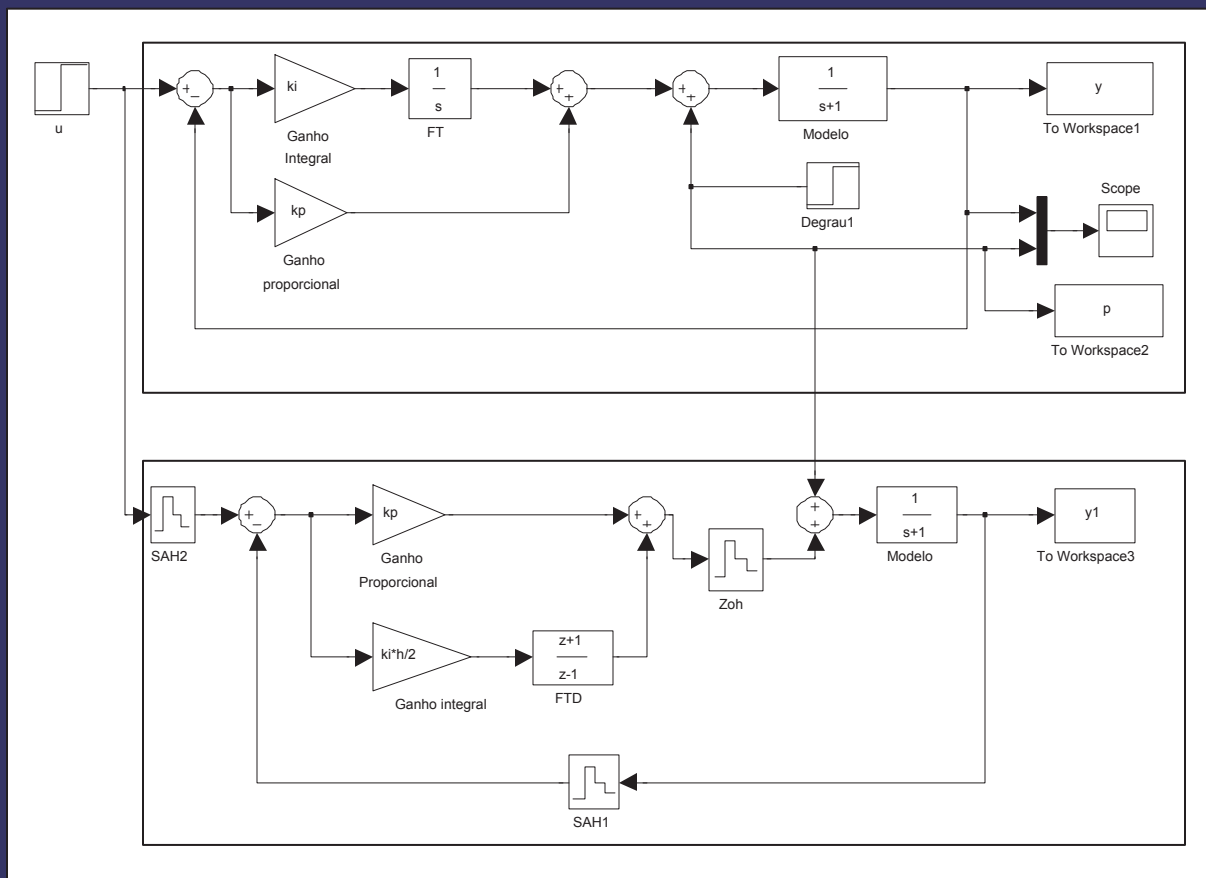


CONTROLO DIGITAL :

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

EXEMPLOS EM MATLAB/ SIMULINK

URBANO NUNES



CONTROLO DIGITAL:

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

EXEMPLOS EM MATLAB/SIMULINK

CONTROLO DIGITAL: EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

EXEMPLOS EM MATLAB/SIMULINK

URBANO NUNES

Prefácio

Este texto reúne um conjunto de problemas, uns resolvidos outros por resolver, organizados em capítulos que reflectem o decurso das **aulas práticas/teórico-práticas** de Controlo Digital, curso semestral ministrado no Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores da Universidade de Coimbra, servindo de texto base nessas aulas.

A motivação para a elaboração deste texto de apoio às aulas teórico-práticas/práticas foi sobretudo por sentir que um documento destes, com a matéria sistematizada e organizada em sintonia com o curso, pode ajudar em grande medida os alunos na sua aprendizagem e motivação para as matérias de controlo.

No texto são apresentados diversos exemplos de resolução em Matlab/Simulink, por ser essa uma ferramenta usada nas aulas práticas, na análise, síntese e simulação de sistemas de controlo, em complemento à resolução de problemas baseada em “papel e lápis”.

A leccionação de aulas na área do controlo, a aplicação do controlo à prática, designadamente em projectos de I&D de automação e robótica, elaboração de provas de avaliação, contacto e discussão destas matérias com alunos e colegas, foram contributos que me permitiram elaborar este texto de apoio às aulas onde é reflectida a minha própria síntese sobre os assuntos a incluir num curso introdutório de controlo digital.

Urbano Nunes
Coimbra, Outubro de 2005

CAPÍTULO 1

SISTEMAS DE CONTROLO CONTÍNUO: NOÇÕES BÁSICAS

1.1 - INTRODUÇÃO

Em controlo digital I são estudados sistemas de controlo por computador que como se ilustra na Figura 1.1 incluem simultaneamente processos contínuos e componentes de processamento de informação em tempo discreto (sistemas discretos). Tem-se assim uma mistura de sistemas contínuos e de sistemas discretos com o objectivo de robustecer o desempenho dinâmico do sistema contínuo, tornando-o designadamente mais imune a perturbações externas. Nesta disciplina a abordagem limita-se aos sistemas contínuos e discretos, lineares e invariantes no tempo (SLITs).

Quer seja para se efectuar a síntese do controlador discreto ou a análise do comportamento do sistema de controlo por computador total, é fundamental ter presente as ferramentas de análise de sistemas contínuos. Métodos de análise e de síntese de controladores contínuos foram objecto de estudo noutras disciplinas do curso pelo que neste capítulo faz-se apenas uma revisão de alguns desses conceitos através da proposta de alguns problemas, uns resolvidos outros por resolver.

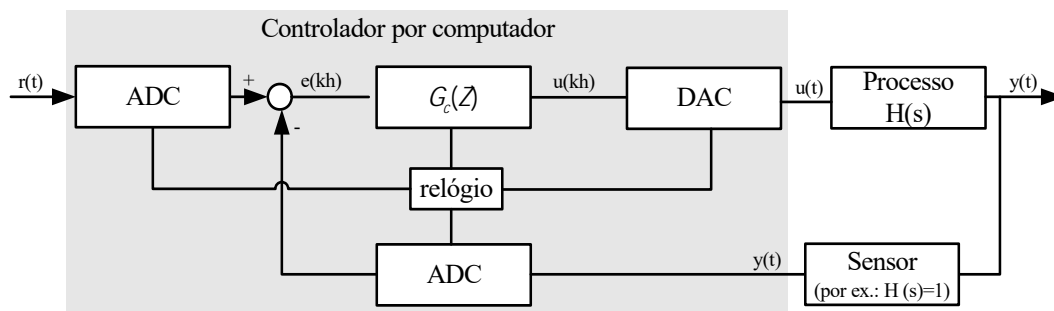


Figura 1. 1. - Diagrama de blocos de um sistema de controlo por computador

1.2 - FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE SLITS CONTÍNUOS

Neste capítulo os sistemas SLITs contínuos são representados pela sua função de transferência, $H(s)$, que se admite na forma irredutível, isto é, assume-se que foram eliminados os pólos e zeros coincidentes. Usamos a seguinte notação para a função de transferência na sua forma geral

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1.1)$$

em que para sistemas causais $n \geq m$. O polinómio do denominador da função de transferência representa o polinómio característico. A função de transferência (1.1) está numa forma normalizada correspondente a considerar como mónico o polinómio característico. De um modo geral o grau do numerador da função de transferência, m , é inferior ao grau do denominador, n . No caso particular $m = n$, $H(s)$ pode ser expresso pela soma do coeficiente b_n , coeficiente da potência de mais alto grau do numerador, e fracções parciais associadas aos pólos da função (veja-se o Problema 1.1).

A função de transferência (1.1) pode ser rescrita de modos alternativos úteis em diferentes situações de análise:

Forma factorizada ou forma zpk (zeros-pólos-k)

$$H(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}, \quad K = b_m \quad (1.2)$$

em que as raízes dos polinómios do numerador $z_i, i = 1, \dots, m$ e do denominador $p_i, i = 1, \dots, n$, representam, respectivamente, os zeros e os pólos do sistema.

Forma das constantes de tempo

$$H(s) = K_0 \frac{(1 + sT_1)(1 + sT_2) \cdots (1 + sT_m)}{s^k (1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) \cdots (1 + s\tau_{n-k})} \quad (1.3)$$

em que se consideram k pólos integradores e as constantes de tempo $T_i, i = 1, \dots, m$ e $\tau_i, i = 1, \dots, n - k$ se relacionam com os zeros e pólos do sistema (excluindo os pólos integradores) através das expressões:

$$z_i = -\frac{1}{T_i}, i = 1, \dots, m, \quad z_i \neq 0$$

$$p_i = -\frac{1}{\tau_i}, i = 1, \dots, n - k, \quad p_i \neq 0$$

Para sistemas sem pólos na origem, $k = 0$ em (1.3), o ganho

$$K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} H(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{i=1}^n p_i} \quad (1.4)$$

designa-se por ganho estático (ganho para a frequência $\omega = 0$) e representa o ganho do sistema na baixa frequência. Observe que (1.4) relaciona o ganho estático da representação na forma das constantes de tempo com a constante K da forma factorizada.

1.3 – PROBLEMAS RESOLVIDOS

PROBLEMA 1.1

Para o SLIT com função de transferência

$$H(s) = H_1(s) \frac{1}{s} e^{-0.2s} \quad (1.5)$$

em que

$$H_1(s) = \frac{2s}{s+2} \quad (1.6)$$

Determine:

- a) A resposta a impulso do sistema $H_1(s)$;
- b) A equação diferencial que descreve o comportamento dinâmico do sistema $H(s)$;
- c) A resposta ao escalão unitário do sistema $H(s)$.

RESOLUÇÃO

a) Observe que $H_1(s)$ é uma função com o grau do polinómio do numerador igual ao grau do polinómio do denominador (i.e. função própria mas não estritamente própria). Nesta situação, $H_1(s)$ pode ser expresso pela soma do coeficiente, da potência de mais alto grau do polinómio do numerador, com as fracções parciais associadas aos pólos da função:

$$H_1(s) = 2 + \frac{a}{s+2}$$

onde

$$a = \frac{2s}{s+2}(s+2)|_{s=-2} = -4$$

Assim

$$H_1(s) = 2 - \frac{4}{s+2}$$

e, aplicando a transformada de Laplace inversa, obtém-se a resposta impulsional

$$h_1(t) = 2\delta(t) - 4e^{-2t} u_s(t).$$

b) Substituindo (1.6) em (1.5),

$$H(s) = \frac{2}{s+2} e^{-0.2s}$$

logo

$$(s+2)Y(s) = 2U(s)e^{-0.2s}$$

A equação diferencial do SLIT obtém-se aplicando a transformada de Laplace inversa

$$\frac{dy}{dt} + 2y(t) = 2u(t-0.2).$$

c) A resposta ao escalão unitário, na transformada de Laplace,

$$Y(s) = H(s) \frac{1}{s} = \frac{2}{s(s+2)} e^{-0.2s}$$

pode ser expandida em fracções simples

$$Y(s) = \left(\frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+2} \right) e^{-0.2s}$$

em que

$$k_1 = \frac{2}{s+2} \Big|_{s=0} = 1 \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{2}{s} \Big|_{s=-2} = -1$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa obtém-se a resposta ao escalão unitário

$$y(t) = (1 - e^{-2(t-0.2)}) u_s(t - 0.2)$$

ou seja

$$y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-2(t-0.2)} & , \quad t \geq 0.2 \\ 0 & , \quad t < 0.2 \end{cases}$$

PROBLEMA 1.2

Considere o SLIT de 1ª ordem com função de transferência

$$H(s) = \frac{1 + \frac{s}{\alpha}}{s + 1}.$$

a) Para $\alpha = 10$, determine as expressões das características de amplitude (em dB) e de fase da resposta em frequência, i.e. determine $|H(j\omega)|_{dB}$ e $\arg H(j\omega)$.

b) Para $\alpha = -10$, determine as expressões das características de frequência e faça o respectivo traçado do diagrama de Bode.

RESOLUÇÃO

a) Para $\alpha = 10$, temos um sistema de 1ª ordem de fase mínima (com um único zero posicionado no semiplano complexo esquerdo) com ganho estático unitário. A resposta de frequência é neste caso:

$$H(j\omega) = \frac{1 + \frac{j\omega}{10}}{1 + j\omega}$$

com características de amplitude (em dB) e de fase

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2} \quad (1.7)$$

$$\arg H(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right) - \arctan \omega$$

b) Para $\alpha = -10$, o sistema tem também ganho estático unitário e mantém o pólo do sistema da alínea anterior, mas passa a ter um zero no semiplano complexo direito, pelo que se trata de um sistema de fase não mínima. A resposta de frequência é agora

$$H(j\omega) = \frac{1 - \frac{j\omega}{10}}{1 + j\omega}$$

Este sistema tem a mesma característica de amplitude do sistema da alínea a) (veja-se a equação (1.7)). No entanto as características de fase diferem devido à presença do zero em diferentes semiplanos. Neste caso a característica de fase é

$$\begin{aligned} \arg H(j\omega) &= \arctan\left(-\frac{\omega}{10}\right) - \arctan \omega \\ &= -\arctan\left(\frac{\omega}{10}\right) - \arctan \omega \end{aligned}$$

A Figura 1.2 apresenta os traçados, assintóticos e reais, da resposta em frequência do sistema de fase não mínima.

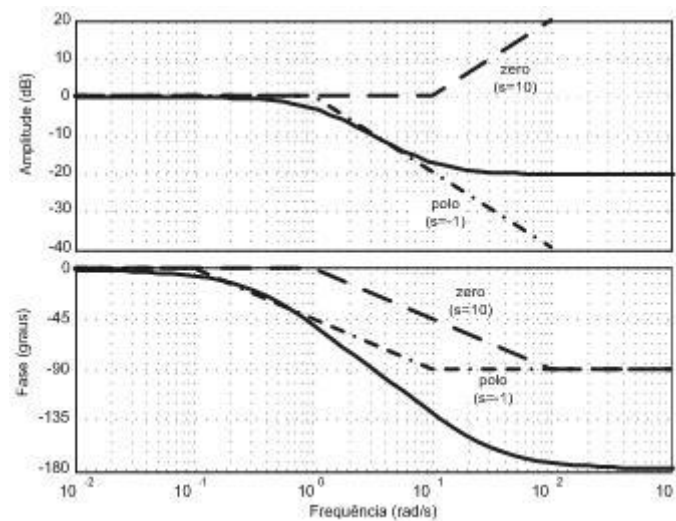


Figura 1. 2. - Traçado de Bode do sistema de fase não mínima do problema 1.2

Observe que no que diz respeito à fase, o zero no semiplano complexo direito comporta-se como um pólo no semiplano esquerdo. O zero no semiplano complexo direito provoca uma variação de fase de $-\pi/2$ rad.

PROBLEMA 1.3

Considere um SLIT representado pelo diagrama de blocos da Figura 1.3:

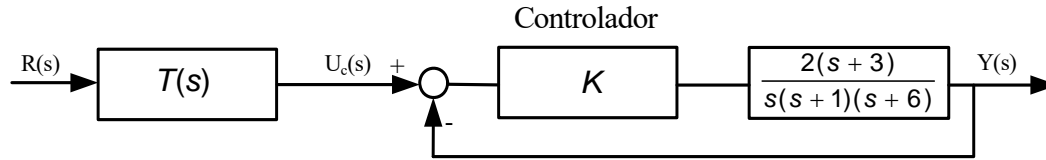


Figura 1. 3. - SLIT contínuo sob controlo proporcional

- Para $T(s) = 1$, determine a função de transferência do sistema em malha fechada;
- Nas condições da alínea anterior e considerando um ganho proporcional $K = 5$, determine a resposta do sistema em malha fechada para uma referência escalão unitário. Sabe-se com a ajuda do MATLAB que

```
>> den_cl=[1 7 16 30];
>> raizes = roots(den_cl)
raizes = -1.0000 + 2.2361i
          -1.0000 - 2.2361i
          -5.0000
```

- Repita a alínea anterior considerando $T(s) = 3/(s + 3)$.

RESOLUÇÃO

- A função de transferência do sistema em malha fechada é

$$H_{CL}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} \quad (1.8)$$

Para $T(s) = 1$ e sendo

$$G(s) = \frac{2(s+3)}{s(s+1)(s+6)} = \frac{2s+6}{s^3 + 7s^2 + 6s}$$

Resulta

$$H_{CL}(s) = \frac{2K(s+3)}{s^3 + 7s^2 + (6+2K)s + 6K} \quad (1.9)$$

Observe-se que o sistema em malha fechada mantém o zero, em $s = -3$, do sistema de malha aberta.

b) Para um controlador proporcional com ganho $K = 5$, a resposta do sistema a uma referência escalão unitário pode calcular-se recorrendo à transformada de Laplace

$$Y(s) = H_{CL}(s) \big|_{K=5} R(s)$$

Usando (1.9), com $K = 5$, e sabendo que $R(s) = L\{u_s(t)\} = \frac{1}{s}$, obtém-se

$$Y(s) = \frac{10(s+3)}{(s^3 + 7s^2 + 16s + 30)} \frac{1}{s}$$

Do enunciado sabemos que

$$(s^3 + 7s^2 + 16s + 30) = (s+5)(s-p_1)(s-p_1^*)$$

com $p_1 = -1 + j2.2361 = -1 + j\sqrt{5}$, pelo que

$$Y(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+5)(s^2 + 2s + 6)}$$

Na Figura 1.4 apresenta-se o lugar das raízes do sistema de controlo, obtido usando o código MATLAB da Figura 1.6, com indicação de um dos pólos de malha fechada para o ganho proporcional $K=5$.

O sistema é estável com um par de pólos complexos conjugados dominantes, com $\omega_d = 2.24$ rad/s, pelo que a resposta ao escalão deve ter uma componente oscilatória com frequência 2.24 rad/s.

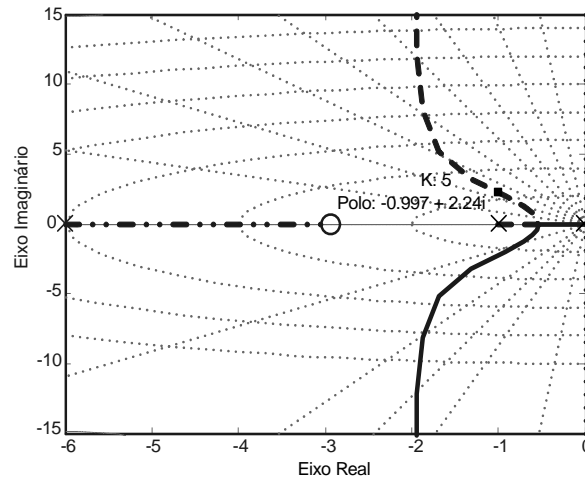


Figura 1. 4. - Lugar das raízes do sistema de controlo.

Para se obter $y(t)$, expande-se $Y(s)$ em fracções parciais simples, por exemplo na forma

$$Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+5} + \frac{cs+d}{s^2+2s+6} \quad (1.10)$$

em que

$$a = sY(s)|_{s=0} = 1 \quad \text{e} \quad b = (s+5)Y(s)|_{s=-5} = 0.1905$$

e para o cálculo de c e d escolhe-se, por exemplo, o pólo $s = -1 + j\sqrt{5}$ entre o par de complexos conjugados, e resolve-se a equação

$$cs + d|_{s=-1+j\sqrt{5}} = \frac{10(s+3)}{s(s+5)}|_{s=-1+j\sqrt{5}}$$

Desenvolvendo, vem

$$(-c + d) + j\sqrt{5}c = -0.2381 - j2.662$$

e facilmente se chega ao resultado

$$c = -1.1905 \quad \text{e} \quad d = -1.4286$$

Substituindo em (1.10) os valores de a , b , c e d , obtém-se

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{0.1905}{s+5} - \frac{1.1905s+1.4286}{s^2+2s+6}$$

de onde resulta, usando o par de transformadas de Laplace (33) da Tabela A.2 do Apêndice A:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 + 0.1905e^{-5t} - 1.1953e^{-t} \cos(\sqrt{5}t - 0.0892), & t \geq 0 \end{cases}$$

com a fase expressa em radianos.

Uma expressão alternativa para $y(t)$ poderia ser a seguinte, obtida por aplicação do par de transformadas de Laplace (32) da Tabela A.2 do Apêndice A:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 + 0.1905e^{-5t} - 1.1905e^{-t} \cos(\sqrt{5}t) - 0.10648e^{-t} \sin(\sqrt{5}t), & t \geq 0 \end{cases}$$

Podemos efectuar um simples teste e confirmar que ambas as expressões dão os mesmos resultados para, por exemplo, os seguintes dois instantes de tempo:

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 1.24$$

Este resultado também vem confirmado na Figura 1.5 que mostra a resposta do sistema para uma referência escalão, obtida usando o código MATLAB da Figura 1.6.

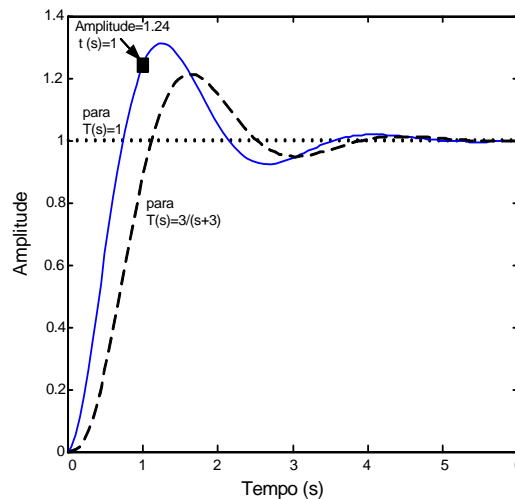


Figura 1. 5. - Respostas ao escalão para os diferentes blocos $T(s)$, com $K=5$.

c) O bloco $T(s) = 3/(s+3)$ cancela o zero do sistema contínuo sob controlo, passando a resposta ao escalão, na transformada de Laplace, a ser

$$Y(s) = \frac{30}{s(s+5)(s^2+2s+6)}$$

com expansão em fracções parciais

$$Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+5} + \frac{cs+d}{s^2+2s+6}$$

em que

$$a = sY(s)|_{s=0} = 1$$

$$b = (s+5)Y(s)|_{s=-5} = -0.28571$$

$$cs+d|_{s=-1+j\sqrt{5}} = \frac{30}{s(s+5)}|_{s=-1+j\sqrt{5}} \Rightarrow \begin{cases} c = -0.7143 \\ d = -2.8571 \end{cases}$$

Finalmente, obtém-se a resposta ao escalão unitário

$$y(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 - 0.28571e^{-5t} - 0.7143e^{-t} \cos\sqrt{5}t - 0.9583e^{-t} \sin\sqrt{5}t & , t \geq 0 \end{cases}$$

Na Figura 1.5 representam-se, em sobreposição, as respostas do sistema em malha fechada, para uma entrada de referência escalão unitário, para as duas funções de transferência, do bloco de avanço $T(s)$, consideradas nas alíneas b) e c). O código MATLAB da Figura 1.6 permite obter os resultados apresentados nas Figuras 1.4 e 1.5.

% Código MATLAB, exercício 1.3

```
clear, clc
num=[2 6]; den=[1 7 6 0];
K=5; % ganho proporcional
disp('Função de transferência G:');
G=tf(num,den) % FT do processo
disp('Função de transferência Gzpk:');
G_zpk=zpk(G)
rlocus(G); % Lugar das raízes
pause
disp('Função de transferência H_r:');
H_r=feedback(K*G,1) % FT malha fechada
pause
step(H_r); % Resposta ao escalão
pause
numT=[3]; denT=[1 3];
```

Função de transferência G:

```
Transfer function:
      2 s + 6
-----
s^3 + 7 s^2 + 6 s
```

Função de transferência Gzpk:

```
Zero/pole/gain:
      2 (s+3)
-----
s (s+6) (s+1)
```

Função de transferência H_r:

```
Transfer function:
```

<pre> T=tf(numT,denT); disp('Função de transferência TH_r:'); TH_r=series(T,H_r) % FT do sistema em cascata disp('Função de transferência H_s:'); H_s=minreal(TH_r) % Cancela pólos e zeros iguais step(H_r,H_s) % Resposta ao escalão pause % Visualização das respostas ao escalão de % H_r e H_s usando a função 'plot' do MATLAB [y1,t1]=step(H_r); [y2,t2]=step(H_s); plot(t1,y1,t2,y2,t1,1) xlabel('Tempo (s)'); ylabel('Amplitude') </pre>	<pre> 10 s + 30 ----- s^3 + 7 s^2 + 16 s + 30 Função de transferência TH_r: Transfer function: 30 s + 90 ----- s^4 + 10 s^3 + 37 s^2 + 78 s + 90 Função de transferência H_s: Transfer function: 30 ----- s^3 + 7 s^2 + 16 s + 30 </pre>
--	--

Figura 1. 6. - Código de MATLAB que permite a análise do sistema de controlo.

PROBLEMA 1.4

Considerando o sistema $G(s) = 1/(s^3 + 10s^2 + 29s)$, sob controlo proporcional com ganho K e retroacção unitária negativa, faça um esboço pormenorizado do Lugar das Raízes (LR) do sistema em malha fechada.

RESOLUÇÃO

A função de transferência do sistema em malha aberta é

$$KG(s) = \frac{K}{s(s^2 + 10s + 29)}$$

O sistema em malha aberta tem 3 pólos ($n = 3$) e nenhum zero ($m=0$):

$$s_0 = 0, \quad s_1 = -5 + j2, \quad s_2 = -5 - j2$$

Passo 1: Equação característica

$$1 + K \frac{1}{s(s^2 + 10s + 29)} = 0$$

$$s^3 + 10s^2 + 29s + K = 0 \tag{1.11}$$

Passo 2: Desenhar os pólos e zeros do sistema em malha aberta no plano complexo

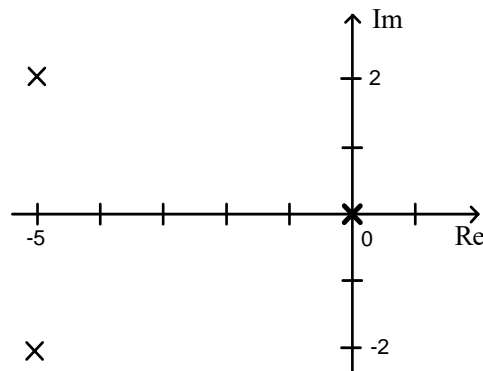


Figura 1. 7. - Pólos e zeros do sistema em malha aberta. Os Ramos do LR partem dos pólos e terminam nos zeros do sistema em malha aberta

Passo 3: Número de ramos separados = 3

Passo 4: Pertencem ao LR os pontos no eixo real $\in]-\infty, 0]$

Passo 5: Tendem para infinito $n - m = 3$ ramos

Passo 6: Determinação das assíntotas:

a) Número de assíntotas: $n_a = n - m = 3$

b) Centro das assíntotas:

$$\sigma_a = \frac{\sum p - \sum z}{n - m} = -\frac{10}{3} = -3.33$$

c) Ângulos das assíntotas (ângulos que as assíntotas fazem com o eixo real)

$$\Phi_a = \frac{2q+1}{n-m} \cdot \pi, \quad q = 0, 1, 2, \dots, (n_p - n_z - 1)$$

$$\Phi_{a1} = \frac{\pi}{3}, \Phi_{a2} = \pi, \Phi_{a3} = \frac{5}{3}\pi$$

Passo 7: Cálculo dos pontos de confluência/dispersão no eixo real:

$$1 + KG(s) = 0 \Leftrightarrow K = -\frac{1}{G(s)} = -(s^3 + 10s^2 + 29s)$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \Leftrightarrow 3s^2 + 20s + 29 = 0$$

$$s_1 = -2,132 \quad \text{e} \quad s_2 = -4,535$$

Concluimos que neste caso existem dois pontos de confluência/dispersão:

$$s_1 = -2,132 \quad \text{e} \quad s_2 = -4,535$$

Passo 8: Ponto crítico

Da equação característica (1.11) compõe-se a matriz de Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 29 \\ s^2 & 10 & K \\ s^1 & a & 0 \\ s^0 & b & \end{array}$$

com

$$\begin{cases} a = \frac{290 - K}{10} \\ b = \frac{K}{a} = K \end{cases}$$

de onde se conclui que o sistema de controlo em malha fechada é estável para

$$\begin{cases} a \geq 0 \Rightarrow 290 - K \geq 0 \\ b \geq 0 \Rightarrow K \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < K \leq 290$$

e que o ganho crítico é $K_{crit} = 290$. Para um ganho proporcional $K = 290$ os pólos de malha fechada dominantes estão posicionados no eixo imaginário.

Da matriz de Routh-Hurwitz, substituindo $K = 290$ na linha de s^2 , podemos determinar esses pólos que correspondem aos pontos de intercepção do LR com o eixo imaginário:

$$10s^2 + 290 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j5,39$$

Daqui também se conclui que a frequência de oscilação, com o sistema na margem de estabilidade, é de $\omega = 5,39 \text{ rad/s}$.

Passo 9: Cálculo dos ângulos de partida e de chegada (resolução ao cuidado do leitor).

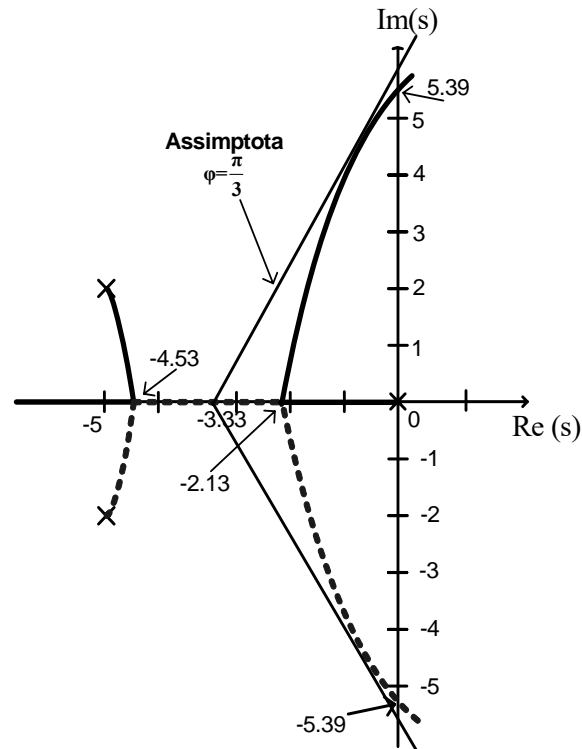


Figura 1. 8. - Lugar das Raízes

Podemos visualizar o LR recorrendo ao seguinte código em MATLAB:

```
num=[1];
den=[1 10 29 0];
sys=tf(num,den);
rlocus(sys)
```

Podemos comprovar que o sistema é marginalmente estável para $K = 290$ e que a frequência de oscilação na margem de estabilidade é $\omega = 5.39 \text{ rad/s}$.

1.4 - PROBLEMAS PROPOSTOS

PROBLEMA 1.5

Considere o sistema de controlo representado na Figura 1.9.

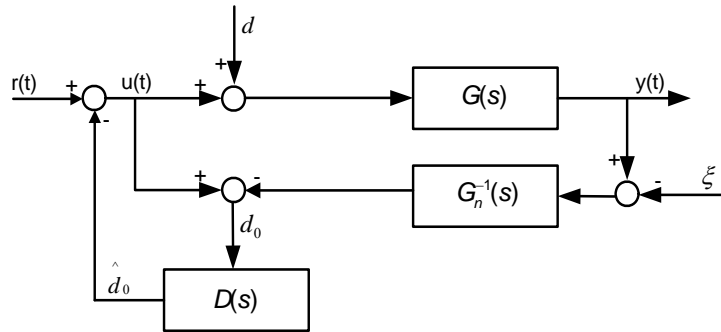


Figura 1. 9. - Exemplo de um observador de perturbação

a) Demonstre que

$$y = \frac{G_n(s)[r - (1 - D(s))d] + D(s)\xi}{1 + (1 - D(s))\Delta_G(s)G_n(s)}$$

em que $\Delta_G(s) = (G^{-1}(s) - G_n^{-1}(s))$, $G(s)$ representa o sistema sob controlo e $G_n(s)$ a sua função de transferência nominal;

b) Discuta o resultado obtido na alínea anterior.

PROBLEMA 1.6

Considere um SLIT contínuo com a função de transferência

$$H(s) = \frac{a}{(s+1)(s+a)}, \text{ com } a > 1.$$

a) Demonstre que a sua resposta ao es calão unitário pode ser expressa na forma

$$y(t) = 1 - a\alpha e^{-t} + \alpha e^{-at}, t \geq 0 \text{ com } \alpha = (a-1)^{-1}.$$

b) Determine a equação (função de a) que dá o instante de tempo em que ocorre o ponto de inflexão (passagem da parte convexa para a parte côncava na curva da resposta ao escalão unitário). Esboce graficamente a resposta para $a = 2$.

c) Para $a = 2$, determine a resposta em regime permanente a uma entrada $u(t) = 10 - \sin(2t - \pi/4)$.

PROBLEMA 1.7

Pretende-se que um dado sistema de controlo satisfaça os seguintes critérios de desempenho: tempo de subida $t_r \leq 0.5$ s, tempo de estabelecimento $t_s \leq 2$ s e percentagem de sobrelevação na gama $1\% < PO < 10\%$.

a) Desenhe a região no plano s na qual devem estar contidos os pólos dominantes do sistema em malha fechada.

b) Determine a função de transferência de um sistema de 2ª ordem que satisfaça aquelas condições. Se for possível faça com que o sistema tenha um factor de amortecimento $\zeta = 1/\sqrt{2}$.

PROBLEMA 1.8

Suponha que desejava controlar com controlo proporcional (ganho proporcional K) o SLIT com função de transferência

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 4s + 25}$$

Considere que o sistema de controlo com entrada de referência $R(s)$, está sujeito a uma perturbação $N(s)$ aditiva ao sinal de comando $U(s)$ gerado pelo bloco controlador. Resolva as seguintes alíneas:

a) Desenhe um diagrama de blocos do sistema em malha fechada com identificação de todos os blocos e sinais. Determine as funções de transferência:

$$H_{CL}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \quad \text{e} \quad H_N(s) = \frac{Y(s)}{N(s)}.$$

- b) Determine a Margem de Ganho e a Margem de Fase para $K=1$.
- c) Faça um estudo da estabilidade do sistema em malha fechada.
- d) Faça um esboço do Lugar das Raízes.
- e) Determine o valor em regime final provocado na saída por uma perturbação constante de valor unitário. Diga como poderia anular este erro provocado pela perturbação.
- f) Considere agora que aplicava o controlador $G_C(s) = (s + \alpha)/s$. Considerando $\alpha > 0$ e $K > 0$, determine se a estabilidade do sistema em malha fechada depende ou não da localização do zero do controlador. Determine a frequência natural, para o sistema na margem de estabilidade, função de α e K .

CAPÍTULO 2

DISCRETIZAÇÃO DE SLITs NA REPRESENTAÇÃO DE ENTRADA - SAÍDA

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo de exercícios é tratado o tema da discretização de SLITs contínuos com modelos na representação de entrada – saída (E/S). Nele são aplicados métodos de conversão de modelos de E/S de SLITs contínuos para os modelos de E/S dos sistemas discretos equivalentes.

Podemos estar em presença de um de dois objectivos distintos:

1. Obter um controlador discreto por aproximação de um controlador contínuo, isto é, um método indirecto de síntese do controlador.

2. Obter o modelo discreto do processo a controlar considerando-o precedido por um zoh, com a finalidade de incluir o efeito da conversão digital – analógica do sinal de comando gerado pelo controlador discreto (sinal discreto) que é convertido em sinal contínuo para actuar no processo contínuo (veja a Figura 1.1 do Capítulo 1).

Neste 2º caso, a síntese do controlador discreto (diz-se incluída nos métodos directos de projecto) será efectuada com base no modelo discreto do processo.

2.2 - REPRESENTAÇÃO DE ENTRADA – SAÍDA DE SLITs DISCRETOS. FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Os SLITs discretos podem ser descritos pela seguinte equação às diferenças:

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \dots + a_1y_{k+1} + a_0y_k = b_m u_{k+m} + b_{m-1}u_{k+m-1} + \dots + b_1u_{k+1} + b_0u_k$$

em que se admite que $n \geq m$ (sistema causal).

No operador avanço toma a forma

$$(q^n + a_{n-1}q^{n-1} + \dots + a_1q + a_0)y_k = (b_m q^m + b_{m-1}q^{m-1} + \dots + b_1q + b_0)u_k$$

que pode ser expressa na forma compacta

$$L(q)y_k = L_A(q)u_k .$$

Tomando a transformada Z para condições iniciais nulas é directo o resultado

$$Y(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \dots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0} U(z) = \frac{L_A(z)}{L(z)} U(z)$$

ou seja

$$Y(z) = H(z)U(z)$$

em que $H(z)$ define a função de transferência do sistema

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{L_A(z)}{L(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \quad (2.1)$$

onde $L(z)$ é o polinómio característico do sistema, sendo as suas raízes, raízes características do sistema e pólos de $H(z)$.

A função de transferência (2.1), tal como sucede para os SLITs contínuos (ver Capítulo 1) pode ser rescrita de modos alternativos. Tem particular interesse a forma factorizada ou forma *zpk* (zeros - pólos - k).

$$H(z) = K \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{(z - \gamma_1)(z - \gamma_2) \dots (z - \gamma_n)}$$

em que as raízes dos polinómios do numerador z_i , $i = 1, \dots, m$, e do denominador γ_i , $i = 1, \dots, n$, representam respectivamente os zeros e os pólos do SLIT discreto.

RESPOSTA IMPULSIONAL

A transformada Z inversa de $H(z)$ é a resposta impulsional do sistema:

$$h(k) = Z^{-1} \{ H(z) \}$$

e

$$H(z) = Z \{ h(k) \} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) z^{-k}.$$

2.3 - RESPOSTA DE FREQUÊNCIA DE SLITs DISCRETOS CAUSAIS

Tal como para os SLITs contínuos, a resposta de frequência do SLIT discreto caracteriza a resposta em regime permanente (também designado por regime estacionário) do sistema a sinais de entrada sinusoidais.

A resposta em regime estacionário de um SLIT contínuo, estável, para uma entrada sinusoidal $u(t) = A \cos(\omega_0 t)$ é:

$$y_{est}(t) = A \cdot |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \phi(j\omega_0)),$$

em que $\phi(j\omega_0) = \arg H(j\omega_0)$.

De modo similar, a resposta em regime estacionário de um SLIT discreto, estável, para um sinal de entrada sinusoidal $u_k = A \cos(\Omega_0 k)$ é

$$y_{est}(k) = A \cdot |H(e^{j\Omega_0})| \cos(\Omega_0 k + \phi(e^{j\Omega_0})).$$

em que $\phi(e^{j\Omega_0}) = \arg H(e^{j\Omega_0})$.

Em resumo, a resposta em regime estacionário de SLIT discreto a um sinal de entrada sinusoidal $A \sin(\Omega_0 k)$, é um sinal sinusoidal com a mesma frequência Ω_0 , mas de amplitude $A \cdot |H(e^{j\Omega_0})|$ e fase $\arg H(e^{j\Omega_0})$.

A função $H(e^{j\Omega})$, que se obtém da função de transferência para $z = e^{j\Omega}$, é a seguinte:

$$H(e^{j\Omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

e representa a resposta de frequência do SLIT discreto.

A resposta em frequência de um SLIT discreto é uma função complexa de variável real Ω , podendo ser representada graficamente através de dois traçados: características de amplitude e de fase. Ou seja, a resposta em frequência é composta por

$$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})| \cdot e^{j\phi(e^{j\Omega})}$$

em que o traçado de $|H(e^{j\Omega})|$ em função de Ω representa a característica de amplitude da resposta em frequência, e o traçado de $\phi(e^{j\Omega}) = \arg(H(e^{j\Omega}))$ em função de Ω representa a característica de fase da resposta em frequência.

EM RESUMO, a resposta em frequência do SLIT discreto (SLIT contínuo) traduz a transformação em amplitude e fase realizada, para cada frequência $\Omega(\omega)$, sobre o sinal de entrada.

NATUREZA PERIÓDICA DA RESPOSTA DE FREQUÊNCIA

Sendo

$$e^{j2\pi m} = 1 \quad \forall m \text{ inteiro}$$

então

$$H(e^{j\Omega}) = H(e^{j(\Omega+2\pi m)}), \quad m \text{ inteiro}$$

pelo que, se conclui que a resposta em frequência é uma função periódica em Ω de período $\Omega = 2\pi$. Por outras palavras, como a resposta em frequência é calculada para valores de $z = e^{j\Omega}$, i.e. pontos da circunferência de raio unitário, para um 2º cálculo ao longo da circunferência ($\Omega \in [2\pi; 4\pi]$) os valores da resposta de frequência repetem-se sendo iguais aos da resposta de frequência para $\Omega \in [0; 2\pi]$; e assim sucessivamente para $\Omega \in [n2\pi; (n+1)2\pi]$, com n inteiro.

2.4 - AMOSTRAGEM DE SINAIS E DE SISTEMAS

RELAÇÃO ENTRE TRANSFORMADAS DE LAPLACE E Z

Na Figura 2.1 representa-se o amostrador ideal que tendo por entrada o sinal $f(t)$ contínuo, coloca à saída a função amostrada $f^*(t) = f(t) \cdot \delta_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kh)\delta(t - kh)$ em que se considera um período de amostragem constante h .

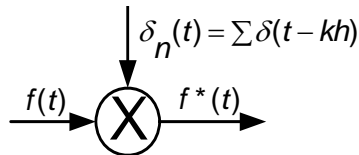


Figura 2. 1. - Amostrador ideal

A transformada de Laplace do sinal amostrado é

$$F^*(s) = L[f^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kh)e^{-khs} \quad (2.2)$$

Fazendo a mudança de variável $s = \frac{1}{h} \ln z \leftrightarrow z = e^{sh}$ obtém-se

$$F^*(s) \Big|_{s=\frac{1}{h} \ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kh) z^{-k} = F_d(z) \quad (2.3)$$

em que $F_d(z)$ é a transformada Z da sequência discreta

$$f_d(k) = f(t) \Big|_{t=kh} = f(kh), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Sendo h constante é usual simplificar-se a notação e usar-se simplesmente $F(z)$ e $f(k)$ em vez de $F_d(z)$ e $f_d(k)$, rescrevendo-se (2.3) e (2.4) respectivamente por

$$F^*(s) \Big|_{s=\frac{1}{h} \ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kh) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = F(z) \quad (2.5)$$

e

$$f(k) = f(t) \Big|_{t=kh}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.6)$$

Com a mudança de variável

$$z = e^{sh} \quad (2.7)$$

passou-se a exprimir a transformada de Laplace da função amostrada $f^*(t)$ pela transformada Z da sequência discreta $f(k)$ (sequência das amostras de $f(t)$ obtidas por amostrador ideal à frequência $f_s = \frac{1}{h}$ Hz).

Da expressão (2.6), aplicando a transformada Z a ambos os membros, obtém-se

$$F(z) = Z \left[f(t) \Big|_{t=kh} \right]$$

ou seja

$$F(z) = Z \left\{ \left[L^{-1} [F(s)] \right] \Big|_{t=kh} \right\} \quad (2.8)$$

Se $F(z)$ e $F(s)$ representarem funções de transferência de SLITs, dizemos que $F(z)$ é a transformada Z do sistema amostrado do SLIT contínuo com transformada de Laplace $F(s)$.

Observe que, se $F(z)$ e $F(s)$ representam funções de transferência de SLITs, então recorrendo a (2.4) vem que

$$h_d(k) = h_c(kh)$$

Esta igualdade mostra que a resposta a impulso do sistema discreto corresponde à amostragem da resposta a impulso do sistema contínuo, com intervalo h .

Chegamos deste modo a um método de discretização em que os valores das respostas a impulso dos SLITs contínuo e discreto são iguais nos pontos de amostragem. Este método de discretização é designado por **método do impulso invariante**. Também o designamos neste texto por **método da transformada Z**.

Convém ainda observar que de (2.5) se conclui que as funções de transferência dos sistemas amostrado e discreto satisfazem

$$H^*(s) = H(z) \Big|_{z=e^{sh}} \quad (2.9)$$

A Tabela A.5 do Apêndice 1, contém um conjunto de pares de funções de transferência de SLITs discretos, $F(z)$, que correspondem à amostragem de SLITs contínuos com função de transferência $F(s)$.

MAPEAMENTO $z = e^{sh}$

Note-se que no processo de amostragem, dá-se a mudança de variável $z = e^{sh}$ que transforma o plano s no plano z , de tal forma, que o eixo imaginário do plano s resulta na circunferência de raio unitário no plano z .

A resposta de frequência do sistema contínuo é calculada ao longo do eixo imaginário, $H(s) \Big|_{s=j\omega} = H(j\omega)$.

No sistema discreto obtido do equivalente contínuo por amostragem a resposta será ao longo da circunferência de raio unitário, i.e. ao longo de $z = e^{sh} \Big|_{s=j\omega}$ que resulta na expressão

$$H(z) \Big|_{z=e^{j\omega h}} = H(e^{j\omega})$$

com

$$\Omega = \omega h \quad (2.10)$$

Sabemos que a resposta em frequência é periódica de período $\Omega = 2\pi$, logo relacionando com a frequência ω , do sinal contínuo amostrado, será periódica de período

$$\Omega = \omega h = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{h} = \omega_s$$

em que ω_s representa a frequência de amostragem (em rad/s).

2.5 - DISCRETIZAÇÃO ZOH

Conforme referido na introdução deste capítulo, frequentemente vamos estar interessados em obter os modelos discretos de processos contínuos precedidos por zoh. Expressando a função de transferência do zoh por $G_{zoh}(s)$, obtém-se de (2.8):

$$G(z) = Z \left\{ \left[L^{-1} [G_{zoh}(s)G(s)] \right] \right\}_{t=kh} \quad (2.11)$$

Sabemos que a função de transferência do zoh é dada pela expressão:

$$G_{zoh}(s) = \frac{1 - e^{-sh}}{s}$$

Substituindo este resultado em (2.11) e simplificando a notação, vem

$$\begin{aligned} G(z) &= Z \left\{ \left[L^{-1} \left[\frac{1 - e^{-sh}}{s} G(s) \right] \right] \right\} \\ \Rightarrow G(z) &= (1 - z^{-1}) Z \left\{ L^{-1} \left(\frac{G(s)}{s} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Designamos este método por método de discretização zoh.

Podemos obter equivalentes discretos pelo método de discretização zoh:

de forma indirecta, usando a tabela A.5 do Apêndice A e aplicar a fórmula (2.12), i.e. em 1º lugar obtém-se o equivalente discreto de $\frac{G(s)}{s}$ e de seguida multiplica-se o resultado por $(1 - z^{-1})$.

de forma directa, usando a Tabela A.6.

2.6 - DISCRETIZAÇÃO: OUTROS MÉTODOS

A Tabela 2.1 resume um conjunto de métodos utilizados na discretização de SLITs contínuos. Partindo do controlador analógico, estes métodos permitem determinar um controlador discreto com características temporais e de frequência aproximadas.

