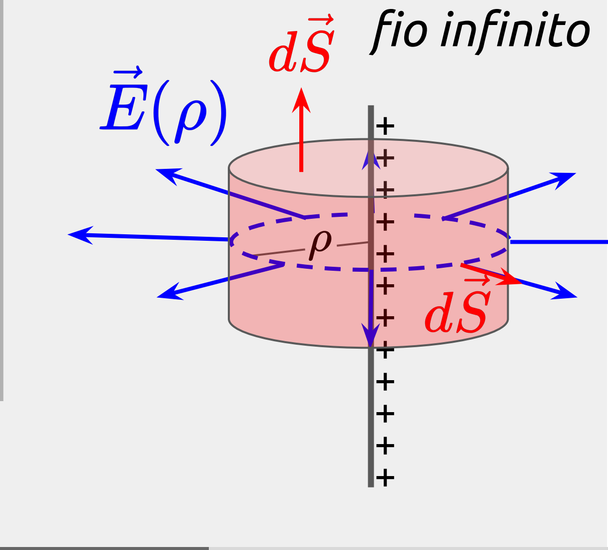
$$\Phi_{\vec{E}} = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

ou seja,

$$\Phi_{\vec{E}} = \iint_{S1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \cancel{\iint_{S2} \vec{E} \cdot d\vec{S}} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$= \iint_{S1} E dS \quad + \quad 0 \quad = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$= E \iint_{S1} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(\rho) A = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

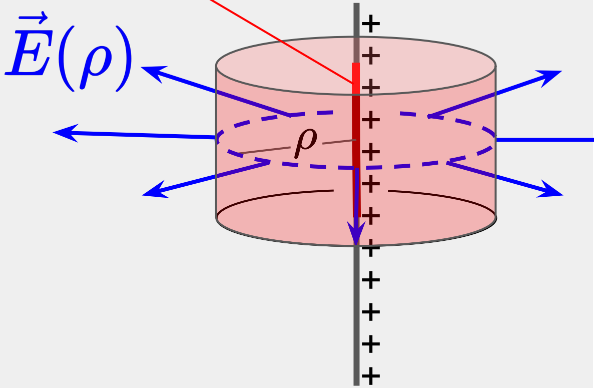


Em resumo,
tendo em vista que o campo elétrico é radial e tem simetria cilíndrica, podemos escrever:

$$A \equiv \acute{a}rea\ lateral$$

$$Q_{int} \equiv$$ *carga elétrica interna ao cilindro gaussiano.*

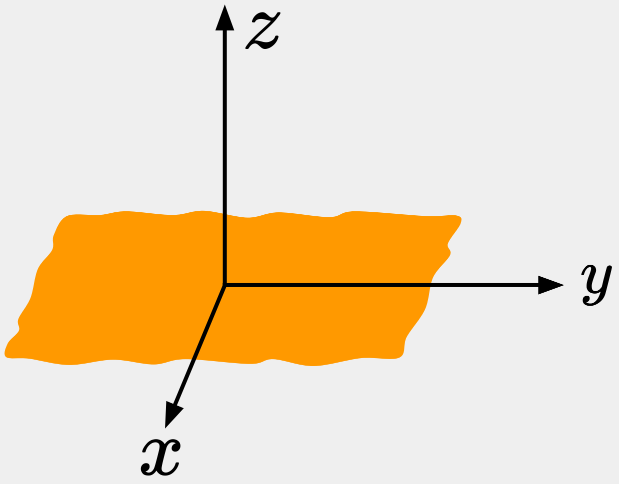
$$\vec{E} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0 A}\hat{\rho}$$



$$E(\rho)A = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

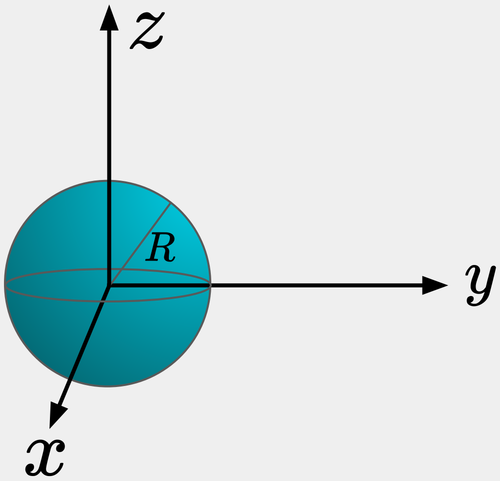
Exercício 1

Lâmina infinita de cargas uniformemente distribuídas. Determine $\vec{E}$ em todo o espaço.



