



# **Apuntes de Física Matemática II**

*Pedro A. Contreras-Corral*

Universidad de Concepción



---

# **APUNTES DE FÍSICA MATEMÁTICA II**

---

Por:

Pedro A. Contreras-Corral

Marzo 2025



## Prefacio

Este documento ha sido preparado por Pedro Contreras Corral como material de apoyo para el curso Física Matemática II. En cuanto a su contenido, se han utilizado como base las notas de clase de las ocasiones en que el curso fue dictado por el profesor Guillermo Rubilar, y las profesoras Ariana Muñoz e Ivana Sebestova, además del apunte preparado por Alejandro Saavedra como ayudante de esta última, a quien agradezco permitirme utilizar su apunte como base para el *template* de este documento, así como para el contenido de los primeros dos capítulos.

También se han usado como base (en mayor o menor medida) los textos establecidos en la bibliografía, *Mathematical Physics* de Butkov, *Mathematical Methods for Physicists* de Arfken, *Mathematical Methods for Physics and Engineering* de Riley. Junto a ellos, se han usado algunas ideas del libro *Mathematical Physics, a Modern Introduction to its Foundations* de Hassani.

Es necesario recordar que esta es la primera versión de este documento, por lo que es probable que contenga algunos typos y errores menores. En caso de que estos se presenten, serán mencionados en clases para que puedan tomar notas al respecto, y serán corregidos en versiones posteriores del documento. De igual manera, algunas demostraciones no se encuentran escritas, de modo que derivo el detalle de ellas a las fuentes respectivas cuando lo considere necesario. En versiones futuras de este documento se actualizarán estas ausencias.

Agradezco los aportes de Lixin Lai, Fernanda Mella y Amaro Díaz al facilitarme sus notas y el material del curso de la profesora Ivana Sebestova, así como los de José Huenchual por sus notas del curso de la profesora Ariana Muñoz.

*"...El trabajo en equipo se convertirá en el método de investigación científica."*

Atribuída a John Desmond Bernal.



# Índice general

<b>1. Análisis de Fourier</b>	<b>1</b>
1.1. Periodicidad y paridad de funciones . . . . .	1
1.2. Serie de Fourier trigonométrica . . . . .	5
1.2.1. Serie de Fourier de una función compleja de variable real . . . . .	7
1.2.2. Series de senos y cosenos . . . . .	7
1.3. Serie exponencial . . . . .	9
<b>2. Transformada de Fourier</b>	<b>13</b>
2.1. Propiedades de la transformada de Fourier . . . . .	20
2.2. Transformadas seno y coseno . . . . .	25
2.3. Delta de Dirac . . . . .	26
2.3.1. Representación integral . . . . .	28
2.3.2. Delta de Dirac tridimensional . . . . .	29
2.4. Convolución . . . . .	32
<b>3. Ecuaciones Diferenciales en Física</b>	<b>39</b>
3.1. Algunas ecuaciones básicas . . . . .	40
3.2. Condiciones de borde . . . . .	42
3.3. Encontrar soluciones para ecuaciones diferenciales parciales . . . . .	43
3.3.1. Método de la transformada de Fourier . . . . .	43
<b>4. El Método de Separación de Variables</b>	<b>49</b>
4.1. Resolviendo la ecuación de Helmholtz . . . . .	51
4.1.1. Coordenadas cartesianas . . . . .	51
4.1.2. Coordenadas cilíndricas . . . . .	53
4.1.3. Coordenadas esféricas . . . . .	54
4.2. El método de series para EDO . . . . .	57

<b>5. Funciones de Legendre</b>	<b>65</b>
5.1. Ecuación y Funciones de Legendre	65
5.1.1. Resolviendo la ecuación de Legendre	65
5.1.2. Función Generatriz	69
5.1.3. Propiedades	70
5.1.4. Funciones de Legendre de segunda especie	72
5.2. Ecuación y funciones asociadas de Legendre	75
5.2.1. Resolviendo la ecuación asociada de Legendre	75
5.2.2. Función generatriz	77
5.2.3. Propiedades	78
5.3. Armónicos Esféricos	79
5.3.1. Propiedades	80
<b>6. Funciones de Bessel</b>	<b>85</b>
6.1. Funciones de Bessel	85
6.1.1. Resolviendo la ecuación de Bessel mediante el método de Series	85
6.1.2. Funciones de Bessel de segunda especie, o de Neumann	89
6.1.3. Funciones de Hankel	91
6.1.4. Función generatriz (para orden entero)	91
6.1.5. Ceros de las funciones de Bessel	91
6.1.6. Propiedades	92
6.2. Funciones modificadas de Bessel	96
6.2.1. Propiedades	97
6.3. Funciones esféricas de Bessel	100
6.3.1. Función generatriz (para orden entero)	102
6.3.2. Ceros de las funciones esféricas de Bessel	102
6.3.3. Propiedades	102
<b>7. Funciones de Green</b>	<b>107</b>
7.1. Motivación: Potencial electrostático	108
7.2. Encontrando soluciones mediante funciones de Green	109
7.2.1. Condiciones de borde de tipo Dirichlet	109
7.2.2. Condiciones de borde de tipo Neumann	111
7.3. Simetría de las funciones de Green	112
7.4. Método de las imágenes	113
7.5. Algunas funciones de Green comunes	117
7.5.1. Ecuación de Laplace	117
7.5.2. Ecuación de Helmholtz	118
<b>8. Introducción a los Tensores Cartesianos</b>	<b>123</b>
8.1. Transformaciones ortogonales	123
8.1.1. Convenio de suma de Einstein	125
8.2. Covarianza y contravarianza	126
8.3. Transformaciones Ortogonales	127