Método	Equação de Mapeamento/Sistema Discreto
Aproximação rectangular para trás	$s = \frac{1 - z^{-1}}{h}$
Aproximação rectangular para a frente	$s = \frac{1 - z^{-1}}{hz^{-1}}$
Aproximação trapezoidal, ou Transformação bilinear ou de Tustin	$s = \frac{2}{h} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$
Transformação bilinear com pré-distorção da frequência	$s = \frac{2}{h} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$ $(\omega_A = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega_D T}{2})$
Método do impulso invariante ou Método da transformada Z	$G(z) = Z[L^{-1}(G(s))]$
Invariância na resposta a escalão	$G(z) = (1 - z^{-1})Z\left[L^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right]$
Mapeamento de pólos e zeros (MPZ)	$s = -a \Rightarrow z = e^{-ah}$ pólo ou zero no infinito mapeado em $z = -1$

Figura 2.2. - Métodos de discretização

Note-se que o método da invariância na resposta a escalão usa a mesma expressão matemática que a discretização zoh para obter o equivalente discreto. Mas convém notar que, se existir um zoh a preceder o sistema contínuo, obtemos um modelo discreto “exacto”, caso contrário, se é assumido que o sinal à entrada do sistema contínuo é constante durante o intervalo de amostragem, mas não o é na verdade, estamos a obter um modelo discreto aproximado.

2.7 - PROBLEMAS RESOLVIDOS

PROBLEMA 2.1

Determine o equivalente discreto, pelo **método da Transformada Z**, para um período de amostragem $h = 0.2$ s, do sistema contínuo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

RESOLUÇÃO

O equivalente discreto $F(z)$ obtido pelo método da Transformada Z (2.8), consiste na transformada Z da sequência que deriva da amostragem do sinal $f(t)$ cuja transformada de Laplace é $F(s)$, i.e.

$$F(z) = Z \left[L^{-1}(F(s)) = f(t) \right] \Big|_{t=kh} = Z[f(kh)]$$

Por exemplo, para $F(s) = 1/(s+a)$:

$$\begin{aligned} F(z) &= Z \left[L^{-1}(F(s)) = e^{-at} u_s(t) \right] \Big|_{t=kh} = Z[e^{-akh} u_s(kh)] \\ &= \frac{1}{1 - e^{-ah} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-ah}} \end{aligned}$$

Com algum abuso de linguagem, dizemos que $F(z)$ é a transformada Z de $F(s)$, ou de outra forma que $F(z)$ é o equivalente discreto de $F(s)$ obtido pelo **método da Transformada Z**.

A Tabela A.5 (ver Apêndice A) apresenta pares de transformadas de Laplace e transformadas Z de funções simples. Usando a equivalência, contida na Tabela A.5,

$$\frac{a}{s(s+a)} \leftrightarrow \frac{z(1 - e^{-ah})}{(z-1)(z - e^{-ah})}$$

Concluimos que o equivalente discreto para $h = 0.2$ é:

$$G(z) = \frac{z(1 - e^{-0.2})}{(z-1)(z - e^{-0.2})} = \frac{0.18127z}{(z-1)(z - 0.81873)}$$

Os pólos, como seria de esperar, são mapeados segundo a transformação $z = e^{sh}$. O período de amostragem não afecta o pólo integrador, mas o outro pólo real aproxima-se de $z=1$ quando $h \rightarrow 0$ e caso contrário diminui de valor, deslocando-se para o centro do plano z com h a aumentar; para $h \rightarrow \infty$ o pólo tende para $z=0$. Observe que o sistema discreto tem um zero em $z=0$.

Na Figura 2.3 apresenta-se código MATLAB que ilustra a discretização pelo método da transformada Z e método ZOH (problema 2.2). Este método, também designado por método do impulso invariante, preserva a resposta a impulso nos instantes de amostragem.

<pre>% Código MATLAB, exercícios 2.1 e 2.2 clc,clear h=0.2; num=[1]; den=[1 1 0]; hc=tf(num,den); disp('FTD pelo método da transformada Z:'); hd = c2d(hc,h,'imp'); hd1=minreal(hd); hd_zpk=zpk(hd1) disp('FTD pelo método zoh:'); hd = c2d(hc,h,'zoh'); hd1=minreal(hd); hd_zpk=zpk(hd1)</pre>	<pre>FTD pelo método da transformada Z: Zero/pole/gain: 0.18127 z ----- (z-1) (z-0.8187) Sampling time: 0.2 FTD pelo método zoh: Zero/pole/gain: 0.018731 (z+0.9355) ----- (z-1) (z-0.8187) Sampling time: 0.2</pre>
--	---

Figura 2.3. - Código MATLAB que ilustra a discretização pelos métodos ZOH e transformada Z.

PROBLEMA 2.2

Considere agora que tinha o sistema $G(s)$, do problema 2.1, precedido por um zoh.

- Determine o equivalente discreto do conjunto, para $h = 0.2$ s.
- Faça um estudo sobre o posicionamento do zero em função de h .

RESOLUÇÃO

- Usando a equivalência da Tabela A.6

$$\frac{a}{s(s+a)} \leftrightarrow H(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} = \frac{b_1 z + b_2}{(z - e^{s_1 h})(z - e^{s_2 h})}$$

com

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{a}(ah - 1 + e^{-ah}) & a_1 &= -(1 + e^{-ah}) & s_1 &= 0 \\ b_2 &= \frac{1}{a}(1 - e^{-ah} - ahe^{-ah}) & a_2 &= e^{-ah} & s_2 &= -1 \end{aligned}$$

e substituindo os valores de $a=1$ e $h=0.2$, chega-se facilmente à função de transferência discreta

$$H(z) = \frac{0.01873z + 0.01752}{z^2 - 1.81873z + 0.81873} = \frac{0.01873(z + 0.9356)}{(z - 1)(z - 0.8187)}$$

A introdução do zoh não afecta a localização dos pólos do sistema discreto. No entanto é alterada a posição do zero que passa a ser em $z = -0.9356$. Na Figura 2.1, lista-se código MATLAB que permite obter o modelo discreto por discretização zoh.

b) O sistema discreto tem zero em

$$z(h) = -\frac{b_2}{b_1}$$

sendo

$$b_2 = (1 - e^{-h} - he^{-h}) = (1 - e^{-h}(h + 1))$$

$$b_1 = (h - 1 + e^{-h}) \Rightarrow b_1 = -(1 - e^{-h} - h)$$

vem

$$z(h) = \frac{1 - e^{-h}(h + 1)}{1 - e^{-h} - h}.$$

A Figura 2.4 mostra de forma gráfica, o posicionamento do zero em função do período de amostragem h.

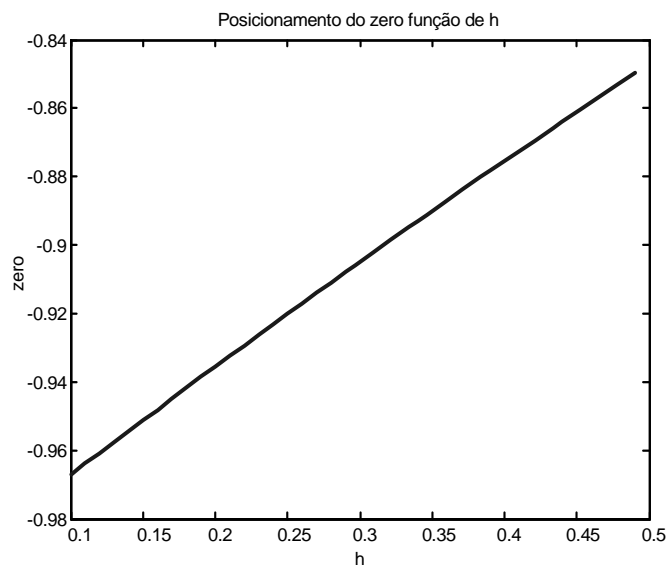


Figura 2. 4. - Posicionamento do zero em função de h

PROBLEMA 2.3

Considere o sistema de controlo representado na Figura 2.5, e resolva as seguintes questões:

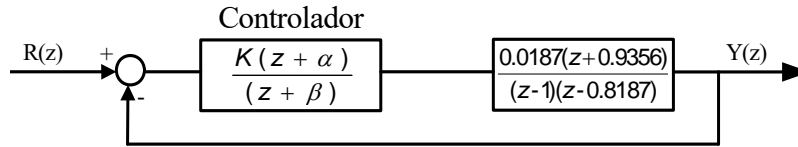


Figura 2. 5. - Sistema de controlo discreto

- A Figura 2.6 apresenta o mapa de pólos e zeros do sistema em malha aberta em tempo discreto. O gráfico apresenta parcialmente o projecto do controlador de modo a que o sistema em malha fechada tenha um par de pólos complexos dominantes $z_{1,2} = 0.493 \pm j0.4493$ (ponto P e ponto simétrico relativamente ao eixo real). Determine os valores de α , β e K do controlador discreto.
- Determine a função de transferência do sistema em malha fechada. Escreva a equação de transferência sinusoidal em tempo discreto (resposta em frequência do sistema discreto).
- Determine os valores do coeficiente de amortecimento e frequência natural não amortecida do equivalente contínuo do sistema discreto em malha fechada, para um período de amostragem $h = 0.2$ s.
- Determine a resposta do sistema em regime permanente para um escalão unitário.
- Determine a resposta ao escalão unitário.

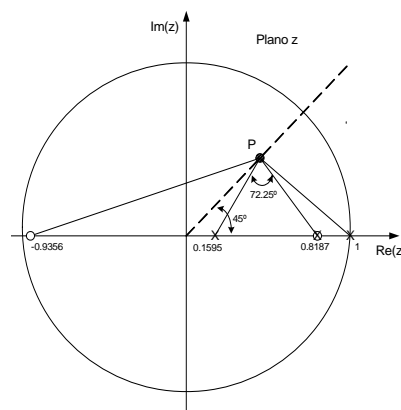


Figura 2. 6. - Mapa de pólos e zeros do sistema em malha aberta

RESOLUÇÃO

a) A função de transferência em malha aberta do sistema de controlo da Figura 2.4 é definida por

$$D(z)G(z) = \frac{K(z + \alpha)}{(z + \beta)} \frac{0.0187(z + 0.9356)}{(z - 1)(z - 0.8187)}$$

em que $D(z)$ e $G(z)$ são as funções de transferência, respectivamente, do controlador e do processo sob controlo. Analisando o mapa de pólos e zeros da Figura 2.5 facilmente se conclui que

$$\begin{cases} \alpha = -0.8187 \\ \beta = -0.1595 \end{cases}$$

Note-se que o zero do controlador cancela um pólo do processo. Resta-nos calcular o ganho K . A equação característica do sistema de controlo é

$$1 + D(z)G(z) = 1 + \frac{0.0187K(z + 0.9356)}{(z - 1)(z - 0.1595)} = 0$$

que após algum desenvolvimento algébrico resulta na equação:

$$z^2 + (0.0187K - 1.1595)z + (0.0174957K + 0.1595) = 0 \quad (2.13)$$

Por outro lado, sabemos que para o valor do ganho K que procuramos, o sistema em malha fechada tem um par de pólos complexos $z_{1,2} = -0.4493 \pm j0.4493$, pelo que a equação característica nessas condições será:

$$\begin{aligned} ((z - 0.4493) - j0.4493)((z - 0.4493) + j0.4493) &= 0 \\ \Rightarrow (z - 0.4493)^2 + (0.4493)^2 &= 0 \\ \Rightarrow z^2 - 0.8986z + 0.403741 &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Igualando os coeficientes de iguais potências de z das equações (2.13) e (2.14) obtêm-se duas equações para uma só incógnita:

$$1) \quad 0.01749K + 0.1595 = 0.403741$$

$$2) \quad 0.0187K - 1.1595 = -0.8986$$

Dando ambas um resultado aproximadamente igual (não sendo totalmente iguais devido a erros de aproximação numérica que se vão propagando ao longo dos cálculos):

$$K \approx 13.95$$

b) Da Figura 2.4, e usando o valor de $K \approx 13.95$, retira-se a função de transferência do sistema em malha fechada,

$$\begin{aligned} H_{CL}(z) &= \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} \\ &= \frac{0.261(z + 0.9356)}{z^2 - 0.8986z + 0.40374} \end{aligned}$$

logo, a resposta em frequência é expressa pela equação

$$\begin{aligned} H(e^{j\Omega}) &= H(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} \\ &= \frac{0.261(e^{j\Omega} + 0.9356)}{e^{j2\Omega} - 0.8986e^{j\Omega} + 0.40374} \end{aligned} \quad (2.15)$$

c) Rescrevendo os pólos de malha fechada, $z_{1,2} = 0.4493 \pm j0.4493$, na fórmula de Euler obtém-se

$$z_{1,2} = re^{j\pm\theta}$$

com $r = 0.6354$ e $\theta = 0.7854$ rad. Como estamos a tratar de sistemas de 2ª ordem, o sistema contínuo equivalente, para $h = 0.2$ s, tem equação característica a que corresponde um coeficiente de amortecimento

$$\zeta = \frac{-\ln r}{\sqrt{(\ln r)^2 + \theta^2}} = 0.5$$

e frequência natural não amortecida

$$\omega_n = \frac{\sqrt{(\ln r)^2 + \theta^2}}{h} = 4.535 \text{ rad / s}$$

Notemos que $\omega_n \cdot h = 0.9$, o que significa que o período de amostragem envolvido na discretização está fora da gama de valores apropriados para os quais se deve verificar a regra prática:

$$\omega_n \cdot h \approx 0.2 \sim 0.6$$

d) A resposta em regime permanente para uma entrada em escalão unitário pode calcular-se recorrendo ao teorema do valor final da transformada Z. Sabendo-se que

$$Y(z) = H_{CL}(z)R(z)$$

em que

$$R(z) = \frac{z}{z-1}$$

pelo teorema do valor final

$$\begin{aligned} y(k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} H_{CL}(z)R(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} H_{CL}(z) \\ &= \frac{0.261 \times 1.9356}{1 - 0.8986 + 0.40374} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Como seria de esperar, o erro em regime final para uma entrada em escalão é nulo, já que o sistema de malha aberta é do tipo 1.

OBSERVAÇÃO: Chegamos ao mesmo resultado, usando o conhecimento da resposta em frequência (2.15), já que em regime permanente o escalão é um sinal constante de frequência nula, $\Omega = 0$. Então a resposta em regime permanente a um sinal discreto de amplitude unitária é

$$\begin{aligned} y_{ss} &= 1 \cdot H(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=0} \\ &= \frac{0.261(1 + 0.9356)}{1 - 0.8986 + 0.40374} \\ &= 1 \end{aligned}$$

e) A resposta ao escalão unitário determina-se aplicando a transformada inversa de Z

$$y(k) \Big|_{\text{degrau}} = Z^{-1}(H_{CL}(z) \cdot (1 - z^{-1})) \quad (2.16)$$

em que $H_{CL}(z)$ é a função de transferência do sistema de controlo da Figura 2.4. A curva da resposta a escalão, calculada no MATLAB vem ilustrada na Figura 2.7. Deixa-se ao cuidado do leitor a obtenção da função matemática (2.16).

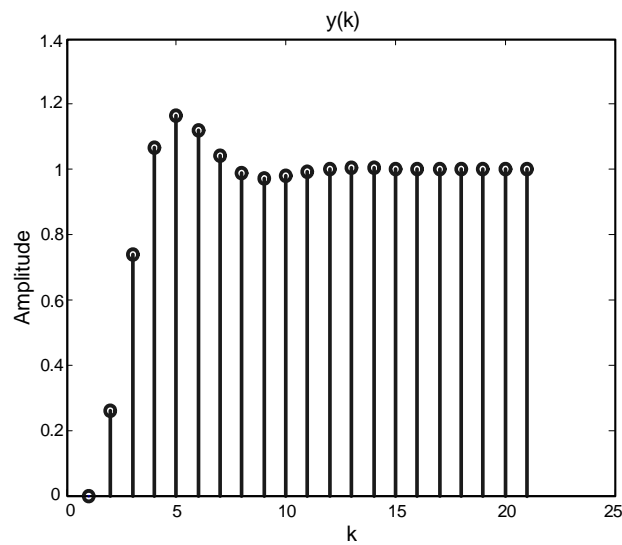


Figura 2. 7. - Resposta ao escalão unitário

PROBLEMA 2.4

Considere o sistema contínuo

$$G(s) = \frac{a}{s+a} e^{-\tau s}, \quad a > 0 \quad e \quad \tau > 0$$

a) Determine o equivalente discreto ao sistema $G(s)$ precedido por zoh , para um período de amostragem genérico h , $h > 0$.

b) Determine os casos particulares:

i)- Sistema sem atraso de transporte, $\tau = 0$

ii)- Sistema com um atraso de transporte igual a um número inteiro de intervalos de amostragem, $\tau = 2h$

iii)- $a = 1$, $h = 0.2$ e $\tau = 0.3$

iv)- $a = 1$, $h = 0.2$ e $\tau = 0.25$

RESOLUÇÃO

É conveniente definir o atraso de transporte de modo a colocar em evidência a parte inteira de períodos de amostragem e a parte fraccionária, inferior a um único período de amostragem. Por exemplo, pode usar-se a seguinte expressão:

$$\tau = (d-1)h + \tau', \text{ com } \begin{cases} 0 < \tau' \leq h \\ d \geq 0 \text{ e inteiro} \end{cases} \quad (2.17)$$

Sendo d um inteiro que representa o número de “atrasos puros” e τ' representa a parte fraccionária do atraso de transporte.

Por conveniência vamos rescrever (2.17) na forma

$$\begin{aligned} \tau &= (d-1)h + \tau' \\ &= dh - h + \tau' \\ &= dh - (h - \tau') \\ &= dh - \beta \end{aligned} \quad (2.18)$$

em que $\beta = h - \tau'$

O equivalente discreto é dado por

$$G(z) = \frac{(z-1)}{z} Z \left[L^{-1} \frac{G(s)}{s} \right] \quad (2.19)$$

com

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{e^{-(dh-\beta)s} a}{s(s+a)} = \frac{e^{-dhs} e^{\beta s} a}{s(s+a)}.$$

Ou seja, e tendo em atenção que $z = e^{sh}$:

$$G(z) = \frac{(z-1)z^{-d}}{z} Z \left[L^{-1} \frac{e^{\beta s} a}{s(s+a)} \right] \quad (2.20)$$

Vamos efectuar a resolução de (2.20) passo a passo

$$1) \quad L^{-1} \frac{G(s)}{s} = L^{-1} \left[\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right) e^{\beta s} \right] = u_s(t+\beta) - e^{-a(t+\beta)} u_s(t+\beta)$$

Discretizando, $t = kh$, e como $0 < \beta < h$ (observe a Figura 2.7) resulta a sequência que denotamos por $x(kh)$:

$$x(kh) = u_s(kh) - e^{-akh} e^{-a\beta} u_s(kh)$$

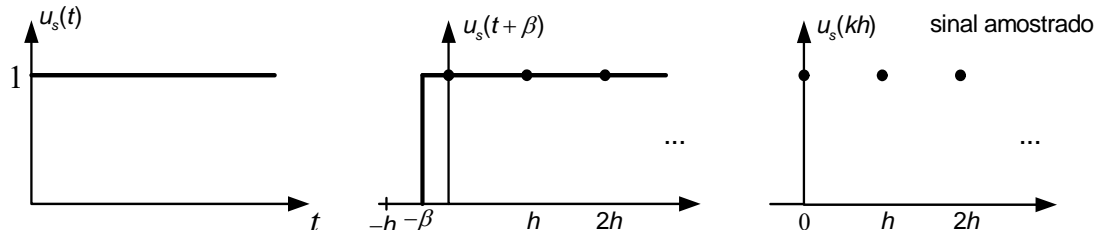


Figura 2. 8. - Discretizando $u_s(t + \beta)$, com $t = kh$, obtém-se $u_s(kh)$ dado $0 < \beta < h$

2)

$$\begin{aligned} Z \left[L^{-1} \frac{G(s)}{s} \right] &= Z[x(kh)] = \frac{z}{z-1} - \frac{ze^{-a\beta}}{z-e^{-ah}} \\ &= \frac{z(z-e^{-ah}-ze^{-a\beta}+e^{-a\beta})}{(z-1)(z-e^{-ah})} \end{aligned} \quad (2.21)$$

3) Finalmente de (2.20) e (2.21)

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{(z-1)}{z^d} \frac{(z-e^{-ah}-ze^{-a\beta}+e^{-a\beta})}{(z-1)(z-e^{-ah})} \\ &= \frac{z(1-e^{-a\beta})+(e^{-a\beta}-e^{-ah})}{z^d(z-e^{-ah})} \end{aligned}$$

e, assim, obtém-se o resultado:

$$\frac{a}{s+a} e^{-\tau s} \leftrightarrow \frac{z(1-e^{-a\beta})+(e^{-a\beta}-e^{-ah})}{z^d(z-e^{-ah})} \quad (2.22)$$

com $\tau = dh - \beta$, $\tau \geq 0$, $d \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 0$.

i) Com $\tau = 0$, por definição d e β são nulos. Por conseguinte (2.22) dá o resultado

$$G(z)|_{\tau=0} = \frac{1-e^{-ah}}{z-e^{-ah}}$$

que está de acordo com o dado da Tabela A.6.

ii) Para $\tau = 2$, podemos ter duas situações que dão o mesmo resultado:

$$1) d = 2 \text{ e } \beta = 0$$

$$2) d = 3 \text{ e } \beta = h$$

Fazendo as substituições em (2.22), obtém-se o mesmo resultado para ambos os casos:

$$1) G(z) = \frac{1 - e^{-ah}}{z^2(z - e^{-ah})}$$

$$2) G(z) = \frac{z(1 - e^{-ah})}{z^3(z - e^{-ah})} = \frac{1 - e^{-ah}}{z^2(z - e^{-ah})}$$

Observe que a existência de um atraso de transporte igual a dois intervalos de amostragem conduz à ocorrência de dois pólos em $z = 0$.

iii) Atendendo a que $a = 1$, para $\tau = 0.3$ resulta $d = 2$ e $\beta = 0.1$. De (2.22) obtém-se o sistema discreto equivalente

$$G(z) = \frac{0.0952z + 0.0861}{z^2(z - 0.81873)} = \frac{0.0952(z + 0.9044)}{z^2(z - 0.81873)}$$

O atraso de transporte é responsável pela ocorrência de dois pólos em $z = 0$. Devido à existência da parte fraccionária no atraso de transporte o equivalente discreto é caracterizado por conter um zero em $z = -0.9044$.

Observe que o ganho estático do sistema discreto, tal como acontece para o sistema contínuo (ver enunciado) é unitário,

$$G(z)|_{z=1} = \frac{0.1813}{0.1813} = 1$$

iv) Relativamente à alínea anterior tudo se mantém inalterado à excepção de uma ligeira diminuição no atraso de transporte, $d = 2$ e $\beta = 0,05$.

Usando (2.22) facilmente se obtém

$$G(z) = \frac{0.04877z + 0.1325}{z^2(z - 0.81873)} = \frac{0.04877(z + 2.7168)}{z^2(z - 0.81873)}$$

cujo ganho estático se mantém unitário.

Concluimos que apenas se altera o posicionamento do zero do sistema discreto. A uma diminuição do atraso de transporte (mas mantendo-se superior a 2 intervalos de amostragem) verificamos que corresponde um deslocamento centrípeto relativamente ao centro do plano z , passando a localizar-se em $z = -2.7168$.

PROBLEMA 2.5

Considere o sistema de controlo da Figura 2.9 O algoritmo do controlador é dado pela seguinte equação às diferenças:

$$u(k) = u(k-1) - K_p(y(k) - y(k-1)) + K_I(e(k) + e(k-1)) + K_D(2y(k-1) - y(k-2) - y(k))$$

em que $e(k)$ é o sinal de erro $e(k) = r(k) - y(k)$.

Determine:

- A transformada Z da saída do controlador em função da saída $Y(z)$ e do erro $E(z)$, i.e. $U(z) = f(E(z), Y(z))$. Obtenha as funções de transferência $G_I(z)$, $G_D(z)$ e $G_P(z)$.
- Determine o sinal $u_1(k)$ para um escalão como sinal hipotético de erro ($e(k)$).
- Para $K_p = 0.1$, $K_I = 0.2$ e $K_D = 0.3$, as funções de transferência em malha aberta e em malha fechada considerando $G(z) = 1/(z - 0.3)$.

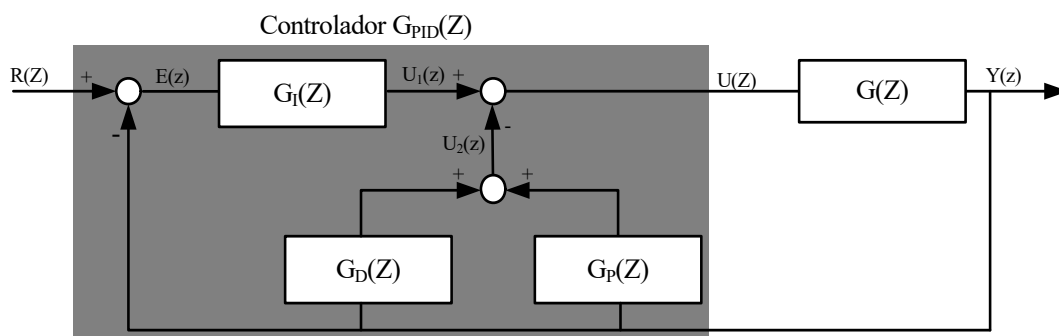


Figura 2. 9. - Sistema de controlo discreto

RESOLUÇÃO

a) Aplicando a transformada Z à equação às diferenças,

$$\begin{aligned}
 U(z) &= z^{-1}U(z) - K_p(1 - z^{-1})Y(z) + K_I(1 + z^{-1})E(z) - K_D(1 - 2z^{-1} + z^{-2})Y(z) \\
 \Rightarrow (1 - z^{-1})U(z) &= -K_p(1 - z^{-1})Y(z) + K_I(1 + z^{-1})E(z) - K_D(1 - z^{-1})^2Y(z) \\
 \Rightarrow U(z) &= -K_pY(z) + K_I \left[\frac{z+1}{z-1} \right] E(z) - K_D \left[\frac{z-1}{z} \right] Y(z)
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

que representa um controlador PID discreto na forma vulgarmente designada por "controlador PID na forma de velocidade".

Por observação de (2.23) e Figura 2.8, é directo concluir que

$$\begin{aligned}
 G_p(z) &= K_p \\
 G_I(z) &= K_I \left[\frac{z+1}{z-1} \right] \\
 G_D(z) &= K_D \left[\frac{z-1}{z} \right]
 \end{aligned}$$

b) Do diagrama de blocos vê-se que

$$\begin{aligned}
 U_1(z) &= K_I \frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{z}{z-1} \\
 &= K_I \frac{z(z+1)}{(z-1)^2}
 \end{aligned}$$

Para obter $u_1(k)$ é necessário aplicar a $U_1(z)$ a transformada Z inversa. Vamos efectuá-lo por expansão em fracções parciais simples:

$$\begin{aligned}
 \frac{U_1(z)}{z} &= \frac{K_I(z+1)}{(z-1)^2} \\
 &= \frac{a}{(z-1)^2} + \frac{b}{z-1} \\
 &= \frac{2K_I}{(z-1)^2} + \frac{K_I}{z-1}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

em que as constantes \underline{a} e \underline{b} foram calculadas como se segue:

$$a = \left[(z-1)^2 \cdot \frac{U_1(z)}{z} \right]_{z=1} \Rightarrow a = 2K_I$$

$$b = \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 \cdot \frac{U_1(z)}{z} \right]_{z=1} \Rightarrow b = K_I$$

Multiplicando ambos os membros de (2.24) por z , obtém-se

$$U_1(z) = K_I \left(\frac{2z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1} \right)$$

de onde resulta, aplicando a transformada Z inversa,

$$u_1(k) = K_I(2k+1)u_s(k)$$

c) Por observação da Figura 2.9 e da expressão (2.23), facilmente se conclui que

$$U_2(z) = (K_P + K_D \frac{(z-1)}{z})Y(z)$$

e, assim, que o diagrama de blocos da Figura 2.8 pode ser redesenhado tal como se apresenta na Figura 2.10.

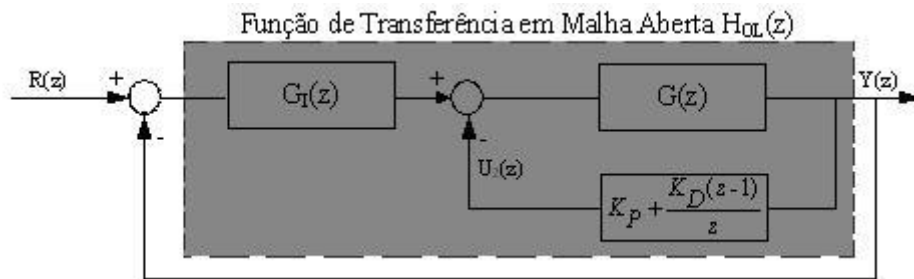


Figura 2.10. - Sistema de controlo redesenhado

de onde se conclui que a função de transferência em malha aberta é

$$H_{OL}(z) = G_I(z) \cdot \frac{G(z)}{1 + G(z) \left(K_P + K_D \frac{(z-1)}{z} \right)}$$

Introduzindo as expressões de $G_I(z)$ e $G_D(z)$, e após algumas operações algébricas simples chega-se ao resultado

$$H_{OL}(z) = \frac{K_I z(z+1)}{(z-1)[z^2 + (K_P + K_D - 0.3)z - K_D]} \quad (2.25)$$

que para os valores de K_I , K_P e K_D dados no enunciado resulta

$$H_{OL}(z) = \frac{0.2z(z+1)}{(z-1)(z+0.6)(z-0.5)} \quad (2.26)$$

Observe em (2.25) que os pólos do sistema em malha aberta não dependem da constante K_I .

Por sua vez, a função de transferência em malha fechada é

$$\begin{aligned} H_{CL}(z) &= \frac{H_{OL}(z)}{1 + H_{OL}(z)} \\ &= \frac{0.2z(z+1)}{z^3 - 0.7z^2 - 0.2z + 0.3} \end{aligned} \quad (2.27)$$

com pólos em -0.5 e $0.6354 \pm j0.3489$.

INFORMAÇÃO COMPLEMENTAR

O sistema de controlo foi simulado usando para o efeito o esquema de Simulink apresentado na Figura 2.11.

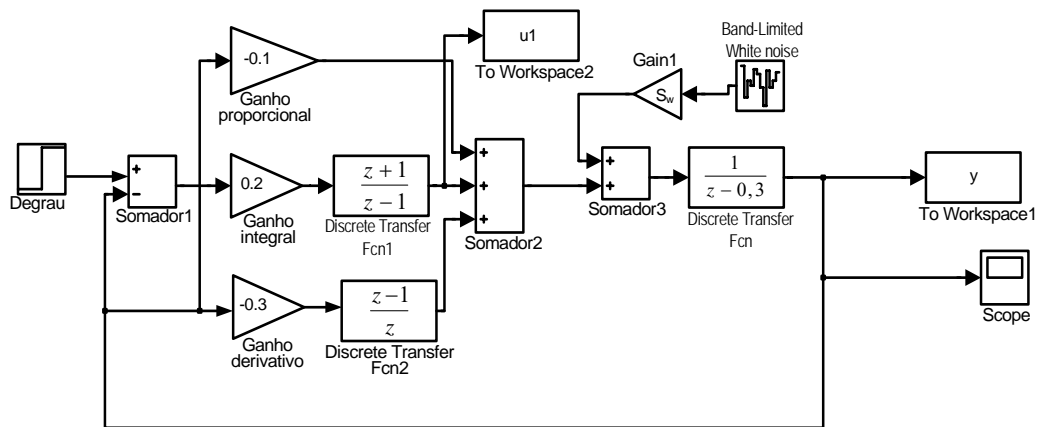


Figura 2. 11. - Esquema de Simulink do sistema de controlo

Aplicou-se um escalão unitário na referência e verificaram-se os sinais $u_1(k)$, à saída do bloco de acção integral, e $y(k)$, à saída do sistema de controlo, ilustrados na Figura 2.12.

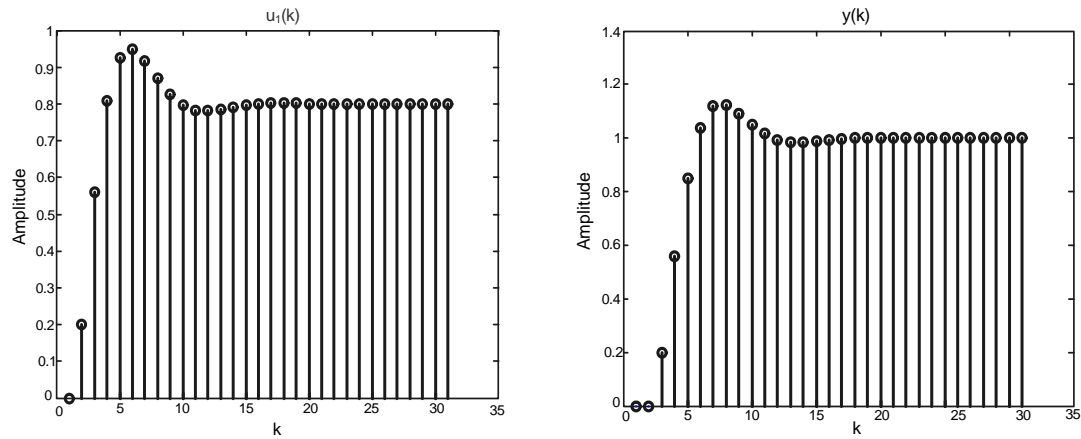


Figura 2.12. - Sinais $u_1(k)$ e $y(k)$ para um escalão unitário na referência

Alteração na Função de Transferência de Acção Integral

Também é comum usar-se na acção integral a função de transferência

$$G_I(z) = K_I \frac{1}{z-1} \quad (2.28)$$

que em comparação com a função usada anteriormente deixa de possuir o zero em $z=1$. Neste caso e mantendo os valores das constantes K_I , K_P e K_D obtêm-se as funções de transferência

$$H_{OL}(z) = \frac{0.2z}{(z-1)(z+0.6)(z-0.5)} \quad (2.29)$$

e

$$H_{CL}(z) = \frac{0.2z}{z^3 - 0.7z^2 - 0.2z + 0.3} \quad (2.30)$$

com pólos em -0.5327 e $0.7163 \pm j0.223$.

Comparando as funções (2.26) e (2.27) com as que lhes correspondem (2.29) e (2.30), verificamos que a única diferença a salientar reside no facto da função $G_I(z) = K_I(z+1)/(z-1)$ colocar um zero em $z=1$.

Foi realizada a simulação em Simulink deste novo controlador, com acção integral (2.28), obtendo-se os sinais $u_1(k)$ e $y(k)$ para um escalão na referência, representados na Figura 2.13.

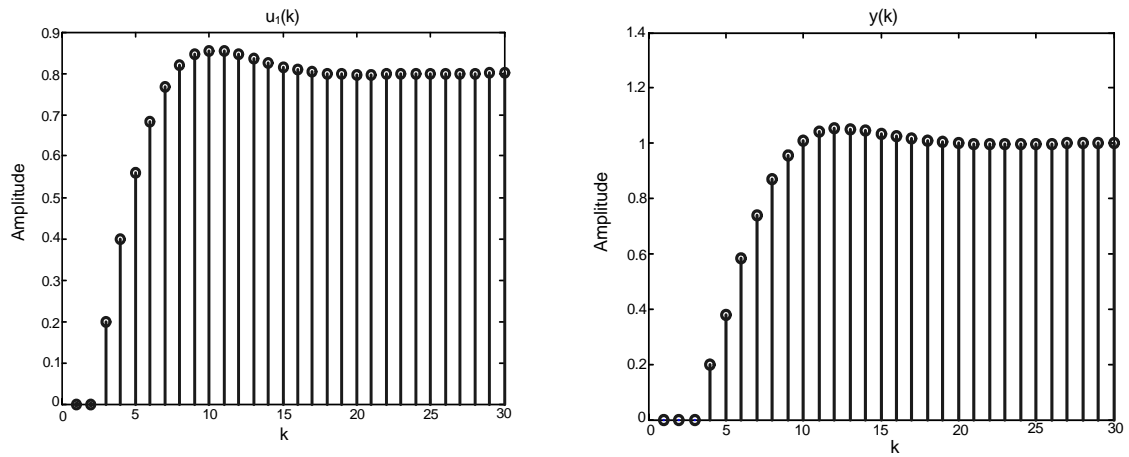


Figura 2.13. - $u_1(k)$ e $y(k)$ para escalão na referência com $G_I(z) = K_I/(z-1)$

PROBLEMA 2.6

Determine os sistemas discretos equivalentes, para $h = 0.2$ s, do SLIT contínuo

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

Usando os seguintes métodos:

- Método da invariância na resposta a escalão
- Método bilinear
- Método do mapeamento de pólos e zeros (MPZ)

RESOLUÇÃO

- No método da invariância da resposta a escalão considera-se constante a entrada durante o período de amostragem. É o mesmo que considerar que o sistema contínuo

está precedido por um zoh, i.e. trata-se do método de discretização zoh. O equivalente discreto é dado pela expressão

$$G_D(z) = (1 - z^{-1})Z \left[L^{-1} \left(\frac{G(s)}{s} \right) \right] \Big|_{t=kh}$$

ou então directamente, usando o par 9 da Tabela A.6:

$$\frac{ab}{(s+a)(s+b)} \leftrightarrow \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} \quad (a \neq b)$$

Com

$$\begin{cases} b_1 = \frac{b(1 - e^{-ah}) - a(1 - e^{-bh})}{b - a} \\ b_2 = \frac{a(1 - e^{-bh})e^{-ah} - b(1 - e^{-ah})e^{-bh}}{b - a} \\ a_1 = -(e^{-ah} + e^{-bh}) \\ a_2 = e^{-(a+b)h} \end{cases}$$

Substituindo os valores $(a=1, b=2, h=0,2)$, obtém-se o resultado

$$G_D(z)|_{zoh} = \frac{0.03286z + 0.0269}{z^2 - 1.489z + 0.5488} = \frac{0.03286(z + 0.8187)}{(z - 0.8187)(z - 0.6703)}.$$

b) Pelo método bilinear, ou de Tustin,

$$\begin{aligned} G_D(z)|_{Tustin} &= G(s) \Big|_{s=\frac{2(z+1)}{h(z-1)}} \\ &= \frac{0.0155z^2 + 0.0303z + 0.01515}{z^2 - 1.485z + 0.5455} \\ &= \frac{0.01515(z+1)^2}{(z - 0.8182)(z - 0.6667)} \end{aligned}$$

c) Usando o método MPZ, tanto os pólos como os zeros são mapeados segundo a lei $z = e^{sh}$, pelo que se obtém

$$G_D(z) = \frac{K(z+1)}{(z-0.8187)(z-0.6703)}$$

Para que o ganho estático se mantenha,

$$\begin{aligned} G(s)|_{s=0} &= G(z)|_{z=1} \\ \Rightarrow 1 &= K \frac{2}{0.05977} \\ \Rightarrow K &= 0.02988 \end{aligned}$$

Resultando

$$G_D(z)|_{mpz} = \frac{0.02988(z+1)}{(z-0.8187)(z-0.6703)}$$

Na Figura 2.14 apresenta-se código MATLAB que ilustra a discretização pelos métodos ZOH, Tustin e MPZ.

```
% Código MATLAB, exercício 2.6

clear, clc
h=0.2;
num=[0 2];
den=[1 3 2];
hc=tf(num,den);

disp('FTD pelo método zoh:');
hdzoh=c2d(hc,h,'zoh');
hdzoh_zpk=zpk(hdzoh)

disp('FTD pelo método de Tustin:');
hdtus=c2d(hc,h,'tustin');
hdtus_zpk=zpk(hdtus)

disp('FTD pelo método MPZ:');
hdmpz=c2d(hc,h,'matched');
hdmpz_zpk=zpk(hdmpz)

bode(hdzoh,hdtus,hdmpz)
```

FTD pelo método zoh:

Zero/pole/gain:
0.032859 (z+0.8187)

(z-0.8187) (z-0.6703)

FTD pelo método de Tustin:

Zero/pole/gain:
0.015152 (z+1)^2

(z-0.8182) (z-0.6667)

FTD pelo método MPZ:

Zero/pole/gain:
0.02988 (z+1)

(z-0.8187) (z-0.6703)

Figura 2.14. - Código MATLAB relativo ao problema 2.6.

Na Figura 2.15 estão representados os traçados de Bode da resposta em frequência dos sistemas discretos obtidos pelos métodos anteriores.

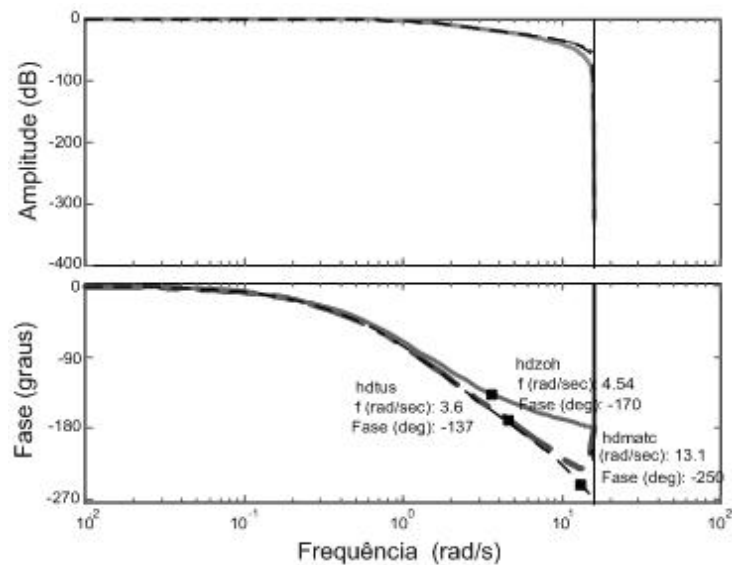


Figura 2.15. - Respostas em frequências dos sistemas discretos obtidos pelos métodos zoh, Tustin e mapeamento de pólos e zeros

2.8 – PROBLEMAS PROPOSTOS

PROBLEMA 2.7

Resolva a seguinte equação às diferenças $(q^2 - 5q + 6)y_k = (3q + 5)u_k$, para um sinal de entrada $u_k = 2^{-k}\xi_k$ e condições iniciais $y[-1]=0,2$ e $y[-2]=1$. Identifique as componentes da resposta à entrada nula e da resposta ao estado zero. Identifique também as componentes da resposta natural e da resposta forçada.

PROBLEMA 2.8

Seja

$$G(s) = \frac{10s + 1}{s^2 + 0.2s + 1}$$

Resolva as seguintes questões:

- a) A resposta transitória (por exemplo ao escalão unitário) tem componente oscilatória? Se sim qual a frequência de oscilação?
- b) Determine o equivalente discreto, considerando $G(s)$ precedido por zoh , amostrado com $h = 2\pi / \omega_d$, em que ω_d representa a frequência natural amortecida do sistema $G(s)$.
- c) A resposta transitória do equivalente discreto tem componente oscilatória? Se sim qual o valor da frequência de oscilação? Discuta este resultado tendo em conta o resultado obtido na alínea a).

PROBLEMA 2.9

Determine os gráficos das características de amplitude e de fase da resposta de frequência do SLIT discreto $y(k+1) - 0.5y(k) = 0.5u(k)$. Determine a resposta em regime permanente do sistema a uma entrada sinusoidal $u(t) = \cos\left(1000t - \frac{\pi}{3}\right)$, amostrada com $h = 0.5 \text{ ms}$.

PROBLEMA 2.10

Obtenha o filtro digital equivalente, $G(z)$, do filtro analógico descrito pela equação:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y(t) = u(t)$$

utilizando o método das diferenças para trás.

CAPÍTULO 3

CONTROLADOR PID: CONTÍNUO E DISCRETO

3.1 - INTRODUÇÃO

O controlador PID (Proporcional - Integral - Derivativo) é muito utilizado em aplicações industriais. Tendo por entrada o sinal de erro ($e(t) = r(t) - y(t)$), o controlador PID gera o sinal de comando

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) dt + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (3.1)$$

onde K_p representa o ganho proporcional, T_i é designado tempo integral e T_d tempo derivativo. Tomando a transformada de Laplace com condições iniciais nulas, obtém-se a função de transferência do controlador PID:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right] \quad (3.2)$$

que pode tomar a forma

$$G_c(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \quad (3.3)$$

onde

$$K_D = K_p T_d \text{ e } K_I = \frac{K_p}{T_i}$$

Se a dinâmica do processo, e as perturbações que sobre ele se exercem, forem parâmetros conhecidos, então K_I , T_i e T_d podem ser determinados analiticamente.

Contudo, foram desenvolvidos métodos de sintonização experimentais simples e que se mostraram válidos na prática. Entre outros, destacam-se os métodos de sintonização de Ziegler-Nichols que passamos a apresentar de forma sucinta.

3.2 - 1º MÉTODO: SINTONIZAÇÃO DE ZIEGLER-NICHOLS DE MALHA ABERTA

Neste método de sintonização K_p , T_i e T_d , são obtidos a partir da resposta ao escalão que pode ser verificada experimentalmente. Este método aplica-se a sistemas com resposta ao escalão que se assemelha a uma curva em forma de S, tal como é apresentada na Figura 3.1 a curva em forma de S pode ser caracterizada por duas constantes, tempo de atraso aparente L e constante de tempo aparente T .

A função de transferência $Y(s)/U(s)$ pode ser aproximada por um modelo de 1ª ordem com atraso de transporte como se segue:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{1 + sT} \quad (3.4)$$

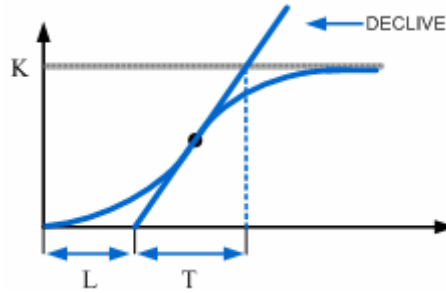


Figura 3. 1. - Método de sintonização de Ziegler-Nichols em malha aberta

De seguida apresenta-se a figura da tabela de sintonização:

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{L}$		
PI	$0.9\frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	
PID	$1.2\frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

Figura 3. 2. - Sintonização de Ziegler-Nichols em malha aberta

O controlador PID sintonizado pelo 1º método de Ziegler-Nichols tem um pólo integrador e um zero duplo em $s = -\frac{1}{L}$ vejamos:

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = 1.2 \frac{T}{L} \left(1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls \right) \\ &= 0.6T \frac{\left(s + \frac{1}{L} \right)^2}{s} \end{aligned}$$

3.3 – 2º MÉTODO: SINTONIZAÇÃO DE ZIEGLER-NICHOLS DE MALHA FECHADA

O método consiste basicamente nos seguintes passos:

Determinar K_{Crit} (ganho crítico), considerando-se apenas o sistema sob controlo proporcional.

Determinar a frequência de oscilação para o sistema na margem de estabilidade (sob controlo proporcional com ganho K_{Crit}).

Determinar o período de oscilação da resposta do sistema na margem de estabilidade (P_{Crit}).