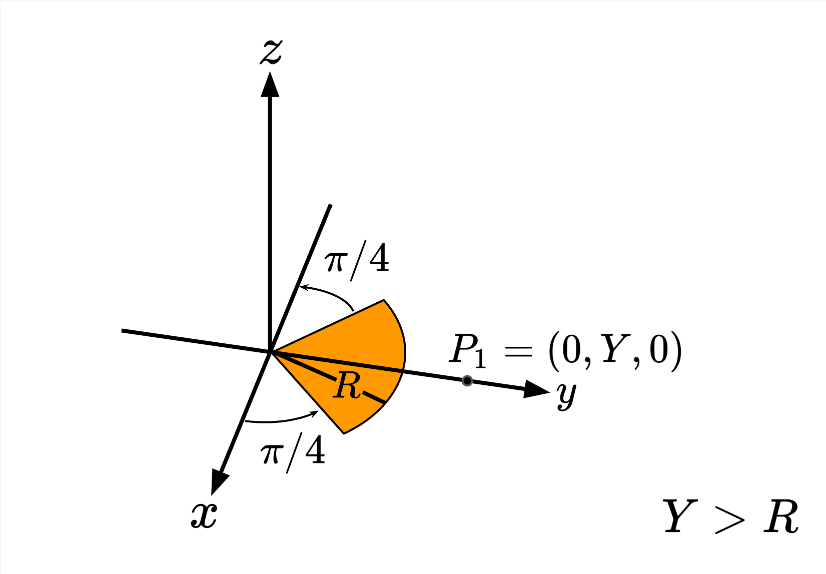
Exercício 2

Esfera de cargas uniformemente distribuídas. Determine $\vec{E}$ em todo o espaço.



Exercício 3

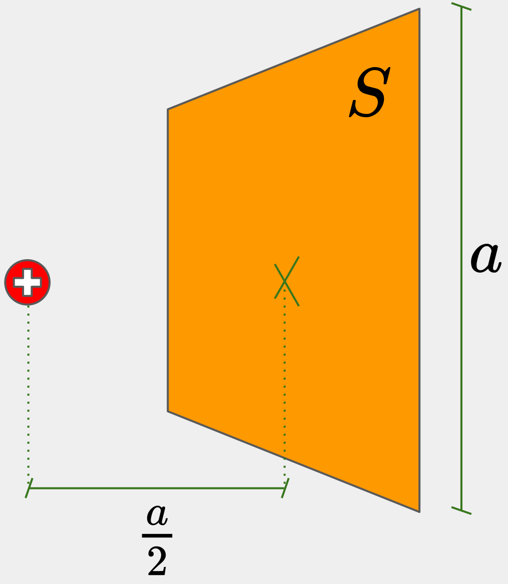
Lâmina cônica de cargas uniformemente distribuídas. Determine $\vec{E}$ ***em todo o espaço.***



$P_2 = (0, 0, h)$

Desafio

Quanto vale o fluxo do campo elétrico na sup. quadrada abaixo?