8.4. Tensores Cartesianos . . . . .	128
8.4.1. Propiedades . . . . .	130
8.5. Álgebra Tensorial . . . . .	131
8.6. Pseudovectores y pseudotensores . . . . .	133
8.6.1. Propiedades . . . . .	133
8.6.2. Símbolo de Levi-Civita . . . . .	134
8.6.3. Tensores duales . . . . .	135
8.7. Análisis tensorial . . . . .	136
8.7.1. Derivación . . . . .	136
8.7.2. Integración . . . . .	137

<b>Referencias</b>	<b>141</b>
--------------------	------------



# Análisis de Fourier

En el curso Física Matemática I ya se discutió el estudio de la Serie de Fourier. En este curso, haremos un rápido resumen de dichos contenidos, pues son la base para introducir el concepto de la *transformada de Fourier*, que será de utilidad para la resolución de algunas ecuaciones diferenciales parciales cuyas condiciones de borde son periódicas.

## 1.1. Periodicidad y paridad de funciones

**Definición 1.1.** Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  se dice que es **periódica de período**  $T$ , con **Función periódica**  $T \neq 0$ , si

$$f(t) = f(t + T), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

La constante  $T$  la tomaremos como la menor constante positiva que satisface la igualdad (1.1).

### Propiedad 1.1. Propiedades de las funciones periódicas.

1. Si  $f$  es periódica de periodo  $T$ , entonces

$$f(t) = f(t + nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

2. Si  $f(t)$  y  $g(t)$  son funciones periódicas de período  $T$ , entonces la función

$$h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t); \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

tiene el mismo período  $T$ .

3. En general, si la función

$$f(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$$

es periódica de período  $T$ , entonces es posible encontrar dos enteros  $n$  y  $m$  tales que

$$\omega_1 T = 2\pi n, \quad (1.2)$$

$$\omega_2 T = 2\pi m. \quad (1.3)$$

El cociente de (1.2) y (1.3) es

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m},$$

es decir, la relación  $\omega_1/\omega_2$  debe ser un número racional.

**Ejemplo 1.1.** Encuentre el período de la función  $f(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{4}\right)$ .

**Solución:** Si la función  $f(t)$  es periódica con período  $T$ , entonces, de (1.1),

$$\cos\frac{1}{3}(t+T) + \cos\frac{1}{4}(t+T) = \cos\frac{t}{3} + \cos\frac{t}{4}.$$

Como  $\cos(\theta + 2\pi n) = \cos \theta$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , obtenemos que

$$\frac{1}{3}T = 2\pi n, \quad \frac{1}{4}T = 2\pi m; \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Por consiguiente  $T = 6\pi n = 8\pi m$ ; cuando  $n = 4$  y  $m = 3$ , se obtiene el mínimo valor de  $T$ . Así,  $T = 24\pi$ .

**Función  
seccionalmente  
continua**

**Definición 1.2.** Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es **seccionalmente continua** si  $[a, b]$  tiene una partición finita  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  tal que  $f$  es continua y acotada en cada intervalo abierto  $(t_i, t_{i+1})$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ .

Denotaremos por  $\mathcal{C}[a, b]$  al conjunto de las funciones complejas seccionalmente continuas.

**Proposición 1.1.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función periódica de período  $T$ . Sea  $a \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\int_{a-T/2}^{a+T/2} f(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt.$$

**Demostración.** Utilizando la propiedad de aditividad de las integrales,

$$\int_{a-T/2}^{a+T/2} f(t) dt = \int_{a-T/2}^{-T/2} f(t) dt + \int_{-T/2}^{a+T/2} f(t) dt.$$

Haciendo la sustitución  $t = t' - T \Rightarrow dt = dt'$  en la primera integral, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \int_{a-T/2}^{-T/2} f(t) dt + \int_{-T/2}^{a+T/2} f(t) dt &= \int_{a+T/2}^{T/2} f(t' - T) dt' + \int_{-T/2}^{a+T/2} f(t) dt \\
 &= \int_{a+T/2}^{T/2} f(t' - T + T) dt' + \int_{-T/2}^{a+T/2} f(t) dt \\
 &= \int_{a+T/2}^{T/2} f(t') dt' + \int_{-T/2}^{a+T/2} f(t) dt \\
 &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt.
 \end{aligned}$$

**Definición 1.3.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  seccionalmente continua, se llama **extensión periódica** de  $f$  a la función  $f_e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\boxed{f_e(t) = f(t + k_0(b - a))}, \quad (1.4)$$

donde  $k_0 \in \mathbb{Z}$  es el único entero que verifica  $t + k_0(b - a) \in [a, b]$ .