De seguida apresenta-se a figura da tabela de sintonização:

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{Crit}$		
PI	$0.45K_{Crit}$	$\frac{1}{1.2}P_{Crit}$	
PID	$0.6K_{Crit}$	$\frac{P_{Crit}}{2}$	$\frac{P_{Crit}}{8}$

Figura 3. 3. - Sintonização de Ziegler Nichols em malha fechada

O controlador PID sintonizado pelo 2º método de Ziegler-Nichols tem um pólo integrador e um zero duplo em $s = -4/P_{Crit}$:

$$\begin{aligned}
 G_c(s) &= K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\
 &= 0.6K_{Crit} \left(1 + \frac{1}{0.5P_{Crit}s} + 0.125P_{Crit}s \right) \\
 &= 0.075K_{Crit}P_{Crit} \frac{\left(s + \frac{4}{P_{Crit}} \right)^2}{s}
 \end{aligned}$$

3.4 – MÉTODO ANALÍTICO (EXEMPLO)

Caso seja conhecido o modelo do processo a controlar é possível determinar os parâmetros do PID de forma analítica. Por exemplo, considere-se o sistema de segunda ordem sem zeros:

$$G(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1s + a_2} \quad (3.5)$$

ao qual se aplica um controlador PID. O método de sintonização (sistema sob controlo de 2ª ordem) resume-se aos seguintes passos:

Definir a dinâmica de 2ª ordem desejada para o sistema em malha fechada:

$$\zeta, \omega_n \rightarrow s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Introduzir um terceiro pólo não dominante (pólo $-p$), obtendo-se a equação característica desejada:

$$(s + p)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = 0$$

Determinar a equação característica do sistema em malha fechada:

$$s^3 + (a_1 + b_0 K_D)s^2 + (a_0 + b_0 K_P)s + b_0 K_I = 0$$

Igualar as duas equações características de terceira ordem, e resolver em ordem aos parâmetros do controlador PID:

$$K_P = \frac{2p\zeta\omega_n + \omega_n^2 - a_0}{b_0} \quad K_D = \frac{2\zeta\omega_n + p - a_1}{b_0} \quad K_I = \frac{p\omega_n^2}{b_0} \quad (3.6)$$

É importante notar que com este método são introduzidos zeros na malha fechada, do controlador PID, que podem ter uma influência negativa na dinâmica do sistema de controlo.

3.5 – PID MODIFICADO

Considerando as equações (3.1) e (3.2) são agora introduzidas algumas modificações que conduzem geralmente a um melhor desempenho do controlador PID.

3.5.1 – MODIFICAÇÕES COMUNS

Filtro no termo derivativo: o ganho do termo derivativo deve ser limitado de modo a evitar amplificações elevadas de ruído de medida.

$$sT_D \rightarrow \frac{sT_D}{1 + sT_D / N} \quad (3.7)$$

A função de transferência resultante é uma boa aproximação do termo derivativo às baixas frequências e o ganho às altas-frequências é limitado superiormente por N . N assume valores tipicamente na gama de 3 a 20.

Para evitar sobrelevações e sobreesforços no actuador

MODIFICAÇÕES DO TERMO DERIVATIVO: para além do filtro mencionado o termo derivativo deve apenas agir sobre a saída do processo; já que é só deste sinal que vêm reflectidas as perturbações no processo.

$$\text{Termo derivativo: } -\frac{K_P T_D s}{1 + sT_D / N} Y(s) \quad (3.8)$$

MODIFICAÇÕES DO TERMO PROPORCIONAL: agir apenas sobre uma fracção do sinal de referência (mantendo a acção sobre a saída)

$$\text{Termo proporcional: } K_P bR(s) - K_P Y(s) \quad , \quad 0 < b < 1 \quad (3.9)$$

Após as modificações mencionadas obtém-se a seguinte equação que traduz o controlador PID modificado:

$$U(s) = K_P (bR(s) - Y(s)) + \frac{K_P}{sT_i} E(s) + \frac{K_P T_D s}{1 + sT_D / N} Y(s) \quad (3.10)$$

3.6 – PID DISCRETO

O controlador PID pode ser discretizado usando um qualquer dos métodos “standard”. Nesta secção vamos apresentar duas das aproximações mais conhecidas e usadas.

3.6.1 - PID DISCRETO-APROXIMAÇÃO I

Da equação (3.2), discretizando o termo derivativo usando aproximação rectangular para trás e o termo integral usando o método bilinear, obtém-se a seguinte função de transferência do PID discreto:

$$G_D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_P + K_I \frac{h(z+1)}{2(z-1)} + \frac{K_D(z-1)}{h z} \quad (3.11)$$

em que $K_I = \frac{K_P}{T_i}$ e $K_D = K_P T_d$.

A equação (3.11) é conhecida como a forma posicional do controlador PID discreto. O PID (3.11) toma a forma modificada

$$U(z) = -K_P Y(z) + K_I \frac{h(z+1)}{2(z-1)} E(z) - \frac{K_D(z-1)}{h z} Y(z) \quad (3.12)$$

se as acções proporcional e derivativa actuarem somente sobre o sinal de saída (sinal onde vêm reflectidas as perturbações que actuam ou emergem devido a erros de modelação).

3.6.2 - PID DISCRETO-APROXIMAÇÃO II

Novamente a partir de (3.2), discretizando o termo derivativo usando aproximação rectangular para trás e o termo integral usando aproximação rectangular para a frente, obtém-se uma nova aproximação para o PID discreto:

$$G_D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_P + \frac{K_I h}{(z-1)} + \frac{K_D(z-1)}{h z} \quad (3.13)$$

que também pode assumir uma forma modificada (do tipo (3.12)) fazendo com que as acções proporcional e derivativa actuem somente sobre o sinal de saída:

$$U(z) = -K_P Y(z) + \frac{K_I h}{(z-1)} E(z) - \frac{K_D(z-1)}{h z} Y(z) \quad (3.14)$$

Os esquemas PID (3.12) e (3.14) são dois exemplos de variantes da designada forma de velocidade do controlador PID, cuja representação em diagrama de blocos é ilustrada na Figura 3.4.

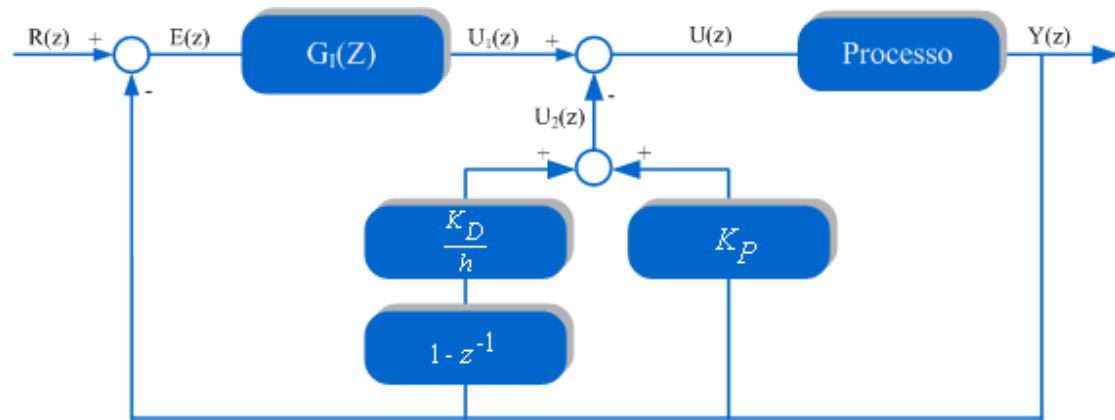


Figura 3. 4. - Diagrama de blocos do esquema de controlo na forma de velocidade do PID discreto

Na Figura 3.4,

$$G_I(z) = K_I \frac{h(z+1)}{2(z-1)}$$

para o PID expresso pela equação (3.12) e

$$G_I(z) = \frac{K_I h}{(z-1)}$$

para o PID dado pela equação (3.14).

3.6.3 - PID DISCRETO MODIFICADO - APROXIMAÇÃO III

Tomando em consideração as modificações referidas na secção 3.4.1, expressas pelas equações (3.8), (3.9) e (3.10) e discretizando o termo derivativo usando aproximação rectangular para trás e o termo integral usando aproximação rectangular para a frente, obtém-se o seguinte PID discreto:

$$U(z) = K_p b E(z) + \frac{K_I h}{(z-1)} E(z) - \frac{K_D (1-z^{-1})}{h + (1-z^{-1}) \frac{T_D}{N}} Y(z) \quad (3.15)$$

3.7 - PROBLEMAS RESOLVIDOS

PROBLEMA 3.1

Considere o sistema de controlo representado na Figura 3.5:



Figura 3. 5. - Diagrama de blocos do sistema de controlo

- Considere inicialmente que estamos perante um sistema de controlo proporcional, i.e. $G_c(s) = K_p$. Nestas condições determine o erro estacionário do sistema para uma referência a escalão.
- Faça um estudo da estabilidade do sistema em função do ganho proporcional. Diga qual é o valor do ganho proporcional que coloca o sistema na margem de estabilidade ($K_{p_{crit}}$).
- Determine a frequência de oscilação do sistema na margem de estabilidade.
- Desenhe em detalhe o Lugar das Raízes (LR).
- Imagine que K_p tomava o valor a que corresponde um factor de amortecimento $\zeta = 0.707$ associado ao par de pólos complexos conjugados. Será que o comportamento do sistema de controlo se aproxima do comportamento de um sistema de 2ª ordem? Justifique.
- Com base nos resultados das alíneas anteriores, determine a função de transferência do controlador PID (sem modificações) adequado ao sistema de controlo da Figura 3.5. Utilize o 2º método de sintonização de Ziegler-Nichols.

RESOLUÇÃO

- O sinal de erro em função do sinal de referência pode ser determinado com base na função de transferência

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_C(s)G(s)}$$

onde

$$G_C(s) = K_p$$

e

$$G(s) = \frac{0.5}{s(s^2 + 2.5s + 1)}.$$

Aplicando o teorema do valor final, facilmente se obtém o erro estacionário para a referência em escalão unitário:

$$\begin{aligned} e_{ss}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_C(s)G(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + K_p G(0)} = 0 \end{aligned}$$

Uma vez que

$$G(0) = \frac{1}{0} = \infty$$

podemos concluir que o erro estacionário do sistema de controlo é nulo, na gama de valores de K_p que garantem a sua estabilidade, para uma entrada em escalão. Observe-se que

$$e_{ss}(t) = \frac{1}{1 + K_{ep}} = 0$$

Já que para um sistema em malha aberta de tipo ≥ 1 o coeficiente de erro de posição estático

$$K_{ep} = \lim_{s \rightarrow 0} G_C(s)G(s) = K_p G(0) = \infty$$

A condição anterior verifica-se no caso em estudo uma vez que o sistema em malha aberta é do tipo 1.

b) Para o sistema de controlo em estudo, a equação característica

$$1 + G_C(s)G(s) = 0$$

Assume a expressão

$$1 + \frac{0.5K_p}{s(s^2 + 2.5s + 1)} = 0$$

ou seja,

$$s^3 + 2.5s^2 + s + 0.5K_p = 0 \quad (3.16)$$

De (3.16) compõe-se a matriz de Routh-Hurwitz:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2.5 & 0.5K_p \\ s^1 & \frac{2.5 - 0.5K_p}{2.5} & 0 \\ s^0 & 0.5K_p & \end{array}$$

de onde se conclui que o sistema de controlo é estável para

$$\begin{cases} K_p > 0 \\ 2.5 - 0.5K_p > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < K_p < 5 \quad (3.17)$$

Da condição (3.17) resulta que o ganho crítico é $K_{p_{crit}} = 5$.

c) Para o ganho proporcional $K_p = 5$ os pólos de malha fechada dominantes estão posicionados no eixo imaginário. Da matriz de Routh-Hurwitz, fazendo $K_p = 5$ na linha de s^1 , podemos determinar esses pólos que correspondem aos pontos de intercepção do LR com o eixo imaginário, isto é substituindo $K_p = 5$ na equação

$$2.5s^2 + 0.5K_p = 0,$$

obtém-se

$$s^2 + 1 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j.$$

Daqui se conclui que a frequência de oscilação para o sistema na margem de estabilidade é de $\omega = 1 \text{ rad/s}$ a que corresponde um período $T = 2\pi \approx 6,28 \text{ s}$.

d) Nesta alínea vamos proceder ao desenho detalhado do LR relativo ao sistema de controlo em estudo.

O sistema em malha aberta tem 3 pólos ($n = 3$) e nenhum zero ($m = 0$):

$$s_0 = 0$$

$$s_{1,2} = \frac{-2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 4}}{2} \left\{ \begin{array}{l} s_1 = -0.5 \\ s_2 = -2 \end{array} \right.$$

Passo 1: Equação característica:

$$1 + K \frac{1}{s(s+0.5)(s+2)} = 0,$$

com $K = 0.5K_p$

Passo 2: Desenhar os pólos e zeros do sistema em malha aberta no plano complexo:

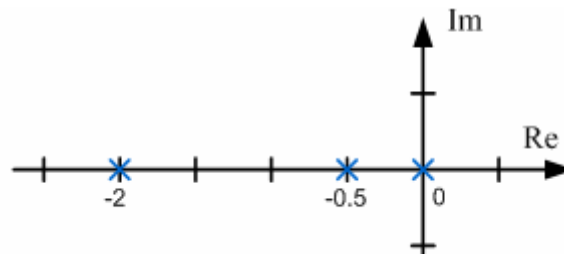


Figura 3. 6. - Pólos e zeros do sistema em malha aberta

Os ramos do LR partem dos pólos e terminam nos zeros do sistema em malha aberta (para um número inferior de zeros finitos relativamente ao número de pólos, os ramos terminam no infinito).

Passo 3: Número de ramos separados = 3

Passo 4: Pertencem ao LR os pontos no eixo real

$$\in]-\infty, -2] \cup]-0.5, 0];$$

Passo 5: Tendem para infinito $n - m = 3$ ramos

Passo 6: Determinação das assíntotas:

a) Número de assíntotas: $n_a = n - m = 3$

b) Centro das assíntotas:

$$\sigma_a = \frac{\sum p - \sum z}{n - m} = \frac{-2 - 0.5}{3} = -\frac{5}{6} = -0.833$$

c) Ângulos das assíntotas (ângulos que as assíntotas fazem com o eixo real):

$$\Phi_a = \frac{2q+1}{n-m} \cdot \pi, q = 0, 1, 2, \dots, (n_p - n_z - 1)$$

e

$$\Phi_{a1} = \frac{\pi}{3}; \Phi_{a2} = \pi \quad \Phi_{a3} = \frac{5}{3}\pi$$

Passo 7: Cálculo do ponto de dispersão:

$$1 + K \frac{1}{s(s+0.5)(s+2)} = 0 \Leftrightarrow K = -(s^3 + 2.5s^2 + s)$$

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 5s + 1) = 0$$

$$s_1 = -0.23; s_2 = -1.43$$

Uma vez que $s_2 = -1.43$ não pertence ao LR, conclui-se que o ponto de dispersão é em $s = -0.23$.

Passo 8: resolvido na alínea 1b)

$K_{p_{crit}} = 5$ e os pontos de intercepção do LR com o eixo imaginário são: $s_{1,2} = \pm j$

Passo 9: como todos os pólos de malha aberta pertencem ao eixo real, não é necessário o cálculo do passo 9.

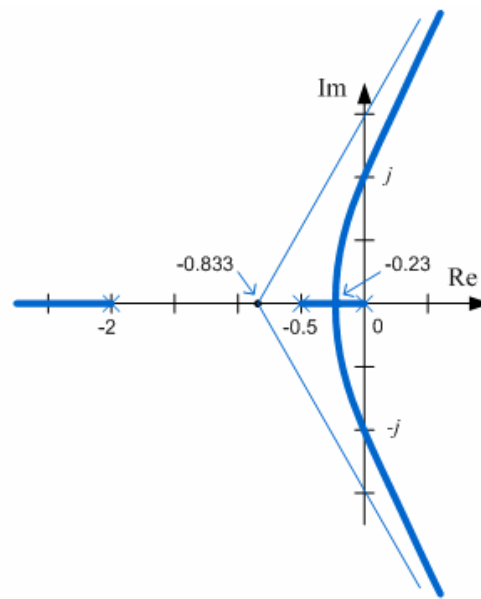


Figura 3. 7. - Esboço do lugar das raízes

Comprova-se que para $K_p = 5$ o sistema é marginalmente estável e caracterizado por uma frequência de oscilação na margem de estabilidade de $\omega = 1 \text{ rad/s}$. Na Figura 3.8 representa-se a resposta do sistema de controlo na margem de estabilidade. Esta resposta obteve-se simulando o sistema de controlo usando o esquemático de Simulink representado na Figura 3.9.

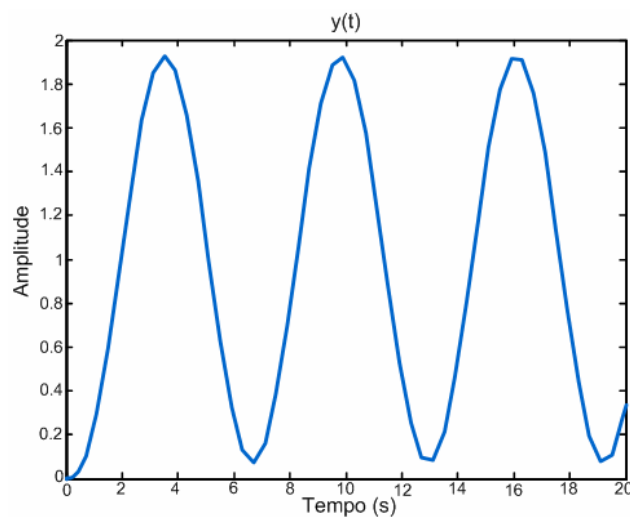


Figura 3. 8. - Resposta do sistema na margem de estabilidade ($K_p=5$). Aplicou-se um sinal em escalão unitário na referência



Figura 3. 9. - Esquemático de Simulink

e) Por observação do LR vemos que para $\zeta = 0.707$ (ângulo = 45°) a parte real do par de pólos complexos de malha fechada é inferior, em módulo, a 0.23. Por outro lado, o módulo da parte real do 3º pólo de malha fechada (pólo real pertencente ao ramo $]-\infty, -2]$) é superior a 2. Logo, o sistema de controlo exibe um par de pólos complexos conjugados a que corresponde um comportamento típico de 2ª ordem com factor de amortecimento $\zeta = 0.707$.

f) Das alíneas 1b) e 1c) sabemos que $K_{p_{crit}} = 5$ e $\omega = 1 \text{ rad/s}$, logo

$$P_{crit} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \text{ s}$$

A função de transferência do PID é

$$G_c(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

com

$$K_D = K_P T_d \quad \text{e} \quad K_I = \frac{K_P}{T_i}$$

Os valores de K_P , T_i e T_d são obtidos com base na tabela de valores de sintonização em malha fechada de Ziegler-Nichols:

$$K_P = 0.6 K_{p_{crit}} = 3$$

$$T_i = 0.5 P_{crit} = \pi = 3.14$$

$$T_d = 0.125 P_{crit} = 0.785$$

Resultando

$$G_c(s) = \frac{3(0.785s^2 + s + 0.318)}{s}$$

A título de curiosidade façamos o desenvolvimento da função de transferência do PID. Esta função de transferência tem um zero duplo em $s \approx -0.636$, pelo que pode ser rescrita na forma:

$$G_C(s) = \frac{3 \times 0.785 (s + 0.636)^2}{s} = \frac{2.355 (s + 0.636)^2}{s}$$

Isto é, o controlador PID tem um zero duplo em -0.636 e um pólo situado na origem. Este resultado comprova o que é dito na secção (3.3), que o PID sintonizado pelo método Ziegler-Nichols em malha fechada tem um pólo integrador e um zero duplo em $s = -4/P_{Crit}$:

$$G_C(s) = 0.075 K_{P_{Crit}} P_{Crit} \frac{\left(s + \frac{4}{P_{Crit}}\right)^2}{s}$$

Observe que

$$0.075 K_{P_{Crit}} P_{Crit} = 0.075 \times 5 \times 2\pi = 2.355$$

e que

$$\frac{4}{P_{Crit}} = \frac{4}{2\pi} \approx 0.636.$$

PROBLEMA 3.2

Considere um SLIT contínuo com a seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2.05}{s(s + 3.74)} \quad (3.18)$$

Projecte um controlador analógico PID de modo que o sistema em malha fechada tenha uma dinâmica predominante de 2ª ordem caracterizada por um coeficiente de amortecimento $\zeta = 0,5$ e frequência natural não amortecida $w_n = 2 \text{ rad/s}$. Simule o sistema de controlo em ambiente Matlab/Simulink.

RESOLUÇÃO

O método analítico de projecto do PID, exposto na secção 3.4 pode ser aplicado no caso presente. Comparando as funções de transferência (3.18) e (3.5) conclui-se que o método é aplicável com

$$b_0 = 2.05; a_1 = 3.74; a_0 = 0 \quad (3.19)$$

Para determinar os valores dos parâmetros do PID (3.6) falta-nos apenas atribuir um valor a p , parâmetro que define o terceiro pólo de malha fechada que se pretende suficientemente afastado dos pólos dominantes, par de pólos complexos conjugados, a que corresponde um $\zeta = 0.5$ e $w_n = 2 \text{ rad/s}$. A parte real dos pólos dominantes é $-\zeta w_n = -1$.

A fim de dar ao sistema um comportamento predominantemente de 2ª ordem, colocamos o pólo real em $s = -10$, ou seja, pólo com parte real em módulo 10 vezes o valor do módulo da parte real dos pólos dominantes. Isto significa que se atribui a p o valor 10, ou seja

$$p = 10 \quad (3.20)$$

Substituindo (3.19), (3.20) e os valores de ζ e w_n desejados em (3.6) obtêm-se os valores dos parâmetros do controlador PID:

$$\begin{cases} K_p = 11.707 \\ K_D = 4.029 \\ K_I = 19.512 \end{cases}$$

O sistema de controlo obtido foi simulado em ambiente Matlab/Simulink usando o esquema representado na Figura 3.10 e o código apresentado na Figura 3.11. As respostas ao escalão unitário, com e sem fontes de ruído na carga e na medida, são representadas na Figura 3.12.

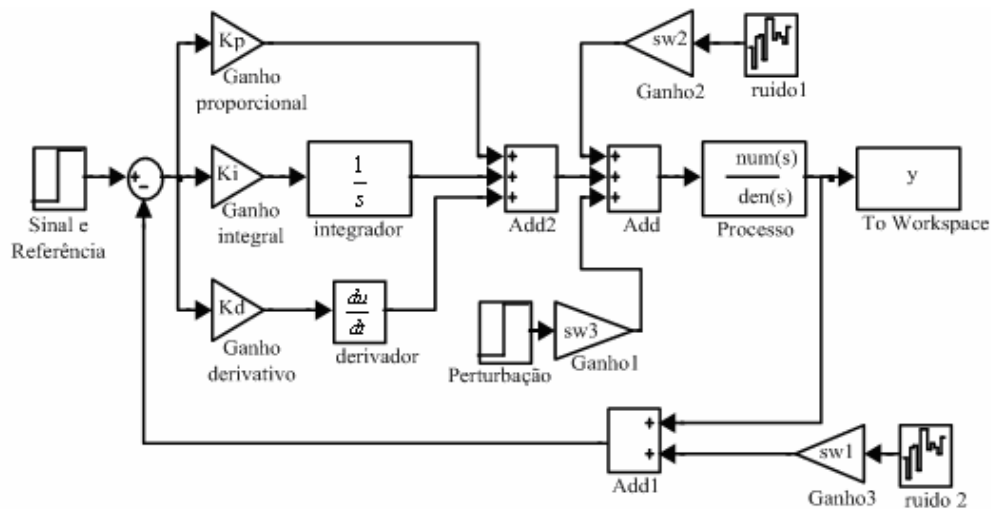


Figura 3. 10. - Esquema de Simulink usado na simulação do controlador PID analógico standard

Simulando uma perturbação na carga, escalão em $t = 5s$, observa-se na Figura 3.11 que o sistema de controlo elimina o seu efeito devido à existência de acção integral no controlador.

```
clear, clc
% modelo do processo
b0=2.05; a1=3.74; a0=0;
num=[b0]; den=[1 a1 0];

% controlador PID
p=10; zeta=0.5; wn=2;
Kp=(2*p*zeta*wn+wn^2-a0)/b0;
Kd=(2*zeta*wn+p-a1)/b0;
Ki=(p*wn^2)/b0;

% sem ruído
sw1=0; sw2=0; sw3=0;
sim('p32s');
tempo1=y.time;
y1=y.signals.values;

% com ruído de medida
sw1=0.2;
sim('p32s');
tempo2=y.time;
y2=y.signals.values;

% com ruído na carga
sw1=0; sw2=0.2;
sim('p32s');
tempo3=y.time;
y3=y.signals.values;

% com perturbação constante na carga
sw2=0; sw3=1;
sim('p32s');
tempo4=y.time;
y4=y.signals.values;

plot(tempo1,y1,'r',tempo2,y2,'k:',tempo3,y3,'b') pause
plot(tempo1,y1,'r',tempo4,y4,'k:')
```

Figura 3. 11. - Código de Matlab

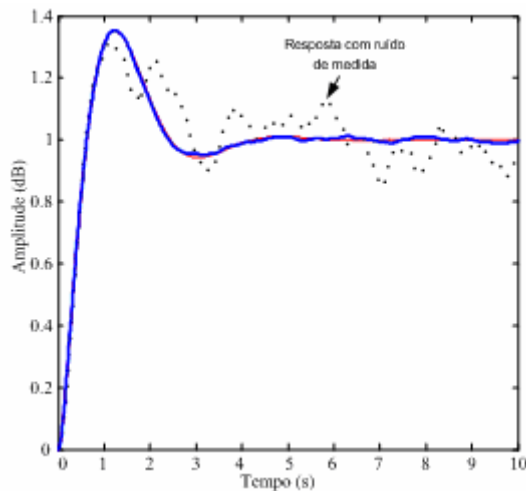


Figura 3.12. - Resposta a uma referência escalão unitário: sem ruído; com ruído de medida; com ruído na carga. O efeito do ruído na carga é reduzido, sendo a resposta com ruído e sem ruído na carga semelhantes.

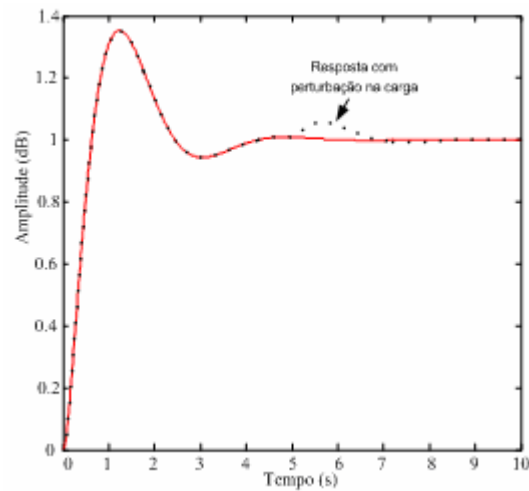


Figura 3.13. - Resposta para uma perturbação na carga em escalão com início em $t=5s$.

PROBLEMA 3.3

Pretende-se controlar um processo contínuo com função de transferência

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad (3.21)$$

de modo a que o sistema completo em malha fechada exiba um comportamento típico de 2ª ordem com factor de amortecimento $\zeta = 0.7$ e frequência natural não amortecida $w_n = 5 \text{ rad/s}$.

a) Projecte a colocação de pólos usando um controlador PI analógico (standard). Simule em Matlab/Simulink a resposta do sistema de controlo para uma referência em escalão.

b) Considere que se pretendia implementar o controlador num microcontrolador. Simule em Matlab/Simulink a resposta a escalão do sistema com controlador PI discreto (aproximação do PI analógico) com função de transferência

$$G_c(z) = K_p + K_I \frac{h(z+1)}{2(z-1)} \quad (3.22)$$

use na simulação os períodos de amostragem $h = 0.1 \text{ s}$ e $h = 0.2 \text{ s}$.

c) Projecte analiticamente o controlador PI discreto (3.22), tomando em consideração o efeito ZOH, na conversão do sinal de comando de digital para analógico. Simule em Matlab/Simulink a resposta a escalão do sistema de controlo para os novos valores dos ganhos do PI discreto, para os períodos de amostragem $h = 0.1 \text{ s}$ e $h = 0.2 \text{ s}$.

RESOLUÇÃO

a) O sistema de controlo analógico tem a equação característica

$$1 + G_c(s)G(s) = 0$$

$$\text{com } G_c(s) = \frac{K_p s + K_I}{s} \text{ e } G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Substituindo, obtém-se facilmente o resultado

$$s^2 + (1 + K_p)s + K_I = 0 \quad (3.23)$$

Por sua vez, a equação característica desejada, de 2ª ordem, é

$$s^2 + 7s + 25 = 0 \quad (3.24)$$

obtida substituindo $\zeta = 0.7$ e $w_n = 5 \text{ rad/s}$ na equação de 2ª ordem $s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2 = 0$.

De (3.23) e (3.24) conclui-se que o sistema de controlo deverá ter o comportamento dinâmico desejado com o controlador PI com os ganhos

$$\begin{cases} K_I = 25 \\ K_p = 6 \end{cases} \quad (3.25)$$

Um esquemático de Simulink do sistema global poderá ser o representado na Figura 3.14, composto por dois blocos separados de simulação. Na parte superior da Figura tem-se o esquema de Simulink do sistema controlado por PI analógico e na parte inferior o esquema relativo ao sistema controlado por PI discreto.

No caso do esquema de controlo analógico, optou-se por explicitar os valores dos ganhos do PI por não dependerem de h , enquanto que no caso do PI digital se usaram variáveis nos blocos de ganho cujos valores dependem de h (os valores dessas variáveis são atribuídos fazendo correr um *script* de Matlab adequado). Note-se que também os blocos ZOH e SAH são dependentes de h cujo valor é também atribuído através do *script* de Matlab de inicialização de variáveis.

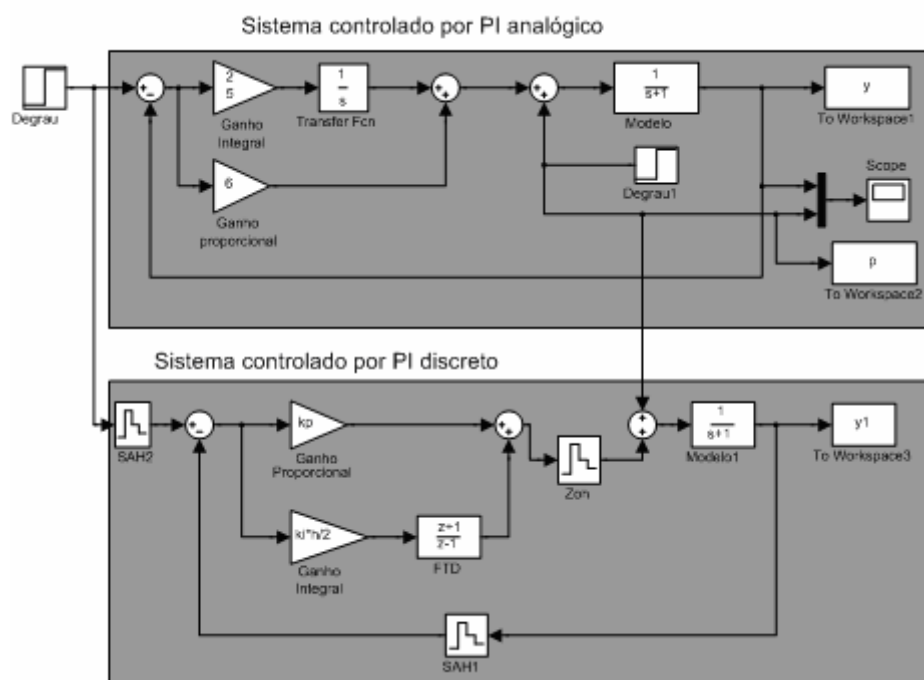


Figura 3. 14. - Esquema de Simulink: Em cima) sistema de controlo com PI analógico; Em baixo) sistema de controlo com PI discreto

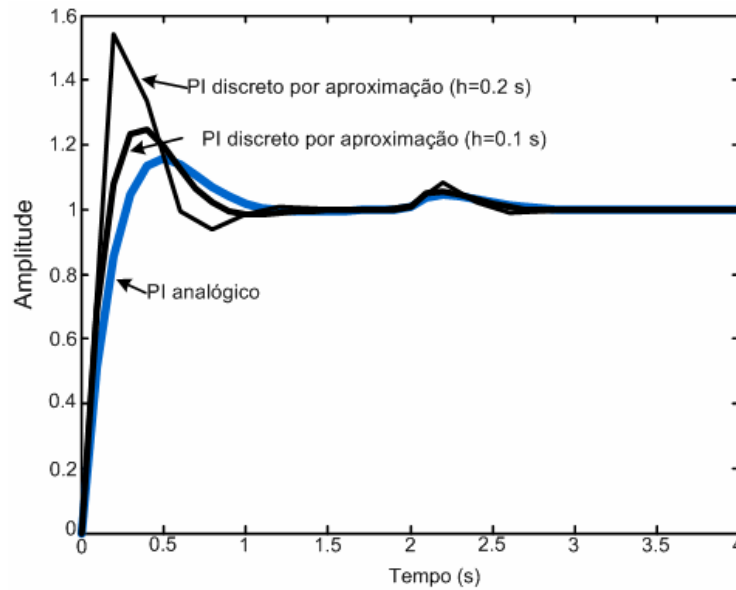


Figura 3.15. - Resposta ao escalão unitário. Foi aplicada uma perturbação na carga, aditiva, em escalão com amplitude 0.5, com início em $t=2$ s.

Na Figura 3.15 é dado a observar as respostas do sistema a uma referência em escalão, para o sistema controlado pelo PI analógico e, pelo PI discreto obtido por discretização do PI analógico (alínea b), para dois valores do período de amostragem, $h=0.1$ s e $h=0.2$ s. Note que se obtém $w_n \cdot h|_{h=0.1} = 0.5$ e $w_n \cdot h|_{h=0.2} = 1$, logo estando este último valor já fora da gama aconselhada para os sistemas de 2ª ordem que é $w_n \cdot h \approx 0.2 \sim 0.6$.

b) Nesta alínea vamos obter um controlador discreto por aproximação de um controlador projectado para um sistema de controlo analógico. Vamos analisar o desempenho do controlador PI discreto obtido por discretização do seu equivalente analógico. É usado o conhecido PI discreto (3.22) com os ganhos do PI analógico (3.25), isto é

$$G_c(z) = 6 + 12,5h \frac{(z+1)}{(z-1)} \quad (3.26)$$

Na Figura 3.15 podemos observar as respostas a escalão unitário correspondentes ao uso do controlador discreto (3.26), para $h=0.1$ s e $h=0.2$ s, em sobreposição à resposta ao escalão para o caso em que se aplica o controlador PI analógico. Note-se que foi aplicada uma perturbação aditiva na carga, em escalão, com amplitude 0.5 com início em $t=2$ s.

Ambos os controladores reagem bem à referida perturbação fazendo com que o seu efeito seja sentido na saída apenas levemente nos instantes iniciais e anulando-o em regime permanente. Como seria de esperar o desempenho do controlador discreto é inferior ao do controlador analógico. O facto “per si” de se usarem sinais discretos já introduz degradação no sistema de controlo global, mas aqui acresce o facto de se fazer uso de um controlador discreto obtido por aproximação de um equivalente analógico, sem se ter tido em consideração os novos dispositivos introduzidos no sistema, com destaque para o conversor digital analógico que provoca uma distorção bem conhecida no sinal de comando (sinal analógico em forma de escada à saída do ZOH). Ainda assim, os resultados que se obtêm com este método, controlador discreto obtido por aproximação, são em muitos casos satisfatórios, satisfazendo os requisitos de projecto.

c) Nesta alínea vamos obter o modelo discreto do processo sob controlo, tomando em consideração o ZOH que o precede. Tendo este modelo, podemos efectuar analiticamente o projecto do controlador PI, fazendo a colocação de pólos, mas tendo por base os modelos discretos dos módulos envolvidos, i.e. do processo e do controlador.

i) Equivalente discreto do processo

O equivalente discreto do processo contínuo (3.21) precedido por ZOH, é bem conhecido

$$G(z)|_{zoh} = \frac{1 - e^{-h}}{z - e^{-h}} \quad (3.27)$$

ii) PI discreto

O PI discreto, dado no enunciado (3.22), pode ser rescrito na forma

$$G_C(z) = \frac{(2K_P + K_I h)z + (K_I h - 2K_P)}{2(z - 1)} \quad (3.28)$$

iii) Equação característica discreta desejada

Do enunciado pretende-se que o sistema em malha fechada tenha um comportamento típico de 2ª ordem com $\zeta = 0.7$ e $w_n = 5 \text{ rad/s}$.

Então, a equação característica discreta desejada é

$$z^2 + a_1 z + a_2 = 0 \quad (3.29)$$

com

$$\begin{cases} a_1 = -2e^{-\zeta w_n h} \cdot \cos(w_d h) \\ a_2 = e^{-2\zeta w_n h} \end{cases} \quad (3.30)$$

em que w_d representa a frequência natural amortecida $w_d = w_n \sqrt{1 - \zeta^2}$.

iv) Equação característica do sistema de controlo

A equação característica do sistema em tempo discreto é

$$1 + G_c(z)G(z) = 0 \quad (3.31)$$

Substituindo (3.27) e (3.28) em (3.31) e após alguma manipulação algébrica chega-se ao seguinte resultado:

$$z^2 + [0,5(1 - e^{-h})(2K_p + K_I h) - (1 + e^{-h})]z + [0,5(1 - e^{-h})(K_I h - 2K_p) + e^{-h}] = 0 \quad (3.32)$$

Igualando os coeficientes de (3.29) e (3.32) obtém-se

$$\begin{cases} 0,5(1 - e^{-h})(2K_p + K_I h) - (1 + e^{-h}) = a_1 \\ 0,5(1 - e^{-h})(K_I h - 2K_p) + e^{-h} = a_2 \end{cases} \quad (3.33)$$

em que a_1 e a_2 são dados por (3.30).

A equação (3.33) pode ainda ser rescrita na forma

$$\begin{cases} K_I h + 2K_p = \frac{2(a_1 + 1 + e^{-h})}{(1 - e^{-h})} \\ K_I h - 2K_p = \frac{2(a_2 - e^{-h})}{(1 - e^{-h})} \end{cases} \quad (3.34)$$

Para $h = 0,1$ s obtêm-se os valores

$$a_1 = -1,3205; \quad a_2 = 0,49666$$

que substituídos em (3.34) conduzem à solução:

$$K_p = 5,2154; \quad K_I = 18,506$$

Para $h = 0.2 \text{ s}$,

$$a_1 = -0.7505; a_2 = 0.2466$$

e

$$K_p = 4.5247; K_I = 13.684$$

Na Figura 3.16 representam-se as respostas no tempo ao escalão unitário correspondentes ao uso do controlador PI discreto, projectado no ponto iv), para $h = 0.1 \text{ s}$ e $h = 0.2 \text{ s}$, em sobreposição à resposta ao escalão quando se aplica o controlador analógico. Também nestas simulações se introduziu uma perturbação na carga, aditiva e em escalão, com amplitude 0.5 e com início em $t = 2 \text{ s}$.

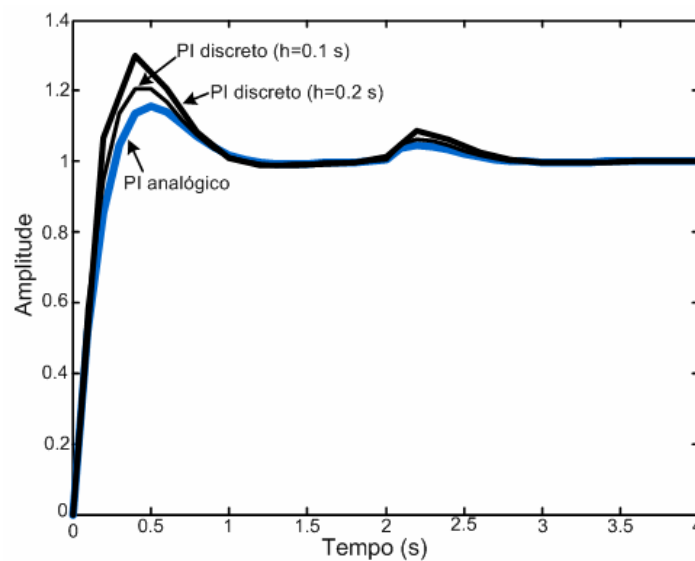


Figura 3. 16. - Resposta ao escalão unitário. Foi aplicada uma perturbação na carga, aditiva, do tipo escalão com amplitude 0.5, com início em $t = 2 \text{ s}$.

Comparando os resultados ilustrados nas Figuras 3.15 e 3.16, conclui-se que este último controlador PI discreto tem um melhor desempenho em comparação com o PI discreto obtido por aproximação.

NOTA:

Propõe-se que o aluno faça uma análise, com recurso a simulação, do esforço de comando em função do período de amostragem.

3.8 – PROBLEMAS PROPOSTOS

PROBLEMA 3.4

Considere o SLIT contínuo com função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2.05}{s(s + 3.74)}$$

A saída pode ser interpretada como a posição de um veio de um motor *cc* controlado pela corrente do induzido e a entrada como o sinal de tensão aplicado ao circuito do induzido. No Problema 3.2 projectou-se um controlador PID analógico com o objectivo de se obter um sistema em malha fechada com um comportamento dinâmico típico de 2ª ordem com $\zeta = 0.5$ e $\omega_n = 2$ rad/s. Pretende-se agora, substituir o PID analógico por um PID digital que conduza a um desempenho do sistema de controlo aproximado ao do sistema totalmente analógico.

- a) Indique um período de amostragem adequado e redesenhe o esquemático de Simulink da Figura 3.10 para possibilitar a simulação do sistema de controlo com o controlador PID discreto.
- b) Analise o desempenho do sistema para diferentes períodos de amostragem, para variações paramétricas, e para perturbações externas exercidas na carga (ex. colocação de uma carga no motor). Faça um resumo das conclusões a que chegou.
- c) Considere as fontes de ruído, tal como são apresentadas na Figura 3.10, analise a influência desse ruído no sistema de controlo com o controlador PID discreto. Investigue o efeito do termo derivativo na sensibilidade do sistema ao ruído. Escolha valores de K_d entre 0 e 20 e interprete os resultados.
- d) Modifique o controlador PID discreto, de modo a tornar o sistema mais imune ao ruído. Verifique se obtém algumas melhorias de desempenho face a alguma das fontes de ruído. Investigue, e compare com os resultados obtidos na alínea anterior, o efeito do termo derivativo na sensibilidade do sistema ao ruído

PROBLEMA 3.5

Considere o sistema de controlo representado na Figura 3.17. O Lugar das Raízes do sistema sob controlo proporcional é dado na Figura 3.18. Determine os ganhos do

controlador PID, a aplicar no sistema de controlo, utilizando o 2º método de sintonização de Ziegler-Nichols. Verifique, com a ajuda do Matlab/Simulink, a resposta a uma referência a escalo. Observe se a sobrelevação máxima ultrapassa os 25%. Caso isso aconteça, ajuste os parâmetros de forma “calculada” de modo a reduzi-la para um valor próximo dos 25%.



Figura 3. 17. - Diagrama de blocos do sistema de controlo

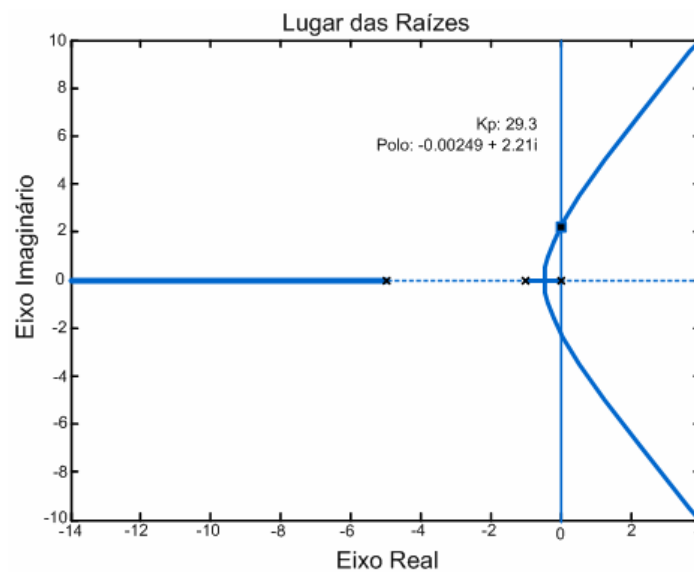


Figura 3. 18. - Lugar das raízes para o sistema de controlo da Figura 3.17, sob controlo proporcional

PROBLEMA 3.6

Considere agora a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)(s+5)}$$

Prove que neste caso não pode aplicar o 2º método de sintonização de Ziegler-Nichols.

PROBLEMA 3.7

Considere agora a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{12}{s^2 + 7s + 12}$$

- a) Projecte o controlador PID analógico que permita obter as seguintes características de malha fechada: frequência natural não amortecida igual a 2 rad/s e factor de amortecimento igual a 0.5.
- b) Obtenha o controlador PID discreto com função de transferência (3.11) e, através da simulação em ambiente Matlab/Simulink, faça uma análise comparativa ao desempenho dos sistemas com o PID discreto e sistema totalmente analógico.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE SLITs DISCRETOS. CRITÉRIO DE JURY. LUGAR DAS RAÍZES.

URBANO NUNES
DEEC-FCTUC

4.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo de exercícios vamos abordar dois instrumentos de análise de SLITs discretos:

- Teste de estabilidade baseado no critério de Jury
- Lugar das raízes aplicado a SLITs discretos

4.2- TESTE DE ESTABILIDADE DE JURY

Para SLITs contínuos, o critério de Routh-Hurwitz consiste numa técnica simples de testar a estabilidade de sistemas de controlo em malha fechada de ordem não muito elevada.

Uma vez que a fronteira de estabilidade no plano z é diferente da do plano s , o critério de Routh-Hurwitz não pode ser aplicado de forma directa aos sistemas discretos descritos em termos da transformada Z ; pode ser aplicado após uma transformação de semelhança que aplica o círculo unitário no semiplano complexo esquerdo, mas não vamos abordar essa solução.

O critério de estabilidade de Jury consiste num critério de estabilidade para SLITs discretos, similar ao critério de Routh-Hurwitz mas que pode ser aplicado a equações características expressas na transformada Z .

Existem outros critérios para o teste de estabilidade de SLITs discretos, de que é exemplo o teste de Schur-Cohn.

Os métodos são equivalentes sendo o critério de Jury uma apresentação sistemática do teste de Schur-Cohn, razão pela qual nos limitamos a abordar a técnica de Jury.

A partir da equação característica de coeficientes reais do sistema discreto,

$$Q(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0, \quad a_0 > 0, \quad (4.1)$$

compõe-se a matriz de Jury como se exemplifica na Figura 4.1. A primeira e segunda linhas da tabela são constituídas pelos coeficientes de $Q(z)$ em ordem directa e inversa.

A terceira linha obtém-se multiplicando a segunda linha por α_n e subtraindo da primeira. A quarta linha é constituída pelos elementos da terceira linha colocados por ordem inversa. Este método é então repetido até se terem construído $2n + 1$ linhas. A última linha é constituída por um único elemento.