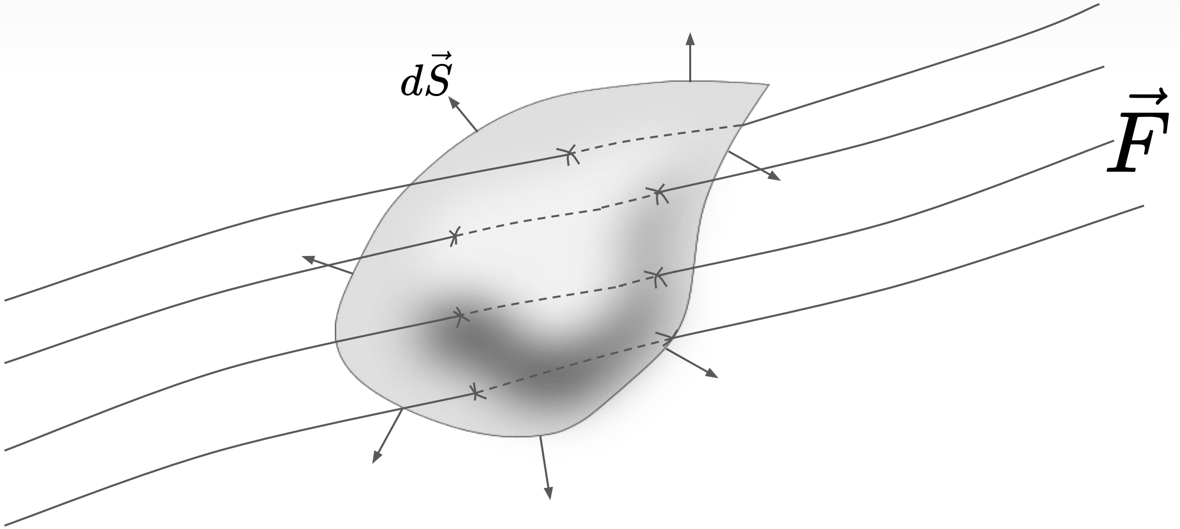


A placa é quadrada e tem lado a e a carga positiva está no eixo de simetria distando a/2 do centro da placa.

$$\Phi_{\vec{E}} = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ?$$

Teorema da divergência...

Teorema da divergência



$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_v dv(\nabla \cdot \vec{F})$$

o fluxo do campo $\vec{F}$ através da gaussiana S é igual à integral do divergente do campo $\vec{F}$ no volume v.

Em resumo,
o ***Divergente*** *em* ***diferentes coordenadas***

- coords cartesianas $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
- coords cilíndricas $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
- coords esféricas $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial(\sin(\theta) F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$

Propriedades:

$$\nabla \cdot \vec{A}$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \cdot \vec{A} + \nabla \cdot \vec{B}$$

$$\nabla \cdot (f\vec{A}) = f(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot \nabla(f)$$

Por fim, utilizando o teorema da Divergência na lei de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_v dv(\nabla \cdot \vec{E}) = Q$$

Por fim, utilizando o teorema da Divergência na lei de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_v dv(\nabla \cdot \vec{E}) = Q$$

Mas, como $Q = \iiint_v dv\ \rho$

$$= \iiint_v dv(\nabla \cdot \vec{E}) = \iiint_v dv\ \rho$$

Por fim, utilizando o teorema da Divergência na lei de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_v dv(\nabla \cdot \vec{E}) = Q$$

Mas, como $Q = \iiint_v dv\ \rho$

$$= \iiint_v dv(\nabla \cdot \vec{E}) = \iiint_v dv\ \rho$$

$$\iiint_v dv(\nabla \cdot \vec{E} - \rho) = 0$$

A lei de Gauss na forma diferencial

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \rho}$$

Por fim, utilizando o teorema da Divergência na lei de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_v dv(\nabla \cdot \vec{E}) = Q$$

Mas, como $Q = \iiint_v dv\ \rho$

$$= \iiint_v dv(\nabla \cdot \vec{E}) = \iiint_v dv\ \rho$$

$$\boxed{\oint_S (\epsilon_0 \vec{E}) \cdot d\vec{S} = Q_{int}}$$

A lei de Gauss na forma integral

$$\iiint_v dv(\nabla \cdot \vec{E} - \rho) = 0$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \rho}$$

A lei de Gauss na forma diferencial

Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense

Exercício

Sabendo que

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{4\epsilon_0}\ \hat{r}, & r < R \\ \dfrac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 r^2}\hat{r}, & r \geq R \end{cases}$$

Determine a distribuição de cargas que produz o campo dado. Considere R e ρ_0 ctes e positivos.