**Ejemplo 1.2.** La extensión periódica de  $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$  real es

$$f_e(t) = f_e(t + 2\pi)$$

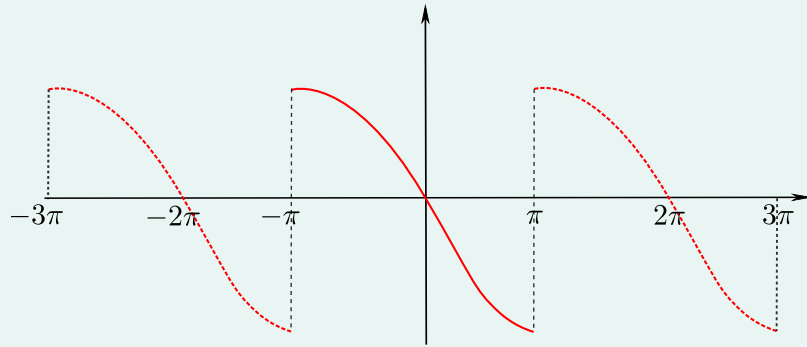


Figura 1.1: Extensión periódica de una función real seccionalmente continua en  $[-\pi, \pi]$ .

**Definición 1.4.** Sea  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  perteneciente a  $\mathcal{C}[-a, a]$ . Diremos que  $f$  es una **función par** si y solo si, para todo  $x$  en el intervalo  $[-a, a]$ , se cumple que

$$f(-t) = f(t). \quad (1.5)$$

**Funciones pares e impares**

De forma similar, diremos que  $f$  es una **función impar** si y solo si, para todo  $x$  en el intervalo  $[-a, a]$ , se cumple que

$$f(-t) = -f(t). \quad (1.6)$$

**Proposición 1.2.** Sea  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable,

$$f \text{ es par} \Rightarrow \int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt.$$

$$f \text{ es impar} \Rightarrow \int_{-a}^a f(t) dt = 0.$$

#### Observación

Toda función  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  puede expresarse como la suma de una función par más otra impar:  $f = f_p + f_i$  con

$$f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}, \quad f_i(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}.$$

#### Extensión par e impar

**Definición 1.5.** Sea  $f \in \mathcal{C}[0, a]$  real, entonces la **extensión par** y la **extensión impar** de  $f$  están definidas, respectivamente, por:

$$E_f(t) = \begin{cases} f(-t) & \text{si } -a \leq t < 0 \\ f(t) & \text{si } 0 \leq t \leq a \end{cases}, \quad O_f(t) = \begin{cases} -f(-t) & \text{si } -a \leq t < 0 \\ f(t) & \text{si } 0 \leq t \leq a \end{cases}.$$

Ambas extensiones se encuentran definidas en el intervalo  $[-a, a]$ .



Figura 1.2: Extensión par e impar de una función real seccionalmente continua en  $[0, a]$ .

## 1.2. Serie de Fourier trigonométrica

**Proposición 1.3.** En el espacio  $\mathcal{C}[a, b]$ , el conjunto formado por las funciones

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

es un conjunto ortogonal, con  $L = b - a$ .

**Definición 1.6.** Llamamos **sistema trigonométrico** al conjunto de funciones ortogonales en el espacio  $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ , definido como

**Sistema trigonométrico**

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

**Definición 1.7.** Una función  $f$  satisface las llamadas **Condiciones de Dirichlet** si satisface

**Condiciones de Dirichlet**

1. Se encuentra definida en un intervalo  $(a, a + 2L)$ .
2. Tanto  $f$  como su derivada son funciones seccionalmente continuas en el intervalo  $(a, a + 2L)$ .
3.  $f$  tiene un número finito de discontinuidades *finitas*.
4.  $f$  es una función periódica de periodo  $2L$ .

**Definición 1.8.** Sea  $f \in \mathcal{C}[a, a + 2L]$  una función que satisface las condiciones de Dirichlet. Entonces, ella puede ser aproximada por la serie

**Serie de Fourier**

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right) \approx f(x). \quad (1.7)$$

Esta expansión se denomina **serie trigonométrica de Fourier** o simplemente **serie de Fourier**, donde los *coeficientes de Fourier* están dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt, \quad n = 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt. \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.3.** Consideremos la función  $f(x) = x^2$  definida para  $x \in [-\pi, \pi]$ , la cual es continua con derivada  $f'(x) = 2x$  también continua, luego la serie de Fourier de  $f$  converge puntualmente a  $f$  para todo  $x \in (-\pi, \pi)$ . Para los extremos  $x = \pm\pi$  vemos que  $f(\pi) = f(-\pi)$ , por lo tanto la serie converge puntualmente a  $f$  para todo  $x \in [-\pi, \pi]$ .