$Q(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$ $a_i \rightarrow {}^n a_i$					
${}^n a_0$	${}^n a_1$	\dots	${}^n a_{n-1}$	${}^n a_n$	
${}^n a_n$	${}^n a_{n-1}$	\dots	${}^n a_1$	${}^n a_0$	$\alpha_n = \frac{{}^n a_n}{{}^n a_0}$
${}^{n-1} a_0$	${}^{n-1} a_1$	\dots	${}^{n-1} a_{n-1}$		
${}^{n-1} a_{n-1}$	${}^{n-1} a_{n-2}$	\dots	${}^{n-1} a_0$		$\alpha_{n-1} = \frac{{}^{n-1} a_{n-1}}{{}^{n-1} a_0}$
${}^{n-2} a_0$	${}^{n-2} a_1$	\dots	${}^{n-2} a_{n-2}$		
${}^{n-2} a_{n-2}$	${}^{n-2} a_{n-3}$	\dots	${}^{n-2} a_0$		
\vdots					
${}^0 a_0$					

Figura 4. 1. - Tabela para teste de estabilidade de Jury

em que

$$\left| \begin{array}{l} {}^{k-1} a_i = {}^k a_i - \alpha_k \cdot {}^k a_{k-i} \\ \alpha_k = \frac{{}^k a_k}{{}^k a_0} \end{array} \right.$$

TEOREMA (CRITÉRIO DE JURY)

Se $a_0 > 0$, a equação $Q(z) = 0$ tem todas as raízes no interior do círculo unitário, se e só se todos os coeficientes ${}^k a_0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ na tabela de Jury forem positivos, i.e.

$${}^k a_0 > 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.2)$$

Se nenhum dos ${}^k a_0$ for nulo, o número de raízes fora do círculo unitário é igual ao número de coeficientes ${}^k a_0$ negativos.

OBSERVAÇÃO 1: CONDIÇÕES NECESSÁRIAS (NÃO SUFICIENTES)

Prova-se que

$$\begin{aligned} Q(1) &> 0 \\ (-1)^n Q(-1) &> 0 \\ |a_n| &< a_0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

são condições necessárias para que os zeros de $Q(z)$ estejam todos dentro do círculo unitário (i.e. condições necessárias para que o sistema com polinómio característico $Q(z)$ seja estável). Assim, devem testar-se estas condições antes de se formar a tabela (ou matriz) de Jury.

OBSERVAÇÃO 2: CONDIÇÕES NECESSÁRIAS E SUFICIENTES PARA SLITS DE 2ª ORDEM

Para sistemas de 2ª ordem, as condições (4.3) definem o conjunto de condições necessárias e suficientes que uma vez satisfeitas garantem a estabilidade do sistema.

APLICAÇÃO DO CRITÉRIO DE JURY

Em resumo, o critério de Jury pode ser aplicado da seguinte forma:

- Testar as condições (4.3). Parar com o processo de análise se alguma destas condições não for satisfeita.
- Construir a matriz de Jury e ir testando as condições (4.2) à medida que cada linha é calculada. Parar se alguma condição não for satisfeita.

4.2.1 - EXEMPLO 1

Considere a seguinte equação característica, de coeficientes reais, de 2ª ordem:

$$Q(z) = z^2 + a_1 z + a_2 = 0 \quad (4.4)$$

As restrições (4.3) conduzem às seguintes condições necessárias e suficientes para que as raízes da equação estejam contidas no círculo unitário:

$$1- Q(1) > 0 \Rightarrow 1 + a_1 + a_2 > 0$$

$$2- (-1)^2 Q(-1) > 0 \Rightarrow 1 - a_1 + a_2 > 0$$

$$3- |a_n| < a_0 \Rightarrow |a_2| < 1$$

de onde resulta

$$\begin{cases} a_2 > -1 + a_1 \\ a_2 > -1 - a_1 \\ |a_2| < 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

Na Figura 4.2 representa-se a área definida pelas condições (4.5) função dos coeficientes a_1 e a_2 , que definem o conjunto de valores que a_1 e a_2 podem assumir mantendo-se o sistema de 2ª ordem estável.

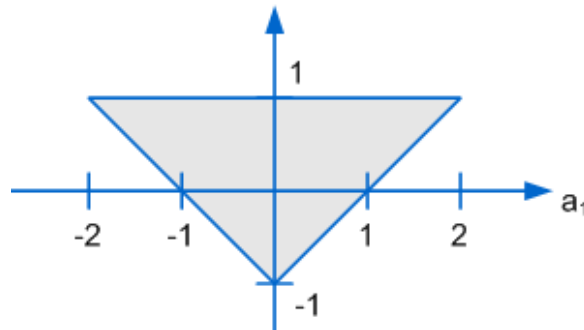


Figura 4. 2. - Área de estabilidade para o SLIT discreto com equação característica (4.4)

Vejamos que condições se obteriam a partir da matriz de Jury:

1	a_1	a_2	$\alpha_2 = a_2$
a_2	a_1	1	
$1 - a_2^2$			$\alpha_1 = \frac{a_1}{1 + a_2}$
$a_1(1 - a_2)$		$1 - a_2^2$	
0a_0			

em que

$${}^0a_0 = 1 - a_2^2 - \frac{a_1^2(1 - a_2)}{1 + a_2}$$

Para que as raízes estejam dentro do círculo unitário, são necessárias e suficientes as seguintes condições

$$\begin{cases} 1 - a_2^2 > 0 \\ {}^0a_0 > 0 \end{cases}$$

o que conduz às condições de estabilidade para um SLIT discreto de 2ª ordem:

$$\begin{cases} a_2 < 1 \\ a_2 > -1 + a_1 \\ a_2 > -1 - a_1 \end{cases} \quad (4.6)$$

As condições (4.6) são iguais às condições (4.5), o que confirma a **Observação 2** (associada ao critério de Jury). Note-se que no conjunto de restrições é suficiente a condição $a_2 < 1$ (em vez de $|a_2| < 1$).

4.2.2 - EXEMPLO 2

Considere o sistema de controlo discreto da Figura 4.3, com

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{0.01873z + 0.01752}{(z-1)(z-0.8187)} \\ H(z) &= 1 \end{aligned} \quad (4.7)$$



Figura 4. 3. - Sistema de controlo discreto

Vamos determinar a gama de valores que o ganho proporcional K pode assumir sem levar o sistema à instabilidade. A equação característica do sistema em malha fechada é

$$1 + KGH(z) = 0 \quad (4.8)$$

Substituindo as funções de transferência (4.7), obtém-se

$$z^2 + (0.01873K - 1.81873)z + (0.81873 + 0.01752K) = 0 \quad (4.9)$$

Da restrição $a_2 < 1$ (4.6) resulta:

$$(0.81873 + 0.01752K) < 1$$

ou seja $K < 10.346$. Da restrição $a_2 > -1 + a_1$ resulta $K < 3006$, e da 3ª restrição $a_2 > -1 - a_1$ resulta $K > 0$.

Assim, o sistema é estável para

$$0 < K < 10.346 \quad (4.10)$$

O ganho $K = 10.346$ coloca o sistema na margem da estabilidade e a equação característica assume a expressão:

$$z^2 - 1.6249z + 1 = 0$$

cujas raízes são:

$$z = 0.8125 \pm j0.5830 = 1 \cdot e^{\pm j0.6224}$$

o que significa que

$$\Omega = \omega h = 0.6224 \text{ rad}$$

OBSERVAÇÃO: O sistema discreto $G(z)$ (4.7) é equivalente discreto do SLIT contínuo

$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ (veja-se o Problema 2.2) para um período de amostragem $h = 0,2$ s.

4.3 - LUGAR DAS RAÍZES

Na Figura 4.4 apresentam-se as regras mais importantes para a construção do Lugar das Raízes (LR) tendo por referência sistemas de controlo discretos com a estrutura representada na Figura 4.3.

Relembra-se que a equação característica em malha fechada destes sistemas é dada pela expressão (4.8).

A construção do LR para sistemas discretos e contínuos é semelhante. **No caso dos sistemas discretos aplica-se uma regra extra** (regra 7 exposta na Figura 4.4) que consiste na determinação da intercepção do LR com o círculo unitário.

1 - O LR tem origem nos pólos de $GH(z)$ e termina nos zeros de $GH(z)$.
2 - Parte do eixo real que pertence ao LR: um ponto do eixo real pertence ao LR se à sua direita existir um número ímpar de pólos e zeros.
3 - O LR é simétrico relativamente ao eixo real.
4 - O número de assíptotas é igual ao número de pólos de $GH(z)$ menos o número de zeros de $GH(z)$ (i.e $n-m$ assíptotas), com ângulos dados por $(2k+1)\pi/(n-m)$, $k=0,1,\dots,(n-m-1)$.
5 - As assíptotas interceptam o eixo real em $\sigma = \frac{\sum \text{polos de } GH(z) - \sum \text{zeros de } GH(z)}{n-m}$
6 - Os pontos de intercepção do LR com o eixo real (pontos de confluência/dispersão) são dados pelas raízes de $\frac{d[GH(z)]}{dz} = 0$ ou de forma equivalente, $D(z)\frac{dN(z)}{dz} - N(z)\frac{dD(z)}{dz} = 0, \quad GH(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$
7 - Os pontos de intercepção do LR com o círculo unitário podem ser determinados por construção gráfica ou através do teste de estabilidade de Jury.
8 - Os pontos de intercepção do LR com o eixo imaginário podem ser determinados através do teste de estabilidade de Routh-Hurwitz.

Figura 4. 4. - Regras de construção do lugar das raízes (sistemas discretos)

4.3.1 - EXEMPLO

Considere-se o sistema discreto da Figura 4.', com

$$H(z) = 1 \quad e \quad G(z) = \frac{0,01873z + 0,01752}{(z-1)(z-0,8187)} \quad (4.11)$$

A partir da equação característica do sistema em malha fechada

$$1 + KGH(z) = 1 + 0,01873K \frac{(z + 0,9356)}{(z-1)(z-0,8187)} \quad (4.12)$$

Constrói-se o LR seguindo os seguintes passos:

- Pontos iniciais e finais $n = 2: \{p_1 = 1; p_2 = 0.8187\}$ $m = 1: \{z_1 = -0.9356; z_2 = \infty\}$
- LR sobre o eixo real $(-\infty; -0.9356]$, $[0.8187; 1]$
- Existe uma assíptota com ângulo de 180°
- Pontos de confluência/dispersão

Estes pontos que se obtêm de

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{0.01873z + 0.01752}{(z-1)(z-0.8187)} \right] = 0$$

$$(z^2 - 1.81873z + 0.81873)0.01873 - (0.01873z + 0.01752)(2z - 1,8187) = 0$$

$$0.0187z^2 - 0.0350z + 0.0472 = 0$$

ocorrem em

$$\{z = 0.907\}$$

e

$$\{z = -2.78\}$$

- Pontos de intercepção com o círculo de raio unitário

Determinam-se aplicando o critério de Jury à equação característica. Esse estudo já foi realizado na secção 4.1, onde se concluiu que o sistema é estável para (4.10),

$$0 < K < 10.346$$

Assim, o sistema é colocado na margem de estabilidade com $K = 10,346$, tendo nessa situação os pólos de malha fechada:

$$z = 0.8125 \pm j0.5830 = 1 \cdot e^{\pm j0.6224}$$

Pontos de intercepção com o eixo imaginário

Determinam-se aplicando o critério de Routh à equação característica (4.9) que voltamos a rescrever para facilidade de leitura:

$$z^2 + (0.01873K - 1.81873)z + (0.81873 + 0.01752K) = 0$$

de onde se compõe a matriz de Routh

$$\begin{array}{c|cc} z^2 & 1 & 0.81873 + 0.01752K \\ z^1 & 0.01873K - 1.81873 & \\ z^0 & 0.81873 + 0.01752K & \end{array}$$

O ponto de intercepção com o eixo imaginário corresponde à condição:

$$0.01873K - 1.81873 = 0$$

$$\Rightarrow K = 97$$

A localização no plano z , sobre o eixo imaginário, calcula-se a partir da equação auxiliar

$$z^2 + 0.81873 + 0.01752 \times 97 = 0$$

de onde resulta

$$z = \pm 1.587j$$

Na Figura 4.5 representa-se o LR, obtido com o Matlab, salientando-se os pontos de maior importância: o ponto de intercepção do LR com o círculo unitário que ocorre

para $K \approx 10.4$, o ponto de confluência/dispersão do LR com o eixo real que ocorre para pólo duplo em $z = -2.78$ para $K \approx 394$, e o pontos de intercepção com o eixo imaginário que ocorrem para $K \approx 97$.

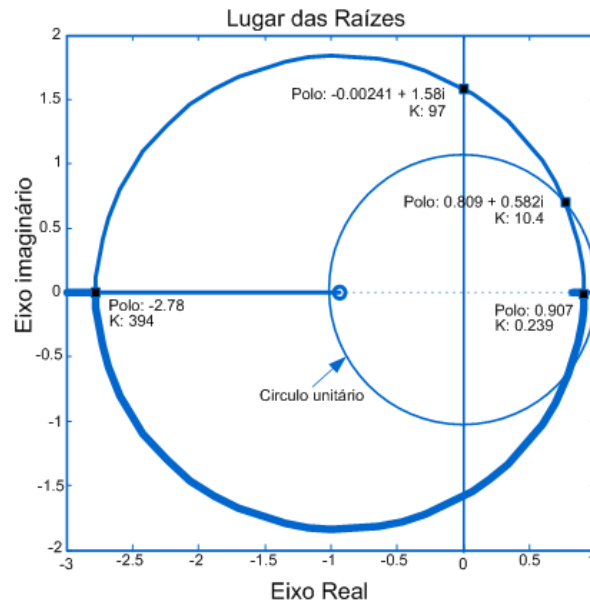


Figura 4. 5. - Lugar das raízes

4.4 - PROBLEMAS RESOLVIDOS

PROBLEMA 4.1

Considere o sistema de controlo representado na Figura 4.6, onde o controlador $G_c(z)$ e o cálculo da referência são implementados num computador digital.

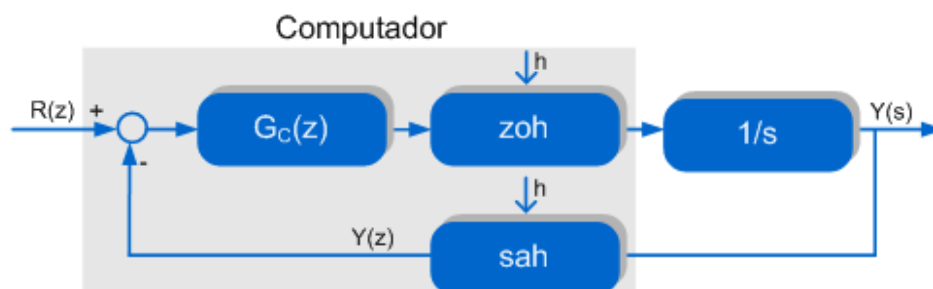


Figura 4. 6. - Sistema de controlo por computador

Assuma que o algoritmo de controlo é dado por

$$u((k+1)h) = K_p (r(k-d)h - y(k-d)h) \quad \text{com } d \in \mathbb{N}$$

em que $K_p > 0$ e d representa o número de intervalos de amostragem que constituem o atraso introduzido no sistema pelo processamento computacional. Dizemos que d representa o número de atrasos puros.

Calcule o valor máximo do ganho K_p para o qual o sistema em malha fechada é estável, para:

a) $d = 0$

b) $d = 1$ (considere neste caso $h = 1 \text{ s}$)

RESOLUÇÃO

a) O modelo discreto do processo, precedido por zoh, obtém-se directamente da Tabela A.6 (Apêndice A):

$$G(z) = \frac{h}{z-1}$$

Com $d = 0$, temos um atraso natural de um período de amostragem introduzido pelo processamento computacional (controlador)

$$zU(z) = K_p E(z)$$

em que

$$E(z) = R(z) - Y(z)$$

Então

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p z^{-1}$$

e o sistema em malha fechada tem a seguinte equação característica:

$$1 + G_c(z)G(z) = 0$$

$$1 + K_p z^{-1} \frac{h}{z-1} = 0$$

$$z(z-1) + K_p h = 0$$

$$z^2 - z + K_p h = 0 \quad (4.13)$$

Testando as condições de estabilidade (4.6), que derivam do critério de Jury para sistemas de 2ª ordem,

$$\begin{cases} K_p h < 1 \\ K_p h > -1 + 1 \\ K_p h > -1 - 1 \end{cases}$$

Concluimos pela primeira inequação que o valor máximo do ganho do controlador para que o sistema não fique instável é

$$K_{p_{\max}} = \frac{1}{h}$$

Note-se que por definição consideramos K_p sempre positivo, i.e. $K_p > 0$, pois só nestas condições a realimentação no sistema de controlo será mantida negativa.

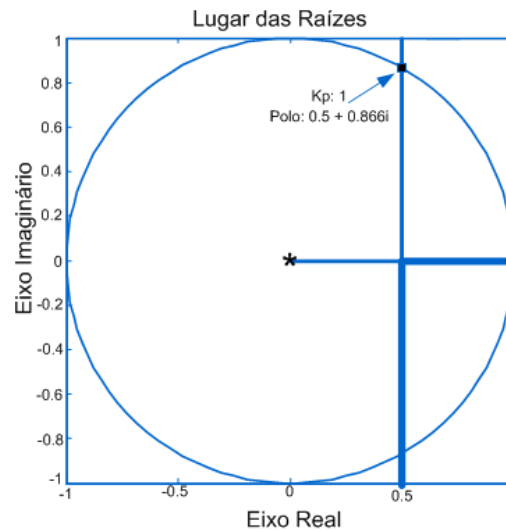


Figura 4. 7. - Lugar das Raízes para $d = 0$; $h = 1$.

em que

$$\begin{aligned} {}^2a_0 &= 1 - K_p^2 \\ {}^1a_0 &= {}^2a_0 - \frac{K_p^2}{{}^2a_0} \\ {}^0a_0 &= {}^2a_0 - \frac{K_p^2}{{}^2a_0} - \alpha_1 \left(1 - \frac{K_p}{{}^2a_0}\right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

O sistema é estável para a gama de valores de K_p que dê garantia de que todos os ${}^i a_0, \{i = 0, 1, 2\}$ da matriz de Jury são positivos. Na Figura 4.9, representam-se os valores desses elementos função do ganho proporcional, de onde se conclui que o sistema de controlo é estável na gama

$$0 < K < 0.61$$

Esta conclusão é confirmada no traçado do Lugar das Raízes apresentado na Figura 4.10, que pode ser obtido pelo seguinte Script de Matlab:

```
h=1
num=[h]
den=[1 -1 0 0]
axis('square')
rlocus(num,den)
```

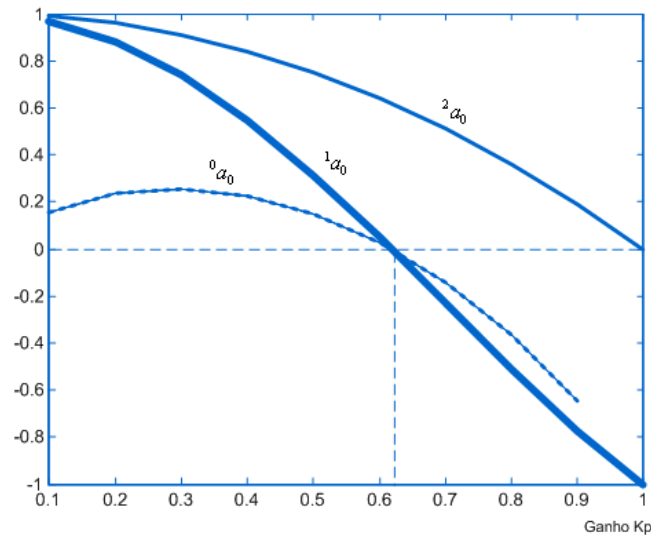


Figura 4. 9. - Representação gráfica dos elementos ${}^i a_0, \{i = 0, 1, 2\}$

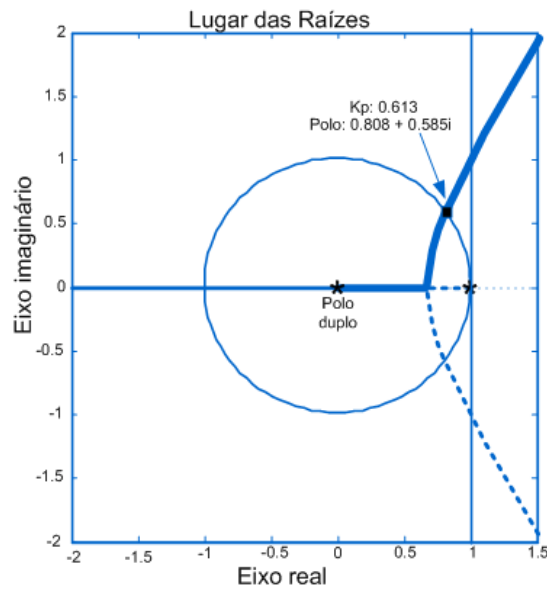


Figura 4. 10. - Lugar das Raízes para $d = 1$; $h = 1$

4.5 – PROBLEMAS PROPOSTOS

PROBLEMA 4.2

Considere o sistema de controlo analógico representado na Figura 4.11.

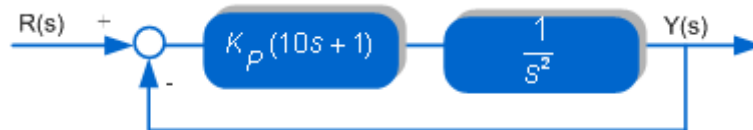


Figura 4. 11. - Diagrama de blocos do sistema de controlo analógico

- Determine o valor de K_p que faz com que o sistema em malha fechada seja caracterizado por um pólo duplo. Determine o valor desse pólo.
- Considere que se efectuou a substituição do controlador PD analógico por um discreto “aproximado”, tal como se apresenta na Figura 4.12, em que $K_D = 10K_p$.

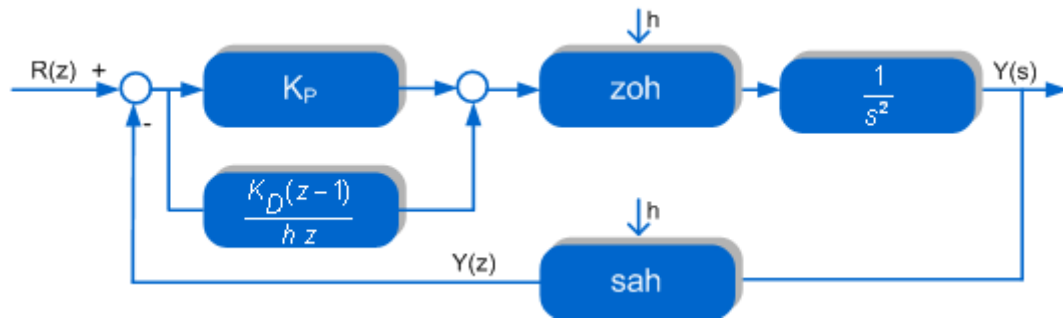


Figura 4. 12. - Diagrama de blocos do sistema com controlador PD discreto

Para o valor de K_p usado na alínea a) e fazendo $h = 0.2 \text{ s}$, determine a equação característica na transformada Z do novo sistema.

Diga quais são os pólos de malha fechada e obtenha as características (factor de amortecimento e frequência natural não amortecida) que lhes correspondem em espaço contínuo.

c) Faça o estudo de estabilidade do sistema de controlo da Figura 4.12.

PROBLEMA 4.3

No exemplo 2, secção 4.2.2, é feita a análise de estabilidade do sistema discreto da Figura 4.3 com $G(z)$ dado pela expressão (4.7).

a) Verifique que esse $G(z)$ é equivalente discreto do SLIT contínuo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (4.16)$$

precedido por zoh, para um período de amostragem $h = 0.2 \text{ s}$.

b) Determine o $G(z)$ equivalente de (4.16) considerando agora um período de amostragem $h = 0.5 \text{ s}$.

c) Considere de novo o sistema de controlo discreto da Figura 4.3, mas agora com $G(z)$ dado pelo resultado da alínea b). $H(z)$ mantém-se unitário. Determine a gama de valores que o ganho proporcional K pode assumir, nesta nova situação, sem levar o sistema à instabilidade.

d) Compare a gama de valores agora obtida na alínea c) para $h = 0.5 \text{ s}$ com a gama obtida para $h = 0.2 \text{ s}$ (4.10):

$$0 < K < 10.346$$

OBSERVAÇÃO: para um novo aumento do período de amostragem, por exemplo para $h = 1 \text{ s}$ obtém-se o equivalente discreto

$$G(z) = \frac{0.368(z + 0.717)}{(z - 1)(z - 0.368)}$$

e uma gama de valores para K , que garante a estabilidade do sistema em malha fechada, mais reduzida:

$$0 < K < 2.39 .$$

PROBLEMA 4.4

Considere o sistema de controlo representado na Figura 4.13.

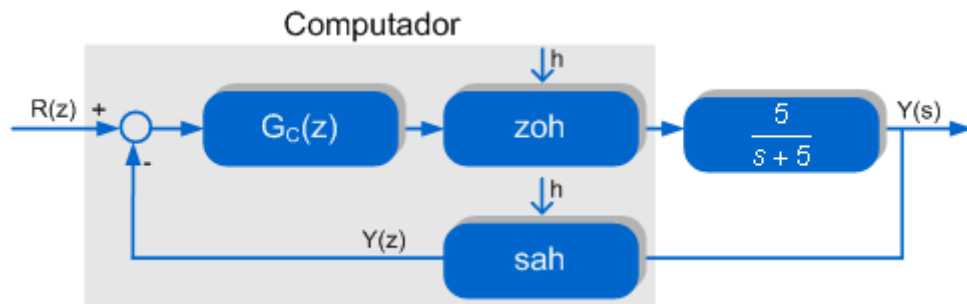


Figura 4. 13. - Diagrama de controlo por computador

Assuma que o algoritmo de controlo é do tipo proporcional dado por:

$$\mu((k+1)h) = K_p (r(k-d)h - y(k-d)h) \quad \text{com } d \in \mathbb{N}$$

em que $K_p > 0$ e d representa o “número de atrasos puros” (veja-se o Problema 4.1)

a) Escreva a função de transferência em malha fechada

$$H_{cl} = \frac{Y(z)}{R(z)}$$

para o caso genérico de um controlador proporcional que introduz d "atrasos puros".

b) Considerando que o tempo de computação do controlador proporcional é $T_c = 0,1 h$, calcule a gama de valores do ganho proporcional para a qual o sistema é estável.

CAPÍTULO 5

MODELO DE ESTADO: SISTEMAS CONTÍNUOS E DISCRETOS

Urbano Nunes

5.1 – INTRODUÇÃO

Este Capítulo é dedicado à representação de SLITs (lineares ou incrementalmente lineares) contínuos e discretos, pelo **modelo de estado**. Os exercícios propostos visam familiarizar o leitor com algumas das propriedades e conceitos envolvidos no modelo de estado. Descreve-se a obtenção do modelo de estado de dois sistemas contínuos clássicos: motor cc controlado pela tensão do induzido e pêndulo invertido movimentado por carro.

5.2 – MODELO DE ESTADO: SISTEMAS CONTÍNUOS

De um modo geral, qualquer sistema linear de ordem n pode ser representado matematicamente através de um conjunto de n **variáveis de estado** linearmente independentes, pelo **modelo de estado** definido por duas equações da forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

em que

- $u(t) \in \mathbb{R}^m$: sistema com m entradas,
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$: sistema com p saídas,
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$: sistema de ordem n .

A primeira equação em (5.1) representa a equação de estado do sistema. A matriz A , de dimensão $n \times n$, designa-se por **matriz da dinâmica** ou matriz do sistema. Para sistemas com uma única entrada, B é um vector de dimensão n , designado **vector de entrada** ou **vector de controlo**. A segunda equação em (5.1) representa a **equação de saída**. Para sistemas com uma única saída, C é um vector linha de dimensão n , designado **vector de saída**. D é uma matriz de “feedforward” geralmente nula. Em sistemas SISO, D é uma grandeza escalar.

5.3 – MODELO DE ESTADO: SISTEMAS DISCRETOS

O equivalente discreto do modelo de estado contínuo (5.1) é

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad (5.2)$$

em que

- $u(k) \in \mathbb{R}^m$: sistema com m entradas,
- $y(k) \in \mathbb{R}^p$: sistema com p saídas,
- $x(k) \in \mathbb{R}^n$: sistema de ordem n .

De modo similar ao caso contínuo, a matriz Φ , de dimensão $(n \times n)$, designa-se por matriz da dinâmica ou matriz do sistema. Para sistemas com uma única entrada, Γ é um vector de dimensão n , designado vector de entrada ou vector de controlo. Para sistemas com uma única saída, C é um vector linha de dimensão n , designado vector de saída. Em sistemas SISO, D é uma grandeza escalar. De um modo geral D é nulo.

5.4 - MODELO DO MOTOR CC CONTROLADO POR TENSÃO DO INDUZIDO

A Figura 5.1 representa o modelo de um motor de corrente contínua, vulgarmente conhecido por motor cc. O binário gerado electricamente no veio do motor é função da corrente do induzido e da corrente de excitação:

$$\tau_e(t) = K_m \cdot i_a(t) i_f(t) \quad (5.3)$$

em que K_m é uma constante de acoplamento electromagnético. A velocidade do veio gera uma força contra-electromotriz induzida expressa por:

$$v_e(t) = e_g(t) = K_m \cdot i_f(t) \omega_m(t) \quad (5.4)$$

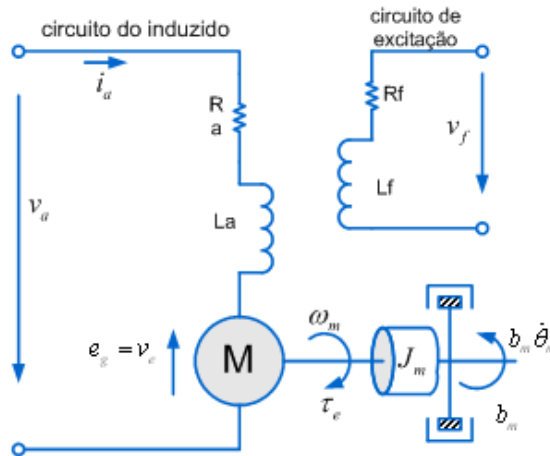


Figura 5.1. - Modelo de um motor de corrente contínua

De acordo com a figura os parâmetros do sistema são os seguintes:

J_m	-	Momento de inércia do veio do motor
b_m	-	Coeficiente de atrito
R_a	-	Resistência interna do circuito do induzido
L_a	-	Indutância do circuito do induzido
K_m	-	Constante de acoplamento electromagnético
ω_m	-	Velocidade do veio do motor
θ_m	-	Posição angular do veio do motor

Figura 5. 2. - Parâmetros do modelo do motor cc

As equações (5.3) e (5.4) são equações não lineares. Para as tornar lineares pode optar-se por:

- **Motor controlado pelo induzido:** fazer i_f constante, controlar a velocidade e posição do veio do motor através da corrente no circuito do induzido;
- **Motor controlado por campo:** fazer i_a constante, controlar a velocidade e posição do veio do motor através da corrente no circuito de excitação.

Neste estudo vamos considerar apenas o modelo do motor controlado pelo induzido governado pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 1. \quad \tau_e(t) &= K_1 i_a(t) \\
 2. \quad K_1 &= K_m I_f = cte \\
 3. \quad v_e(t) &= K_2 \cdot \omega_m(t)
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

As equações têm o seguinte significado:

1. o binário do motor, $\tau_e(t)$, é proporcional à corrente do induzido, $i_a(t)$;
2. a constante de proporcionalidade é K_1 ;
3. a tensão $v_e(t)$ (força contra electromotriz) é proporcional à velocidade do veio $\omega_m(t)$ (constante de proporcionalidade, K_2).

Podemos ter um comando por corrente ou um comando por tensão (**motor controlado pela tensão do induzido**). Neste último caso o sinal de comando é um sinal em tensão que está relacionado com a corrente que circula no induzido pela expressão:

$$V_a(s) - V_e(s) = (R_a + sL_a)I_a(s) \quad (5.6)$$

de onde se obtém

$$\frac{I_a(s)}{V_a(s) - V_e(s)} = \frac{1}{R_a + sL_a} \quad (5.7)$$

O binário eléctrico do motor é proporcional à corrente no circuito do induzido

$$T_e(s) = K_1 I_a(s) \quad (5.8)$$

Para a parte mecânica, socorrendo-nos da 2ª lei de Newton obtém-se a equação de movimento do veio do motor (sem carga):

$$J_m \ddot{\theta}_m(t) = \tau_e(t) - b_m \dot{\theta}_m(t) \quad (5.9)$$

que assume a seguinte forma na transformada de Laplace:

$$(s^2 J_m + s b_m) \Omega_m(s) = T_e(s) \quad (5.10)$$

ou seja,

$$\frac{\Omega_m(s)}{T_e(s)} = \frac{1}{s J_m + b_m} \quad (5.11)$$

onde

$$\Omega_m(s) = s \theta_m(s) \quad (5.12)$$

Por outro lado como se expressa na equação (5.4), a velocidade do veio cria uma força contra-electromotriz induzida expressa por

$$V_e(s) = K_2 \Omega_m(s). \quad (5.13)$$

Das equações (5.7), (5.8), (5.11) e (5.13) obtém-se o diagrama de blocos do modelo do motor *cc* representado na Figura 5.3.

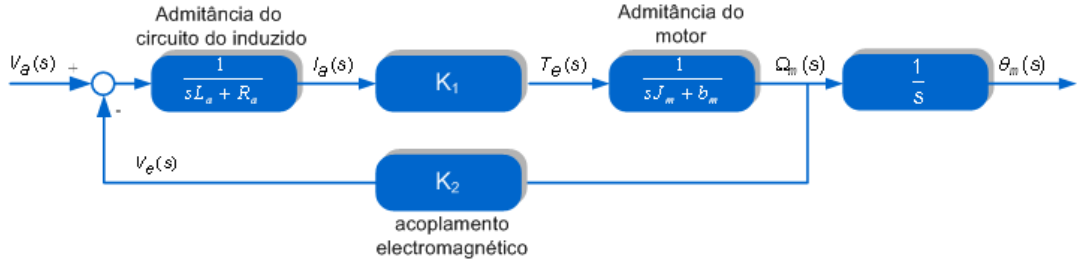


Figura 5. 3. - Diagrama de blocos do motor cc controlado por tensão no induzido

Eliminando $I_a(s)$ das equações (5.7 – 5.11) e (5.13) obtém-se a função de transferência do modelo do motor *cc*, sendo a tensão, $V_a(s)$, a entrada e a velocidade de rotação do veio, $\Omega_m(s)$, a saída:

$$\frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_1}{(R_a + sL_a)(b_m + sJ_m) + K_1K_2} \quad (5.14)$$

Considerando que a indutância, $L_a(s)$, do circuito do induzido é geralmente muito pequena podendo ser desprezada, obtém-se um modelo simplificado de primeira ordem para modelo do motor *cc*,

$$\frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_1}{(sJ_mR_a + b_mR_a) + K_1K_2} \quad (5.15)$$

que é usualmente apresentado na forma

$$\frac{\Omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K}{s + \alpha} = \frac{K_m}{1 + sT_m} \quad (5.16)$$

Onde

$$i) K = \frac{K_1}{R_a J_m} \quad ii) \alpha = \frac{1}{J_m} \left(b_m + \frac{K_1 K_2}{R_a} \right)$$

$$iii) T_m = \frac{1}{\alpha} \quad iv) K_m = \frac{K}{\alpha}$$

No modelo (5.16), T_m representa a constante de tempo do motor e K_m o ganho DC do motor. Por fim, se tivermos como saída a posição angular, obtém-se das equações (5.12) e (5.16) a nova função de transferência:

$$\frac{\theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s(1+sT_m)} = \frac{K_m/T_m}{s(s+1/T_m)} \quad (5.17)$$

REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS DO MODELO DO MOTOR CC CONTROLADO POR TENSÃO NO INDUZIDO

Aplicando a transformada inversa de Laplace a (5.17) resulta a equação diferencial:

$$\ddot{\theta}_m(t) + \frac{1}{T_m} \dot{\theta}_m(t) = \frac{K_m}{T_m} v_a(t) \quad (5.18)$$

Considerando para variáveis de estado a posição angular e a velocidade angular do veio,

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_m \\ x_2 &= \dot{\theta}_m \end{aligned} \quad (5.19)$$

e para variáveis de entrada e de saída, respectivamente $u = v_a$ e $y = \theta_m = x_1$ chega-se ao modelo de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{T_m} \end{bmatrix} u; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

5.5 – PÊNDULO INVERTIDO MOVIMENTADO POR CARRO

A Figura 5.4 ilustra o sistema do pêndulo invertido movimentado por carro. Considera-se a massa do pêndulo concentrada na sua extremidade superior. O movimento do sistema fica definido, de forma única, pelo movimento do carro relativamente ao sistema de coordenadas inercial $\{y, z\}$ e pelo ângulo, θ , que o pêndulo faz com a vertical. O sistema tem dois graus de liberdade, sendo (y, θ) uma escolha adequada para as suas coordenadas generalizadas.

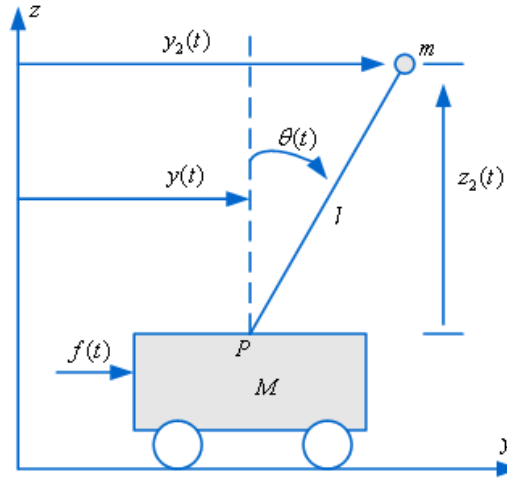


Figura 5. 4. - Pêndulo invertido movimentado por carro

De seguida apresentamos os pontos principais na dedução das equações que descrevem o comportamento dinâmico do sistema [Friedland, 1987], baseada na formulação de Lagrange:

1. Coordenadas generalizadas: (y, θ)
2. A energia cinética do sistema é a soma da energia cinética de cada massa. O carro está confinado a mover-se na direcção horizontal, pelo que a sua energia cinética é dada por:

$$T_1(t) = \frac{1}{2} M \dot{y}^2(t) \quad (5.21)$$

O pêndulo roda em torno do ponto pivot (ponto P na Figura 5.3), movendo-se nas direcções horizontal e vertical, pelo que a sua energia cinética é dada por:

$$T_2(t) = \frac{1}{2} m (\dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)) \quad (5.22)$$

Mas, dada a rigidez do sistema têm-se as seguintes restrições:

$$\begin{cases} y_2(t) = y(t) + l \sin \theta(t) \\ z_2(t) = l \cos \theta(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}_2(t) = \dot{y}(t) + l \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \\ \dot{z}_2(t) = -l \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) \end{cases} \quad (5.23)$$

Deste modo, a energia cinética total é dada por

$$\begin{aligned} T(t) &= T_1(t) + T_2(t) \\ &= \frac{1}{2} M \dot{y}^2(t) + \frac{1}{2} m (\dot{y}^2(t) + 2\dot{y}(t)l\dot{\theta}(t)\cos\theta(t) + l^2\dot{\theta}^2(t)) \end{aligned} \quad (5.24)$$

A única energia potencial está armazenada no pêndulo, sendo expressa por

$$U(t) = mgz_2(t) = mgl \cos\theta(t). \quad (5.25)$$

O Lagrangiano vem dado por

$$L(t) = T(t) - U(t) = \frac{1}{2}(M + m)\dot{y}^2(t) + ml \cos\theta(t)\dot{y}(t)\dot{\theta}(t) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2(t) - mgl \cos\theta(t) \quad (5.26)$$

Tendo em conta as coordenadas generalizadas escolhidas, têm-se as seguintes equações de Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} &= f(t) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= (M + m)\dot{y}(t) + ml \cos\theta(t)\dot{\theta}(t) \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= ml \cos\theta(t)\dot{y}(t) + ml^2\dot{\theta}(t) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -mgl \sin\theta(t) \end{aligned}$$

as equações (5.27) escrevem-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned} (M + m)\ddot{y}(t) + ml \cos\theta(t)\ddot{\theta}(t) - ml \sin\theta(t)\dot{\theta}^2(t) &= f(t) \\ ml \cos\theta(t)\ddot{y}(t) - ml \sin\theta(t)\dot{y}(t)\dot{\theta}(t) + ml^2\ddot{\theta}(t) - mgl \sin\theta(t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

que constituem a representação matemática do sistema (não linear) em estudo. A não linearidade em (5.28) e (5.29) é devida à presença de $\sin \theta$, $\cos \theta$ e dos termos quadráticos em $\dot{\theta}^2$ e $\dot{y}\dot{\theta}$. Se o pêndulo estiver estabilizado, θ será mantido com um valor reduzido, pelo que, nessa condição, se justificam as aproximações

$$\cos \theta \approx 1, \sin \theta \approx \theta \quad (5.29)$$

Por outro lado, assumindo que $\dot{\theta}$ e \dot{y} são mantidos pequenos, os termos quadráticos em (5.28) podem desprezar-se. Usando todas as aproximações anteriores, obtém-se a versão linearizada da dinâmica:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{y}(t) + m\ddot{\theta}(t) = f(t) \\ m\ddot{y}(t) + m\ddot{\theta}(t) - mg\theta(t) = 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

Das equações (5.30) obtém-se um modelo de estado, com $y(t)$ a saída e $f(t)$ a entrada do sistema ($u(t) = f(t)$), escolhendo, por exemplo, as seguintes variáveis de estado (todas com significado físico):

$$x_1(t) = y(t); x_2(t) = \theta(t); x_3(t) = \dot{y}(t); x_4(t) = \dot{\theta}(t) \quad (5.31)$$

Para obter o modelo de estado é necessário transformar o sistema de duas equações de segunda ordem (5.30) num sistema de quatro equações diferenciais de primeira ordem. De (5.31),

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dot{\theta}(t) \end{cases} \quad (5.32)$$

as restantes equações obtêm-se de (5.30), após algumas manipulações algébricas simples,

$$\begin{cases} \dot{x}_3(t) = \ddot{y}(t) = -\frac{mg}{M}\theta(t) + \frac{1}{M}u(t) \\ \dot{x}_4(t) = \ddot{\theta}(t) = \left(\frac{M+m}{Ml}\right)g\theta(t) - \frac{1}{Ml}u(t) \end{cases} \quad (5.33)$$

Finalmente, de (5.32) e (5.33) é imediata a escrita do modelo de estado:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -mg/M & 0 & 0 \\ 0 & (M+m)g/Ml & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/M \\ -1/Ml \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

5.6 – PROBLEMAS RESOLVIDOS

PROBLEMA 5.1

Considere um sistema linear contínuo (precedido por um “zoh”) cujo equivalente discreto, para um período de amostragem $h=1s$ é representado por

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & -0,61 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0,6 \end{bmatrix} x(k)$$

a) Identifique a **forma canónica** da equação em espaço de estados. Com base nessa identificação escreva a função de transferência $H(z)$ do sistema discreto.

b) Determine o polinómio característico do sistema contínuo.

c) A Figura 5.5 apresenta as respostas de frequência dos sistemas discreto e contínuo. Sabendo que a função de transferência do sistema contínuo é da forma $H(s) = (b_1s + b_2)/(s^2 + a_1s + a_2)$ dê, justificando, uma estimativa para o coeficiente b_2 .

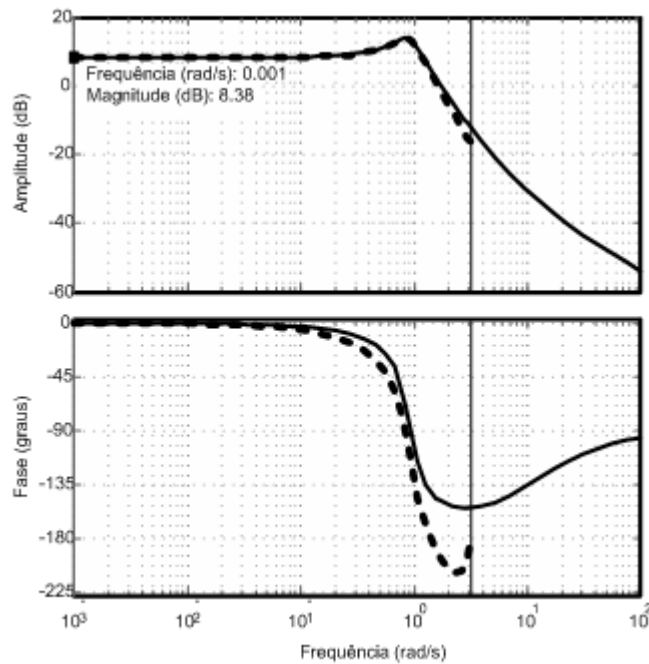


Figura 5.5. - Respostas de frequência dos sistemas discreto e contínuo

RESOLUÇÃO

a) O sistema está representado na forma canónica da controlabilidade, pelo que se conclui por simples observação que a sua função de transferência é

$$H(z) = \frac{z + 0.6}{z^2 - z + 0.61}$$

Trata-se de um sistema de 2ª ordem discreto com:

$$\left| \begin{array}{l} 1 \text{ zero: } z = -0.6 \\ 2 \text{ pólos: } z_{1,2} = +0.5 \pm j0.6 = re^{\pm j\theta} \end{array} \right.$$

em que $r = 0.781$ e $\theta = 0.876 \text{ rad}$.

b) Tratando-se de um sistema de 2ª ordem, o factor de amortecimento e a frequência natural não amortecida são:

$$\zeta = \frac{-\ln r}{\sqrt{(\ln r)^2 + \theta^2}} = 0.2716$$

$$w_n = \frac{-\ln r}{h \cdot \zeta} = 0.9102$$

a que corresponde o polinómio característico

$$s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2 \Rightarrow s^2 + 0.4943s + 0.8286$$

c) Sabe-se do enunciado, que a função de transferência do sistema contínuo é da forma

$$H(s) = \frac{b_1 s + b_2}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

em que a_1 e a_2 são conhecidos da alínea anterior. O ganho estático é dado no gráfico da característica de amplitude da resposta em frequência:

$$\text{ganho}_{dc} \Big|_{dB} \approx 8.38dB = 20 \log(\text{ganho}_{dc})$$

$$\Rightarrow \text{ganho}_{dc} = 10^{0.419} = 2.624$$

Da função de transferência o ganho estático (para a frequência $\omega = 0$) é dado por:

$$\text{ganho}_{dc} = \frac{b_2}{a_2}$$

então

$$b_2 = \text{ganho}_{dc} \times a_2 = 2.624 \times 0.8286 = 2.174$$

Sugestão: Verifique, recorrendo ao MatLab, que a função de transferência do sistema contínuo é

$$H(s) = \frac{0.1935s + 2.173}{s^2 + 0.4943s + 0.8286}$$

PROBLEMA 5.2

Considere o sistema em cascata da Figura 5.6 que representa um compensador aplicado a um processo instável.

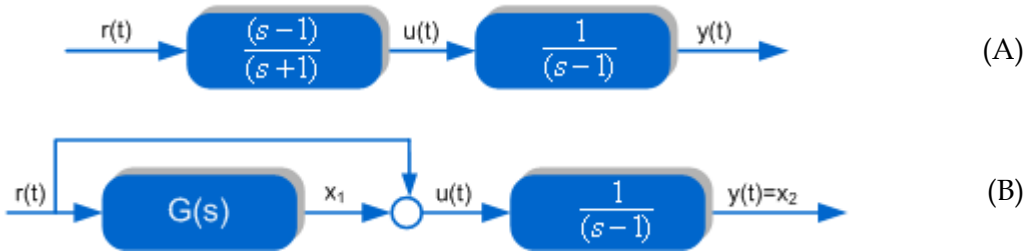


Figura 5. 6. - Sistema de controlo em malha aberta

Vamos analisar se o sistema é, ou não, controlável tendo em conta que o compensador está projectado para realizar um cancelamento matematicamente exacto do pólo instável do processo. Para tal resolva as seguintes alíneas:

- Determine a função de transferência $G(s)$ (Figura 5.6 (B)) de modo que os sistemas representados pelos diagramas de blocos (A) e (B) sejam equivalentes.
- Considerando o vector de estado $x = [x_1 \ x_2]^T$, determine a representação do sistema em cascata no espaço de estados. Discuta a controlabilidade do sistema.

