1 2 9 0 FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA UNIVERSIDADE DE COIMBRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA E DE COMPUTADORES

Processamento Digital de Sinal
Trabalho Prático Nº 9
Processo Harmónico. Algoritmo MUSIC.

Descrição

Neste trabalho prático vamos estimar o conteúdo espetral de um processo harmónico, com múltiplos harmónicos, e embebido em ruído branco. Vamos considerar em primeiro lugar a estimativa do espetro de potência com o periodograma descretizado (DFT de N valores da autocorrelação). Depois vamos usar o método MUSIC (método estrutural da matriz de autocorrelação) para estimar as frequências dos harmónicos em causa com mais precisão.

Trabalho Prático

1. Autocorrelação do processo

a) Leia o ficheiro `'harmonicproc4.wav'`. Ouça o sinal e verifique que é algo harmónico. Queremos estimar as frequências em causa.

b) Calcule a estimativa da autocorrelação (com `xcorr`), `r`, a partir das amostras do processo $x[n]$. Use `MAXLAG=100` pontos de forma a fazer: `plot(-100:100,r), grid`

c) A partir da estimativa da autocorrelação, verifique se é possível determinar quantas frequências predominantes do processo harmónico e as suas amplitudes.

d) Determine o periodograma a partir das primeiras `N=1024` amostras do processo. O periodograma equivalente a $P_N\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{N}\left|X(e^{j\omega})\right|^2$. Podemos descretizar o periodograma com, pelo menos, $2N$-1 pontos[1], vindo:

$$P_N[k]=P_N\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=k\frac{2\pi}{NDFT}}=\frac{1}{N}\left|X[k]\right|^2$$

Para isso, faça:

```
N=1024; NDFT=2*N;         %NDFT: um ponto a mais que o necessário
fk = (0:N)/N*fs/2;        %N+1 frequências de interesse
X  = fft(x(1:N), NDFT);   %DFT com 2*N pontos
P  = abs(X(1:N+1)).^2/N;  %N+1 pontos para k=0:N
plot(fk,P), grid
```

---

[1] A transformada inversa de $P_N[k]$ corresponde à estimativa polarizada da autocorrelação:

$$\hat{r}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-|k|-1}x[n+k]\cdot x[n],\ k=-(N-1):N-1$$

A autocorrelação $\hat{r}[k]$ é proporcional à convolução de $x[n]$ com $x^*[-n]$. Logo, se $x[n]$ tiver N pontos, a autocorrelação tem $2N$-1 pontos, para $k=-N+1:N-1$. Logo $NDFT\geq 2N-1$.
Pode verificar isto com o seguinte código:

```
r1 = ifft(abs(X).^2/N); %2N pontos, k=0:2N-1
r2 = xcorr(x(1:N),N-1,'biased'); %2N-1 pontos, k=-(N-1):(N-1)
plot(-N+1:N-1,r2,-N+1:N,[r1(N+2:end);r1(1:N+1)]) %r1(N+1)=0
```

1 2 9 0 FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA E DE COMPUTADORES

Processamento Digital de Sinal

Trabalho Prático Nº 9

Processo Harmónico. Algoritmo MUSIC.

É evidente a partir do gráfico do periodograma que se trata de um processo harmónico com ruído branco. Aparentemente existem 4 frequências presentes (se colocarmos um limiar de 0.4).
Estime as frequências e os valores de pico em causa. Pode fazer isso manualmente, ou usando a função `findpeaks`:

```
[peaks,locs]=findpeaks(P,fk,'MinPeakHeight',0.4)
```

Note que as frequências estimadas são sempre múltiplas de $2\pi/NDFT$. Para uma sinusoide de amplitude A, resulta uma potência de $A^2/2$ e num pico do periodograma de valor (teórico) $NA^2/4$.
É difícil estimar a potência do ruído pois a variância do periodograma desta componente é elevada.
Compare com os valores reais do processo harmónico:

A_1=0.05	A_2=0.06	A_3=0.07	A_4=0.09	$\sigma_x^2 = 0.05$
f_1= 400	f_2= 960	f_2=1280	f_3=2480	Hz

2. Estimativa de pseudoespetro MUSIC

Vamos usar o mesmo segmento do processo e o algoritmo MUSIC (MUltiple SIgnal Classification method) [Hayes, 96, pp 463] para estimar a frequência dos harmónicos deste processo. Trata-se de um método que explora a estrutura da matriz de autocorrelação de N_p VAs do processo. As frequências obtidas podem ter uma resolução tão grande quanto se queira.

a) Crie uma matriz de autocorrelação, **R**, Toeplitz, de dimensão 40×40 usando os valores de $r[k]$ com k=0:39, isto é: `r(101:140)`.

b) Siga os seguintes passos:

i) Diagonalize a matriz **R** com `eig`; extraia os valores próprios com `diag`. Verifique que 8 dos valores próprios são maiores que os restantes. Faça um "plot" dos valores próprios. Cada valor próprio elevado está relacionado com uma exponencial complexa e um par com um harmónico real. A média dos N_1=40-8=32 valores próprios de menor valor dá uma estimativa da variância do ruído:

$$\hat{\sigma}_w^2 = \tfrac{1}{N_1}\sum_{n=1}^{N_1}\lambda_n$$

Confira esta estimativa com o valor real dado em 1d).

ii) A estimativa MUSIC do espetro de potência do processo é tomada com a seguinte equação (pseudoespetro):

$$\hat{P}_{MU}(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N_1}\left|\mathbf{e}^{*T}\mathbf{v}_k\right|^2}$$

onde $\mathbf{v}_k$ não os N_1 vetores próprios associados ao ruído e o vetor **e** é um vetor de frequências com elementos $[\mathbf{e}]_n = e_n = e^{jn\frac{2\pi}{NFFT}}$. Isto é, $\left|\mathbf{e}^{*T}\mathbf{v}_k\right|^2$ é o módulo quadrado da DFT do vetor próprio $\mathbf{v}_k$ com $NFFT$ pontos. A resolução espetral depende do valor $NFFT$ tomado.

1 2 9 0 FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA UNIVERSIDADE D COIMBRA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA E DE COMPUTADORES

Processamento Digital de Sinal

Trabalho Prático Nº 9

Processo Harmónico. Algoritmo MUSIC.

Para calcular esta estimativa use a seguinte função, com nexp=8 exponenciais (para os 4 harmónicos do processo).
Note que as frequências são bem identificadas. Se testar com **R** de dimensão 20×20, não encontra o harmónico de mais baixa frequência.

```
function Px = my_music(R,n_exp)
%Algorimo MUSIC, [Hayes, 1996, pp 465] (adaptado)
%R: matriz de autocorrelação do processo.
%nexp: número de exponenciais harmónicas do processo.
%Retorna P, o pseudoespetro, em 1025 pontos, wn=(0:1024)/1024
%Faz plot do psedoespetro com 1025 pontos.

[M,MM]=size(R);
if (MM~=M),error('R não é matriz quadrada'); end
if n_exp>M-1, error('pelo menos uma exponencial harmónica'); end
[V,D]=eig(R);
%lambda=diag(D); % valores próprios, lambda: diagonal da matriz D.
Px=0;
for j=1:M-n_exp
    Px=Px+abs(fft(V(:,j),2048)).^2;  %V é a matriz dos vetores próprios.
end
Px=1./Px;
wn=(0:1024)/1024; %frequência normalizada.
plot(wn, Px(1:1025))%Faz plot
```

No final da aula entregue o script que produziu, na "Submissão de Trabalhos" do Nónio.