Sus coeficientes de Fourier están dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{x^3}{3\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{1}{n\pi} x^2 \sin(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi} x \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx \xrightarrow{0} \\ &= \frac{4}{n^2} \cos(n\pi) = (-1)^n \frac{4}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(nx) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Entonces, su serie de Fourier es

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx), \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (1.8)$$

Es claro que la serie de Fourier de  $f(x) = x^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  representa la extensión periódica de los valores de  $f(x)$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

La gráfica de  $f$  en conjunto con diferentes sumas parciales de su serie de Fourier están representadas en la figura 1.3.



Figura 1.3: Serie de Fourier de la función  $f(x) = x^2$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ , truncada hasta  $n = 4$ .



### 1.2.1. Serie de Fourier de una función compleja de variable real

Sea  $f = u + iv \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ , su serie de Fourier trigonométrica está dada por (1.7) con

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) dt + \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos(nt) dt + \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(t) \cos(nt) dt, \quad n \in \mathbb{N} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \sin(nt) dt + \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(t) \sin(nt) dt, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Entonces, su serie de Fourier nos queda

$$\begin{aligned} f(t) \sim & \left\{ \frac{\operatorname{Re}(a_0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re}(a_n) \cos(nt) + \operatorname{Re}(b_n) \sin(nt)) \right\} \\ & + i \left\{ \frac{\operatorname{Im}(a_0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Im}(a_n) \cos(nt) + \operatorname{Im}(b_n) \sin(nt)) \right\}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

es decir, la serie de Fourier de  $f = u + iv$  será dada por

$$S_F(f) = S_F(u) + iS_F(v), \quad (1.10)$$

donde  $S_F$  representa a una serie de Fourier.

### 1.2.2. Series de senos y cosenos

**Definición 1.9.** Dadas las extensiones par e impar de una función,  $E_f, O_f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , es posible obtener el desarrollo en serie de Fourier de cada una de estas, que corresponden a los **desarrollos en serie de Fourier de coseno y de seno** de  $f$ , respectivamente. Estos son definidos como

$$\begin{aligned} E_f(t) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt), \quad \text{donde } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \\ O_f(t) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt), \quad \text{donde } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt. \end{aligned}$$

En ambos casos, se ha hecho uso de las propiedades de las funciones pares e impares para hallar los coeficientes de las series.

**Ejemplo 1.4.** Consideremos la función signo definida por

$$f(x) := \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

La función es seccionalmente continua con  $x = 0$  punto de discontinuidad de salto y las derivadas laterales existen para todo  $x \in (-\pi, \pi)$ , luego la serie de Fourier de  $f$  converge puntualmente a  $f$  en los puntos de continuidad y a

$$\frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = 0, \quad \text{en } x = 0 \text{ y}$$

$$\frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = 0, \quad \text{en } x = \pm\pi.$$

Sus coeficientes de Fourier están dados por:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1) \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi n} \cos(nx) \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{\pi n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{4}{\pi n}, & n \text{ impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces, su serie de Fourier es

$$f(x) = \sum_{n \text{ impar}} \frac{4}{\pi n} \sin(nx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\sin[(2k-1)x]}{(2k-1)}.$$

**Aclaración:** Note que a pesar de haber escrito que la función  $f$  es igual a la serie, debemos tener en cuenta que en los punto  $x = 0$  y  $x = \pm\pi$  converge al valor medio del salto de la discontinuidad.

Es claro que la serie de Fourier de  $f$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  representa la extensión periódica de los valores de  $f(x)$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

La gráfica de  $f$  en conjunto con diferentes sumas parciales de su serie de Fourier están representadas en la figura 1.4.

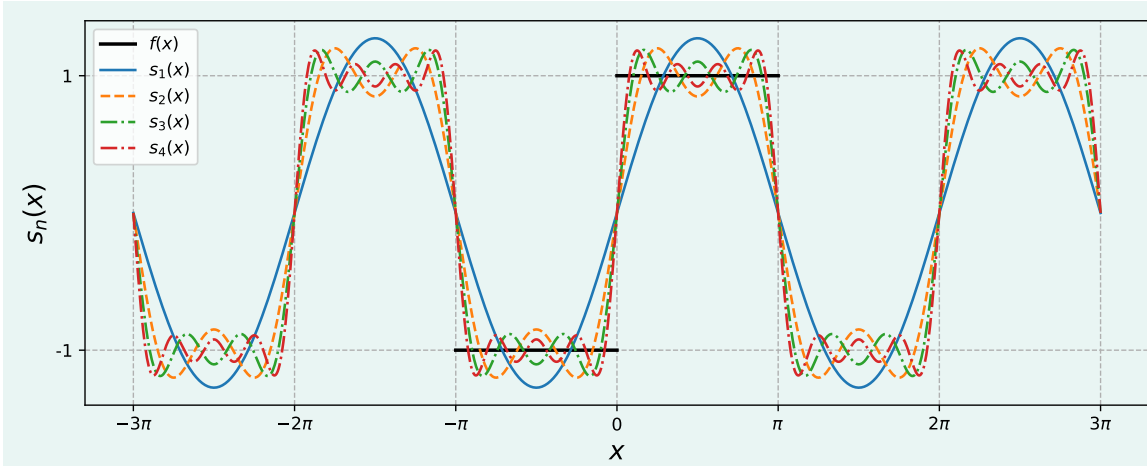


Figura 1.4: Serie de Fourier de la función signo truncada hasta  $n = 4$ .