RESOLUÇÃO

- O compensador do sistema (A) pode ser expandido na forma

$$\frac{s-1}{s+1} = 1 + \frac{-2}{s+1}$$

O diagrama de blocos (A) pode ser redesenhado na forma (B) com a seguinte função de transferência

$$G(s) = \frac{X_1(s)}{R(s)} = \frac{-2}{s+1} \quad (5.34)$$

- De (5.34) obtemos a primeira equação diferencial de primeira ordem do modelo de estado do sistema em cascata,

$$sX_1(s) + X_1(s) = -2R(s)$$

logo

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - 2r(t).$$

Do diagrama de blocos (B) obtém-se a segunda equação diferencial do modelo de estado

$$\begin{cases} \frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{1}{s-1} \\ U(s) = X_1(s) + R(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX_2(s) = X_2(s) + X_1(s) + R(s) \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) + x_1(t) + r(t) \end{cases}$$

Então, o modelo de estado do sistema em cascata é

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (5.35)$$

O sistema será completamente controlável sse a matriz de controlabilidade

$$W_c = [B \mid AB]$$

tiver característica completa.

Sendo

$$W_c = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Então $\det(W_c) = 0$ pelo que a matriz não tem característica completa e por conseguinte o sistema em cascata não é completamente controlável.

PROBLEMA 5.3

Considere o sistema de controlo representado pelos diagramas de blocos da Figura 5.7. Considere ainda que o processo $G(s)$ tem a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

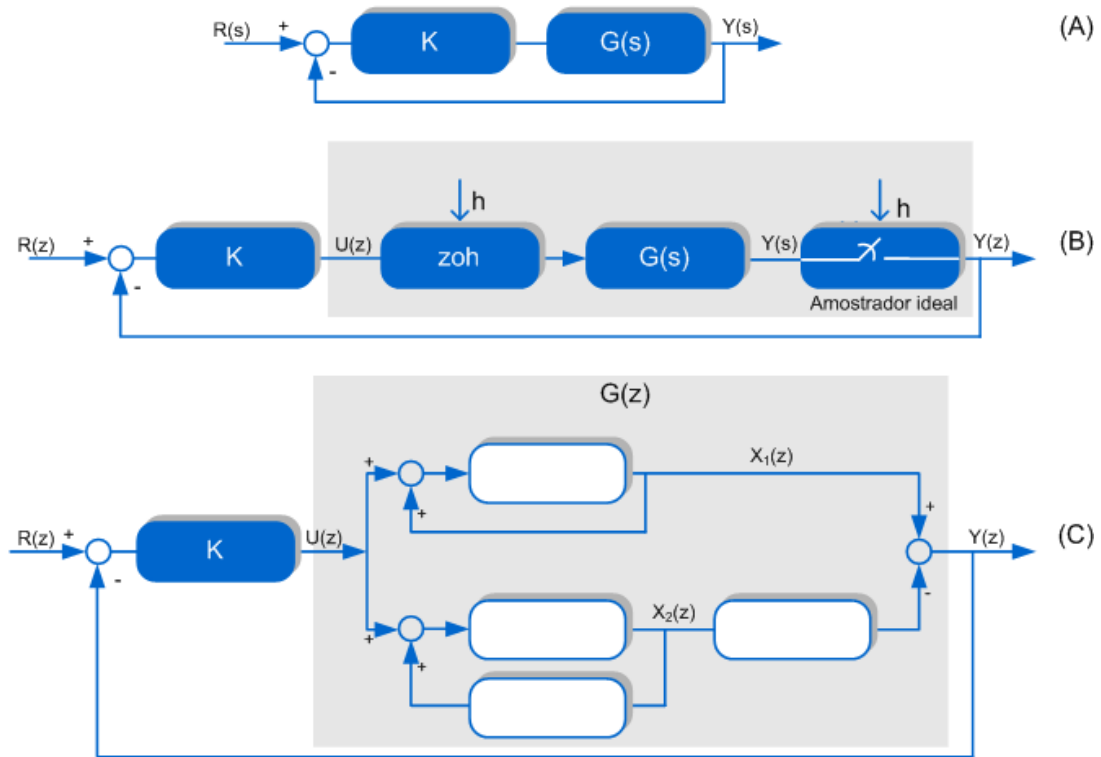


Figura 5. 7. - Diagrama de blocos do sistema de controlo

- Determine o factor de amortecimento ζ e w_n do sistema (A) em malha fechada para $K = 0.391$.
- Determine o equivalente discreto de $G(s)$, precedido por ZOH, considerando um período de amostragem $h = 1\text{ s}$. Determine o ζ e w_n do equivalente contínuo do sistema (B) continuando a considerar $K = 0.391$.
- Determine os conteúdos dos blocos do sistema (C), de modo que as representações (B) e (C) sejam equivalentes.
- Obtenha o modelo de estado do sistema completo com saída $Y(z)$ e entrada $R(z)$.
- Usando o Simulink, obtenha as respostas dos sistemas (A), (B) e (C) para um escalão unitário. Construa um 4º diagrama de blocos que represente um modelo discreto equivalente ao do diagrama (C) recorrendo ao bloco Discrete State Space do Simulink.

RESOLUÇÃO

a) A equação característica do sistema em malha fechada é

$$\begin{aligned} 1 + KG(s) &= 0 \\ 1 + \frac{K}{s(s+1)} &= 0 \\ s^2 + s + K &= 0 \end{aligned}$$

Substituindo $K = 0.391$, obtém-se

$$s^2 + s + 0.391 = 0$$

de onde se conclui que

$$\begin{cases} \omega_n = 0.625 \text{ rad} / s \\ \zeta = 0.8 \end{cases} \quad (5.36)$$

b) Utilizando a Tabela A.6, obtém-se o equivalente discreto de $G(s)$, precedido por zoh, para $h = 1 \text{ s}$:

$$G(z) = \frac{0.3679z + 0.2642}{z^2 - 1.368z + 0.3679} = \frac{0.3679(z + 0.7181)}{(z - 1)(z - 0.3679)}$$

O sistema de controlo (B) tem a seguinte equação característica na transformada Z:

$$\begin{aligned} 1 + KG(z) &= 0 \\ z^2 - 1.2242z + 0.4712 &= 0 \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que os pólos de malha fechada são:

$$z_{1,2} = 0.6121 \pm j0.3107 = re^{\pm j\theta}$$

com $r = 0.687$ e $\theta = 0.4724 \text{ rad}$. Tratando-se de sistemas de 2ª ordem, o sistema contínuo equivalente, para $h = 1 \text{ s}$, tem coeficiente de amortecimento

$$\zeta = \frac{-\ln r}{\sqrt{(\ln r)^2 + \theta^2}} = 0.6252$$

e frequência natural não amortecida

$$\omega_n = \frac{\sqrt{(\ln r)^2 + \theta^2}}{h} = 0.6018$$

em resumo

$$\begin{cases} \zeta = 0.6252 \\ \omega_n = 0.6018 \end{cases} \quad (5.37)$$

Comparando os parâmetros (5.36) e (5.37), conclui-se que o sistema com controlador discreto (obtido por método aproximado, i.e. usa-se o valor do ganho proporcional do sistema de controlo totalmente analógico) ficou ligeiramente menos amortecido.

c) O diagrama de blocos (C) claramente representa o sistema discreto $G(z)$ num modelo de estado em estrutura paralela (a matriz da dinâmica tem estrutura diagonal) que se obtém a partir da função de transferência fazendo a sua expansão em fracções parciais simples como se segue,

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z-1} - \frac{0.6321}{z-0.3679}$$

Desta equação e do diagrama de blocos (C) podemos escrever

$$\begin{aligned} Y(z) &= Y_1(z) - Y_2(z) \\ &= X_1(z) - 0.6321X_2(z) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Fazendo

$$\begin{cases} X_1(z) = \frac{1}{z-1}U(z) \\ X_2(z) = \frac{1}{z-0.3679}U(z) \end{cases}$$

Tem-se então de uma forma resumida:

$$\begin{cases} Y(z) = X_1(z) - 0.6321X_2(z) \\ zX_1(z) = X_1(z) + U(z) \\ zX_2(z) = 0.3679X_2(z) + U(z) \end{cases} \quad (5.39)$$

de onde se conclui que o diagrama de blocos (C) tem os seguintes valores:

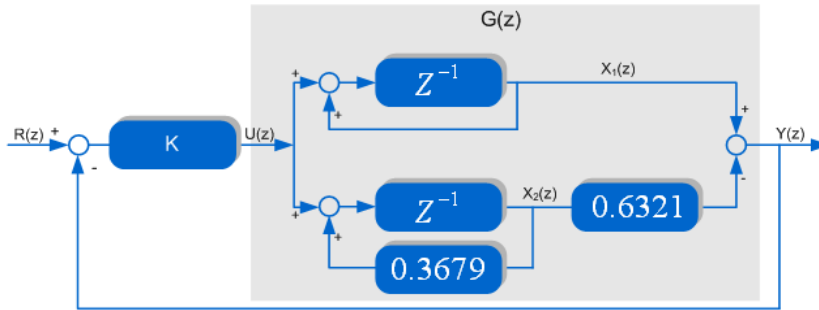


Figura 5. 8. - Diagrama de blocos do sistema de controlo

Observação: o modelo de estado correspondente ao sistema com função de transferência $G(z)$, obtém-se do sistema de equações (5.39)

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.3679 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & -0.6321 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

d) Pretende-se nesta alínea, o modelo de estado do sistema de controlo completo, i.e. com saída $y(k)$ e entrada $r(k)$.

De (5.38) e (5.39) obtém-se

$$\begin{cases} y(k) = x_1(k) - 0.6321x_2(k) \\ x_1(k+1) = x_1(k) - K(x_1(k) - 0.6321x_2(k)) + Kr(k) \\ x_2(k+1) = 0.3679x_2(k) - K(x_1(k) - 0.6321x_2(k)) + Kr(k) \end{cases}$$

de onde se retira o modelo de estado pretendido

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-K & 0.6321K \\ -K & 0.3679+0.6321K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ K \end{bmatrix} r(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & -0.6321 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

e) As figuras 5.9 e 5.10 apresentam respectivamente, o modelo Simulink usado na simulação dos sistemas de controlo, e o código Matlab associado. As respostas ao escalão dos diversos sistemas de controlo são apresentadas na figura 5.11.

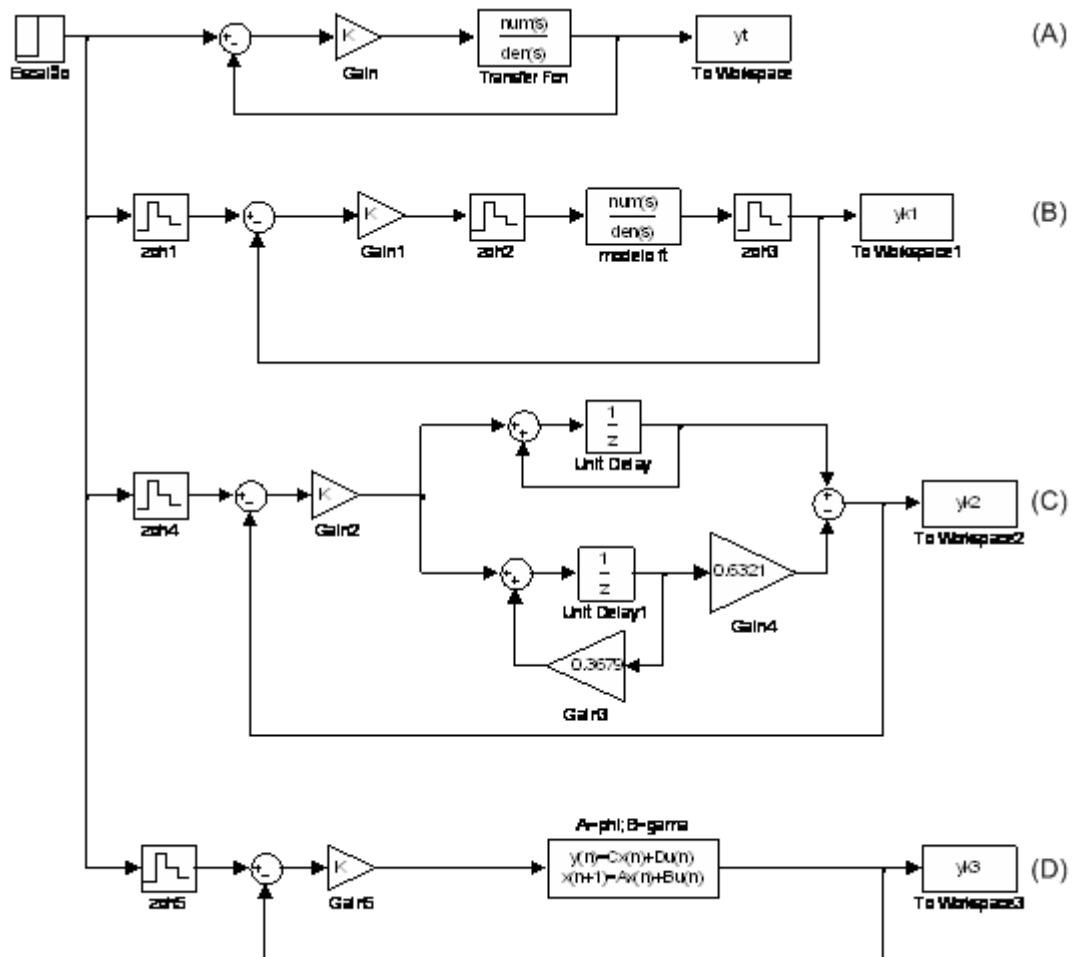


Figura 5. 9. - Esquemático de simulação. O diagrama de blocos (D) representa o modelo discreto equivalente a (C) usando o bloco Discrete State Space do Simulink.

```
clear, clc
num=[1], den=[1 1 0];
% Modelo de estado contínuo
[A,B,C,D]=tf2ss(num,den);
% Modelo de estado discreto
h=1;
[phi,gama]=c2d(A,B,h)
% simulação dos sistemas
K=0.391;
sim sim_prob5_3
plot(yt.time,yt.signals.values,'k',yk1.time,yk1.signals.values,'r'),
```

```

xlabel('tempo (s)'); ylabel('amplitude')
grid
figure
plot(yk2.time,yk2.signals.values,'g',yk3.time,yk3.signals.values,'k:')
xlabel('tempo (s)'); ylabel('amplitude')
grid

```

Figura 5. 10. - Código Matlab

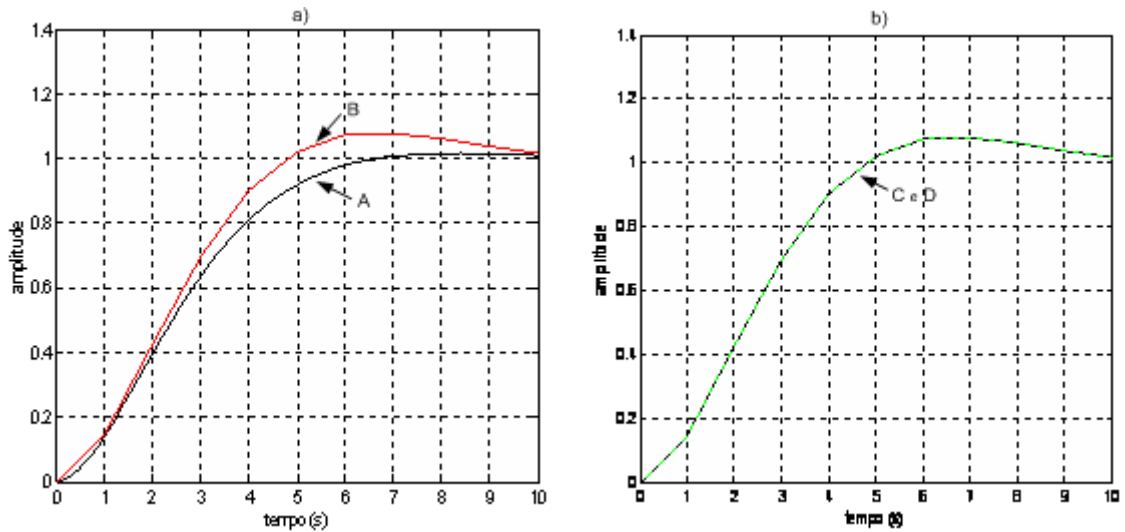


Figura 5. 11. - a) Respostas dos modelos (A) e (B) ao escalão unitário; b) Respostas dos modelos (C) e (D) ao escalão unitário. As respostas de (B), (C) e (D) são coincidentes.

5.7 – PROBLEMAS PROPOSTOS

PROBLEMA 5.4

Considere o sistema descrito em espaço de estados

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

com variáveis de estado $x = [\theta \quad \dot{\theta} \quad \alpha \quad \dot{\alpha}]^T$.

a) Obtenha a matriz de transformação T que transforma o vector de estado $x(t)$ no novo vector $\bar{x}(t) = [\theta \quad \alpha \quad \dot{\theta} \quad \dot{\alpha}]^T$, i.e. $\bar{x}(t) = Tx(t)$.

b) Obtenha a matriz T^{-1} .

c) Escreva as equações para obtenção das novas matrizes \bar{A} , \bar{B} e \bar{C} do sistema descrito nas novas variáveis de estado definidas na alínea a); i.e. o sistema

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) = \bar{C}\bar{x}(t) \end{cases}$$

d) Qual a relação entre os valores próprios de A e \bar{A} ?

PROBLEMA 5.5

Considere o sistema com a função de transferência

$$H(s) = \frac{s + \beta}{s(s + 3)}, \text{ sendo } \beta \text{ constante}$$

a) Obtenha a representação de estado de 2ª ordem do sistema nas formas canónicas controlável e observável. Designe por x_1 e x_2 as variáveis de estado que utilizar;

b) Com base nas duas representações obtidas na alínea anterior discuta a controlabilidade do sistema. Diga para que valores do parâmetro β , tomando como variáveis de estado x_1 e x_2 é possível dimensionar os ganhos de uma realimentação linear de todas as variáveis de estado, por forma a posicionar arbitrariamente os pólos do sistema em malha fechada. Não calcule explicitamente o polinómio característico do sistema em malha fechada.

PROBLEMA 5.6

Determine o modelo de estado do motor *cc* controlado por tensão no induzido incluindo uma variável de estado extra correspondente à corrente do induzido, i.e. considerando como variáveis de estado

$$x_1(t) = \theta_m(t); x_2(t) = \dot{x}_1(t); x_3(t) = i_a(t) \quad (5.36)$$

PROBLEMA 5.7

Obtenha a representação em espaço de estados para o sistema apresentado na Figura seguinte:



Figura 5. 12. - Diagramas de blocos do sistema de controlo

PROBLEMA 5.8

Obtenha a matriz de transição de estados do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Obtenha também a inversa da matriz de transição.

CAPÍTULO 6

DISCRETIZAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS

6.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo de exercícios é tratado o tema da discretização em espaço de estados. Nele são aplicados métodos de conversão de modelos de estado de SLITs contínuos, precedidos por zoh, para modelos de estado dos sistemas discretos equivalentes. Os SLITs contínuos sem atraso de transporte são representados pelo seguinte **modelo de estado**:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

sendo a 1ª equação designada por *equação de estado* e a 2ª por *equação de saída*.

Considerando que o sistema está precedido por um zoh e que o período de amostragem que designamos pela letra h , é constante, então o sistema equivalente discreto tem o seguinte modelo de estado

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad (6.1)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi(h) = e^{Ah} \\ \Gamma &= \Gamma(h) = \int_0^h e^{A\lambda} d\lambda \cdot B \end{aligned} \quad (6.2)$$

AMOSTRAGEM DE SLITs COM ATRASO DE TRANSPORTE

O SLIT contínuo com atraso de transporte $\tau > 0$ tem o seguinte modelo de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

É conveniente expressar o atraso de transporte por duas componentes, por exemplo na forma

$$\tau = (d-1)h + \tau', \quad 0 < \tau' \leq h, \quad d \in \mathbb{N}$$

ou seja, com um termo cujo valor é múltiplo inteiro do período de amostragem e outro com um valor normalmente fraccionário de h (esta componente pode assumir no limite o valor de h), i.e com um valor inferior ou igual a h .

Havendo atraso de transporte o modelo de estado do equivalente discreto é dado por

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma_0 u(k - (d-1)) + \Gamma_1 u(k-d) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad (6.3)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{Ah} \\ \Gamma_0 &= \int_0^{h-\tau'} e^{A\lambda} d\lambda \cdot B \\ \Gamma_1 &= e^{A(h-\tau')} \int_0^{\tau'} e^{A\lambda} d\lambda \cdot B \end{aligned} \quad (6.4)$$

que podem ser rescritos na forma

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{Ah} \\ \Gamma_0 &= \int_0^{\bar{h}} e^{A\lambda} d\lambda \cdot B \\ \Gamma_1 &= e^{A\bar{h}} \int_0^{\bar{h}-\beta} e^{A\lambda} d\lambda \cdot B \end{aligned} \quad (6.5)$$

onde

$$\bar{h} = h - \tau' \quad (6.6)$$

Note-se que as equações (6.4) podem ser expressas com base nas equações (6.2) e (6.6) do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{Ah} \\ \Gamma_0 &= \Gamma(\bar{h}) \\ \Gamma_1 &= \Phi(\bar{h}) \cdot \Gamma(\tau') \end{aligned} \quad (6.7)$$

MODELO DE ESTADO AUMENTADO PARA D=1

Com $d=1$ tem-se o caso particular de sistemas com atraso de transporte inferior ou, no limite, igual ao período de amostragem. Este caso é abrangido pelas equações (6.3) e (6.4):

$$\tau = \tau' \quad (\tau' \leq h)$$

e

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma_0 u(k) + \Gamma_1 u(k-1) \quad (6.8)$$

Este último modelo assume a forma “standard” da representação em espaço de estados introduzindo-se uma variável de estado extra, daí resultando o seguinte **modelo de estado aumentado**:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ I \end{bmatrix} u(k) \quad (6.9)$$

em que $I(r \times r)$, com $r = \dim(u(k))$, representa a matriz identidade. Notemos que no modelo foram introduzidas “r” variáveis de estado $u(k-1)$ adicionais que representam os valores passados do sinal de comando (vector de entradas).

No caso particular de um sistema com uma única entrada, então apenas se introduz uma variável adicional e a matriz de entrada é o vector coluna

$$B = \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

MODELO DE ESTADO AUMENTADO PARA $D > 1$

Para $d > 1$, o **modelo de estado aumentado** que deriva da equação (6.3), passa a ter a forma

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k-(d-1)) \\ u(k-(d-2)) \\ \vdots \\ u(k-1) \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 & \Gamma_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-d) \\ u(k-(d-1)) \\ \vdots \\ u(k-2) \\ u(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix} u(k)$$

Notemos que se introduzem $d \times r$ variáveis de estado adicionais para descrever o atraso, onde r é o número de entradas. O polinómio característico do modelo em espaço de estados é $\lambda^{d \times r} P(\lambda)$, onde $P(\lambda)$ é o polinómio característico de Φ .

CONVERSÃO ENTRE REPRESENTAÇÕES: DO MODELO DE ESTADO PARA A MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA

A) SEM ATRASO DE TRANSPORTE

Aplicando a transformada Z ao modelo de estado (6.1), e após algumas manipulações algébricas simples chega-se ao resultado

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI - \Phi)^{-1}\Gamma + D \quad (6.10)$$

No caso SISO representa a função de transferência do SLIT discreto e no caso MIMO representa a matriz de transferência do sistema em que cada elemento da matriz representa uma função de transferência, i.e o elemento (i, j) representa a função de transferência definida entre a saída i e a entrada j .

B) COM ATRASO DE TRANSPORTE

Aplicando a transformada Z a ambos os membros das equações (6.3) e admitindo condições iniciais nulas, obtém-se:

$$\begin{cases} zX(z) = \Phi X(z) + (\Gamma_0 z^{-(d-1)} + \Gamma_1 z^{-d})U(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

Após algumas manipulações algébricas simples, chega-se à matriz de transferência (caso MIMO) ou função de transferência (caso SISO)

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI - \Phi)^{-1}(\Gamma_0 z^{-(d-1)} + \Gamma_1 z^{-d}) + D \quad (6.11)$$

6.2 - PROBLEMAS

PROBLEMA 6.1

Para o SLIT contínuo, precedido por zoh,

$$G(s) = \frac{a}{s+a} e^{-\tau s}, \quad \tau \geq 0$$

Determine:

a) O modelo de estado do sistema discreto equivalente, considerando $x_1(t) = y(t)$.

b) A função de transferência do SLIT discreto.

RESOLUÇÃO

a) Aplicando ao sistema de 1ª ordem a transformada de Laplace inversa

$$Y(s) = \frac{a}{s+a} e^{-\tau s} U(s)$$

$$sY(s) + aY(s) = ae^{-\tau s} U(s)$$

obtém-se a equação diferencial que descreve o seu comportamento dinâmico

$$\frac{dy}{dt} + ay(t) = au(t - \tau)$$

Com $x_1(t) = y(t)$, o sistema contínuo tem o seguinte modelo de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ax(t) + au(t - \tau) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

O modelo de estado do SLIT discreto equivalente é da forma

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma_0 u(k - (d-1)) + \Gamma_1 u(k-d) \\ y(k) = x(k) \end{cases}$$

em que Φ, Γ_0 e Γ_1 se determinam usando (6.5) e (6.6)

$$\Phi = e^{Ah} = e^{-ah}$$

$$\Gamma_0 = \int_0^{\bar{h}} e^{-a\lambda} d\lambda \cdot a = a \left(-\frac{1}{a} e^{-a\lambda} \Big|_0^{\bar{h}} \right)$$

$$= -e^{-a\bar{h}} + 1 = 1 - e^{-a\bar{h}}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= e^{-a\bar{h}} \int_0^{h-\bar{h}} e^{-a\lambda} d\lambda \cdot a = e^{-a\bar{h}} a \left(-\frac{1}{a} e^{-a\lambda} \right) \Big|_0^{h-\bar{h}} \\ &= e^{-a\bar{h}} (-e^{-ah} \cdot e^{a\bar{h}} + 1) = (e^{-a\bar{h}} - e^{-ah})\end{aligned}$$

EM RESUMO:

$$\begin{cases} \Phi = e^{ah} \\ \Gamma_0 = 1 - e^{-a\bar{h}} \\ \Gamma_1 = e^{-a\bar{h}} - e^{-ah} \end{cases}$$

com $\tau = (d-1) + \tau'$ e $\bar{h} = h - \tau'$.

b) Facilmente se obtém a função de transferência,

$$(z - e^{-ah})Y(z) = (1 - e^{-a\bar{h}})z^{-(d-1)}U(z) + (e^{-a\bar{h}} - e^{-ah})z^{-d}U(z)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(1 - e^{-a\bar{h}})z + (e^{-a\bar{h}} - e^{-ah})}{z^d(z - e^{-ah})}$$

resultado que, como seria de esperar, coincide com o resultado obtido no Problema 3 do Capítulo 2.

Observe que neste caso, sistema SISO de 1ª ordem, se verifica que

$$G(z) = \frac{\Gamma_0 z + \Gamma_1}{z^d(z - \Phi)}$$

PROBLEMA 6.2

Na **Figura 6.1** o sistema A tem a função de transferência seguinte:

$$\frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{\alpha \cdot \beta}{s + \alpha} \quad (6.12)$$

Resolva as seguintes alíneas:

- Determine o modelo de estado do SLIT contínuo com entrada $u(t)$ e saída $y(t)$.
- Determine o modelo de estado do sistema discreto equivalente para um período de amostragem genérico h .
- Determine a função de transferência do sistema discreto.

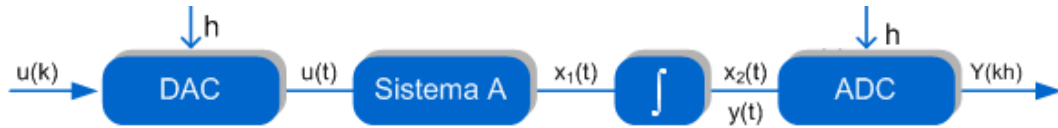


Figura 6. 1. - Diagrama de blocos do modelo simplificado de um motor CC

RESOLUÇÃO

a) Da Figura 6.1 conclui-se que

$$Y(s) = \frac{\alpha \cdot \beta}{s + \alpha} \cdot \frac{1}{s} U(s) = \frac{\alpha \cdot \beta}{s^2 + \alpha s} U(s)$$

o que significa que o sistema tem a função de transferência

$$G(s) = \beta \cdot \frac{\alpha}{s(s + \alpha)} \quad (6.13)$$

e pode ser descrito pela equação diferencial

$$\ddot{y}(t) + \alpha \dot{y}(t) = \alpha \beta u(t)$$

Da mesma Figura 6.1 observa-se que o sistema tem as variáveis de estado

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) \end{cases}$$

e então

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\alpha x_2(t) + \alpha \beta u(t) \end{cases}$$

de onde é imediata a obtenção do modelo de estado

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha\beta \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

b) O sistema discreto equivalente é representado pelo modelo de estado

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(t) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

em que a matriz C mantém os valores do modelo de estado do sistema contínuo e se torna necessário calcular Φ e Γ . Uma possibilidade é fazer o cálculo da matriz Φ com recurso à transformada de Laplace, como se segue:

$$\Phi(t) = e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+\alpha)} \\ 0 & \frac{1}{s+\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) \\ 0 & e^{-\alpha t} \end{bmatrix} u_s(t)$$

e, assim

$$\Phi = \Phi(k+1, k) = \Phi(h) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha h}) \\ 0 & e^{-\alpha h} \end{bmatrix}$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_0^h e^{A\lambda} d\lambda \cdot B = \int_0^h \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha\lambda}) \\ 0 & e^{-\alpha\lambda} \end{bmatrix} d\lambda \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha\beta \end{bmatrix} = \int_0^h \begin{bmatrix} \beta(1 - e^{-\alpha\lambda}) \\ \alpha\beta e^{-\alpha\lambda} \end{bmatrix} d\lambda \\ &\Rightarrow \Gamma = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha}(\alpha h + e^{-\alpha h} - 1) \\ \beta(1 - e^{-\alpha h}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c) A função de transferência determina-se resolvendo (6.10). Sendo

$$\begin{aligned}
 (zI - \Phi)^{-1} &= \begin{bmatrix} z-1 & -\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha h}) \\ 0 & z-e^{-\alpha h} \end{bmatrix}^{-1} \\
 &= \frac{\begin{bmatrix} z-e^{-\alpha h} & \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha h}) \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}}{(z-1)(z-e^{-\alpha h})}
 \end{aligned}$$

obtém-se a função de transferência

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-e^{-\alpha h} & \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha h}) \\ 0 & z-1 \end{bmatrix} \Gamma}{(z-1)(z-e^{-\alpha h})} \\
 &= \frac{\begin{bmatrix} z-e^{-\alpha h} & \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha h}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha}(\alpha h + e^{-\alpha h} - 1) \\ \beta(1-e^{-\alpha h}) \end{bmatrix}}{(z-1)(z-e^{-\alpha h})} \\
 &= \frac{\beta(\alpha h + e^{-\alpha h} - 1)z + (1 - e^{-\alpha h} - \alpha h e^{-\alpha h})}{\alpha(z^2 - (1 + e^{-\alpha h})z + e^{-\alpha h})}
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 6.3

Considere um SLIT contínuo com a função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{8}{s(s+8)} e^{-0,01s} \quad (6.14)$$

a) Escreva o modelo de estado do sistema, escolhendo para variáveis de estado

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = y(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dot{x}_1(t) \end{cases} \quad (6.15)$$

b) Determine o modelo de estado do sistema discreto equivalente, considerando o sistema contínuo precedido por um zoh e um período de amostragem $h = 0.025$ s .

RESOLUÇÃO

a) Fazendo uso do resultado da alínea a) do problema 6.2, substituindo $\alpha = 8$ e $\beta = 1$ e tendo em atenção que há um atraso de transporte de $\tau = 0.01$ s , chega-se facilmente ao modelo em espaço de estados

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} u(t-0,01) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \quad (6.16)$$

b) Sendo o atraso de transporte inferior ao período de amostragem, o sistema discreto pode ser representado pelo seguinte modelo de estado aumentado:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

Dos resultados intermédios do problema 6.2 a) calcula-se Φ , fazendo $\alpha = 8$ e $h = 0.025$:

$$\Phi = \Phi(h) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha h}) \\ 0 & e^{-\alpha h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.02267 \\ 0 & 0.81873 \end{bmatrix}$$

De modo similar, Γ_0 e Γ_1 obtêm-se da expressão deduzida para Γ no problema 6.2

a) introduzindo os valores $\alpha = 8$, $h = 0.025$, $\beta = 1$ e $\bar{h} = h - \tau = 0.015$:

$$\Gamma_0 = \int_0^{\bar{h}} e^{A\lambda} d\lambda B = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha}(\alpha\bar{h} + e^{-\alpha\bar{h}} - 1) \\ \beta(1 - e^{-\alpha\bar{h}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000865 \\ 0.11308 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \Phi(\bar{h}) \cdot \int_0^\tau e^{A\lambda} d\lambda B \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha\bar{h}}) \\ 0 & e^{-\alpha\bar{h}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha}(\alpha\tau + e^{-\alpha\tau} - 1) \\ \beta(1 - e^{-\alpha\tau}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.0015 \\ 0.0682 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e finalmente podemos escrever o modelo de estado,

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.02267 & 0.0015 \\ 0 & 0.81187 & 0.0682 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.000865 \\ 0.11308 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (6.17)$$

$$y(k) = [1 \quad 0 \quad 0]x(k)$$

Do modelo de estado (6.17) chega-se à mesma função de transferência (a menos de algumas aproximações numéricas):

$$H(z) = \frac{0.000865z^2 + 0.003355z + 0.000318}{z(z^2 - 1.819z + 0.8187)}$$

com **pólos:** 0; 1; 0.8187
zeros: -3.7818; -0.0972

```

h=0,025; tau=0,01;
%sistema contínuo sem atraso de
transporte
num=[0 0 8]; den=[1 8 0];
%SLIT em espaço de estados
[a,b,c,d]=tf2ss(num,den);

Transfer function:
0.0008651 z^2 + 0.00333 z + 0.0003364
-----
z^3 - 1.819 z^2 + 0.8187 z

Sampling time: 0.025

%discretização introduzindo atraso de pólos =
transporte 0
[phi,gama,C,D]=c2dt(a,b,c,h,tau); 1.0000
%obtenção da função de transferência do 0.8187
SLIT %discreto
[numz,denz]=ss2tf(phi,gama,C,D,1); zeros =
sysd=tf(numz,denz,h) -3.7460
-0.1038

```

Figura 6. 2. - Código e resultados do Matlab

PROBLEMA 6.4

Considere o seguinte sistema contínuo descrito em espaço de estados:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t-0,4) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}\tag{6.18}$$

Determine:

- A matriz de transição de estados na transformada de Laplace, $\Phi(s)$.
- A função de transferência $G(s) = Y(s)/U(s)$.
- O modelo de estado do sistema discreto equivalente do sistema contínuo, considerando este último precedido por um zoh, para um período de amostragem $h = 0.2$ s.
- A função de transferência do sistema discreto da alínea anterior.
- Compare os pólos dos sistemas contínuos e discreto e comente os resultados.

RESOLUÇÃO

- A matriz de transição de estado na transformada de Laplace é

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= (sI - A)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- A função de transferência obtém-se do modelo de estado,

$$\begin{aligned}
 G(s) &= C\Phi B e^{-0.4s} \\
 &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-0.4s} \\
 &= \frac{1}{s(s+1)} e^{-0.4s}
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Vamos determinar $G(s)$ de forma alternativa, servindo o exercício fins pedagógicos e também para confirmar o resultado. O modelo de estado, dado no enunciado do problema, pode ser desenvolvido no sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u(t-0.4) \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_2 \end{cases} \tag{6.20}$$

Facilmente se conclui das últimas equações que

$$\dot{y} = x_1$$

Substituindo na primeira equação obtém-se a equação diferencial do SLIT contínuo

$$\ddot{y} + \dot{y} = u(t-0.4)$$

Tomando a transformada de Laplace com condições iniciais nulas,

$$s^2 Y(s) + sY(s) = e^{-0.4s} U(s)$$

de onde se chega à função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+1)} e^{-0.4s} \tag{6.21}$$

que, como se esperava, é igual ao resultado (6.12).

Observação: Notemos que a função de transferência (6.21) é estruturalmente semelhante à função de transferência (6.14) do problema 6.3.

Por simples inspeção, conclui-se que o modelo de estado de (6.21), fazendo analogia com (6.14) e correspondente modelo de estado (6.16), pode tomar a forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t-0.4) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}\quad (6.22)$$

Os modelos de estado (6.18) e (6.22) são equivalentes; representam o mesmo SLIT contínuo. Basicamente de (6.18) para (6.22) dá-se a troca de posição das variáveis de estado.

A Figura 6.3 ilustra através de um diagrama de blocos o SLIT contínuo em que se mostra as duas atribuições de variáveis:

- no modelo (6.18) : $\begin{cases} a = x_2 \\ b = x_1 \end{cases}$
- no modelo (6.22) : $\begin{cases} a = x_1 \\ b = x_2 \end{cases}$

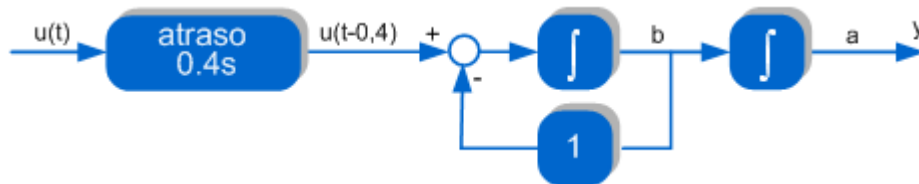


Figura 6. 3. - Diagrama de blocos do SLIT contínuo

c) O atraso de transporte é duplo do período de amostragem, podendo nós optar por considerar $\tau' = h$ e $d = 2$ (em alternativa a $\tau' = 0$ e $d = 3$). Assim, tem-se o atraso de transporte $\tau = (d-1)h + \tau'$ com $d = 2$, $h = 0.2$ e $\tau' = 0.2$.

Para a obtenção do modelo de estado torna-se necessário determinar as matrizes Φ , Γ_0 e Γ_1 .

A partir da matriz de transição de estados

$$\Phi(t) = L^{-1}\Phi(s) = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 1-e^{-t} & 1 \end{bmatrix} u_s(t)$$

obtém-se a matriz da dinâmica

$$\Phi = \Phi(h) = \begin{bmatrix} e^{-h} & 0 \\ 1-e^{-h} & 1 \end{bmatrix}_{h=0.2} = \begin{bmatrix} 0.8187 & 0 \\ 0.18127 & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo $h - \tau' = 0$, então $\Gamma_0 = 0$ e

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Phi(0) \cdot \int_0^h e^{A\lambda} d\lambda \cdot B = I \cdot \int_0^h \begin{bmatrix} e^{-\lambda} \\ 1-e^{-\lambda} \end{bmatrix} d\lambda \\ &= \begin{bmatrix} 1-e^{-\lambda} \\ h+e^{-\lambda}-1 \end{bmatrix}_{h=0.2} = \begin{bmatrix} 0.18127 \\ 0.01873 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Substituindo os valores calculados no modelo de estado do sistema em estudo,

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ u(k-1) \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 & \Gamma_0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ u(k-2) \\ u(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

resulta

$$\begin{cases} x_a(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8187 & 0 & 0.18127 & 0 \\ 0.18127 & 1 & 0.01873 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_a(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] x_a(k) \end{cases} \quad (6.23)$$

em que $x_a(k)$ representa o vector de estado do espaço de estados aumentado.

OBSERVAÇÃO: Fazendo a troca de posição das variáveis de estado “intrínsecas” do sistema (variáveis x_1 e x_2) o modelo de estado passa a ter a seguinte forma:

$$\begin{cases} x_a(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.18127 & 0.01873 & 0 \\ 0 & 0.8187 & 0.18127 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_a(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] x_a(k) \end{cases}$$

d) A função de transferência determina-se resolvendo (6.11), ou seja

$$G(z) = C(zI - \Phi)^{-1}(\Gamma_0 z^{-(d-1)} + \Gamma_1 z^{-d})$$

Substituindo valores, vem

$$\begin{aligned} G(z) &= [0 \quad 1] \left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.8187 & 0 \\ 0.18127 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0.18127 \\ 0.01873 \end{bmatrix} z^{-2} \\ &= \frac{0.01873z^{-1} + 0.0175z^{-2}}{(z-1)(z-0.8187)} \\ &= \frac{0.01873z + 0.0175}{z^2(z-1)(z-0.8187)} \end{aligned}$$

e) O SLIT contínuo tem um pólo integrador e um pólo real em $s = -1$. O SLIT discreto equivalente tem os pólos correspondentes mapeados segundo $z = e^{sh}$, isto é um pólo integrador em $z = 1$ e um pólo em $z = e^{-0.2} = 0.8187$.

Além disso tem dois pólos em $z = 0$ devido ao atraso de transporte igual a dois períodos de amostragem.

O SLIT discreto também tem um zero finito em $z = -0.934$.

A Figura 6.4 mostra código Matlab, semelhante ao usado no problema 6.3, que gera a solução do exercício.

```

h=0.2; tau=0.4;
% sistema contínuo sem atraso de transporte
num=[0 0 1];
den=[1 1 0];
[a,b,c,d]=tf2ss(num,den);      %SLIT em espaço de estados
                                %discretização introduzindo atraso na entrada
                                %(u-tau) e período de amostragem h
[phi,gama,C,D]=c2dt(a,b,c,h,tau);
% obtenção da função de transferência do SLIT discreto
[numz,denz]=ss2tf(phi,gama,C,D,1)
sysd=tf(numz,denz,h)

```

Figura 6.4. - Código do Matlab

PROBLEMA 6.5

Pressupondo que as seguintes equações de diferenças descrevem processos contínuos, amostrados usando zoh e período de amostragem h , determine, se for possível, os sistemas contínuos correspondentes.

- a) $y(kh) = 0.8y(kh - h) + 0.2u(kh - h)$
- b) $y(kh) = -0.8y(kh - h) + 1.2u(kh - h)$.

RESOLUÇÃO

- a) O sistema é de 1ª ordem com função de transferência

$$G(z) = \frac{0.2}{z - 0.8}$$

cujo modelo de entrada-saída, descrito pela equação às diferenças, pode ser reescrito na forma

$$y(k+1) = 0.8y(k) + 0.2u(k)$$

e pode ser representado pelo modelo de estado

$$\begin{cases} x(k+1) = 0.8y(k) + 0.2u(k) \\ y(k) = x(k) \end{cases}$$

Este sistema terá por equivalente contínuo, um sistema também de 1ª ordem com modelo de estado

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

Resta-nos calcular os valores de a e b que são facilmente determinados usando as fórmulas de conversão entre sistemas contínuos e discretos equivalentes, representados por modelo de estado:

$$\begin{cases} \Phi = e^{Ah} \\ \Gamma = \int_0^h e^{A\lambda} d\lambda \cdot B \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{Ah} = 0.8 \\ \Rightarrow a &= \frac{\ln(0.8)}{h} = -\frac{0.223}{h} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_0^h e^{A\lambda} d\lambda \cdot b = 0.2 \\ \Rightarrow b &= -\frac{\ln(0.8)}{h} = \frac{0.223}{h} \end{aligned}$$

A função de transferência do sistema equivalente contínuo é assim

$$G(s) = \frac{\frac{0.223}{h}}{s + \frac{0.223}{h}}$$

b) O SLIT discreto é de 1ª ordem com função de transferência

$$G(z) = \frac{1.8}{z + 0.8}$$

O sistema tem um pólo real negativo $z = -0.8$. Não existe sistema contínuo equivalente pois sendo os pólos mapeados do plano s para o plano z segundo a lei $z = e^{sh}$, nenhum pólo do sistema contínuo será mapeado para o semiplano complexo negativo do plano z .

6.3 – PROBLEMAS PROPOSTOS**PROBLEMA 6.6**

Considere o processo contínuo, precedido por zoh, representado pela função de transferência

$$G(s) = \frac{2}{s + 0.2} \cdot e^{-1.2s}$$

amostrado com um período de amostragem $h = 1$ s.

- Determine o modelo de estado do sistema amostrado, considerando $x_1(t) = y(t)$.
- Determine a função de transferência do sistema obtido na alínea anterior.
- Compare os pólos e os zeros de $G(s)$ e do sistema discreto. Comente os resultados.

PROBLEMA 6.7

Considere o seguinte processo contínuo descrito em espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t - 0.2)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Determine:

- A matriz de transição na transformada de Laplace, $\Phi(s)$.
- A função de transferência $G(s) = Y(s) / U(s)$.
- O modelo de estados do sistema amostrado, equivalente discreto precedido por zoh, usando para tal um período de amostragem $h = 0.5$ s.
- A função de transferência do sistema discreto $G(z) = Y(z) / U(z)$.
- Compare os pólos de $G(s)$ com os de $G(z)$ e comente os resultados.

CAPÍTULO 7

CONTROLO POR REALIMENTAÇÃO DAS VARIÁVEIS DE ESTADO: COLOCAÇÃO DE PÓLOS

7.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo vamos dar exemplos de exercícios sobre controlo linear em espaço de estados. Vamos cingir-nos ao **problema da regulação**. Considerando o processo sob controlo representado pelo modelo de estado

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \quad (7.1)$$

pretende-se projectar controladores lineares de colocação de pólos por realimentação das variáveis de estado.

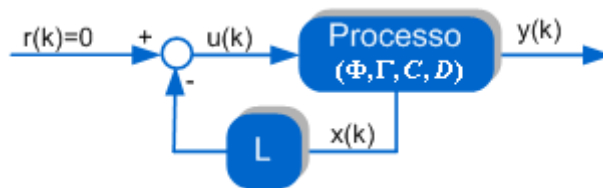


Figura 7.1. - Diagrama de blocos do problema de regulação por realimentação das variáveis de estado

Tal como está representado na Figura 7.1, vamos aqui assumir que todas as variáveis de estado estão acessíveis para medição, e que se vai implementar um controlador por realimentação das variáveis de estado através da seguinte equação que define a lei de controlo:

$$u(k) = -Lx(k) \quad (7.2)$$

onde

$$L = [l_1 \quad l_2 \quad \dots \quad l_n],$$

é um vector de ganhos.

Vamos também assumir que o sistema está sujeito a perturbações na forma de um estado inicial não nulo para o sistema. Como estamos perante um problema de regulação, o objectivo do controlador será então levar o sistema ao estado nulo.

Objectivo é encontrar uma lei de controlo da forma (7.2) para que o sistema em malha fechada seja caracterizado por uma dada dinâmica desejada. Isto permite garantir que o efeito das perturbações decai de forma desejada. Vamos analisar a solução do problema de colocação de pólos para sistemas com um único sinal entrada – caso particular em que o vector de entrada, $u(k)$, se reduz a um escalar $u(k)$.

