



Processamento Digital de Sinal

Trabalho Prático Nº 11 - Estimação Espectral de Potência

Descrição

Neste trabalho prático vamos usar métodos de estimação espectral baseados no periodograma, nomeadamente estimativas consistentes do espectro de potência, como é o caso do método de Welch.

Trabalho Prático

1. Periodograma

Leia o ficheiro '`temperaturas.dat`' que tem o historial de quase 4 meses de gravações da temperatura de um escritório, ao ritmo de duas amostras por hora.

Para ler o ficheiro, use o seguinte código:

```
f=fopen('temperaturas.dat','rb');
temp = fread(f, inf, 'float32');
fclose(f);
plot(temp)
```

Pretende-se determinar se existe algum comportamento cíclico embebido nos dados. Por exemplo, pretende-se saber se existe alguma repetição diária ou semanal da variação da temperatura no escritório.

- Faça um gráfico dos dados (vetor `temp`) e diga se consegue perceber como varia a temperatura do escritório ao longo do tempo.
- Defina a frequência de amostragem de duas formas: número de amostras de temperatura por dia e por semana (isto é, a unidade de tempo é o dia ou a semana). Faça um periodograma discretizado de todos os dados com $N_{fft}=8192$.

Nota: uma vez que os dados estão em graus centígrados e têm uma média de cerca de 22.7°C, subtraia a média dos dados antes de calcular o periodograma, caso contrário o valor DC domina o periodograma.

Faça um plot do periodograma em que a abcissa é a frequência: “ciclos por dia” ou então “ciclos por semana”. Verifique que os dados evidenciam um ciclo forte de uma vez por semana e outro ciclo forte de uma vez por dia. Interprete este resultado.

2. Polarização do periodograma

Considere um processo AR(4) que tem como filtro gerador o sistema com ganho 1 e polos

$$p_{1,2} = 0.98e^{\pm j\frac{10\pi}{50}} \text{ e } p_{3,4} = 0.98e^{\pm j\frac{14\pi}{50}}.$$

Considere uma frequência de amostragem de 10 kHz. Use $N_{fft}=8192$.

O (verdadeiro) espectro de potência do processo pode ser criado usando o seguinte código:

```
fs=10000; Nfft=8192;
wn=(0:Nfft/2)/Nfft*2; w1=pi/5; w2=14*pi/50;
p12=0.98*[cos(w1)+1i*sin(w1), cos(w1)-1i*sin(w1)];
p34=0.98*[cos(w2)+1i*sin(w2), cos(w2)-1i*sin(w2)];
A=poly([p12,p34]) %poly() é o inverso de roots(). A tem coef. reais.
H=1./fft(A,Nfft); % H[k]=N[k]/D[k]
Ptrue=abs(H).^2; %com 8192 pontos em [0,2*pi[
k=1:Nfft/2+1; %os 4097 índices de interesse para w em [0,pi]
plot(wn,db(Ptrue(k))/2)
```



Processamento Digital de Sinal

Trabalho Prático Nº 11 - Estimação Espectral de Potência

- a) Crie uma amostra do processo com $N=1000$ pontos. Use $\text{rng}(\theta)$ para poder repetir a experiência. Para isso, filtre uma amostra de ruído branco ($v=\text{randn}(1,N);$) com o filtro $1/A(z)$ e crie o seu periodograma, P . Numa mesma figura mostre o verdadeiro espectro de potência (P_{true}) e a estimativa do periodograma (P). Verifique a polarização, bem evidente a frequências altas.
- b) Mostre agora, num único gráfico, o verdadeiro espectro de potência (P_{true}), a estimativa do periodograma (P), e o valor esperado do periodograma (EP). Para calcular EP siga os seguintes passos:
- Defina r_{true} como a ifft de $|H(e^{j\omega})|^2$ calculado com N_{fft} pontos, onde $H(e^{j\omega})$ é a resposta em frequência do filtro gerador do processo. Trata-se de uma boa aproximação, já que $N_{\text{fft}} \gg N$.
 - Defina a janela triangular, w_b , como a ifft de $W_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} |W_R(e^{j\omega})|^2$ onde $W_R(e^{j\omega})$ é o espectro da janela retangular, calculado em N_{fft} pontos ($W_R = \text{fft}(\text{ones}(1,N), N_{\text{fft}});$). Mostre um gráfico de w_b para verificar que se trata, de facto, da janela triangular. Explique.
 - Defina o valor esperado do periodograma, EP , como a fft do produto $r_{\text{true}} \cdot w_b$, pois

$$E\{P_N(e^{j\omega})\} = \text{DTFT}\{r_{\text{true}}[k] \cdot w_b[k]\} = \frac{1}{2\pi} P_{\text{true}}(e^{j\omega}) \otimes W_B(e^{j\omega}).$$

3. Método de Welch

Considere ainda o processo AR(4) do ponto anterior, mas agora gere uma amostra com 30000 valores do processo.

- a) Verifique que se tomar um único periodograma (por exemplo com $N_{\text{fft}} = 32 \cdot 1024$), a variância do periodograma não diminui.
- b) Use agora o método de Welch para gerar uma estimativa consistente. Para isso, use secções de 1000 amostras com a janela de Hamming com avanço de 200 amostras (sobreposição de 800 amostras) e DFTs de comprimento 2048. Pode usar o comando `buffer`.

Nota: Use como normalização dos periodogramas modificados o valor NU :

```
N=1000; Nfft=2048;
hw = hamming(N); U=sum(hw.^2)/N;
xf=buffer(x,N,800).*hw; %tramas com janela de Hamming
Nf=size(xf,2); %150 tramas (frames)
Pm = abs(fft(xf,Nfft)).^2/(N*U); %150 periodogramas modificados
%Verificar que Pm é uma matriz (real) de dimensão 2048x150
%É necessário fazer a média na 2ª dimensão => vetor coluna de 2048x1
%Para fazer plot conjunto de Pwelch com Ptrue, defina:
wn2 = (0:1024)/1024;
plot(wn2,db(Pwelch(1:1025))/2,wn,db(Ptrue(k))/2)
```

Faça a média dos 150 periodogramas modificados (P_{welch}) e depois um plot conjunto de P_{welch} e P_{true} , verificando que a estimativa de Welch é consistente.

No final da aula entregue o script que produziu, na “Submissão de Trabalhos” do Nónio.