## 1.3. Serie exponencial

**Proposición 1.4.** En el espacio  $\mathcal{C}[a, a + 2L]$ , el conjunto formado por las funciones

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i \frac{n\pi}{L} x} \right\}_{n=-\infty}^{n=\infty} \quad (1.11)$$

es un conjunto ortonormal.

**Definición 1.10.** Llamamos **sistema exponencial** al conjunto de funciones ortonormales en el espacio  $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ , definido como **Sistema exponencial**

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \right\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$$

**Definición 1.11.** Sea  $f \in \mathcal{C}[a, a + 2L]$  una función con un número finito de discontinuidades. Entonces, ella puede ser aproximada por la serie

**Serie de Fourier exponencial**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{L} x} \quad (1.12)$$

Esta expansión se denomina **serie exponencial de Fourier** donde los *coeficientes de Fourier* están dados por:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_a^{a+2L} f(t) e^{-i \frac{n\pi}{L} t} dt .$$

**Proposición 1.5.** La  $n$ -ésima suma parcial de la serie de Fourier trigonométrica de una función (real o compleja) es igual a la  $n$ -ésima suma parcial de la serie exponencial.

**Demostración.** La  $n$ -ésima suma parcial de la serie exponencial es

$$s_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}.$$

Separando la suma:

$$\begin{aligned} s_n(t) &= \sum_{k=-n}^{-1} c_k e^{ikt} + c_0 + \sum_{k=1}^n c_k e^{ikt} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^n c_k e^{ikt} + \sum_{k=1}^n c_{-k} e^{-ikt} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^n [c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}]. \end{aligned}$$

Usando la identidad de Euler,  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ , encontramos que

$$s_n(t) = c_0 + \sum_{k=1}^n [(c_k + c_{-k}) \cos(kt) + i(c_k - c_{-k}) \sin(kt)].$$

Desarrollando los coeficientes de la serie exponencial de Fourier, tenemos que

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \\ c_k + c_{-k} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [e^{ikt} + e^{-ikt}] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt; \quad k = 1, 2, \dots \\ i(c_k - c_{-k}) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt \\ &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [e^{ikt} - e^{-ikt}] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt; \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Comparando las expresiones obtenidas con los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica, podemos concluir que

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k + c_{-k} = a_k, \quad i(c_k - c_{-k}) = b_k; \quad k = 1, 2, \dots$$

Por lo tanto,

$$s_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)).$$

Una consecuencia inmediata de la proposición 1.5 es que todos los teoremas vistos para la serie de Fourier trigonométrica son aplicables a la serie de Fourier exponencial.

### Propiedad 1.2. Propiedades de la Serie de Fourier exponencial

1. Los coeficientes de las series (1.7) y (1.12) están relacionados por

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}); \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

o bien,

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & n \geq 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}), & n \leq -1 \end{cases} \quad (1.14)$$

2. Si  $f(t)$  es una función real, entonces sus respectivos coeficientes complejos  $c_n$  satisfacen la relación:

$$c_n^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(e^{-int})^* dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int} dt = c_{-n}.$$



## Transformada de Fourier

En el capítulo anterior, aprendimos que la serie de Fourier de  $f \in \mathcal{C}[-L/2, L/2]$  está dada por

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2n\pi}{L} x}, \quad (2.1)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-i \frac{2n\pi}{L} x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

Una consecuencia inmediata de la expansión en serie de Fourier es que la función  $f(x)$  representada por la serie resulta periódica, con período  $L$ . Por lo tanto, decimos que la serie de Fourier permite *expandir funciones periódicas*.

Sin embargo, no todas las funciones son periódicas, y nos interesará expandirlas dentro de algún intervalo de validez. Necesitamos, entonces, algún modo de expandir, en una base ortonormal, funciones no periódicas.

Podemos decir que el conjunto de coeficientes  $\{c_n\}$  también definen a  $f(x)$ . Este conjunto de números  $c_n$  puede ser entendido como una función en la variable  $n$ , escrita como  $c(n)$ , definida para un conjunto *discreto* de valores de la variable independiente (en lugar de un intervalo continuo).

**Definición 2.1.** Se define como el **espectro de Fourier** a la función de variable discreta  $c(n)$ , definida a partir de los coeficientes de Fourier (2.2). **Espectro de Fourier**

El espectro de una función puede ser graficado, asumiendo  $c(n)$  real, como se observa en la figura 2.1.



Figura 2.1: Espectro de Fourier.