7.2 – COLOCAÇÃO DE PÓLOS – FÓRMULA DE ACKERMANN

Consideremos o sistema descrito pelo modelo de estado (7.1), com equação característica:

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Assumindo que o sistema é completamente controlável, podemos transformá-lo na forma canónica da controlabilidade por aplicação da transformação de coordenadas

$$z = Tx \quad (7.3)$$

em que z é o novo vector de estados. No novo sistema de coordenadas, a dinâmica é dada por

$$z(k+1) = \tilde{\Phi}z(k) + \tilde{\Gamma}u(k) \quad (7.4)$$

onde

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

Os coeficientes do polinómio característico que determinam os pólos deste sistema em malha aberta, aparecem explicitamente na primeira linha da matriz da dinâmica. Para a lei de controlo

$$u(k) = -\tilde{L}z(k) \quad (7.6)$$

obtém-se a equação de estado em malha fechada

$$z(k+1) = \tilde{\Phi}_{CL}z(k)$$

em que

$$\tilde{\Phi}_{CL} = \tilde{\Phi} - \tilde{\Gamma}\tilde{L}$$

Se definirmos o vector de ganhos \tilde{L} da seguinte forma:

$$\tilde{L} = [\tilde{l}_1 \quad \tilde{l}_1 \quad \cdots \quad \tilde{l}_n] = [p_1 - a_1 \quad p_2 - a_2 \quad \cdots \quad p_n - a_n] \quad (7.7)$$

então por (7.5) e (7.7) a matriz de transição de estado em malha fechada vem:

$$\tilde{\Phi}_{CL} = \begin{bmatrix} -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{n-1} & -p_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por simples observação desta matriz de transição de estado, com estrutura da forma canónica da controlabilidade, se vê que o polinómio característico em malha fechada é o seguinte:

$$P(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_n \quad (7.8)$$

A equação (7.7) dá-nos o vector \tilde{L} que serviria para solucionar o problema através da realimentação linear das variáveis de estado z . No entanto, as variáveis de estado que estão acessíveis são as do vector x - são estas as que assumimos mensuráveis - e não as de z . Para encontrar a solução do problema original é necessário calcular o vector de ganhos L associado à realimentação das variáveis de estado x . Para tal aplique-se a transformação de coordenadas (7.3) na lei de controlo (7.6), obtendo-se

$$u(k) = -\tilde{L}z(k) = -\tilde{L}Tx(k) = -Lx(k) \quad (7.9)$$

Daqui se conclui que

$$L = \tilde{L}T \quad (7.10)$$

e, assim, que nos falta calcular a matriz de transformação de coordenadas T . Uma forma simples de a calcular é baseada numa propriedade das matrizes de alcançabilidade W_C . Seja W_C a matriz de alcançabilidade do sistema (7.1), i.e.,

$$W_C = [\Gamma \quad \Phi\Gamma \quad \cdots \quad \Phi^{n-1}\Gamma] \quad (7.11)$$

e \tilde{W}_C a matriz de alcançabilidade do sistema (7.4). Estas matrizes estão relacionadas através de

$$\tilde{W}_C = T W_C$$

ou seja, a matriz de alcançabilidade transforma-se da mesma forma que as coordenadas (as variáveis de estado, ou o vector de estado).

Segue-se que

$$T = \tilde{W}_C W_C^{-1} \quad (7.12)$$

pelo que, e resumindo, a partir de (7.7), (7.10) e (7.12), podemos concluir que a solução para o problema de projecto é dada por uma lei de realimentação linear das variáveis de estado, com o vector e ganhos dado por:

$$L = [p_1 - a_1 \quad p_2 - a_2 \quad \cdots \quad p_n - a_n] \tilde{W}_C W_C^{-1} \quad (7.13)$$

Pode-se mostrar que esta equação pode ser expressa de forma ligeiramente diferente conforme especifica o seguinte resultado.

TEOREMA (FÓRMULA DE ACKERMANN): Colocação de Pólos por Realimentação das Variáveis de Estado.

Considere-se o sistema (7.1) assumindo que existe apenas um sinal escalar de entrada. Se o sistema é alcançável, existe uma lei de realimentação linear que permite obter um sistema em malha fechada com polinómio característico $P(z)$ conforme a equação (7.8). A lei de controlo por realimentação das variáveis de estado é dada por:

$$u(k) = -Lx(k)$$

com

$$\begin{aligned} L &= [p_1 - a_1 \quad p_2 - a_2 \quad \cdots \quad p_n - a_n] \tilde{W}_C W_C^{-1} \\ &= [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] W_C^{-1} P(\Phi) \end{aligned} \quad (7.14)$$

onde \tilde{W}_C e W_C são as matrizes de alcançabilidade dos sistemas (7.1) e (7.4) respectivamente,

$$P(\Phi) = \Phi^n + p_1 \Phi^{n-1} + \cdots + p_n I \quad (7.15)$$

e I é a matriz identidade de dimensão n . A equação (7.14) é designada por **fórmula de Ackermann**.

Ao usarmos a lei de controlo (7.2), obtém-se a seguinte equação de estado do sistema de regulação:

$$x(k+1) = \Phi_{CL}x(k) \quad (7.16)$$

Sendo

$$\Phi_{CL} = \Phi - \Gamma L \quad (7.17)$$

a matriz da dinâmica do sistema de regulação.

Os pólos de Φ_{CL} são os pólos do sistema de regulação. O problema de colocação de pólos consiste em, dadas as matrizes Φ e Γ , encontrar uma matriz L tal que a matriz $\Phi - \Gamma L$ tenha os valores próprios desejados.

CONTROLO DEADBEAT

Aplicando sucessivamente a equação (7.16), facilmente se conclui que

$$x(k+n) = \Phi_{CL}^n x(k) \quad (7.18)$$

Se os pólos desejados estiverem todos na origem, o polinómio característico em malha fechada será o seguinte:

$$P(z) = z^n$$

Pelo teorema de Hamilton-Cayley [Astrom et al, 1998, pág. 533] temos que a matriz da dinâmica de regulação (7.17) satisfaz:

$$\Phi_{CL}^n = 0$$

De (7.18) conclui-se que esta estratégia de controlo tem a propriedade de conduzir o estado (todas as variáveis de estado) a zero no máximo em n intervalos de amostragem, após uma perturbação em impulso no estado do processo:

$$x(k+n) = \Phi_{CL}^n x(k) = 0 \cdot x(k) = 0$$

Segue-se pela fórmula de Ackermann (7.14) que o vector de ganhos para implementar a estratégia *deadbeat* é dado por

$$L = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] W_C^{-1} \Phi^n \quad (7.19)$$

O **controlo *deadbeat*** tem apenas um parâmetro de projecto: o período de amostragem, h . Dado que o erro de estado se anula, no máximo em n intervalos de amostragem, o tempo de estabelecimento é no máximo nh . O tempo de estabelecimento é portanto proporcional ao período de amostragem. O período de amostragem também influencia o esforço de comando (amplitude do sinal de comando $u(k)$) que aumenta drasticamente com a diminuição do período de amostragem, pelo que é importante escolher cuidadosamente o período de amostragem quando se usa **controlo *deadbeat***.

A **estratégia *deadbeat*** é **única para sistemas discretos**; não existe nenhuma capacidade equivalente em sistemas contínuos.

Para sinais de referência $r(k)$ não nulos, veremos no capítulo sobre **servocontrolo** (capítulo 9) que uma lei de controlo possível é

$$u(k) = -Lx(k) + L_c r(k) \quad (7.20)$$

em que o ganho L_c permite ajustar o ganho em regime estacionário, *ganhoDC* :

$$L_c = \frac{\text{ganhoDC}}{C(I - \Phi_{CL})^{-1}\Gamma} \quad (7.21)$$

Neste caso, a equação de estado em malha fechada inclui a entrada de referência:

$$x(k+1) = \Phi_{CL}x(k) + \Gamma L_c r(k)$$

7.3 – PROBLEMAS RESOLVIDOS

PROBLEMA 7.1

Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \alpha x(t) + u(t) \\ y(t) &= x(t) \end{aligned} \quad (7.22)$$

a) Determine o equivalente discreto para um valor de amostragem genérico $h > 0$. Determine para que valores de h ($h > 0$) e α , é estável o sistema discreto.

b) Considerando $\alpha = 1$ e $h = 0.5$ resolva as alíneas:

b1) Calcule o vector L do controlador linear de realimentação das variáveis de estado de modo a obter-se um sistema em malha fechada com pólo real $z = e^{-h}$.

b2) Assuma que a implementação do controlador em computador introduz um atraso de $\tau \leq h$ no sinal de comando. Determine um modelo de estado do sistema amostrado que inclua o atraso.

RESOLUÇÃO

a) O equivalente discreto é da forma:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (7.23)$$

sendo Φ , Γ e C escalares, uma vez que o sistema é de 1ª ordem:

$$\Phi = e^{\alpha h}$$

$$\Gamma = \int_0^h e^{\lambda h} d\lambda = \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha h} - 1)$$

$$C = 1$$

Aplicando a Transformada Z à equação de estado (7.23), tomando as condições iniciais nulas, facilmente se obtém a função de transferência do sistema discreto:

$$H(z) = \frac{\Gamma}{z - e^{\alpha h}}$$

Para que o sistema seja estável, o pólo tem de estar contido no círculo unitário, i.e.

$$|e^{\alpha h}| = e^{\alpha h} < 1$$

$$\Rightarrow \alpha h < \ln 1$$

$$\alpha h < 0$$

Como $h > 0$ a condição de estabilidade é: $\alpha < 0$

Observe que esta é também a condição necessária para que o sistema contínuo (7.22) seja estável.

b1) O ganho do controlador linear pode calcular-se pela fórmula de Ackermann, que no caso em estudo assume a forma:

$$L = [1](W_C)^{-1}P(\Phi)$$

Como se pretende obter um sistema em malha fechada com pólo real em $z = e^{-h}$, então:

$$P(\Phi) = \left[z - e^{-h} \right]_{z=\Phi} = \Phi - e^{-h}$$

e substituindo o valor de Φ ,

$$P(\Phi) = e^{\alpha h} - e^{-h}$$

Sendo a matriz de controlabilidade dada por

$$W_C = \Gamma = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha h} - 1),$$

então

$$(W_C)^{-1} = \frac{\alpha(e^{\alpha h} - e^{-h})}{e^{\alpha h} - 1}.$$

Para os valores do problema obtém-se

$$L = 1.6065$$

b2) Havendo um atraso de transporte, inferior ao período de amostragem, é necessário introduzir uma variável de estado extra, fazendo-se a representação do sistema, em espaço de estados aumentado:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0]x(k)$$

em que

$$\Gamma_0 = \int_0^{h-\tau} e^{\lambda} d\lambda = e^{h-\tau} - 1$$

$$\Gamma_1 = e^{h-\tau} \int_0^{\tau} e^{\lambda} d\lambda = e^{h-\tau} (e^{\tau} - 1) = e^h - e^{h-\tau}$$

RESUMINDO: Para um atraso de transporte $\tau < h$, têm-se as seguintes matrizes do modelo de estado

$$\begin{cases} \Phi = e^h = 1.6487 \\ \Gamma_0 = e^{0.5-\tau} - 1 \\ \Gamma_1 = 1.6487 - e^{0.5-\tau} \end{cases}$$

PROBLEMA 7.2

Pretende-se controlar por computador um sistema contínuo que possui o modelo de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (7.23)$$

usando realimentação das variáveis de estado, em tempo discreto, com período de amostragem $h = 0.1s$.

- Calcule a matriz de transição de estados $\Phi(t)$.
- Calcule o modelo de estado do sistema equivalente discreto.
- Escreva um programa em Matlab que calcule os ganhos de realimentação das variáveis de estado, de modo a que o sistema discreto em malha fechada apresente os seguintes pólos:
 - $z_{1,2} = 0.4 \pm j0.3$
 - pólo real duplo em $z = 0.4$

d) Suponha que tem acessíveis as duas variáveis de estado. Desenhe um esquemático de Simulink do sistema global. Obtenha as curvas da resposta, e da variável de estado interno, para um escalão aplicado na referência (para as alíneas c1 e c2).

e) Suponha que só a variável de saída está acessível para leitura. Use o método das diferenças para trás para obter estimativas da variável de estado inacessível a partir da variável de saída. Obtenha as curvas da resposta do sistema global para um sinal de referência em escalão unitário, através da simulação do esquema de Simulink (para as alíneas c1 e c2).

RESOLUÇÃO

a) A matriz de transição pode ser calculada com recurso à transformada de Laplace

$$\Phi(t) = L^{-1}[\Phi(s)]$$

em que

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= (sI - A)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Calculando a transformada inversa de Laplace obtém-se

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} u_s(t)$$

Por observação dos elementos da matriz de transição de estados concluímos que o sistema contínuo tem dois pólos reais: $s_1 = -1$ e $s_2 = -2$.

b) O modelo de estado do equivalente discreto, para $h = 0.1$ s, é

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

em que

$$C = [1 \quad 0]$$

$$\Phi = \Phi(h) = \begin{bmatrix} 0.9909 & 0.0861 \\ -0.1722 & 0.7326 \end{bmatrix}$$

e

$$\Gamma = \int_0^{0.1} \Phi(\lambda) d\lambda B = 4 \int_0^{0.1} \begin{bmatrix} e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} \\ -e^{-\lambda} + 2e^{-2\lambda} \end{bmatrix} d\lambda = \begin{bmatrix} 0.0181 \\ 0.3444 \end{bmatrix}$$

c) Para os pólos do sistema

$$z_{1,2} = a \pm jb$$

O polinómio característico é

$$(z - a + jb)(z - a - jb) = z^2 - 2az + (a^2 + b^2)$$

ou seja, da forma

$$z^2 + p_1 z + p_2$$

com

$$p_1 = -2a \quad \text{e} \quad p_2 = a^2 + b^2$$

RESOLUÇÃO USANDO O MATLAB

Na Figura 7.2 apresenta-se código de Matlab que soluciona o problema em estudo e na Figura 7.3 são apresentados os resultados, matrizes do modelo discreto e vectores de ganho de avanço e de realimentação das variáveis de estado, que se obtêm correndo o código. O mesmo código é usado em conjunto com os modelos Simulink da Figura 7.4 nas simulações do sistema de controlo nas condições das alíneas b) e c).

```
clear, clc

% modelo de estado do sistema contínuo

A=[0 1; -2 -3];B=[0 4]';
C=[1 0];C1=[0 1];D=0;
% matrizes usadas no bloco "State-Space model" no modelo Simulink
% para simular o caso de todas as variáveis de estado acessíveis
Ca=[1 0;0 1];Da=[0; 0];

% modelo de estado discreto

h=0.1
% h=0.05
[phi,gama]=c2d(A,B,h)

% dinâmica de regulação
```

```

a=0.4; b=0.3;
% b=0;      % para pólo duplo em z=0.4

p1=-2*a; p2=a^2+b^2;

% Matriz de controlabilidade completa
Wc=[gama phi*gama];

% Ganhos de realimentação das variáveis de estado
% obtidos pela fórmula de Ackermann

L=[0 1]*inv(Wc)*(phi^2+p1*phi+p2*eye(2))
phic=phi-gama*L;

% Ganho de avanço Lc
Lc=1/(C*inv(eye(2)-phic)*gama)

% Simulação

sim ex73s.mdl

plot(yc.time,yc.signals.values,'k',yk.time,yk.signals.values,'ro-');
xlabel('tempo (s)'); ylabel('amplitude')
figure
plot(ycl.time,ycl.signals.values,'k',x2.time,x2.signals.values,'r');
xlabel('tempo (s)'); ylabel('amplitude')

```

Figura 7.2. - Código de Matlab

h=0.1		h = 0.0500	
phi =		phi =	
0.9909 0.0861		0.9976 0.0464	
-0.1722 0.7326		-0.0928 0.8584	
gamma =		gamma =	
0.0181		0.0048	
0.3444		0.1856	
L = 12.5434 2.0219		L = 47.9795 4.4610	
Lc = 13.0434		Lc = 48.4795	

Figura 7.3. - Resultados correndo o código de Matlab descrito na Figura 7.2:

a) À esquerda para $h=0.1s$; b) à direita para $h=0.05s$.

OBSERVAÇÃO: O ganho L_c foi introduzido, sem que tenha sido mencionado no enunciado, para que o servocontrolo tenha ganho em regime estacionário unitário. Este assunto será abordado no capítulo dedicado ao controlo de seguimento.

d) Na Figura 7.4 apresenta-se um esquema de Simulink que permite simular o sistema de controlo nas duas condições em estudo: todas as variáveis de estado acessíveis (modelo B); apenas acessível a variável de estado $x_1(k)$ (modelo A).

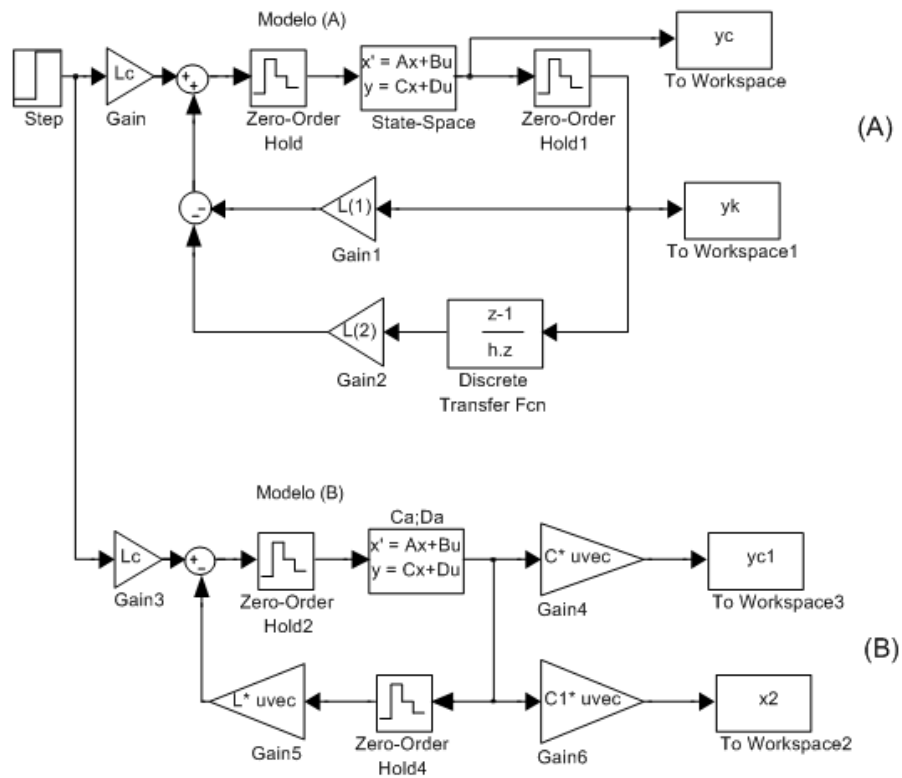


Figura 7. 4. - Esquema em Simulink para simulação do sistema de controlo nas condições: modelo (A) para $x_1(k)$ acessível; modelo (B) todas as variáveis acessíveis.

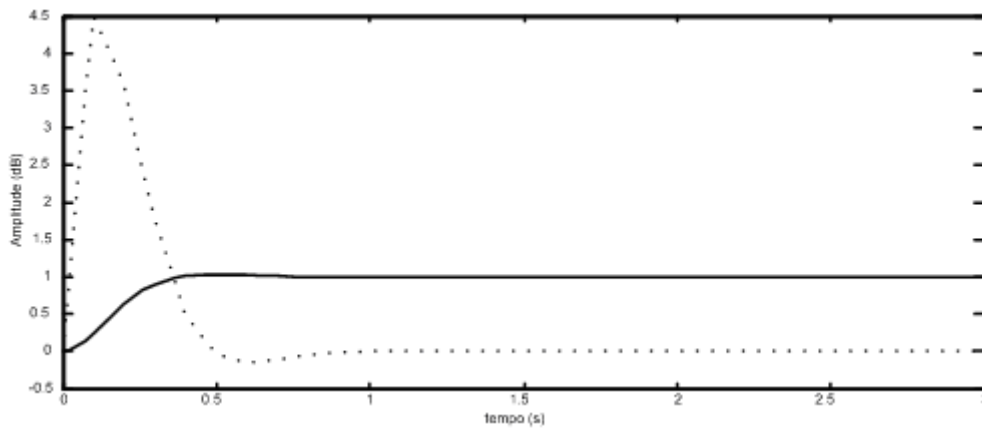


Figura 7. 5. - Resposta a escalão para o caso de todas as variáveis de estado estarem acessíveis (modelo B). Em sobreposição apresenta-se a evolução temporal da variável de estado interna.

Na Figura 7.5 apresenta-se a resposta do sistema de servocontrolo, para o caso de todas as variáveis de estado estarem acessíveis para realimentação. A resposta do sistema está de acordo com as especificações de controlo. Note-se os valores elevados que caracterizam a variável de estado interna.

e) A única variável acessível é a saída, i.e.

$$y(k) = x_1(k)$$

Vamos seguir a sugestão dada no enunciado que consiste em obter estimativas de $x_2(k)$ a partir da variável de saída.

Do modelo de estado do sistema contínuo (7.23) sabe-se que

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ y = x_1 \end{cases}$$

então

$$\dot{y} = x_2$$

Usando o método das diferenças para trás (também conhecido por método da aproximação da derivada por diferenças finitas), obtém-se a equação às diferenças

$$\frac{y(k) - y(k-1)}{h} = x_2(k)$$

que no Simulink é implementada pela função de transferência

$$\frac{X_2(z)}{Y(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{h}$$

O modelo A apresentado na Figura 7.4, corresponde ao servocontrolo com realimentação da variável de estado interna obtida de forma aproximada do sinal de saída. Na Figuras 7.6a e 7.6b apresentam-se as respostas ao escalão, o sinal contínuo à saída em sobreposição com o sinal amostrado que é usado na malha de realimentação, respectivamente para os períodos de amostragem $h=0.1s$ e $h=0.05s$. Como se pode observar, as respostas apresentam um forma oscilatória, distorcida relativamente ao resultado visível na Figura 7.5, que é devida ao facto de se efectuar neste caso a realimentação de um sinal estimado da variável de estado interna.

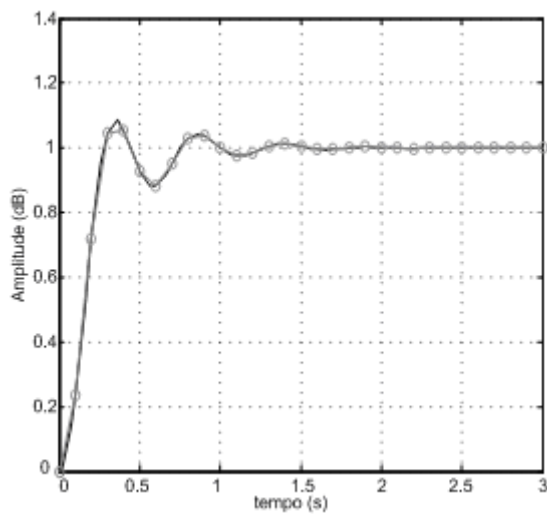


Figura 7. 6. - a) - Resposta a escalão para $h=0.1$
(sinal na saída y e sinal amostrado)

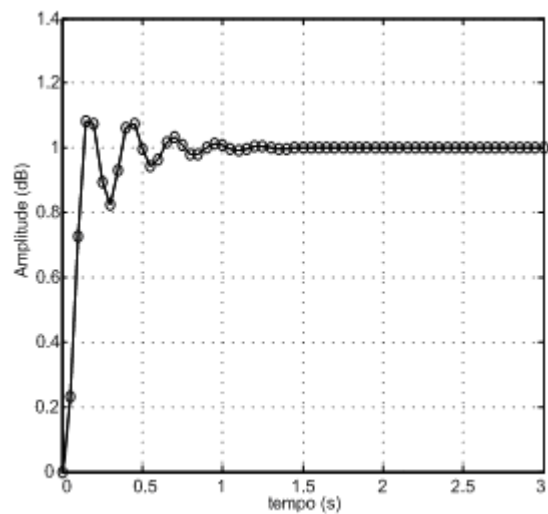


Figura 7.6. - b) - Resposta a escalão para $h=0.05$.
(sinal na saída y e sinal amostrado)

Para pólo duplo real em $z=0.4$ basta usar $a=0.4$ e $b=0$ no script da Figura 7.2.

Na Figura 7.7 apresenta-se a resposta do modelo (A) ao escalão, para pólo duplo em $z = 0.4$, e considerando o período de amostragem $h = 0.1$ s .

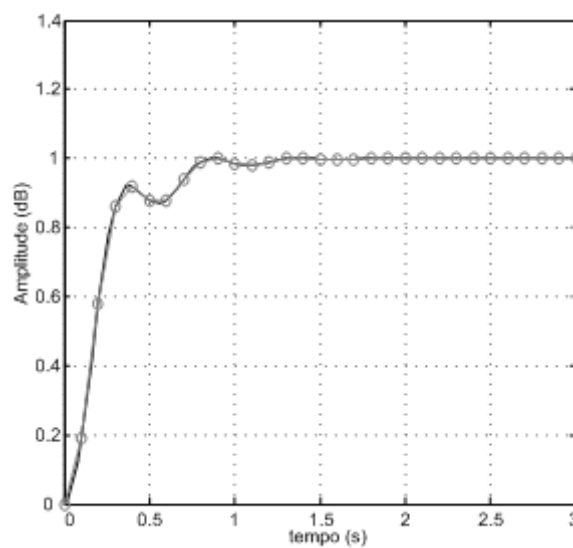


Figura 7. 7. - Resposta ao escalão (sinal à saída e sinal amostrado com $h=0.1s$).
Sistema em malha fechada com pólo duplo em $z=0.4$

PROBLEMA 7.3

Considere o seguinte sistema em tempo discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} \\ h \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0] x(k)$$

com condições iniciais $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ em que h representa o período de amostragem.

a) Determine o vector dos ganhos do controlador de realimentação das variáveis de estado de forma a obter-se uma dinâmica em malha fechada definida pelo polinómio característico de 2ª ordem: $P(z) = z^2 + p_1 z + p_2$

b) Determine os ganhos do controlador de realimentação das variáveis de estado, tipo “deadbeat”. Aplique a fórmula de Ackermann.

c) O estado $x(2)$. O controlador que projectou é mesmo “deadbeat”? Justifique.

RESOLUÇÃO

a) A equação de estado do sistema sob controlo é

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$$

$$\text{com } \Phi = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} h^2/2 \\ h \end{bmatrix}$$

Para $u(k) = -Lx(k) = [l_1 \quad l_2] x(k)$, o polinómio característico em malha fechada é

$$\det(zI - \Phi_{CL}) \tag{7.24}$$

em que

$$\Phi_{CL} = \Phi - \Gamma L$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - 0.5l_1 h^2 & h - 0.5l_2 h^2 \\ -l_1 h & 1 - l_2 h \end{bmatrix}$$

Substituindo Φ_{CL} em (7.24) e desenvolvendo o determinante chega-se ao seguinte resultado:

$$\det(zI - \Phi_{CL}) = z^2 + \left(\frac{l_1 h^2}{2} + l_2 h - 2\right)z + \left(\frac{l_1 h^2}{2} - l_2 h + 1\right)$$

Igualando com o polinómio desejado

$$P(z) = z^2 + p_1 z + p_2$$

vem:

$$\begin{cases} l_1 = \frac{1}{h^2}(1 + p_1 + p_2) \\ l_2 = \frac{1}{2h}(3 + p_1 - p_2) \end{cases} \quad (7.25)$$

b) Aplicando a fórmula de Ackermann, o vector de ganhos de realimentação para um controlador “deadbeat” é dado por

$$\begin{aligned} L &= [0 \quad 1][\Gamma \quad \Phi\Gamma]^{-1}\Phi^2 \\ &= [0 \quad 1][\Phi^{-2}\Gamma \quad \Phi^{-1}\Gamma]^{-1} \end{aligned}$$

Sendo

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Phi^{-2} &= \Phi^{-1} \cdot \Phi^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Phi^{-1}\Gamma &= \begin{bmatrix} \frac{-h^2}{2} \\ h \end{bmatrix} \\ \Phi^{-2}\Gamma &= \begin{bmatrix} -2h^2 + \frac{h^2}{2} \\ h \end{bmatrix} \end{aligned}$$

então

$$L = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{-3h^2}{2} & \frac{-h^2}{2} \\ h & h \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h^2} \\ \frac{3}{2h} \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

Notemos que este resultado obtém-se directamente de (7.25), sabendo que para o caso do controlador “deadbeat” $p_1 = p_2 = 0$.

c) Em malha fechada

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi_{CL} x(k) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{h}{4} \\ -\frac{1}{h} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x(k) \end{aligned}$$

então

$$x(1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{h}{4} \\ -\frac{1}{h} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x(0) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{h}{4} \\ -\frac{2}{h} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{h}{4} \\ -\frac{1}{h} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \frac{h}{4} \\ -\frac{2}{h} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

CONCLUSÃO: O controlador é “deadbeat” uma vez que conduziu o sistema de 2ª ordem ao estado nulo em dois intervalos de amostragem.

Na Figura 7.8 apresenta-se um esquema em Simulink que permite efectuar a simulação do sistema de controlo em estudo. Na Figura 7.9, representa-se a evolução do estado do sistema com controlador “deadbeat”, para entrada nula e condições iniciais $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Na simulação considerou-se o caso particular de $h = 1$.

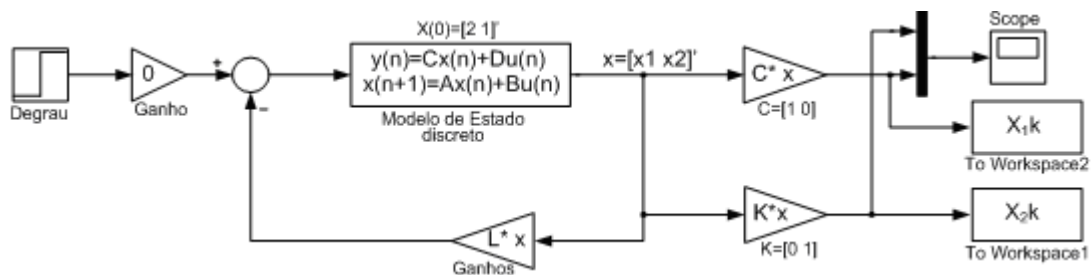


Figura 7. 8. - Esquema em Simulink para simulação do sistema de controlo

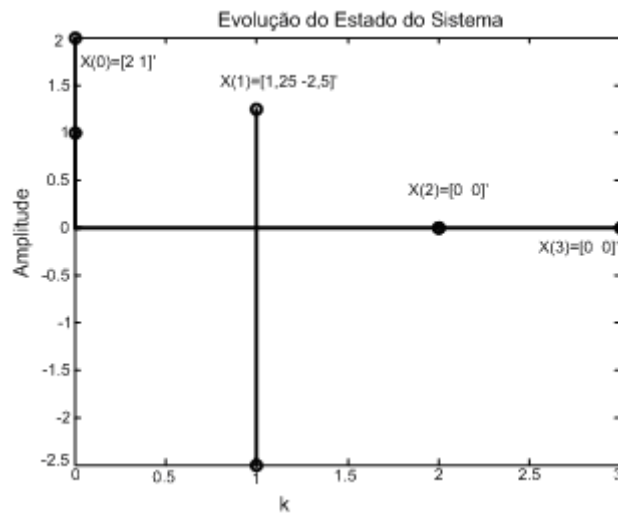


Figura 7.9. - Resposta do controlador deadbeat, considerando $h=1s$, para entrada nula e condições iniciais $x = [2 \ 1]^T$.

PROBLEMA 7.4

Considere um sistema linear contínuo (precedido por um zoh) cujo equivalente discreto para um período de amostragem $h=1s$ é representado por

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.04 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [0 \ 1] x(k)$$

- Calcule a função de transferência do sistema discreto equivalente.
- Determine os pólos do sistema contínuo.
- Pretende-se controlar o sistema contínuo usando um computador, de modo a que o sistema em malha fechada exiba uma dinâmica de um sistema equivalente contínuo de 2ª ordem com uma frequência natural de 1.118 rad/s e factor de amortecimento de 0.805. Determine L . Confirme o resultado determinando os pólos de malha fechada.
- Comente a afirmação “o sistema discreto em malha fechada tem pelo menos um zero em $z=-0.7$ ”.

RESOLUÇÃO

a) A função de transferência é dada por

$$H(z) = C(zI - \Phi)^{-1}\Gamma.$$

sendo

$$(zI - \Phi)^{-1} = \begin{bmatrix} z-0.8 & 0 \\ -0.2 & z-0.8 \end{bmatrix} = \frac{1}{(z-0.8)^2} \cdot \begin{bmatrix} z-0.8 & 0 \\ 0.2 & z-0.8 \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{aligned} H(z) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{(z-0.8)^2} \cdot \begin{bmatrix} z-0.8 & 0 \\ -0.2 & z-0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.04 \end{bmatrix} \\ &= \frac{0.2 \times 0.3 + 0.04(z-0.8)}{(z-0.8)^2} \\ &= \frac{0.04z + 0.028}{z^2 - 1.6z + 0.64} \end{aligned}$$

O sistema discreto tem

$$\begin{aligned} &1 \text{ pólo duplo real em } z = 0.8 \\ &1 \text{ zero em } z = -0.7 \end{aligned} \tag{7.27}$$

b) Os pólos são mapeados do plano z para o plano s segundo a equação

$$s = \frac{\ln z}{h}$$

logo, o sistema contínuo equivalente tem um pólo duplo real em

$$s_1 = s_2 = \frac{\ln 0.8}{1} = -0.2232$$

c) O polinómio característico desejado é

$$\begin{aligned} P(s) &= s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \\ &= s^2 + 1.8s + 1.25 \end{aligned}$$

e assim, o polinómio característico desejado em tempo discreto será

$$P(z) = z^2 + p_1 z + p_2$$

com

$$\begin{cases} p_1 = -2e^{-(\zeta\omega_n h)} \cos(\omega_n h \sqrt{1-\zeta^2}) \\ p_2 = e^{-2\zeta\omega_n h} \end{cases}$$

Substituindo valores, chega-se ao seguinte resultado:

$$P(z) = z^2 - 0.6407z + 0.1653 \quad (7.28)$$

Torna-se agora possível determinar os ganhos do controlador linear de realimentação das variáveis de estado. Usando a fórmula de Ackermann, vem

$$\begin{aligned} L &= [0 \quad 1] W_c^{-1} P(\Phi) \\ W_c^{-1} &= [\Gamma \quad \Phi\Gamma]^{-1} = \begin{bmatrix} 5.111 & -13.3333 \\ -2.2222 & 16.6667 \end{bmatrix} \\ P(\Phi) &= \Phi^2 + p_1\Phi + p_2I = \begin{bmatrix} 0.2927 & 0 \\ 0.1919 & 0.2927 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

de onde resulta

$$L = [2.5471 \quad 4.8788]$$

Vamos confirmar o resultado, calculando os pólos de malha fechada e por conseguinte o polinómio característico do sistema em malha fechada. Os pólos de malha fechada são os valores próprios da matriz

$$\begin{aligned} \Phi_{cl} &= \Phi - \Gamma L \\ &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.04 \end{bmatrix} [2.5471 \quad 4.8788] \\ &= \begin{bmatrix} 0.0359 & -1.4636 \\ 0.0981 & 0.6048 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

então, o polinómio característico em malha fechada é

$$\begin{aligned} P_{cl}(\lambda) &= \det(\lambda I - \Phi_{cl}) \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 0.0359 & 1.4636 \\ -0.0981 & \lambda - 0.6048 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_{CL}(\lambda) = \lambda^2 - 0.64\lambda + 0.1653$$

que se confirma ser igual a (7.28).

Os pólos de malha fechada são as raízes do polinómio característico, logo daí resulta serem

$$z_{1,2} = 0.32 \pm j0.25$$

d) O projecto do controlador linear de realimentação das variáveis de estado efectuado na alínea anterior, não altera os zeros do sistema de malha aberta, pelo que o zero em $z = -0.7$ do sistema em malha aberta (7.27) permanece no sistema de controlo.

Na Figura 7.10, apresenta-se código em Matlab que confirma os resultados obtidos na resolução do problema.

```
clear, clc

% modelo de estado discreto

phi=[0.8 0; 0.2 0.8];
gama=[0.3;0.04]; C=[0 1]; D=[0];
h=1;
wn=1.118; zeta=0.805;
wnh=wn*h;
ganhodc=1;
% coeficientes do polinomio
% caracteristico desejado

a1=2*zeta*wn; a2=wn^2;

% polinomio caracteristico
% discreto desejado

p1=-2*exp(-zeta*wnh)*cos(wnh*sqrt(1-
zeta^2));
p2=exp(-2*zeta*wnh);
pmfd=roots([1 p1 p2])

                                0.3204 - 0.2503i

sysd=ss(phi,gama,C,D,h);

% funcao de transferencia
                                Transfer function:
                                0.04 z + 0.028
                                -----
                                z^2 - 1.6 z + 0.64

Hd=tf(sysd)

% polinomio caracteristico discreto

pd=pole(sysd)
zd=zero(sysd)

                                Sampling time: 1
                                pd =
                                0.8000
                                0.8000
                                zd = -0.7000
                                Transfer function:
                                0.004344 s + 0.08465
                                -----
                                s^2 + 0.4463 s + 0.04979

sysc=d2c(Hd)
pc=pole(sysc)

                                pc =

% controlador pela formula de
% Ackermann
```

```

Wc=[gama phi*gama];
L=[0 1]* inv(Wc)*(phi^2+p1*phi+p2*eye(2))

phic=phi-gama*L;
pmf=eig(phic) % polos de malha
pmf =
    0.3204 + 0.2503i
    0.3204 - 0.2503i

% ganho para garantir ganho DC
% unitario

Lc=ganhodc/(C*inv(eye(2)-phic)*gama);
    
```

Figura 7.10. - Resposta do controlador deadbeat, considerando $h=1$, para entrada nula e condições iniciais $x = [2 \ 1]^T$.

PROBLEMA 7.5

Considere o sistema de regulação da Figura 7.11, onde

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0]$$

- Determine os pólos e os zeros do sistema em malha aberta.
- Compare os zeros do sistema de regulação com os zeros do processo sob controle. Comente.

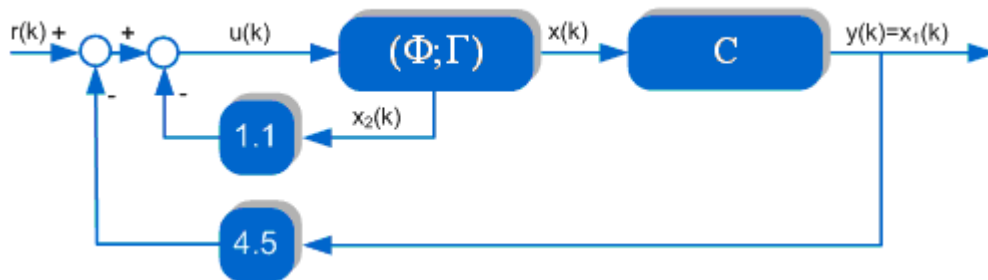


Figura 7.11. - Sistema de regulação

RESOLUÇÃO

- O processo discreto sob controlo é um sistema SISO com modelo de estado

$$\begin{cases} x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

em que

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad e \quad C = [1 \quad 0]$$

A fim de se determinarem os zeros e pólos do sistema calcula-se a sua função de transferência:

$$G(z) = C(zI - \Phi)^{-1} \Gamma$$

Sendo

$$\begin{aligned} (zI - \Phi)^{-1} &= \begin{bmatrix} z-1 & -0.1 \\ 0 & z-0.9 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} z-0.8 & 0 \\ 0.2 & z-0.8 \end{bmatrix}}{(z-1)(z-0.9)} \end{aligned}$$

Então

$$G(z) = \frac{\begin{bmatrix} z-0.9 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{bmatrix}}{(z-1)(z-0.9)} = \frac{0.005(z+1.1)}{(z-1)(z-0.9)}$$

O sistema tem:

- dois pólos reais um em $z = 1$ e outro em $z = 0.9$
- um zero em $z = -1.1$

b) O sistema em malha fechada tem a seguinte função de transferência:

$$H_{cl}(z) = C[zI - \Phi_{cl}]^{-1} \Gamma$$

com

$$\begin{aligned} \Phi_{cl} &= (\Phi - \Gamma L) = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.5 & 1.1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.9775 & 0.0945 \\ -0.45 & 0.79 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pelo que, e após algumas operações algébricas simples se chega ao resultado

$$H_{cl}(z) = \frac{0.005(z+1.1)}{z^2 - 1.7675z + 0.81475}$$

De acordo com o esperado, o sistema de regulação mantém o zero do sistema de malha aberta, mas com pólos que passaram a ser $z_{1,2} = 0.8838 \pm j0.1837$.

Na Figura 7.13, apresenta-se exemplo de código de Matlab que confirma os resultados obtidos na resolução analítica do problema.

```
clear, clc
% sistema em malha aberta
h=1;
phi=[1 0.1; 0 0.9];
gamma=[0.005 0.1]';
C=[1 0];d=0;
[z,p,k]=ss2zp(phi,gamma,C,d)

% sistema de regulação
L=[4.5 1.1]
phic=phi - gamma*L
[zc,pc,kc]=ss2zp(phic,gamma,C,d)

z = -1.1000
p = 1; 0.90
k = 0.0050

L = 4.5000 1.1000
phic1 =
    0.9775    0.0945
   -0.4500    0.7900

zc = -1.1000
pc = 0.8838 + 0.1837i; 0.8838 - 0.1837i
kc = 0.0050
```

Figura 7.12. - Código de Matlab e resultados

PROBLEMA 7.6

Considere o seguinte SLIT discreto:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0.16 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

Determine:

- A equação da resposta de frequência;
- A resposta em regime permanente para um sinal sinusoidal $u(t) = 2 + 5\cos(10t - \pi/2)$ amostrado com período de amostragem $h = 0.1$ s.
- A matriz dos ganhos de realimentação das variáveis de estado do controlador “deadbeat”.
- O estado $x(2)$ para entrada nula e condições iniciais $x(0) = [1 \ 0.5]^T$. Confirme se o controlador que projectou é ou não “deadbeat”.

RESOLUÇÃO

a) O sistema do problema está na forma canónica controlável pelo que se obtém directamente a função de transferência discreta

$$H(z) = \frac{0.16}{z^2 - z + 0.16}$$

e a equação da resposta de frequência

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{0.16}{e^{j2\Omega} - e^{j\Omega} + 0.16} = |H(e^{j\Omega})| e^{j\Phi(\Omega)}$$

em que a característica de amplitude é

$$|H(e^{j\Omega})| = \frac{0.16}{\sqrt{(\cos 2\Omega - \cos \Omega + 0.16)^2 + (\sin 2\Omega - \sin \Omega)^2}}$$

e, a característica de fase

$$\Phi(\Omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sin 2\Omega - \sin \Omega}{\cos 2\Omega - \cos \Omega + 0.16}\right)$$

Na Figura 7.13, representa-se a resposta de frequência do SLIT discreto obtida através do Matlab.

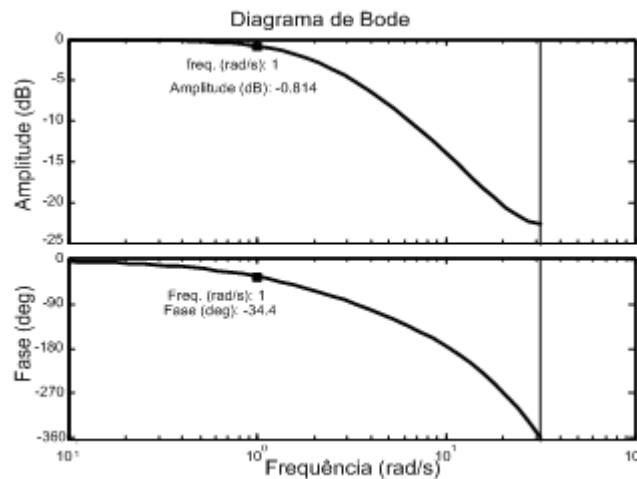


Figura 7. 13. - Características de amplitude e fase do SLIT discreto

b) A resposta em regime permanente para a entrada

$$u(t) = 2 + 5 \cos(10t - \pi/2)$$

é

$$y(k) = 2 + 0.91 \times 5 \cos(1k - 124.4^\circ)$$

porque para $\Omega = 0$ e $\Omega = 1 \text{ rad}$,

$$\left| H(e^{j0}) \right| = 1 ; \left| H(e^{j\Omega}) \right|_{\Omega=1} = -0.814 \text{ dB} = 0.91 ; \Phi(0) = 0 \text{ e } \Phi(e^{j\Omega})|_{\Omega=1} = -34.4^\circ$$

c) Para o controlador “deadbeat”

$$L = [0 \quad 1] [\Gamma \quad \Phi\Gamma]^{-1} \Phi^2 = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.16 & -1 \\ -0.16 & 0.84 \end{bmatrix} = [-0.16 \quad 1]$$

$$\text{d) } x(k+1) = (\Phi - \Gamma L)x(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

para $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ facilmente se obtém $x(1) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $x(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Os estados $x(k)$, $k > 2$ têm valor nulo pelo que se trata de um controlador “deadbeat”.

7.3 – PROBLEMAS PROPOSTOS

PROBLEMA 7.7

Considere o seguinte sistema discreto:

$$\begin{aligned} x(kh+h) &= \begin{bmatrix} 2 & 0.75 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x(kh) + \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(kh) \\ y(kh) &= [1 \quad 0] x(kh) \end{aligned}$$

a) O sistema é observável? Justifique.

b) Determine a matriz do controlador de realimentação das variáveis de estado de modo a obterem-se os seguintes pólos em malha fechada: $z = 0.5 \pm j0.3$.

PROBLEMA 7.8

Pressupondo que o modelo de estado discreto

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.7 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [1 \quad 1] x(k)\end{aligned}$$

descreve um processo contínuo, amostrado usando zoh e período de amostragem h , determine:

- a) Os pólos do processo discreto.
- b) Se for possível, o sistema contínuo correspondente.

PROBLEMA 7.9

Considere o seguinte sistema contínuo descrito no espaço de estados

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} u(t) \quad \text{e} \quad y(t) = [\alpha \quad 0] x(t)$$

com $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$

- a) Discuta a controlabilidade do sistema função de β e α .
- b) Determine o modelo de estado do sistema equivalente discreto, para um intervalo de amostragem genérico h . Considere que o sistema contínuo está precedido por um zoh.
- c) Discuta a observabilidade do sistema discreto para $h = \ln 2$.

PROBLEMA 7.10

Considere um dado processo contínuo com o seguinte modelo de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

a) Determine o modelo de estado do sistema equivalente discreto, considerando o processo contínuo precedido por zoh, para um intervalo de amostragem $h = \ln 2$. O sistema discreto é observável? Justifique.

b) Determine a matriz do controlador de realimentação das variáveis de estado, $u(k) = -Lx(k)$, de modo a obterem-se os seguintes pólos em malha fechada: $z = 0.5 \pm j0.3$.

CAPÍTULO 8

CONTROLO COM OBSERVADOR DE ESTADO

8.1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo é dedicado à análise e projecto de observadores de estado e à sua função e desempenho quando incluídos nos sistemas de controlo. Por outras palavras, vamos estudar sistemas de controlo por realimentação das variáveis de estado observadas.

É usual não ser possível medir todos os estados para depois usar na realimentação. Impossibilidade de instalação de sensores, razões económicas e porque nem sempre uma variável de estado do sistema tem relação com uma única grandeza física, são exemplos de causas que impedem o acesso à medição de estados do sistema.

Assim, há todo o interesse em determinar os estados do sistema a partir de medições disponíveis. Aos estados assim obtidos vamos designá-los por estados observados.

Neste capítulo considera-se o modelo de estado de sistemas lineares discretos expresso por:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (8.1)$$

Apenas se considera o caso em que tanto a entrada como a saída são escalares, ou seja, sistemas SISO.

PROBLEMA: estimar/reconstruir o estado $x(k)$ a partir das sequências de entrada e de saída $y(k); y(k-1); \dots u(k); u(k-1)$. Os métodos para fazer esta reconstrução são designados genericamente por observadores. Este capítulo aborda uma classe de observadores que reconstroem o estado do sistema usando modelos dinâmicos com estrutura típica exemplificada na Figura 8.1.