En lugar de graficar  $c$  vs  $n$ , podemos graficar  $c$  vs  $k$ , el *número de onda*, que corresponde a la frecuencia asociada a la parte espacial:

$$k = \frac{2\pi n}{L}.$$

Si  $L \rightarrow \infty$ , entonces las frecuencias se encuentran estrechamente espaciadas debido a que la diferencia entre valores consecutivos de  $k$  es

$$\Delta k = \frac{2\pi \Delta n}{L} = \frac{2\pi}{L}, \quad \text{pues } \Delta n = 1.$$

En otras palabras, para  $L \rightarrow \infty$ ,  $\Delta k$  es pequeño. Con este cambio de escala, el espectro de Fourier puede parecerse a lo mostrado en la figura 2.2.

Es natural especular sobre la posibilidad de un espectro continuo cuando  $L$  tiende al infinito de tal forma que todas las frecuencias están presentes. Puede ser instructivo considerar la siguiente derivación heurística: Sabemos que una función puede ser expandida como una serie de Fourier tal como se muestra en (2.1). Luego, la transición  $L \rightarrow \infty$  puede resultar difícil de realizar directamente ya que  $c_n$  aparentemente tiende a cero. Seguimos entonces la idea de usar las frecuencias  $k = 2\pi n/L$  tal que  $\Delta k = (2\pi/L)\Delta n = 2\pi/L$  para valores de  $k$  adyacentes y definimos

$$c_L(k) = \frac{L}{\sqrt{2\pi}} c_n. \quad (2.3)$$





Figura 2.2: Espectro de Fourier cuando  $L \rightarrow +\infty$ .

Usando las definiciones anteriores en las ecuaciones (2.1) y (2.2), obtenemos que la función y sus coeficientes de Fourier se pueden escribir como:

$$f(x) = \sum_{Lk/2\pi=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{L} c_L(k) e^{ikx} \left( \frac{\Delta k L}{2\pi} \right) = \sum_{Lk/2\pi=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_L(k) e^{ikx} \Delta k,$$

$$c_L(k) = \frac{L}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Al hacer  $L \rightarrow \infty$ , la función  $f$  puede considerarse como una función no-periódica arbitraria definida en todo el intervalo  $(-\infty, \infty)$ , mientras que la primera suma “se convierte” en una integral:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk,$$

$$c(k) = \lim_{L \rightarrow +\infty} c_L(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

**Definición 2.2.** Dada una función  $f$  no periódica definida en  $\mathcal{C}(-\infty, \infty)$ , definimos su **Transformada de Fourier** como

$$\tilde{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (2.4)$$

Note que la transformada de Fourier es la extensión natural del concepto de series de Fourier para funciones no periódicas. Además, al ser  $n$  una variable discreta, y  $k$  continua, podemos decir que la transformada de Fourier es la generalización del concepto

de series de Fourier cuando las funciones pertenecen a un espacio vectorial de dimensión continua.

### Transformada inversa de Fourier

**Definición 2.3.** Se define la **transformada inversa de Fourier** como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk. \quad (2.5)$$

#### Observaciones

- Otras notaciones usadas son:  $\tilde{f}(k) = \hat{f}(k) = g(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$ .
- El factor  $1/\sqrt{2\pi}$  en la definición (2.4) es convencional. Lo importante es que se cumpla la identidad conocida como **integral de Fourier**

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] e^{ikx} dk. \quad (2.6)$$

- Al igual que el factor  $1/\sqrt{2\pi}$  en la definición (2.4), la función  $e^{-ikx}$  es convencional y puede ser reemplazada por  $e^{ikx}$ , siempre y cuando se verifique (2.6) [10, 28].
- Es común en Física trabajar con funciones del tiempo,  $f = f(t)$ . En este caso, se acostumbra usar la frecuencia  $\omega$  en lugar del número de onda  $k$ , de modo que la integral de Fourier adopta a forma

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

donde

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

- En 3 dimensiones, la integral de Fourier está dada por:

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} d^3 k, \\ \tilde{f}(\vec{k}) &:= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} d^3 x. \end{aligned}$$

En general, en  $n$  dimensiones:

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} d^n k, \\ \tilde{f}(\vec{k}) &:= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{r}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} d^n x. \end{aligned}$$

¿Cómo aseguramos la existencia de la transformada de Fourier de una función? Para ello, necesitamos introducir el concepto de *funciones absolutamente integrables*, tras lo cual podemos plantear el teorema de existencia de la transformada de Fourier.

**Definición 2.4.** Si  $f(x)$  es tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

entonces se dice que  $f \in L^1$  o que es **absolutamente integrable**.

**Función  
absolutamente  
integrable**

**Teorema 2.1.** Si  $f \in L^1$ , entonces la transformada de Fourier  $\tilde{f}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$  existe y  $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \tilde{f}(k) = 0$ .

**Demostración.** Demostraremos solo la primera parte del teorema.

Notemos que

$$e^{-ikx} = \cos(kx) - i \sin(kx) \Rightarrow |e^{-ikx}| = 1.$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-ikx}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

En consecuencia,  $f(x)e^{-ikx}$  es absolutamente integrable y

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

es finita, es decir,  $\tilde{f}(k)$  existe.

#### Observación

La condición de que  $f$  sea absolutamente integrable es suficiente pero no necesaria para la existencia de la transformada de Fourier.

**Teorema 2.2.** Sea  $f(x)$  una función seccionalmente continua en cada intervalo finito del eje  $x$ , y supongamos que es absolutamente integrable en  $(-\infty, +\infty)$ . Entonces la **integral de Fourier** satisface

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos k(\xi - x) d\xi dk = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, \quad (2.7)$$

donde ambas derivadas laterales,  $f'(x^+)$  y  $f'(x^-)$ , existen.

**Demostración.** Consulte el capítulo 6 «Fourier Integrals and Applications» en [9].

**Ejemplo 2.1. Función pulso cuadrado.** Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}.$$

Su transformada de Fourier es

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a (1) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -\frac{1}{ik} e^{-ikx} \right]_{-a}^a \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} ik} [e^{ika} - e^{-ika}] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ka)}{k}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

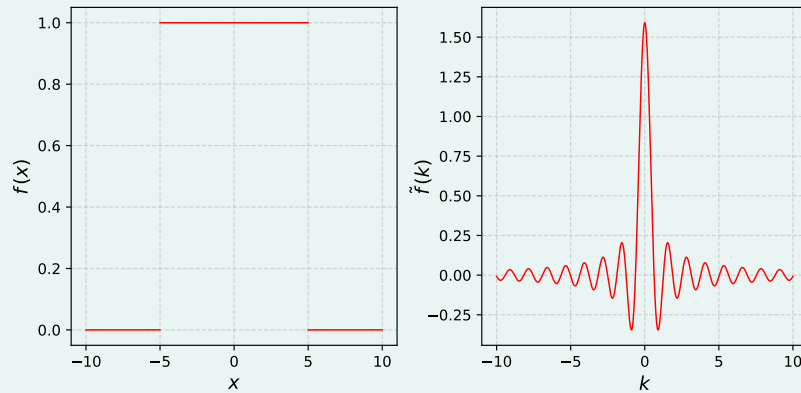


Figura 2.3: Pulso cuadrado y su transformada de Fourier, con  $a = 5$ .

**Ejemplo 2.2. Distribución gaussiana.** Considere la gaussiana

$$f(x) = n e^{-\beta x^2}, \quad \beta > 0.$$

Su transformada de Fourier está dada por

$$\tilde{f}(k) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} e^{-ikx} dx = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2 - ikx} dx.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
 -\beta x^2 - ikx &= -\beta \left( x^2 + \frac{ik}{\beta} x \right) \\
 &= -\beta \left( x^2 + \frac{ik}{\beta} x + \left( \frac{ik}{2\beta} \right)^2 - \left( \frac{ik}{2\beta} \right)^2 \right) \\
 &= -\beta \left( x + \frac{ik}{2\beta} \right)^2 + \beta \left( \frac{ik}{2\beta} \right)^2 \\
 &= -\beta \left( x + \frac{ik}{2\beta} \right)^2 - \left( \frac{k^2}{4\beta} \right).
 \end{aligned}$$

Luego, su transformada de Fourier puede escribirse como

$$\tilde{f}(k) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(x+ik/2\beta)^2 - (k^2/4\beta)} dx = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-(k^2/4\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(x+ik/2\beta)^2} dx.$$

Haciendo el cambio de variable  $u = x + \frac{ik}{2\beta}$ , obtenemos que<sup>1</sup>

$$\hat{f}(k) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-(k^2/4\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta u^2} du = \frac{n}{\sqrt{2\beta}} e^{-(k^2/4\beta)}, \quad (2.9)$$

donde hemos usado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, \quad \beta > 0. \quad (2.10)$$

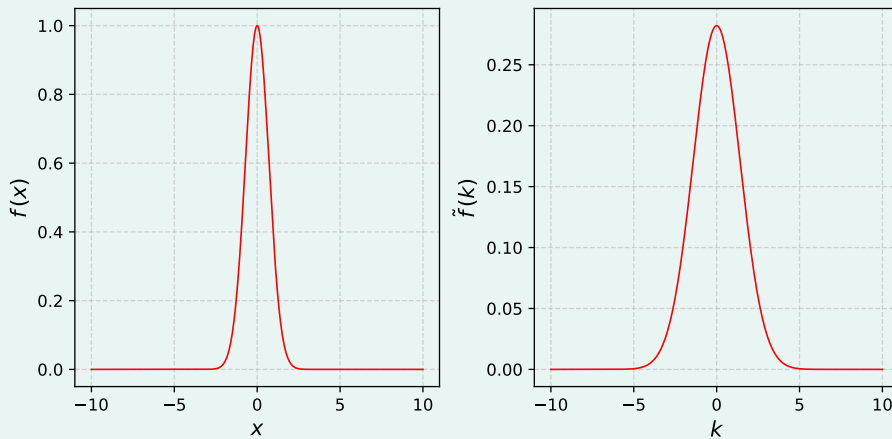


Figura 2.4: Distribución gaussiana y su transformada de Fourier para  $n = 1$  y  $\beta = 1$ .