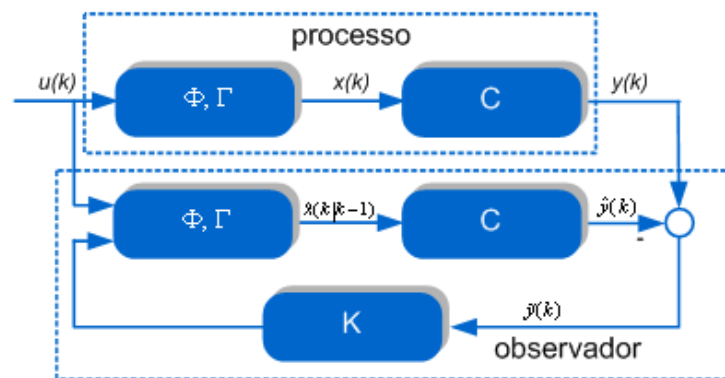


Figura 8. 1. - Observador de estado baseado em modelo dinâmico

8.2 OBSERVADOR-PREDITOR DE ORDEM PLENA

A reconstrução de estado baseada em modelo dinâmico inclui uma malha de realimentação do erro de estado, sendo expressa por

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi \hat{x}(k|k-1) + \Gamma u(k) + K \tilde{y}(k)$$

ou, ainda,

$$\hat{x}(k+1|k) = (\Phi - KC) \hat{x}(k|k-1) + \Gamma u(k) + Ky(k) \quad (8.2)$$

onde K é uma matriz de ganhos e o erro de estado, termo realimentado, é dado por:

$$\tilde{y}(k) = y(k) - C\hat{x}(k|k-1) \quad (8.3)$$

O observador (8.2) é um sistema dinâmico, com entradas $y(k)$ e $u(k)$, com equação característica

$$\det(zI - (\Phi - KC)) = 0 \quad (8.4)$$

Neste texto é usada a notação $\hat{x}(k+1|k)$ para representar uma estimativa de $x(k+1)$ baseada nas medições até ao instante k , logo (8.2) representa um **observador-preditor**. Se $\hat{x}(k|k-1) = x(k)$, i.e. se a estimativa for perfeita, então a contribuição do termo (8.3) é nula.

É necessário determinar a matriz K . Para tal, comecemos por definir o erro de reconstrução (ou erro de observação):

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \quad (8.5)$$

Subtraindo (8.2) da primeira equação de (8.1) vem:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k+1|k) &= \Phi \tilde{x}(k|k-1) - K[y(k) - C\hat{x}(k|k-1)] \\ &= \Phi \tilde{x}(k|k-1) - KC[x(k) - \hat{x}(k|k-1)] \\ &= (\Phi - KC) \tilde{x}(k|k-1) \end{aligned} \quad (8.6)$$

De (8.4) e (8.6) conclui-se que a dinâmica do erro de reconstrução é igual à do observador, pelo que se K for escolhido tal que (8.6) seja assintoticamente estável, então há garantia de que o erro de reconstrução, \tilde{x} , converge para zero. O sistema

(8.2) define um observador do sistema (8.1) porque produz o estado de (8.1) a partir das medições das entradas e das saídas.

Falta, ainda, obter a matriz de ganhos do observador, K , tal que o observador (8.2) seja estável e caracterizado por uma dinâmica desejada. Sendo conhecidas as matrizes Φ e C , o problema é encontrar a matriz K tal que a matriz $(\Phi - KC)$ tenha valores próprios desejados. Dado que uma matriz e a sua transposta têm os mesmos valores próprios, o problema é o mesmo que encontrar a matriz K^T tal que a matriz $(\Phi^T - C^T K^T)$ tenha os valores próprios desejados. Este problema foi resolvido na Secção 7.2 na solução do problema da colocação de pólos do sistema de regulação. Estamos, assim, perante um problema formalmente semelhante àquele problema. Se traduzirmos os resultados daquela secção para o contexto presente, vemos que o problema de observação tem solução se a matriz W_o^T , e assim, a matriz W_o , matriz de observabilidade do sistema (8.1), tiver característica completa.

TEOREMA: DINÂMICA DO OBSERVADOR

Consideremos o sistema discreto (8.1). Seja $P(\lambda)$ um polinómio de grau n , onde n é a ordem do sistema. Assumindo que o sistema é completamente observável, então existe uma matriz K tal que a matriz $(\Phi - KC)$ do observador (8.2) tem polinómio característico $P(\lambda)$.

FONTES DE ERRO

Existem diversas fontes de erro, designadamente, erros de modelação do processo, erros de medida e perturbações que actuam sobre o processo. Uma forma de levar em conta o efeito de determinado tipo de perturbações, w , e erros de medição, v , consiste em expressar o modelo de estado por

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) + \Gamma_1 w(k) \\ y(k) &= Cx(k) + v(k) \end{aligned} \quad (8.7)$$

Da aplicação do observador (8.2) a este sistema, resulta o erro de reconstrução

$$\tilde{x}(k+1|k) = (\Phi - KC)\tilde{x}(k|k-1) + \Gamma_1 w(k) + Kv(k) \quad (8.8)$$

Os erros tendem para zero se o observador for estável, contudo, os termos de excitação $\Gamma_1 w(k)$ e $Kv(k)$ não permitem que o erro estacionário de estimação seja nulo. De (8.8) vê-se que os pólos da dinâmica do erro de reconstrução são dados pelas raízes da equação característica (8.4), ou seja, são os mesmos do observador (8.2).

RESUMINDO: Os pólos do observador-preditor, com ou sem fontes de erro (do tipo considerado), são as raízes da equação característica (8.4) que por sua vez são também os pólos da dinâmica do erro de reconstrução (8.6) e (8.8).

8.2.1 PROJECTO DO OBSERVADOR-PREDITOR

A determinação da matriz K do observador (8.2) é um problema matemático similar ao da determinação dos ganhos de realimentação, L , no problema de regulação.

Os aspectos práticos também estão intimamente relacionados: a selecção dos pólos do observador envolve um compromisso entre sensibilidade aos erros de medição e a dinâmica de recuperação dos estados do sistema após alterações de estado. Um observador rápido converge rapidamente, mas é mais sensível a erros de medição. A determinação da matriz K é o problema dual da determinação da matriz de ganhos L para a colocação de pólos por realimentação das variáveis de estado. Este problema é solucionado pela fórmula de Ackermann (Secção 7.2).

Fazendo as correspondências:

$$\begin{aligned} L &\rightarrow K^T \\ W_c &\rightarrow W_o^T \\ \Phi &\rightarrow \Phi^T \\ \Gamma &\rightarrow C^T \\ (\Phi - \Gamma L) &\rightarrow (\Phi^T - C^T K^T) \end{aligned}$$

e, atendendo à equação (7.14), obtém-se

$$K^T = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1](W_o^T)^{-1}P(\Phi^T) \quad (8.9)$$

ou, alternativamente,

$$K = P(\Phi)W_o^{-1}[0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]^T \quad (8.10)$$

em que

$$P(\Phi) = \Phi^n + \alpha_1 \Phi^{n-1} + \dots + \alpha_n I \quad (8.11)$$

que se obtêm do polinómio característico desejado para o observador:

$$P(z) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n \quad (8.12)$$

CONDIÇÃO NECESSÁRIA E SUFICIENTE PARA OBSERVAÇÃO DE ESTADO: a condição necessária e suficiente para a observação de estado é que o sistema seja completamente observável.

Satisfeita aquela condição, a matriz de observabilidade admite inversa condição que é necessária para que (8.9), e (8.10), tenham solução.

8.2.2 OBSERVADOR DEADBEAT

Ao observador *deadbeat* corresponde o tempo de estabelecimento mínimo para o erro de observação, mas com o problema de lhe corresponder uma elevada sensibilidade ao ruído. Os valores próprios da matriz que define a dinâmica do observador são neste caso todos nulos.

8.3 OBSERVADOR-CORRENTE DE ORDEM PLENA

O **observador-preditor** (8.2) contém um atraso puro já que o estado estimado no intervalo k , $\hat{x}(k)$, é função de $y(k-1); y(k-2); \dots$, ou seja, o valor actual da saída, $y(k)$, não é usado.

Podemos realizar um observador sem aquele atraso puro. Trata-se do observador corrente cujo algoritmo é composto pelos seguintes dois passos:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k|k-1) &= \Phi \hat{x}(k-1|k-1) + \Gamma u(k-1) \\ \hat{x}(k|k) &= \hat{x}(k|k-1) + K[y(k) - C\hat{x}(k|k-1)] \end{aligned} \quad (8.13)$$

Neste caso, faz todo o sentido simplificar a notação e expressar o observador-corrente por

$$\bar{x}(k) = \Phi \hat{x}(k-1) + \Gamma u(k-1) \quad (8.14)$$

$$\hat{x}(k) = \bar{x}(k) + K[y(k) - C\bar{x}(k)] \quad (8.15)$$

A equação (8.14) implementa uma primeira estimativa do estado no intervalo k , baseada na dinâmica do modelo do sistema e no sinal de entrada $u(k-1)$. A equação (8.15) implementa uma correcção tendo em conta a medição da saída, $y(k)$, efectuada no instante presente. Substituindo (8.14) em (8.15) obtém-se

$$\hat{x}(k) = \Phi \hat{x}(k-1) + \Gamma u(k-1) + K[y(k) - C\hat{x}(k)] \quad (8.16)$$

Substituindo agora (8.14) em (8.16) e desenvolvendo, vem

$$\hat{x}(k) = (I - KC)\Phi \hat{x}(k-1) + (I - KC)\Gamma u(k-1) + Ky(k) \quad (8.17)$$

e, assim, se conclui que a dinâmica do observador é caracterizada pelas raízes da equação característica

$$\det(zI - (\Phi - KC\Phi)) = 0 \quad (8.18)$$

Considerando um processo onde se inclui uma perturbação $p(k)$ aditiva, da forma

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) + p(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (8.19)$$

Resultaria no observador-corrente

$$\hat{x}(k) = (I - KC)\Phi \hat{x}(k-1) + (I - KC)\Gamma u(k-1) + Ky(k) + (I - KC)\Gamma p(k-1) \quad (8.20)$$

ANÁLISE DO ERRO DO OBSERVADOR-CORRENTE NO PROCESSO COM PERTURBAÇÃO

Usando (8.15) podemos escrever a seguinte expressão para o erro de observação:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(k) &= x(k) - \hat{x}(k) \\ &= x(k) - (\bar{x}(k) + Ky(k) - KC\bar{x}(k)) \end{aligned}$$

Substituindo nesta equação as igualdades (c.f. (8.20)),

$$\begin{aligned} x(k) &= \Phi x(k-1) + \Gamma u(k-1) + \Gamma p(k-1) \\ y(k) &= Cx(k) = C\Phi x(k-1) + C\Gamma u(k-1) + C\Gamma p(k-1) \end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k) = & (\Phi x(k-1) + \Gamma u(k-1) + \Gamma p(k-1)) - (\Phi \hat{x}(k-1) + \Gamma u(k-1)) \\ & - (KC\Phi x(k-1) + KC\Gamma u(k-1) + KC\Gamma p(k-1)) \\ & + (KC\Phi \hat{x}(k-1) - KC\Gamma u(k-1))\end{aligned}$$

e, desenvolvendo, facilmente, se chega ao seguinte resultado para o erro de observação:

$$\tilde{x}(k) = (I - KC)\Phi \tilde{x}(k-1) + (I - KC)\Gamma p(k-1) \quad (8.21)$$

A dinâmica deste erro de observação é a dinâmica do observador-corrente, sendo caracterizada pela equação característica

$$\det(zI - (\Phi - KC\Phi)) = 0 \quad (8.22)$$

PROJECTO DO OBSERVADOR-CORRENTE DE ORDEM PLENA

Para efectuar o projecto de um observador-corrente é necessária a equação (8.17), bem como determinar a matriz de ganhos K . Para este fim, vamos usar a metodologia seguida na obtenção das equações de projecto do observador-preditor (Secção (8.2.1))

Da observação de (8.4) e (8.22), conclui-se que a fórmula de Ackermann para o observador-corrente se obtém da fórmula de Ackermann do observador-preditor (8.9), efectuando as seguintes substituições:

$$\begin{aligned}C & \rightarrow C\Phi \\ W_0 & \rightarrow W_0\Phi\end{aligned} \quad (8.23)$$

obtendo-se

$$K^T = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1](W_0\Phi)^{-T} P(\Phi^T) \quad (8.24)$$

ou, alternativamente,

$$K = P(\Phi) \begin{bmatrix} C\Phi^1 \\ C\Phi^2 \\ \vdots \\ C\Phi^n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = P(\Phi)(W_0\Phi)^{-1} [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]^T \quad (8.25)$$

com $P(\Phi)$ dado pela equação (8.11).

Pela definição da matriz de observabilidade W_o , o par $(\Phi; C\Phi)$ é observável se o par $(\Phi; C)$ for observável. Isto significa que se podem atribuir valores próprios arbitrários a $(\Phi - KC\Phi)$ através da selecção apropriada da matriz de ganhos K .

8.4 OBSERVADORES PARCIAIS

Os observadores estudados nas Secções 8.1 e 8.2, são projectados para reconstruir o vector de estado completo a partir de medições da entrada e saída, e, por isso, são designados observadores de ordem plena. Se forem estimadas pelo observador apenas as variáveis de estado que não são mensuráveis (por sensores), i.e. as variáveis não acessíveis ao controlador-observador, este é designado **observador de ordem mínima**. O observador parcial que estima todas as variáveis de estado não mensuráveis mais alguma (s) mensuráveis (não todas) é designado **observador de ordem reduzida**.

Havendo ruído significativo nas medições, o observador de ordem plena fornece uma versão “filtrada” dos elementos medidos bem como a reconstrução dos elementos de estado não medidos. Assim, de um modo geral, no controlador-observador faz-se uso de observadores de ordem plena, não se realimentando elementos de estado directamente medidos, mas o estado completo reconstruído fornecido pelo observador.

OBSERVADOR DE LUENBERGER

Um exemplo de observador parcial bem conhecido é o observador de Luenberger. Para observador do tipo corrente (secção 8.3), o erro de observação da saída pode-se definir e desenvolver sucessivamente da seguinte forma, usando para tal (8.21) (com $p(k) = 0$):

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}(k) &= y(k) - \hat{y}(k) \\
 &= C\tilde{x}(k) \\
 &= C(I - KC)\Phi\tilde{x}(k-1) \\
 &= (I - KC)C\Phi\tilde{x}(k-1)
 \end{aligned} \tag{8.26}$$

Se o sistema tem p saídas, então $(I - KC)$ é de ordem $p \times p$, e se a característica de C for p , então pode-se escolher K tal que $CK = I$, o que significa que a saída do sistema é reconstruída sem erro:

$$CK = I \Rightarrow \tilde{y}(k) = 0 \Rightarrow \hat{y}(k) = C\hat{x}(k) = y(k)$$

Por esta razão, torna-se possível eliminar p (nº de saídas) equações no observador. Pode-se definir novas coordenadas em que o vector de estado contém a saída $y(k)$ como sub-vector:

$$z(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ \bar{z}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ \bar{C} \end{bmatrix} x(k) = Tx(k)$$

O erro de observação é, então, nulo para as variáveis de estado que coincidem com a saída:

$$\tilde{z}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{y}(k) \\ \tilde{\bar{z}}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\bar{z}}(k) \end{bmatrix}$$

onde as dimensões dos vectores obedecem a:

$$\dim(\tilde{z}) = \dim(x) - \dim(y) = n - p$$

8.5 CONTROLADOR COM OBSERVADOR-PREDITOR

O Capítulo 7 abordou o controlo por colocação de pólos com realimentação das variáveis de estado, onde foram consideradas como sendo todas directamente mensuráveis. No presente capítulo foram estudados observadores cujo objectivo é a estimação dos estados a partir da observação das saídas e das entradas do sistema. Uma aplicação natural que será objecto de estudo na presente secção é a combinação do observador e controlador. Designamos o conjunto por controlador-observador.

Nesta secção considera-se o modelo de estado (8.1), e que o sistema está sujeito a perturbações do tipo impulsivo: impulsos suficientemente espaçados, permitindo que o sistema atinja o regime estacionário entre impulsos sucessivos, ou, o que é equivalente estados iniciais não nulos.

Se todos as variáveis de estado forem mensuráveis, podemos aplicar a lei de controlo

$$u(k) = -Lx(k) + L_c r(k) \quad (8.27)$$

que permite impor os pólos desejados em malha fechada. Em (8.27) $r(k)$ é a entrada de referência do servocontrolo (objecto de estudo no Capítulo 9) que especifica a evolução desejada para a saída e L_c é um ganho que permite ajustar o ganho em regime estacionário do servocontrolador.

No controlador-observador realimentam-se as variáveis de estado observadas,

$$u(k) = -L\hat{x}(\cdot) + L_c r(k) \quad (8.28)$$

em que $\hat{x}(\cdot) = \hat{x}(k|k-1)$ se for usado um observador-preditor, e $\hat{x}(\cdot) = \hat{x}(k)$ se for usado um observador-corrente. Considere-se o uso do observador-preditor, então

$$\hat{x}(k+1|k) = \Phi\hat{x}(k|k-1) + \Gamma u(k) - K(y(k) - C\hat{x}(k|k-1)) \quad (8.29)$$

O controlador-observador (8.28) - (8.29), é ele próprio um sistema dinâmico com variáveis de estado próprias. Note-se que no caso sem observador, não se introduz nenhuma variável de estado extra, uma vez que nessa situação o controlador é um sistema estático (bloco de multiplicação matricial).

8.5.1 ANÁLISE DO CONTROLADOR COM OBSERVADOR-PREDITOR

Nesta secção é analisado o sistema constituído pelo processo (sob controlo), observador-preditor, e controlador. Para esse fim faz-se, inicialmente, a dedução do modelo de estado do sistema global com controlador-observador. O estado do sistema global além das variáveis de estado do processo vai incluir uma variável, extra, do observador. Considere-se como variável de estado do observador o erro de observação:

$$\tilde{x}(k|k-1) = x(k) - \hat{x}(k|k-1) \quad (8.30)$$

De (8.1), (8.28) e (8.30), facilmente se deduz a equação de estado

$$x(k+1) = (\Phi - \Gamma L)x(k) + \Gamma L\tilde{x}(k|k-1) + \Gamma L_c r(k) \quad (8.31)$$

A equação de erro do observador-preditor é conhecida (8.6):

$$\tilde{x}(k+1|k) = (\Phi - KC)\tilde{x}(k|k-1) \quad (8.32)$$

Combinando (8.31) e (8.32), obtém-se o modelo do sistema de controlo por realimentação do estado observado

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \tilde{x}(k+1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma L & \Gamma L \\ 0 & \Phi - KC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k|k-1) \end{bmatrix} + \Gamma \begin{bmatrix} L_c \\ 0 \end{bmatrix} r(k), \quad (8.33)$$

e

$$\begin{aligned} y(k) &= Cx(k) \\ &= [C \ 0]x_a(k) \end{aligned} \quad (8.34)$$

onde

$$x_a(k) = \begin{bmatrix} x(k) & \tilde{x}(k|k-1) \end{bmatrix}^T \quad (8.35)$$

representa o estado aumentado que inclui o estado do processo e do estado observador.

A equação característica do sistema global com realimentação do estado observado vem então:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda I - \Phi + \Gamma L & -\Gamma L \\ 0 & \lambda I - \Phi + KC \end{pmatrix} = 0 \quad (8.36)$$

$$\Leftrightarrow \det(\lambda I - \Phi + \Gamma L) \cdot \det(\lambda I - \Phi + KC) = 0$$

Os valores próprios do sistema global em malha fechada são constituídos por:

- (1) Os valores próprios de $\Phi - \Gamma L$, que constituem os **pólos de regulação**;
- (2) Os valores próprios de $\Phi - KC$ que constituem os pólos do observador.

PROPRIEDADES:

- (1) **Princípio da separação:** A solução do problema global passa pela solução de dois problemas independentes; o projecto do controlador e o projecto do observador.

- (2) As soluções da realimentação de estado e do observador são problemas duais.
- (3) O mesmo algoritmo numérico (fórmula de Ackermann) pode ser usado para o cálculo dos ganhos de realimentação, L , e do observador, K .
- (4) Os pólos em malha fechada estão divididos em dois grupos: os associados com a realimentação de estado e os associados com o observador.

O observador contém um modelo do processo. Trata-se de um caso especial em que surge o princípio do **modelo interno** que estabelece que um bom controlador contém um modelo do sistema sob controlo. A resposta do observador deve ser mais rápida do que a do regulador. Intuitivamente, o objectivo é que o observador estime os estados rapidamente para que o controlador possa utilizar no controlo as estimativas adequadas dos estados. Como regra empírica podemos escolher uma resposta do observador 4 a 5 vezes mais “rápida” do que a resposta do regulador. A dinâmica do sistema global em malha fechada vem então dominada pelos pólos de regulação.

8.6 CONTROLADOR COM OBSERVADOR-CORRENTE

O observador preditor usa o valor da saída no instante $k-1$, ou seja $y(k-1)$ para obter $\hat{x}(k|k-1)$ que é uma estimativa de $x(k)$. O observador corrente usa $y(k)$ para obter $\hat{x}(k|k)$ que é uma estimativa de $x(k)$. Este último observador permite retirar ao controlador global o atraso adicional em relação à entrada y . Neste caso usa-se a lei de controlo,

$$u(k) = -L\hat{x}(k) + L_c r(k) \quad (8.37)$$

o que permite obter os pólos de regulação desejados em malha fechada. Na equação (8.37) \hat{x} é obtido do observador-corrente:

$$\hat{x}(k) = (I - KC)\Phi\hat{x}(k-1) + (I - KC)\Gamma u(k-1) + Ky(k) \quad (8.38)$$

Vamos analisar o sistema constituído pelo processo, observador-corrente, e controlador. Para tal, ao estado do processo junta-se o estado do observador, obtendo-se um vector de estado global aumentado. Considere-se para representar o estado do observador o erro de observação,

$$\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$$

De (8.1), (8.37) e (8.38) obtém-se o modelo global do controlador-observador

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \tilde{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma L & \Gamma L \\ 0 & (I - KC)\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \tilde{x}(k) \end{bmatrix} + \Gamma \begin{bmatrix} L_c \\ 0 \end{bmatrix} r(k) \quad (8.39)$$

com equação característica

$$\det \begin{pmatrix} \lambda I - (\Phi - \Gamma L) & \Gamma L \\ 0 & \lambda I - (I - KC)\Phi \end{pmatrix} = 0$$

ou, ainda

$$\det(\lambda I - (\Phi - \Gamma L)) \cdot \det(\lambda I - (I - KC)\Phi) = 0 \quad (8.40)$$

Novamente, o problema global pode ser decomposto em dois problemas separados, de solução simples e independentes: realimentação de estado e observação. Por outras palavras, os ganhos de regulação, L , e os ganhos de observação, K , podem ser calculados de forma independente. A matriz de ganhos de realimentação, L , não necessita de ser alterada com a alteração do observador, de preditor para corrente ou vice-versa.

8.7 CONTROLADOR COM OBSERVADOR-PREDITOR DE ESTADO AUMENTADO APLICADO A SISTEMAS COM PERTURBAÇÕES

Um factor importante a considerar no projecto de controladores é o do desempenho do sistema de controlo na atenuação ou rejeição de perturbações. Generalizando o problema considere-se, então, que o sistema é descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + v(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (8.41)$$

onde $v(t)$ expressa uma perturbação actuando sobre o processo. Tipicamente $v(t)$ tem muita energia às baixas frequências. Assume-se que um modelo típico para as perturbações é o seguinte:

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= A_w w(t) \\ v(t) &= C_w w(t) \end{aligned} \quad (8.42)$$

ou, em tempo discreto,

$$\begin{aligned}\dot{w}(k+1) &= \Phi_w w(k) \\ v(k) &= C_w w(k)\end{aligned}\tag{8.43}$$

Tipicamente, A_w tem valores próprios na origem ou no eixo imaginário, o que implica e permite, modelar perturbações constantes, polinomiais, sinusoidais, etc... Considere-se o seguinte vector de estado aumentado:

$$z = \begin{bmatrix} x & w \end{bmatrix}^T\tag{8.44}$$

assim, obtém-se o modelo aumentado

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{8.45}$$

com equivalente discreto

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x(k+1) \\ w(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi & \Phi_{xw} \\ 0 & \Phi_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{8.46}$$

Os estados da perturbação w são observáveis mas não são alcançáveis a partir das entradas. Mas se (8.1) for observável, então o estado completo $z(k)$ é observável a partir da saída do sistema, $y(k)$. É usada a seguinte lei de controlo por realimentação linear de todas as variáveis de estado:

$$u(k) = -L\hat{x}(k|k-1) - L_w\hat{w}(k|k-1) + L_c r(k)\tag{8.47}$$

em que \hat{x} e \hat{w} são obtidos do seguinte observador predictor:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1|k) \\ \hat{w}(k+1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi_{xw} \\ 0 & \Phi_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k|k-1) \\ \hat{w}(k|k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} K \\ K_w \end{bmatrix} \varepsilon(k)\tag{8.48}$$

em que

$$\varepsilon(k) = y(k) - C\hat{x}(k|k-1) \quad (8.49)$$

O estado do observador é constituído pelas estimativas do estado do processo e das perturbações. De (8.45) - (8.49), podemos definir algumas matrizes relativas ao modelo aumentado em análise. Relativamente ao sistema sob observação e controlo podemos definir:

$$\begin{aligned} A_a &= \begin{bmatrix} A & C_w \\ 0 & A_w \end{bmatrix}; B_a = \begin{bmatrix} B \\ o \end{bmatrix}; C_a = [C \quad 0] \\ \Phi_a &= \begin{bmatrix} \Phi & \Phi_{xw} \\ 0 & \Phi_w \end{bmatrix}; \Gamma_a = \begin{bmatrix} \Gamma \\ o \end{bmatrix}; \\ L_a &= [L \quad L_w]; K_a = \begin{bmatrix} K \\ K_w \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Das equações (8.46) - (8.49) obtém-se o modelo do sistema de controlo completo,

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ w(k+1) \\ \hat{x}(k+1|k) \\ \hat{w}(k+1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma L & \Phi_{xw} - \Gamma L_w & \Gamma L & \Gamma L_w \\ 0 & \Phi_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi - KC & \Phi_{xw} \\ 0 & 0 & -K_w C & \Phi_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k|k-1) \\ \hat{w}(k|k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} L_c r(k)$$

O estado da perturbação é observável mas não alcançável. Projectando apropriadamente os ganhos de realimentação das variáveis de estado, matriz L , pode-se fazer com que o estado x atinja o seu estado de equilíbrio (set-point), com dinâmica desejada, em resposta a uma perturbação.

A escolha apropriada de L_w permite reduzir o efeito da perturbação v . Esta acção de controlo é particularmente eficiente se se puder tornar nula a matriz

$$\Phi_{xw} - \Gamma L_w \quad (8.50)$$

Os ganhos do observador, K e K_w , influenciam a velocidade de decaimento para zero dos erros de estimação.

Ao passar do sistema com observador não expandido para o sistema com observador e modelo de estado aumentado:

- 1) A dinâmica de regulação endógena aos estados x mantém-se (matriz $\Phi - \Gamma L$). Logo, se forem mantidos os pólos de regulação, o vector de ganhos de realimentação não varia. Resta então determinar L_w .
- 2) A matriz que descreve a dinâmica do erro de observação passa a ter outra forma. Os ganhos de observação K , mesmo para a mesma dinâmica do erro de observação \tilde{x} , não se mantêm. O vector de ganhos K tem de ser recalculado através do cálculo do ganho do observador expandido $K_a = [K \quad K_w]^T$.

8.8 CONTROLADOR COM OBSERVADOR-CORRENTE DE ESTADO AUMENTADO APLICADO A SISTEMA COM PERTURBAÇÕES

Se em (8.48) em vez do observador preditor se usar um observador corrente, obtém-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{w}(k+1) \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K \\ K_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \right\} \cdot \\ &\cdot \left\{ \begin{bmatrix} \Phi & \Phi_{xw} \\ 0 & \Phi_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ \hat{w}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \right\} + \begin{bmatrix} K \\ K_w \end{bmatrix} y(k) \end{aligned} \quad (8.51)$$

resultando o seguinte modelo para o sistema global em malha fechada:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ w(k+1) \\ \tilde{x}(k+1) \\ \tilde{w}(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma L & \Phi_{xw} - \Gamma L_w & \Gamma L & \Gamma L_w \\ 0 & \Phi_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (I - KC)\Phi & (I - KC)\Phi_{xw} + \Phi_w \\ 0 & 0 & -K_w C\Phi & -K_w C\Phi_{xw} + \Phi_w \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \\ \tilde{x}(k) \\ \tilde{w}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} L_c r(k) \end{aligned} \quad (8.52)$$

8.9 ACÇÃO INTEGRAL

Um caso especial muito comum é a ocorrência de uma perturbação constante, na carga, de valor desconhecido.

O uso do controlador-observador de estado aumentado conduz a uma solução com acção integral no controlador.

Vejamos o caso SISO com perturbação na carga (na entrada do processo). Devido à perturbação ser constante tem-se

$$w = v$$

$$\Phi_w = 1$$

e, estando aplicada na entrada do processo, vem

$$\Phi_{xw} = \Gamma \quad (8.53)$$

Um ganho $L_w = 1$, conduz a anulação de (8.50), ou seja produz a um cancelamento perfeito do efeito da perturbação no estado x .

Assumindo que não existem erros de medição, então o controlador (8.47) a (8.49) vem:

$$\begin{aligned} u(k) &= -L\hat{x}(k|k-1) - L_w\hat{v}(k|k-1) + L_cr(k) \\ &= -L\hat{x}(k|k-1) - \hat{v}(k|k-1) + L_cr(k) \\ \hat{x}(k+1|k) &= \Phi\hat{x}(k|k-1) + \Gamma[\hat{v}(k|k-1) + u(k)] - K\varepsilon(k) \\ \hat{v}(k+1|k) &= \hat{v}(k|k-1) + K_w\varepsilon(k) \\ \varepsilon(k) &= y(k) - C\hat{x}(k|k-1) \end{aligned} \quad (8.54)$$

De (8.54) observa-se que a estimativa do estado do processo é igual ao caso em que não há perturbações (c.f. (8.2) e (8.29))

8.10 – PROBLEMAS RESOLVIDOS

PROBLEMA 8.1

Considere um sistema discreto com o seguinte modelo de estado:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & \phi_{12} \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [1 \quad 0] x(k) \end{aligned} \quad (8.55)$$

Pretende-se controlar este sistema para que o modelo contínuo, em malha fechada, equivalente tenha o polinómio característico:

$$s^2 + 1.8s + 1.25$$

- O sistema é controlável? Justifique. O sistema é observável? Justifique.
- Considere $\phi_{12} = 1.5$ e faça $\omega_n h = 0.4$. Pretende-se um ganho DC unitário. Elabore um programa em Matlab que determine a função de transferência do sistema discreto em malha aberta, os ganhos de realimentação das variáveis de estado e a função de transferência em malha fechada. Compare os zeros do sistema de malha aberta com os zeros do sistema de malha fechada. Observe que neste exemplo $L_c = L(1)$.
- Desenhe um esquema de Simulink do sistema global. Obtenha as curvas da resposta do servocontrolador para um escalão como sinal de referência.
- Repita as alíneas b) e c) para $\phi_{12} = -1.5$ mantendo $\omega_n h = 0.4$. Retire conclusões.
- Projecte um observador -corrente do estado do sistema, efectuando apenas leituras da variável x_1 . O observador deverá ter todos os pólos em $z = 0.2$. Apresente o projecto em ambiente Matlab/Simulink incluindo o esquemático global e os programas e/ou funções necessários.

RESOLUÇÃO PARCIAL:

- O programa de Matlab pode ser o seguinte:

```
wnh=0.4; ganhodc=1;           % wn*h=0.4 e ganho DC unitário
a1=1.8; a2=1.25;             % coeficientes do polinómio
                               % característico
                               % em tempo continuo desejado:
                               % Am(s)= s^2+a1*s+a2
                               % sistema discreto em espaço de estados
Phi12=1.5;
%phi2=-1.5
phi=[1 phi2; 0 0.4];
gama=[2;1]; C=[1 0]; D=[0];
```



```

Csim=[1 0;0 1]; Dsim=[0;0]; % matrizes usadas no esquema de
                               % Simulink, para se obter à saída do
                               % sistema discreto o vector de estados
sys=ss(phi,gama,C,D,[]); % função de transferência do sistema
H=tf(sys) % discreto: H=(B/A)

                               % obtenção do polinómio característico
                               % discreto

wn=sqrt(a2); zeta=a1/(2*wn);
h=wnh/wn; % período de amostragem (h=wn*h)
p1=-2*exp(-zeta*wnh)*cos(wnh*sqrt(1-zeta^2));
p2=exp(-2*zeta*wnh); % p1 e p2 são os coeficientes do
                     % polinómio característico discreto
                     % desejado Am(z)=z^2+p1z+p2
Wc=[gama phi*gama]; % matriz de controlabilidade
L=[0 1]* inv(Wc)*(phi^2+p1*phi+p2*eye(2))
                               % L = ganho de realimentação das
                               % variáveis de estado
phic=phi-gama*L; % matriz de transição de estados em
polos_mf=eig(phic); % malha fechada
Lc=ganhodc/(C*inv(eye(2)-phic)*gama);
sys=ss(phic,gama,C,D,[]); % função de transferência discreta
                               % em malha fechada
Hc=tf(sys)
Hcl=Lc*Hc; % Hcl=Lc*(B/Am)
C2=[0 1]; % vector usado no modelo de Simulink
sim ex8ls_b.mdl % chamada ao modelo de Simulink
plot(yk.time,yk.signals.values,'k',x2k.time,x2k.signals.values,'ko');
xlabel('Instante de amostragem k'); ylabel('amplitude')
grid

```

Figura 8.2. - Código Matlab

Funções de transferência obtidas do Matlab:

$H(z) = B(z) / A(z)$	$H_c(z) = B(z) / A_m(z)$
Função de Transferência em Malha Aberta	Função de Transferência em Malha Fechada sem considerar o ganho Lc)
$\frac{2z + 0.7}{z^2 - 1.4z + 0.4}$	$\frac{2z + 0.7}{z^2 - 1.409z + 0.5252}$

Note-se que o zero do sistema de malha fechada é o zero do sistema de malha aberta. Isto é, o projecto do controlador (regulação) por realimentação das variáveis de estado mantém os zeros do sistema em malha aberta. Neste caso temos um zero em $z = -0.35$.

c) O esquema de Simulink pedido pode ser o seguinte:

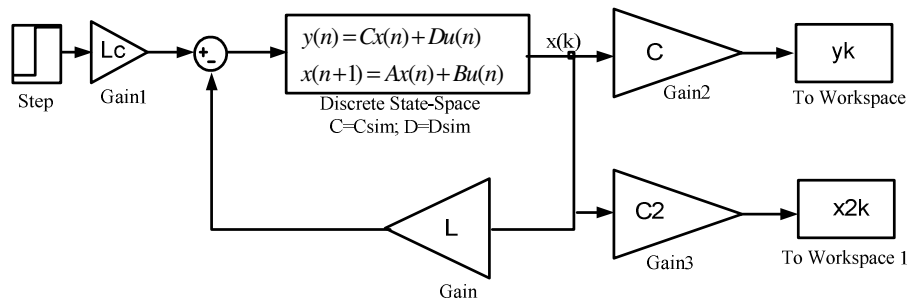


Figura 8. 3. - Esquema de Simulink (ex81s_b.mdl) (no bloco Discrete State-space usa-se $h=1$)

Na Figura 8.4 mostra-se a resposta do servocontrolador e a trajectória da variável de estado interna, x_2 , para um escalão unitário na referência. Neste caso a variável de estado $x_2 = 0$ em regime estacionário.

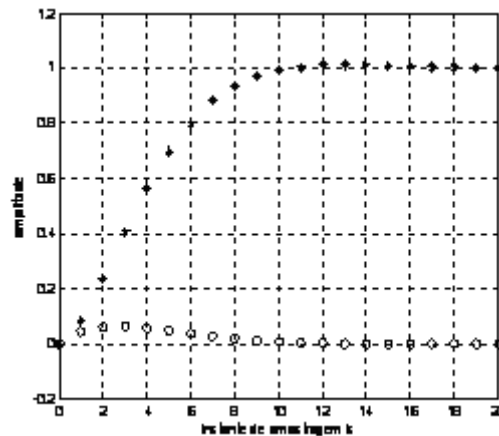


Figura 8. 4. - Saída e variável de estado interna, x_2 , para o sistema com zero em $z = -0.35$ ($\phi_{12} = 1.5$)

d) Para a nova matriz de estado com $\phi_{12} = -1.5$, os pólos do servocontrolador mantêm-se, mas o zero é agora igual a 1.15 (posicionado fora do círculo de raio unitário).

As novas funções de transferência do sistema em malha aberta e em malha fechada, obtidas com o Matlab são as seguintes:

$$H(z) = B(z) / A(z)$$

Função de Transferência em Malha Aberta

$$2z - 2.3$$

$$\begin{array}{c}
 \text{-----} \\
 z^2 - 1.4 z + 0.4 \\
 \\
 H_c(z) = B(z) / A_m(z) \\
 \\
 \text{Função de Transferência em Malha Fechada} \\
 \text{(sem considerar o ganho } L_c) \\
 \\
 \begin{array}{c}
 2 z - 2.3 \\
 \text{-----} \\
 z^2 - 1.409 z + 0.5252
 \end{array}
 \end{array}$$

Novamente se verifica que o zero do sistema em malha aberta mantém-se no sistema em malha fechada. Na Figura 8.5 mostra-se a resposta do sistema e a trajectória da variável de estado interna x_2 para um escalão unitário como sinal de referência. Note-se que a parte inicial da resposta do sistema assume valores negativos e só posteriormente estabiliza no valor de amplitude unitário.

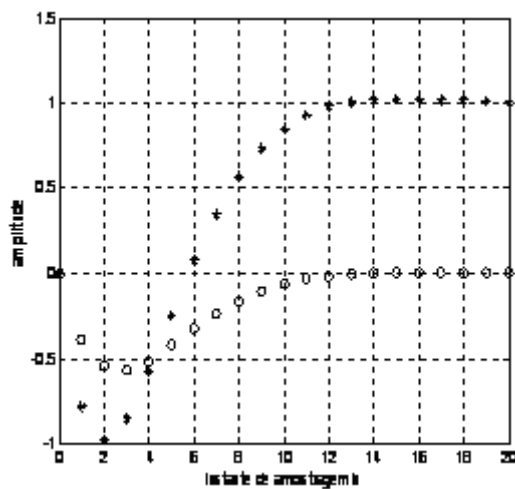


Figura 8. 5. - Curvas para o sistema com zero em $z = 1.15$ ($\phi_{12} = -1.5$)

e) O esquemático de Simulink poderá ser o seguinte:

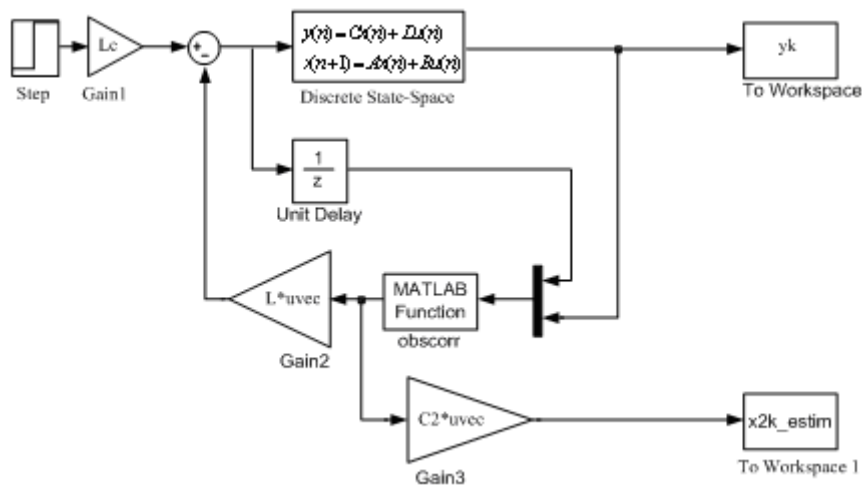


Figura 8.6. - Modelo de Simulink do servocontrolador com realimentação das variáveis de estado observadas.

Para funcionar em conjunto com o modelo de Simulink, propõem-se dois programas de Matlab: um com a função de inicialização e cálculo de variáveis, designado por “inicial.m”, e um programa “obscorr.m” que implementa a função “Observador corrente” do modelo de Simulink da Figura 8.6. O programa “inicial.m” poderá ser o seguinte:

```
global xobs Ko C phi gama;
wnh=0.4; ganhodc=1;phi12=1.5 % wn*h=0.4 e ganho DC unitário
a1=1.8; a2=1.25; % coeficientes do polinómio
% característico
% em tempo contínuo, desejado
% sistema discreto em espaço de estados

phi=[1 phi12; 0 0.4];
gama=[2;1]; C=[1 0]; D=[0];
wn=sqrt(a2);zeta=a1/(2*wn); % obtenção do polinómio
% característico discreto
% período de amostragem (h=wn*h)

h=wnh/wn;
p1=-2*exp(-zeta*wnh)*cos(wnh*sqrt(1-zeta^2));
p2=exp(-2*zeta*wnh); % p1 e p2 são os coeficientes
% do polinómio característico
% discreto, desejado
% matriz de controlabilidade

Wc=[gama phi*gama];
L=[0 1]* inv(Wc)*(phi^2+p1*phi+p2*eye(2))
phic=phi-gama*L;
Lc=ganhodc/(C*inv(eye(2)-phic)*gama);

% projecto do ganho do observador
Woc=[C*phi; C*phi^2]; % matriz de observabilidade
po=[1 -0.4 0.04]; % coeficientes do polinómio
% característico do
% observador [(z-0.2)^2]
```

```

K_o=(po(1)*phi^2+po(2)*phi+po(3)*eye(2))*inv(Woc)*[0 1]'
xobs=[0 0]'; % valor inicial do estado estimado
C2=[0 1];
sim ex81s_e.mdl
plot(yk.time,yk.signals.values,'k',x2k_estim.time,x2k_estim.signals.values,'ko');
xlabel('Instante de amostragem k'); ylabel('amplitude')
grid

```

Figura 8.7. - Código de Matlab

A função do observador “obscorr.m” pode ser constituída pelo seguinte código Matlab:

```

function estim=obscorr(ent)
global xobs K_o C phi gama;
ukl=ent(1);
yok=ent(2);
% actualização da estimativa do estado:
xobs=(eye(2)-K_o*C)*phi*xobs+(eye(2)-
K_o*C)*gama*ukl+K_o*yok;
% Devolução da estimativa:
estim=xobs;

```

Na Figura 8.8 mostra-se a resposta do sistema, com observador de estado (Figura 8.6), e a trajetória da variável de estado interna observada, \hat{x}_2 , para um escalão unitário como sinal de referência.

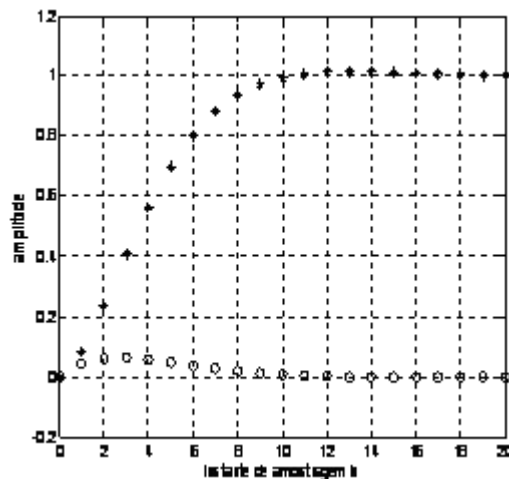


Figura 8.8. - Saída e variável de estado interna estimada, \hat{x}_2 , para o sistema com $(\phi_{12} = 1.5)$

PROBLEMA 8.2**Objectivos:**

- 1)- *Analisar a resposta do sistema de controlo sujeito a uma perturbação constante na carga. São analisadas duas situações: a)- o controlador por realimentação das variáveis de estado sem acção integral; b)- e com acção integral.*
- 2)- *Fazer o projecto e análise dos controladores necessários para o objectivo 1: a)- controlador por realimentação das variáveis de estado sem acção integral; b) com acção integral através do uso de um observador de estado aumentado.*
- 3)- *Analisar o comportamento do sistema de controlo para: a)- processo tipo 0; b)- processo tipo 1.*

Enunciado:

Considere um **processo linear contínuo** com modelo de estado definido pelas seguintes matrizes (em código Matlab):

$$A=[0 \ 1; 0 \ -3]; B=[0; 2]; C=[1 \ 0]; D=[0]$$

Considerando um período de amostragem $h = 0.1$ s, determine:

- a) O modelo equivalente em espaço de estados discreto do processo precedido pelo *zero-order-hold*;
- b) Os zeros do sistema discreto equivalente;
- c) Estabeleceram-se como critérios de projecto $\zeta = 0.9$ e $\omega_n = 1$ rad/s. Aplicando a fórmula de Ackermann, calcule o vector $L = [l_1 \ l_2]$ dos ganhos do controlador, por realimentação linear das variáveis de estado, de modo a satisfazer as condições de projecto.
- d) Calcule os zeros do sistema de regulação e discuta este resultado face ao resultado obtido na alínea b).
- e) A Figura 8.9 representa o esquema de Simulink usado na simulação do comportamento do sistema de controlo (regulação e seguimento). Na Figura 8.10 representa-se a evolução do estado do sistema de controlo e do sinal de comando, nas seguintes condições: estado inicial $x(0) = [1 \ 1]^T$; sinal de referência: um escalão unitário com início em $t=10$ s; perturbação em escalão, de amplitude 0.2, com início em $t=20$ s.

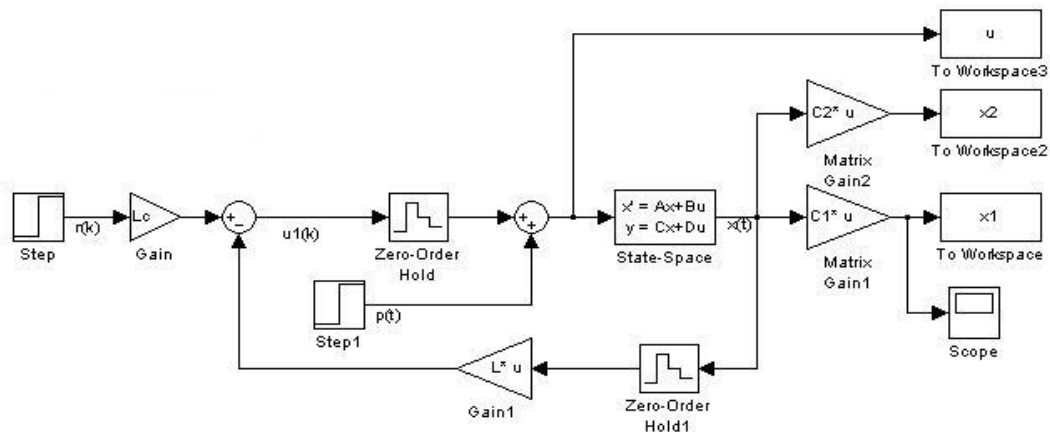


Figura 8.9. - - Esquema de Simulink usado na simulação do comportamento do sistema de controlo.

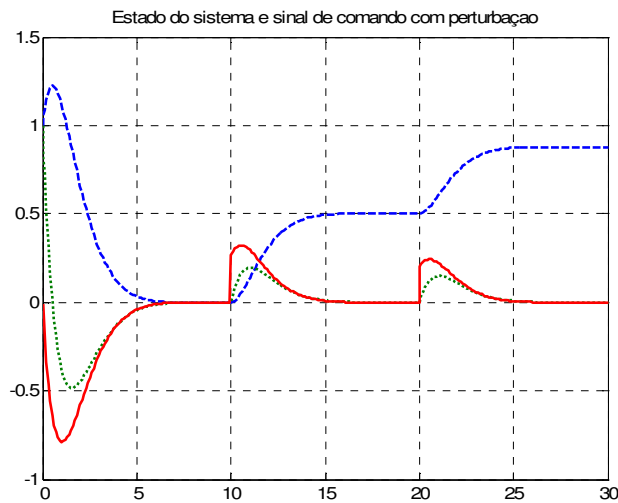


Figura 8.10. - Evolução do estado do sistema de controlo e do sinal de comando (com perturbação)

Responda às seguintes questões:

i) Indique os valores das matrizes A , B , C e D do bloco “Discrete State-Space” e os vectores $C1$ e $C2$ dos blocos de ganho.

ii) Indique justificando qual o valor de L_c usado na simulação.

Discuta este resultado face ao valor do ganho de realimentação l_1 .

iii) Considere que não tinha acessíveis as variáveis de estado. Projecte um observador de estado preditor de ordem plena, com **dinâmica deadbeat**, que elimine o efeito da perturbação.

Redesenhe o esquema de Simulink de modo a incluir o observador de estado.

iv) Refaça a alínea anterior, mas projectando um observador com dinâmica dominante de 2ª ordem (i.e um observador não deadbeat).

v) Faça a simulação nas condições da alínea anterior para o projecto do tipo 0:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

RESOLUÇÃO

O sistema contínuo, precedido por *zero-order-hold*, com modelo de estado

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

tem o equivalente discreto, nos instantes de amostragem, dado por:

$$\begin{cases} x(kh + h) = \Phi x(kh) + \Gamma u(kh) \\ y(kh) = Cx(kh) \end{cases}$$

onde

$$\begin{cases} \Phi = \Phi(h) = e^{Ah} \\ \Gamma = \Gamma(h) = \int_0^h e^{A\tau} d\tau \cdot B \end{cases}$$

A matriz exponencial Φ pode ser calculada, entre outros métodos:

$$1) \text{ por séries de potências: } e^{Ah} = I + Ah + \frac{A^2 h^2}{2!} + \frac{A^3 h^3}{3!} + \dots$$

$$2) \text{ pela Transformada de Laplace: } \Phi(h) = e^{Ah} = L^{-1}[\Phi(s)] \Big|_{t=h}$$

No caso presente a série de potências não é adequada para o cálculo da matriz Φ , porque as sucessivas potências de A não se anulam:

$$e^{Ah} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} h + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \frac{h^2}{2!} + \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 0 & -27 \end{bmatrix} \frac{h^3}{3!} + \dots$$

Utilizando a Transformada de Laplace, vem:

CÁLCULO DE Φ :

$$\Phi(h) = \Phi(t) \Big|_{t=h} = L^{-1} [\Phi(s)] \Big|_{t=h}, \text{ em que } \Phi(s) = (sI - A)^{-1}.$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+3)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = L^{-1} [\Phi(s)] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}) \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(h) = \Phi(t) \Big|_{t=h} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3}(1 - e^{-3h}) \\ 0 & e^{-3h} \end{bmatrix}$$

Para um período de amostragem $h = 0.1 \text{ s}$,

$$\Phi(h) = \begin{bmatrix} 1 & 0.0864 \\ 0 & 0.7408 \end{bmatrix} \quad (8.56)$$

CÁLCULO DE Γ :

$$\Gamma(h) = \int_0^h e^{A\tau} d\tau \cdot B = \int_0^h \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(1 - e^{-3\tau}) \\ 2e^{-3\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}h - \frac{2}{9}(1 - e^{-3h}) \\ \frac{2}{3}(1 - e^{-3h}) \end{bmatrix}$$

Pelo que, para $h = 0.1s$, vem

$$\Gamma(h) = \begin{bmatrix} 0.0091 \\ 0.1728 \end{bmatrix}$$

Então o modelo equivalente em espaço de estados discreto do processo precedido pelo *zero-order-hold* é representado por:

$$\begin{cases} x(kh + h) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1 - e^{-3h}}{3} \\ 0 & e^{-3h} \end{bmatrix} x(kh) + \begin{bmatrix} \frac{2}{3}h - \frac{2}{9}(1 - e^{-3h}) \\ \frac{2}{3}(1 - e^{-3h}) \end{bmatrix} u(kh) \\ y(kh) = [1 \quad 0] x(kh) \end{cases}$$

donde resulta para $h = 0.1s$:

$$\begin{cases} x(kh + h) = \begin{bmatrix} 1 & 0.0864 \\ 0 & 0.7408 \end{bmatrix} x(kh) + \begin{bmatrix} 0.0091 \\ 0.1728 \end{bmatrix} u(kh) \\ y(kh) = [1 \quad 0] x(kh) \end{cases}$$

b) A função de transferência do modelo discreto é dada por:

$$G(z) = C [zI - \Phi]^{-1} \Gamma$$

Substituindo valores e desenvolvendo obtém-se a função de transferência

$$G(z) = \frac{0.0091z + 0.0082}{z^2 - 1.7408z + 0.7408}$$

que tem um zero em

$$z_1 = -\frac{0.0082}{0.0091} = -0.9011 \quad (8.57)$$

c) Os critérios de projecto são: factor de amortecimento $\zeta = 0.9$ e frequência natural não amortecida $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$.

Em tempo discreto, pretende-se um sistema em malha fechada com polinómio característico

$$p(z) = z^2 + p_1 z + p_2 \quad (8.58)$$

onde $p_1 = -2e^{-\zeta\omega_n h} \cos(\omega_d h)$ e $p_2 = e^{-2\zeta\omega_n h}$, em que $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ representa a frequência natural amortecida e ω_n a frequência natural não amortecida. Efectuando os cálculos para $\zeta = 0.9$, $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$ e $h = 0.1 \text{ s}$, vem:

$$z^2 - 1.826z + 0.8353 = 0 \quad (8.59)$$

Pretendemos agora calcular o vector dos ganhos de realimentação das variáveis de estado de modo que o sistema de malha fechada tenha o polinómio característico dado por (8.59). Pela Lei de Ackermann

$$L = [0 \quad 1] W_c^{-1} P(\Phi) \quad (8.60)$$

em que, atendendo a (8.59), vem

$$P(\Phi) = \Phi^2 - 1.826\Phi + 0.8353 \quad (8.61)$$

Substituindo (8.56) em (8.61) obtém-se

$$P(\Phi) = \begin{bmatrix} 0.0091 & -0.0074 \\ 0 & 0.0314 \end{bmatrix}.$$

A matriz de controlabilidade W_c é dada por

$$W_c = [\Gamma \quad | \quad \Phi\Gamma] = \begin{bmatrix} 0.0091 & 0.024 \\ 0.1728 & 0.128 \end{bmatrix}$$

com inversa

$$W_c^{-1} = \frac{1}{|W_c|} \begin{bmatrix} 0.128 & -0.024 \\ -0.1728 & 0.0091 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42.92 & 8.047 \\ 57.94 & -3.05 \end{bmatrix}$$

Substituindo $P(\Phi)$ e W_c^{-1} em (8.59), obtém-se os ganhos do controlador

$$L = [0.5273 \quad -0.5246]$$

em que

$$l_1 = 0.5273 \text{ e } l_2 = -0.5246.$$

d) Nesta linha pede-se o cálculo dos zeros do sistema de regulação. A função de transferência do sistema de regulação é dada por:

$$H_{CL}(z) = C(zI - \Phi_{CL})^{-1} \Gamma \quad (8.62)$$

em que

$$\Phi_{CL} = \Phi - \Gamma L$$

e, substituindo valores, vem

$$\Phi_{CL} = \begin{bmatrix} 0.9952 & 0.0912 \\ -0.0911 & 0.8315 \end{bmatrix}$$

substituindo Φ_{CL} em (8.62),

$$H_{CL}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - 0.9952 & -0.0912 \\ 0.0911 & z - 0.8315 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.0091 \\ 0.1728 \end{bmatrix}$$

e, assim,

$$H_{CL}(z) = \frac{0.0091z + 0.0082}{z^2 - 1.8267z + 0.8358} \quad (8.63)$$

O polinómio do denominador é o polinómio característico de projecto e o zero do sistema de regulação, $z_1 = -0.9011$, é o mesmo que o obtido em (8.57), pois este método de projecto, mantém na regulação, no sistema de malha fechada, os zeros de malha aberta.

e) Na Figura 8.9 apresenta-se o modelo em Simulink usado na simulação do comportamento do sistema de controlo (regulação e seguimento), nas seguintes condições do enunciado do problema:

- 1) Estado inicial $x(0) = [1 \ 1]^T$;
- 2) sinal de referência: um sinal em degrau unitário com início em $t = 10 \text{ s}$;
- 3) Sinal de perturbação em escalão, de amplitude 0.2, com início em $t = 20 \text{ s}$;

O código em Matlab usado na simulação é listado na Figura 8.11. Na Figura 8.12 apresenta-se a evolução do estado e do sinal de comando (com perturbação). Verifica-se que o sistema não consegue eliminar o efeito da perturbação na carga uma vez que não há acção integral no controlador. O estado interno converge, em regime estacionário, para zero o que acontece uma vez que o sistema sob controlo é do tipo 1, ou seja, tem um integrador.

```
clear, clc
% Modelo de estado do sistema continuo
A=[0 1; 0 -3]; B=[0;2]; C=[1 0]; D=0;
% discretização
h=0.1
[phi,gama]=c2d(A,B,h) % modelo de estado do sistema discreto
[num, den]=ss2tf(phi,gama,C,D,1)
sysd=tf(num,den,h) %função de transferência do sist. discreto
%Controlador: definicao do polinomio caracteristico
zeta=0.9, wn=1;
den=[1 2*zeta*wn wn*wn];
[a,b,c,d]=tf2ss([0 0 1], den)
[phi_cl,gama_cl]=c2d(a,b,h)
p_cl=eig(phi_cl)
L=acker(phi, gama, p_cl)
% função de transferência do sistema de regulação
[num_cl, den_cl]=ss2tf(phi_cl,gama,C,D)
sysd_cd=tf(num_cl,den_cl,h)

%Estado inicial
x0=[1;1];

%Ganho Lc para seguimento com ganho DC de 0.5
phic=phi-gama*L;
Lc=0.5/(C*inv(eye(2)-phic)*gama)

%perturbacao na carga
p_load=0.2
Ca=[1 0;0 1]; Da=[0;0];
C1=[1 0];
C2=[0 1];
```

```

sim('servos')
plot(u.time, u.signals.values,'r-', x1.time, x1.signals.values,'b--',
x2.time, x2.signals.values,'k:', 'LineWidth',2)
title('Estado do sistema e sinal de comando com perturbação')
grid

```

Figura 8.11. - Código de Matlab usado conjuntamente com o modelo de Smulink da Figura 8.9

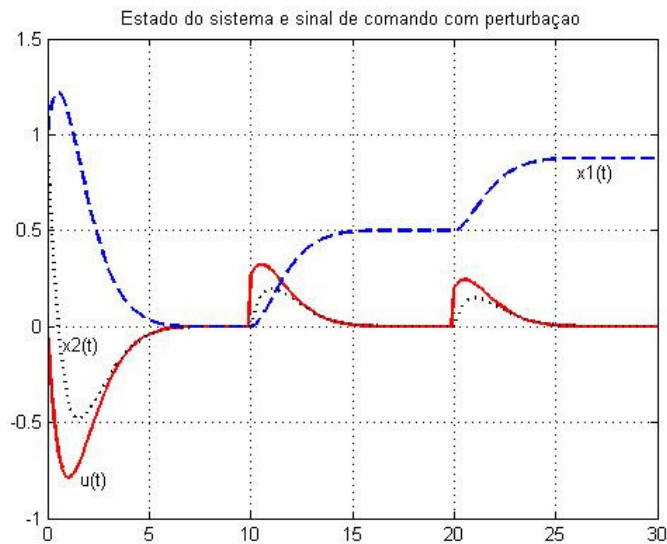


Figura 8.12. - Evolução do estado do sistema e do sinal de comando (com perturbação)

e-i) As matrizes A , B , C e D usadas no bloco State-Space do modelo de Simulink da Figura 8.9 são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

e os vectores C_1 e C_2 :

$$C_1 = [1 \quad 0]; \quad C_2 = [0 \quad 1];$$

A matriz C foi alterada, para se obter à saída do bloco State-Space o vector de estado, $x_1(t)$ e $x_2(t)$, sendo as variáveis de estado individualizadas, para efeitos de visualização, pelos vectores C_1 e C_2 respectivamente.

e-ii) Como o processo sob controlo é do tipo 1 e a saída é $y(k) = x_1(k)$, para ganho DC unitário $L_c = l_1$ é solução para o ganho de avanço do servocontrolador. No entanto, como o ganho DC no caso em estudo é de 0.5 (veja-se na Figura 8.11 que a resposta estacionária do sistema ao escalão unitário é 0.5), então

$$L_c = \frac{l_1}{2} = \frac{0.5273}{2} = 0.2637$$

Usando a fórmula para cálculo de L_c obter-se-ia o mesmo resultado, i.e

$$L_c = \frac{0.5}{C(I - \Phi_{CL})^{-1}\Gamma} = 0.2637$$

No final $x_1(t)$ fica com um valor na saída de aproximadamente 0.8 (em vez de 0.5, indicando a existência de um erro em regime final de ≈ 0.3), apresentando $x_2(t)$ o valor zero, dado que o sistema tem integrador.

e-iii) Considerando as variáveis de estado não acessíveis, vamos projectar um observador de estado preditor de ordem plena, com dinâmica *deadbeat*, que elimine o efeito da perturbação.

O observador preditor:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1|k) = \Phi\hat{x}(k|k-1) + \Gamma u(k) + K\tilde{y}(k) \\ \hat{y}(k) = y(k) - C\hat{x}(k|k-1) \end{cases}$$

tem uma dinâmica descrita pela equação característica

$$\det(zI - (\Phi - KC)) = 0$$

Podemos estabelecer esta dinâmica com a matriz K. Assim, o projecto do observador resume-se ao problema de determinar K tal que o observador seja estável com uma dada equação característica desejada. Para uma dinâmica *deadbeat*, teremos os valores próprios da matriz que define a dinâmica do observador $(\Phi - KC)$ todos iguais a zero.

Usando a fórmula de Ackermann,

$$K = \Phi_a^3 W_0^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (8.64)$$

onde

$$W_0 = \begin{bmatrix} C_a \\ C_a \Phi_a \\ C_a \Phi_a^2 \end{bmatrix}$$

e

$$\Phi_a = \left[\begin{array}{c|c} \Phi & \Phi_{xw} \\ \hline 0 & \Phi_w \end{array} \right]$$

em que $\Phi_{xw} = \Gamma$, $\Phi_w = 1$ e $C_a = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$.

Efectuando os cálculos, obtém-se

$$W_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.0864 & 0.0091 \\ 1 & 0.1504 & 0.0331 \end{bmatrix}$$

e

$$\Phi_a = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0.0864 & 0.0091 \\ 0 & 0.7408 & 0.1728 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Substituindo em (8.64), obtém-se finalmente

$$K = \begin{bmatrix} 2.7408 \\ 20.4258 \\ 57.8744 \end{bmatrix}$$

O esquema de Simulink que inclui o observador de estado é o seguinte:

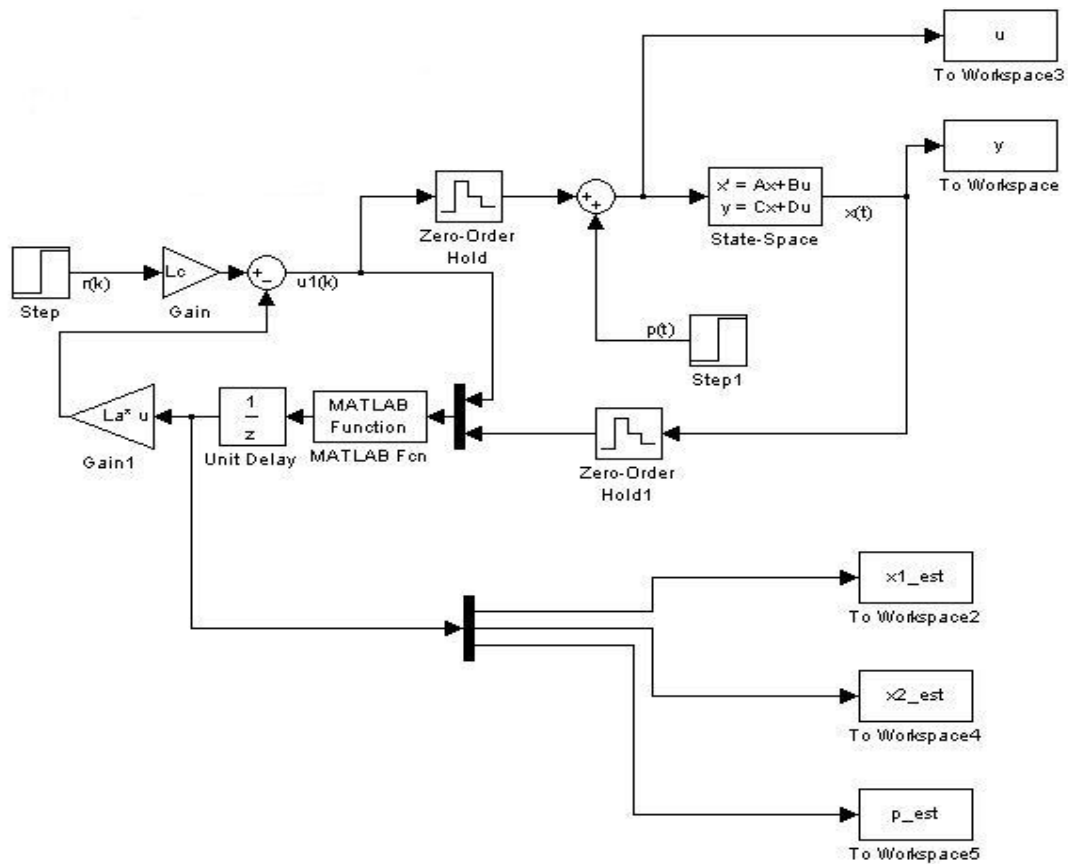


Figura 8.13. - Modelo de Simulink usado na simulação do comportamento do sistema de controlo com observador-preditor de estado aumentado (estado do processo e estado da perturbação)

O código em Matlab correspondente é listado nas Figuras (8.14) e (8.15).

```
clear, clc
global xobs Ko C_a phi_a gama_a;
A=[0 1; 0 -3]; B=[0;2]; C=[1 0]; D=0; %modelo de estado do sistema continuo
h=0.1;
[phi,gama]=c2d(A,B,h)
%Controlador: definicao do polinomio caracteristico
zeta=0.9, wn=1;
den=[1 2*zeta*wn wn*wn];
[a,b,c,d]=tf2ss([0 0 1], den)
[phi_cl,gama_cl]=c2d(a,b,h)
p_cl=eig(phi_cl)
L=acker(phi, gama, p_cl)
Lw=1;
La=[L Lw];
%Estado inicial
x0=[1;1];
%Ganho Lc para seguimento com ganho DC unitario
phic=phi-gama*L
Lc=1/(C*inv(eye(2)-phic)*gama)
```

```

%Observador preditor de estado aumentado (estados da planta e estado da
perturbacao)
%Modelo do sistema aumentado com modelo da perturbacao
phiw=1; phixw=gama;
phi_a=[phi phixw; 0 0 phiw];
gama_a=[gama;0];
C_a=[C 0]
%Matriz de observabilidade
w0=[C_a; C_a*phi_a; C_a*phi_a^2]
w0i=inv(w0)
%Vector de ganhos do observador deadbeat
Ko=phi_a^3*w0i*[0; 0; 1]
%valor inicial do estado observado
xobs=[0;0;0]
%perturbacao na carga
p_load=0.5
sim('servos_obs') % chamada o modelo Simulink
plot(y.time, y.signals.values,'b--', u.time, u.signals.values,'r-',
p_est.time, p_est.signals.values,'k:', 'LineWidth',2);
title('Saida y(t); comando com perturbacao u(t)+p(t); perturbacao estimada')
grid

```

Figura 8. 14. - Código Matlab usado em associação com o modelo e simulação da Figura 8.13.

```

function estim=obx(ent)
global xobs Ko C_a phi_a gama_a;
ukl=ent(1);
yok=ent(2);
%predição do estado aumentado
xobs=phi_a*xobs+gama_a*ukl+Ko*(yok-C_a*xobs)
%Devolução do estado observado
estim=xobs

```

Figura 8. 15. - Código da função do observador-preditor usado pelo modelo de simulação da Figura 8.13
- Script obx.m - (chamada efectuada pelo bloco Matlab Function).

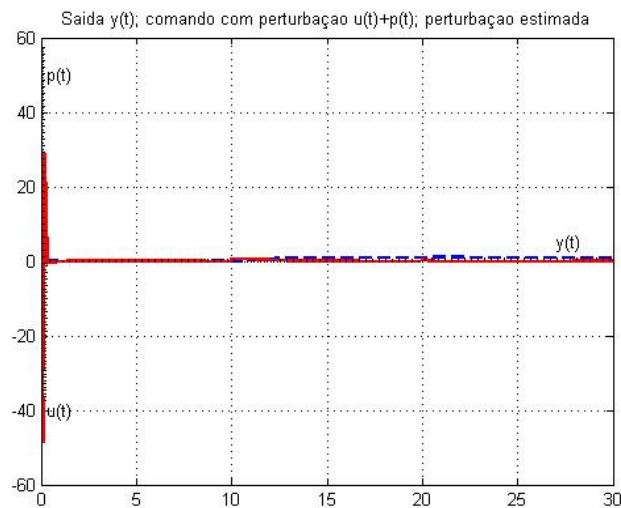


Figura 8. 16. - Evolução do estado do sistema de controlo e sinal de comando - deadbeat ($h=0.1$ s)

Verificamos nas Figuras 8.16 e 8.17 que, para o caso de período de amostragem $h=0.1s$, o sinal de comando e a perturbação atingem valores muito elevados nos instantes iniciais. Impondo limites à escala das amplitudes, podemos observar os sinais de comando e saída, passados os instantes iniciais (Figura 8.17).

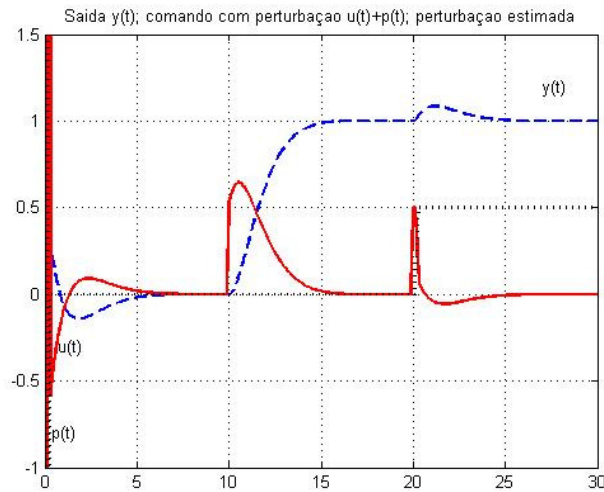


Figura 8. 17. - Evolução do estado do sistema de controlo e sinal de comando – observador deadbeat ($h=0.1\text{ s}$)

Uma forma de evitar sinais de comando tão elevados passa por usar um período de amostragem maior. Na Figura 8.18, apresentam-se os sinais para $h = 0.5\text{ s}$.

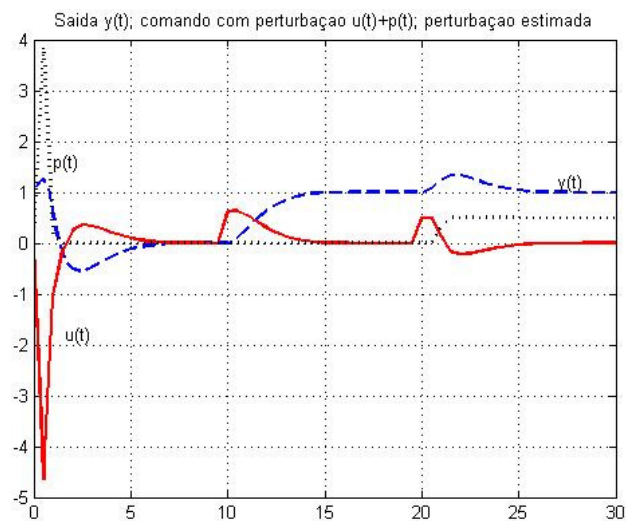


Figura 8. 18. - Evolução do estado do sistema de controlo e sinal de comando – observador deadbeat ($h=0.5\text{ s}$)

e-iv) - Considere-se agora o projecto de um observador de estado aumentado de dinâmica dominante de um sistema de 2ª ordem (e não deadbeat como tratado na alínea anterior). Façamos com que os pólos do observador sejam especificados pela seguinte equação característica:

$$(s^2 + 2\zeta\alpha_0\omega_n s + (\alpha_0\omega_n)^2)(s + \alpha_1\omega_n) = 0$$

Mantendo como critérios do projecto do controlador: factor de amortecimento $\zeta = 0.9$ e frequência natural não amortecida $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$, com o período de amostragem $h = 0.1 \text{ s}$. Neste caso pode utilizar-se o mesmo modelo em Simulink, representado na Figura 8.13, alterando-se apenas o projecto do observador como se exemplifica no seguinte código em Matlab:

```
...
%Observador de estado aumentado (estados da planta e estado da perturbacao)

alfa0=2; alfa1=4;
den=conv([1 2*zeta*wn*alfa0 (wn*alfa0)^2], [1 alfa1]);
[a,b,c,d]=tf2ss([0 0 0 1],den)
[phio,gamao]=c2d(a,b,h)
po=eig(phio)

Ko=acker(phi_a',C_a',po)
Ko=Ko'
...
```

Figura 8. 19. - Código em Matlab do projecto do novo observador de estado aumentado

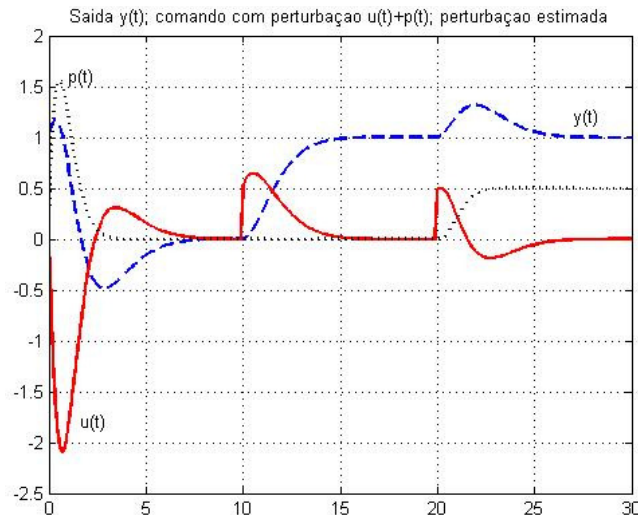


Figura 8. 20. - Evolução do estado do sistema de controlo e sinal de comando (perturbação estimada) para o novo observador ($h=0.1s$).

Podemos observar na Figura 8.20 que o sistema tem ganho DC unitário. Verificamos que o sistema apresenta erro nulo em regime estacionário eliminando o efeito da perturbação na carga, dado que o controlador-observador apresenta acção integral. Para o mesmo período de amostragem $h=0.1s$, o esforço de comando, é neste último caso, inferior àquele que se observa para o observador deadbeat (comparar Figuras 8.17 e 8.20).

e-v) Considere-se agora o seguinte processo sob controlo do tipo 0, i.e sem integrador.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Na Figura 8.21 apresenta-se a evolução do estado e do sinal de comando, relativo à aplicação do controlador-observador da alínea anterior. Observe-se que neste caso quer o estado interno quer o sinal de comando estabilizam em valores não nulos.

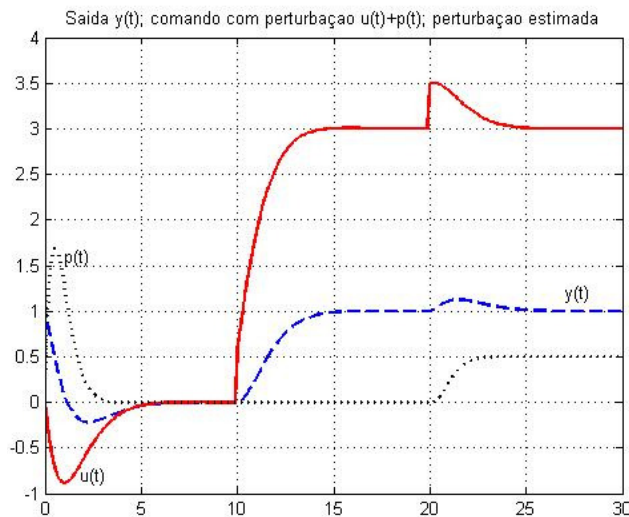


Figura 8. 21. - Evolução do estado do sistema de controlo e sinal de comando (perturbação estimada), relativo ao processo da alínea e-v) com $h=0.1s$.

PROBLEMA 8.3

Considere um sistema discreto SISO

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi x(k) + \Gamma u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

sob controlo por realimentação das variáveis de estado observadas $\hat{x}(k)$ e com sinal de referência $r(k)$. Seja $u(k) = -L\hat{x}(k) + L_c r(k)$ o sinal de comando e

$$\hat{x}(k) = (\Phi_{cl} - KC)\hat{x}(k-1) + Ky(k-1) + \alpha r(k-1)$$

a equação do observador de estado. Resolva as seguintes questões:

- Determine a equação do erro de estado estimado $\tilde{x}(k)$.
- Determine uma equação para α tal que o erro de estado estimado $\tilde{x}(k)$ não seja controlável a partir do sinal de referência $r(k)$. Comente se $\tilde{x}(k)$ deve ou não ser controlável a partir de $r(k)$.
- Determine a equação do observador para α calculado e relacione-a com a equação do observador para o caso de um sistema de regulação.

RESOLUÇÃO

- A equação do observador de estado pode ser rescrita na forma

$$\hat{x}(k+1) = (\Phi - KC - \Gamma L)\hat{x}(k) + Ky(k) + \alpha r(k) \quad (8.65)$$

Substituindo $y(k) = Cx(k)$, vem

$$\hat{x}(k+1) = (\Phi - KC - \Gamma L)\hat{x}(k) + KCx(k) + \alpha r(k) \quad (8.66)$$

A equação do erro do observador é

$$\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$$

ou seja

$$\tilde{x}(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) - \hat{x}(k+1) \quad (8.67)$$

Substituindo em (8.67) a equação de $u(k)$,

$$u(k) = -L\hat{x}(k) + L_c r(k) \quad (8.68)$$

e a equação do observador (8.66), obtém-se

$$\tilde{x}(k+1) = \Phi x(k) - \Gamma L x(k) + \Gamma L_c r(k) - (\Phi - KC - \Gamma L) \hat{x}(k) - KC x(k) - \alpha r(k)$$

Desenvolvendo algebricamente a equação chega-se à equação de erro do observador

$$\tilde{x}(k+1) = (\Phi - KC) \tilde{x}(k) + (\Gamma L_c - \alpha) r(k) \quad (8.69)$$

b) Obviamente que o erro de estado deve ser independente do sinal de referência $r(k)$, o que é possível fazendo

$$\Gamma L_c - \alpha = 0$$

i.e.

$$\alpha = \Gamma L_c \quad (8.70)$$

c) Substituindo (8.70) na equação do observador (8.65), vem

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= (\Phi - KC - \Gamma L) \hat{x}(k) + Ky(k) + \Gamma L_c r(k) \\ &= \Phi \hat{x}(k) - KC \hat{x}(k) - \Gamma L \hat{x}(k) + Ky(k) + \Gamma L_c r(k) \end{aligned} \quad (8.71)$$

Da equação (8.68) vemos que

$$L_c r(k) = u(k) + L \hat{x}(k)$$

cujas expressões podem ser substituídas em (8.71) a fim de eliminar o sinal $r(k)$ da equação do observador:

$$\hat{x}(k+1) = (\Phi - KC) \hat{x}(k) - \Gamma L \hat{x}(k) + Ky(k) + \Gamma u(k) + \Gamma L \hat{x}(k)$$

de onde se obtém

$$\hat{x}(k+1) = (\Phi - KC) \hat{x}(k) + Ky(k) + \Gamma u(k) \quad (8.72)$$

A equação a que chegámos é igual à do observador de regulação.

8.11 PROBLEMAS PROPOSTOS

PROBLEMA 8.4

APÊNDICE **A**

TABELAS

A.1 - PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

PROPRIEDADE	$f(t)$	$F(s)$
Adição	$f_1(t) + f_2(t)$	$F_1(s) + F_2(s)$
Multiplicação por escalar	$kf(t)$	$kF(s)$
Diferenciação no tempo	$\frac{df}{dt}$ $\frac{d^2 f}{dt^2}$ $\frac{d^3 f}{dt^3}$	$sF(s) - f(0^-)$ $s^2 F(s) - sf(0^-) - f(0^-)$ $s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - sf(0^-) - f(0^-)$
Integração no tempo	$\int_{0^-}^t f(t)dt$ $\int_{-\infty}^t f(t)dt$	$\frac{1}{s} F(s)$ $\frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} f(t)dt$
Deslocamento no tempo	$f(t-t_0)u(t-t_0)$	$F(s)e^{-st_0}$, $t \geq 0$
Deslocamento na frequência	$f(t)e^{st_0}$	$F(s-s_0)$
Diferenciação na frequência	$-tf(t)$	$\frac{dF(s)}{ds}$
Integração na frequência	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s)ds$ se $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} f(t)$ existe
Compressão do sinal	$f(at)$, $a \geq 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Convolução no tempo	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$
Convolução na frequência	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$
Valor inicial	$f(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Valor final	$f(\infty)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ (pólos de $sF(s)$ no LHP)

A.2 – TRANSFORMADAS DE LAPLACE

	$f(t)$	$F(s)$
1	Impulso de Dirac $\delta(t)$ (considera-se $f(t) = 0, t < 0$)	1
2	Degrau unitário $u_s(t)$ (escalão unitário)	$\frac{1}{s}$
3	Rampa t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u_s(t) \quad (n=1,2,3,\dots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	$t^n u_s(t) \quad (n=1,2,3,\dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n=1,2,3,\dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n=1,2,3,\dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
11	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
12	$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
13	$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
14	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$

	$f(t)$	$F(s)$
15	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{1}{ab}\left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt})\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
18	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
19	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
20	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
21	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
22	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
23	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
24	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$
25	$1 - \cos(\omega t)$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
26	$\omega t - \sin(\omega t)$	$\frac{\omega^3}{s^2(s^2 + \omega^2)}$

	$f(t)$	$F(s)$
27	$\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)$	$\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$
28	$\frac{1}{2\omega} t \sin(\omega t)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
29	$t \cos(\omega t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
30	$\frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)) \quad (\omega_1^2 \neq \omega_2^2)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2)}$
31	$\frac{1}{2\omega} (\sin(\omega t) + \omega t \cos(\omega t))$	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
32	$e^{-at} \left[A \cos bt + \frac{B - Aa}{b} \sin bt \right]$ $b = \sqrt{c - a^2}$	$\frac{As + B}{s^2 + 2as + c}$
33	$re^{-at} \cos(bt + \theta)$ $r = \sqrt{\frac{A^2 c + B^2 - 2ABa}{c - a^2}}$ $b = \sqrt{c - a^2} = \omega_d$ $\theta = \tan^{-1} \frac{Aa - B}{A\sqrt{c - a^2}}$	$\frac{As + B}{s^2 + 2as + c}$

A.3 – PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA Z

PROPRIEDADE	$f[k]$	$F[z]$
Adição	$f_1[k] + f_2[k]$	$F_1[z] + F_2[z]$
Multiplicação por escalar	$af[k]$	$aF[z]$
Deslocamento à direita (atraso no tempo)	$f[k-m]u_s[k-m]$	$\frac{1}{z^m} F[z]$
	$f[k-m]u_s[k]$	$\frac{1}{z^m} F[z] + \frac{1}{z^m} \sum_{k=1}^m f[-k]z^k$
	$f[k-1]u_s[k]$	$\frac{1}{z} F[z] + f[-1]$
	$f[k-2]u_s[k]$	$\frac{1}{z^2} F[z] + \frac{1}{z} f[-1] + f[-2]$
	$f[k-3]u_s[k]$	$\frac{1}{z^3} F[z] + \frac{1}{z^2} f[-1] + \frac{1}{z} f[-2] + f[-3]$
Deslocamento à esquerda (avanço no tempo)	$f[k+m]u_s[k]$	$z^m F[z] - z^m \sum_{k=0}^{m-1} f[k]z^{-k}$
	$f[k+1]u_s[k]$	$zF[z] - zf[0]$
	$f[k+2]u_s[k]$	$z^2 F[z] - z^2 f[0] - zf[1]$
	$f[k+3]u_s[k]$	$z^3 F[z] - z^3 f[0] - z^2 f[1] - zf[2]$
Multiplicação por γ^k	$\gamma^k f[k]u_s[k]$	$F\left[\frac{z}{\gamma}\right]$
Multiplicação por k	$kf[k]u_s[k]$	$-z \frac{d}{dz} F[z]$
Convolução na frequência	$f_1[k] * f_2[k]$	$F_1[z]F_2[z]$
Valor inicial	$f[0]$	$\lim_{z \rightarrow \infty} F[z]$
Valor final	$\lim_{N \rightarrow \infty} f[N]$	$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F[z]$ (pólos de $(1 - z^{-1})F[z]$ no círculo unitário)

A.4 - TRANSFORMADAS Z

	$f[k]$	$F[z]$
1	$\delta[k-j]$	z^{-j}
2	$u_s[k]$	$\frac{z}{z-1}$
3	$ku_s[k]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
4	$k^2u_s[k]$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
5	$k^3u_s[k]$	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
6	$\gamma^{k-1}u_s[k-1]$	$\frac{1}{z-\gamma}$
7	$\gamma^k u_s[k]$	$\frac{z}{z-\gamma}$
8	$k\gamma^k u_s[k]$	$\frac{\gamma z}{(z-\gamma)^2}$
9	$k^2\gamma^k u_s[k]$	$\frac{\gamma z(z+\gamma)}{(z-\gamma)^3}$
10	$\frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-m+1)}{\gamma^m m!} \gamma^k u_s[k]$	$\frac{z}{(z-\gamma)^{m+1}}$
11	$ \gamma ^k \cos \beta k u_s[k]$	$\frac{z(z- \gamma \cos \beta)}{z^2 - (2 \gamma \cos \beta)z + \gamma ^2}$
12	$ \gamma ^k \sin \beta k u_s[k]$	$\frac{z \gamma \sin \beta}{z^2 - (2 \gamma \cos \beta)z + \gamma ^2}$
13	$r \gamma ^k \cos(\beta k + \theta) u_s[k]$	$\frac{rz[z \cos \theta - \gamma \cos(\beta - \theta)]}{z^2 - (2 \gamma \cos \beta)z + \gamma ^2}$

	$f[k]$	$F[z]$
14	$r \gamma ^k \cos(\beta k + \theta)u_s[k]$	$\frac{(0.5re^{j\theta})}{z - \gamma} + \frac{(0.5re^{-j\theta})}{z - \gamma^*}$ $\gamma = \gamma e^{j\beta}$
15	$r \gamma ^k \cos(\beta k + \theta)u_s[k]$ $r = \sqrt{\frac{A^2 \gamma ^2 + B^2 - 2AaB}{ \gamma ^2 - a^2}}$ $\beta = \cos^{-1} \frac{-a}{ \gamma }$ $\theta = \tan^{-1} \frac{Aa - B}{A\sqrt{ \gamma ^2 - a^2}}$	$\frac{z(Az + B)}{z^2 + 2az + \gamma ^2}$

A.5 – TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE $f(t)$ E TRANSFORMADA Z DE $f(kh)$

$F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$ e $F(z)$ é a transformada Z de $f(kh)$

(Nota: $f(t) = 0$ para $t = 0$)

	$F(s)$	$f(kh)$	$F(z)$
1		$1, k = 0$ $0, k \neq 0$	1
2		$1, k = k_0$ $0, k \neq k_0$	z^{-k_0}
3	$\frac{1}{s}$	$1(kh)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	kh	$\frac{hz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!}(kh)^2$	$\frac{h^2}{2} \left[\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \right]$
6	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{1}{3!}(kh)^3$	$\frac{h^3}{6} \left[\frac{z(z^2 + 4z + 1)}{(z-1)^4} \right]$
7	$\frac{1}{s^m}$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}} e^{-akh} \right)$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}} \frac{z}{z - e^{-ah}} \right)$
8	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akh}	$\frac{z}{z - e^{-ah}}$
9	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$kh e^{-akh}$	$\frac{hze^{-ah}}{(z - e^{-ah})^2}$
10	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{1}{2}(kh)^2 e^{-akh}$	$\frac{h^2}{2} e^{-ah} z \frac{(z + e^{-ah})}{(z - e^{-ah})^3}$
11	$\frac{1}{(s+a)^m}$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}} e^{-akh} \right)$	$\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}} \frac{z}{z - e^{-ah}} \right)$
12	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-akh}$	$\frac{z(1 - e^{-ah})}{(z-1)(z - e^{-ah})}$

	$F(s)$	$f(kh)$	$F(z)$
13	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{2}(akh-1+e^{-akh})$	$\frac{z[(ah-1+e^{-ah})z+(1-e^{-ah}-ahe^{-ah})]}{a(z-1)^2(z-e^{-ah})}$
14	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-akh}-e^{-bkh}$	$\frac{(e^{-ah}-e^{-bh})z}{(z-e^{-ah})(z-e^{-bh})}$
15	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-akh)e^{-akh}$	$\frac{z[z-e^{-ah}(1+ah)]}{(z-e^{-ah})^2}$
16	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1-e^{-akh}(1+akh)$	$\frac{z[z(1-e^{-ah}-ahe^{-ah})+e^{-2ah}-e^{-ah}+ahe^{-ah}]}{(z-1)(z-e^{-ah})^2}$
17	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$	$be^{-bkh}-ae^{-akh}$	$\frac{z[z(b-a)-(be^{-ah}-ae^{-bh})]}{(z-e^{-ah})(z-e^{-bh})}$
18	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin akh$	$\frac{z \sin ah}{z^2-(2 \cos ah)z+1}$
19	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos akh$	$\frac{z(z-\cos ah)}{z^2-(2 \cos ah)z+1}$
20	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-akh} \cos bkh$	$\frac{z(z-e^{-ah} \cos bh)}{z^2-2e^{-ah}(\cos bh)z+e^{-2ah}}$
21	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-akh} \sin bkh$	$\frac{ze^{-ah} \sin bh}{z^2-2e^{-ah}(\cos bh)z+e^{-2ah}}$
22	$\frac{a^2+b^2}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$1-e^{-akh} \left(\cos bkh + \frac{a}{b} \sin bkh \right)$	$\frac{z(Az+B)}{(z-1)[z^2-2e^{-ah}(\cos bh)z+e^{-2ah}]}$ $A = 1 - e^{-ah} \cos bh - \frac{a}{b} e^{-ah} \sin bh$ $B = e^{-2ah} + \frac{a}{b} e^{-ah} \sin bh - e^{-ah} \cos bh$

A.6 – EQUIVALENTE DISCRETO DE SISTEMA CONTÍNUO PRECEDIDO POR ZOH

$$H(q) = \frac{b_1 q^{n-1} + b_2 q^{n-2} + \dots + b_n}{q^n + a_1 q^{n-1} + \dots + a_n}$$

	$G(s)$	$H(q)$ OU OS COEFICIENTES EM $H(q)$
1	$\frac{1}{s}$	$\frac{h}{q-1}$
2	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{h^2(q+1)}{2(q-1)^2}$
3	$\frac{1}{s^m}$	$\frac{q-1}{q} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial a^m} \left(\frac{q}{q - e^{-ah}} \right)$
4	e^{-sh}	q^{-1}
5	$\frac{a}{s+a}$	$\frac{1 - \exp(-ah)}{q - \exp(-ah)}$
6	$\frac{a}{s(s+a)}$	$b_1 = \frac{1}{a}(ah - 1 + e^{-ah}) \quad b_2 = \frac{1}{a}(1 - e^{-ah} - ahe^{-ah})$ $a_1 = -(1 + e^{-ah}) \quad a_2 = e^{-ah}$
7	$\frac{a^2}{(s+a)^2}$	$b_1 = 1 - e^{-ah}(1 + ah) \quad b_2 = e^{-ah}(e^{-ah} + ah - 1)$ $a_1 = -2e^{-ah} \quad a_2 = e^{-2ah}$
8	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$\frac{(q-1)he^{-ah}}{(q - e^{-ah})^2}$
9	$\frac{ab}{(s+a)(s+b)}$ $a \neq b$	$b_1 = \frac{b(1 - e^{-ah}) - a(1 - e^{-bh})}{b - a} \quad a_1 = -(e^{-ah} + e^{-bh})$ $b_2 = \frac{a(1 - e^{-bh})e^{-ah} - b(1 - e^{-ah})e^{-bh}}{b - a} \quad a_2 = e^{-(a+b)h}$
10	$\frac{(s+c)}{(s+a)(s+b)}$ $a \neq b$	$b_1 = \frac{e^{-bh} - e^{-ah} + (1 - e^{-bh})\frac{c}{b} - (1 - e^{-ah})\frac{c}{a}}{a - b} \quad a_1 = -e^{-ah} - e^{-bh}$ $b_2 = \frac{c}{ab}e^{-(a+b)h} + \frac{b-c}{b(a-b)}e^{-ah} + \frac{c-a}{a(a-b)}e^{-bh} \quad a_2 = e^{-(a+b)h}$

	$G(s)$	$H(q)$ OU OS COEFICIENTES EM $H(q)$
11	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$b_1 = 1 - \alpha \left(\beta + \frac{\zeta\omega_n}{\omega} \gamma \right)$ $b_2 = \alpha^2 + \alpha \left(\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \gamma - \beta \right)$ $a_1 = -2\alpha\beta$ $a_2 = \alpha^2$ $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ $\alpha = e^{-\zeta\omega_n h}$ $\beta = \cos(\omega_d h)$ $\gamma = \sin(\omega_d h)$ $\zeta < 1$
12	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$b_1 = \frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n h} \sin(\omega_d h)$ $b_2 = -b_1$ $a_1 = -2e^{-\zeta\omega_n h} \cos(\omega_d h)$ $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ $a_2 = e^{-2\zeta\omega_n h}$
13	$\frac{a^2}{s^2 + a^2}$	$b_1 = 1 - \cos(ah)$ $b_2 = 1 - \cos(ah)$ $a_1 = -2\cos(ah)$ $a_2 = 1$
14	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$b_1 = \frac{1}{a} \sin(ah)$ $b_2 = -\frac{1}{a} \sin(ah)$ $a_1 = -2\cos(ah)$ $a_2 = 1$
15	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$b_1 = \frac{1-\alpha}{a^2} + h \left(\frac{h}{2} - \frac{1}{a} \right)$ $b_2 = - \left(\frac{h^2}{2} - \frac{1}{a^2} \right) + \frac{h}{a} (1 + \alpha)$ $b_3 = (1-\alpha) \left[\frac{1}{a^2} (\alpha - 1) + \alpha h \left(\frac{h}{2} + \frac{1}{a} \right) \right]$ $a_1 = -(\alpha + 2)$ $a_2 = 2\alpha + 1$ $a_3 = -\alpha$ $\alpha = e^{-ah}$