<sup>2</sup> En estricto rigor se debería calcular una integral compleja, vea [6].

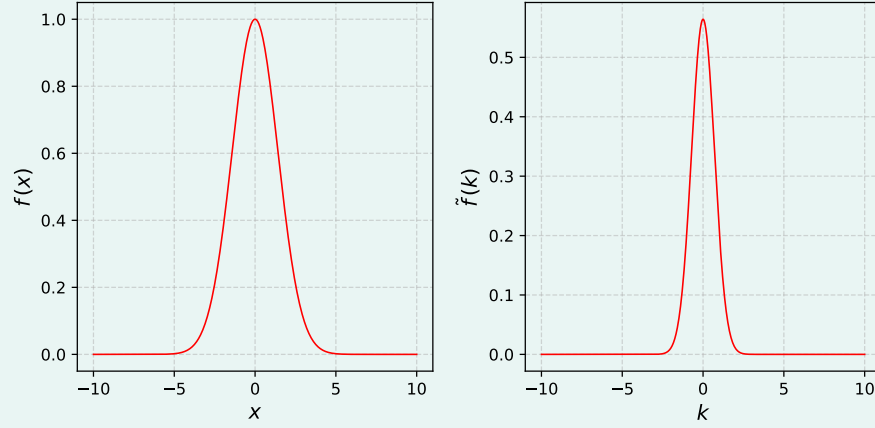


Figura 2.5: Distribución gaussiana y su transformada de Fourier para  $n = 1$  y  $\beta = 0.25$ .

## 2.1. Propiedades de la transformada de Fourier

**Propiedad 2.1. Propiedades de la Transformada de Fourier.** Sean las funciones  $f, g \in L^1$  y los escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

**1. Linealidad:**

$$\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\}(k) = \alpha \mathcal{F}\{f(x)\}(k) + \beta \mathcal{F}\{g(x)\}(k).$$

**2. Si  $f$  es real, entonces**

$$\mathcal{F}\{f(x)\}(-k) = (\mathcal{F}\{f(x)\}(k))^*.$$

**3. Traslación:**

$$\mathcal{F}\{f(x + a)\}(k) = e^{ika} \mathcal{F}\{f(x)\}(k), \quad a \in \mathbb{R}.$$

**4. Cambio de escala:**

$$\mathcal{F}\{f(\alpha x)\}(k) = \frac{1}{|\alpha|} \mathcal{F}\{f(x)\}\left(\frac{k}{\alpha}\right), \quad \alpha \neq 0.$$

**5. Atenuación:**

$$\mathcal{F}\{f(x)e^{-ax}\}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}(k - ia), \quad a \in \mathbb{C}.$$

**6. Si  $f$  es una función par, entonces  $\tilde{f}$  es una función real.**

**7. Si  $f$  es una función impar, entonces  $\tilde{f}$  es una función puramente imaginaria, es decir,  $\tilde{f}(k) = -\tilde{f}(-k)$ .**

**Demostración.** Demostraremos los puntos desde el 1 hasta el 5, y volveremos más tarde a los puntos 6 y 7.

1. Por la definición (2.4) de la transformada de Fourier y usando el hecho de que las funciones son absolutamente convergentes, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)] e^{-ikx} dx \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx + \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx \\ &= \alpha \mathcal{F}\{f(x)\}(k) + \beta \mathcal{F}\{g(x)\}(k).\end{aligned}$$

2. Por la definición (2.4) de la transformada de Fourier y suponiendo que  $f$  es real:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(x)\}(-k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-(-ikx)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (e^{-ikx})^* dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) e^{-ikx}]^* dx \\ &= (\mathcal{F}\{f(x)\}(k))^*.\end{aligned}$$

3. Por la definición (2.4) de la transformada de Fourier, se tiene que

$$\mathcal{F}\{f(x+a)\}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a) e^{-ikx} dx.$$

Al hacer la sustitución  $s = x + a$ ,  $ds = dx$ , tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a) e^{-ikx} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-ik(s-a)} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-iks+ika} ds \\ &= e^{ika} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iks} ds \right) \\ &= e^{ika} \mathcal{F}\{f(x)\}(k).\end{aligned}$$

4. Por la definición (2.4) de la transformada de Fourier, se tiene que

$$\mathcal{F}\{f(ax)\}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-ikx} dx.$$

Supondremos  $\alpha > 0$ . Haciendo el cambio de variable  $u = \alpha x$ ,  $du = \alpha dx$ , tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i(k/\alpha)u} du \right) = \frac{1}{\alpha} \mathcal{F}\{f(x)\} \left( \frac{k}{\alpha} \right).$$

Ahora, si  $\alpha < 0$ , hacemos el mismo cambio de variable que antes, obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x) e^{-ikx} dx &= \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(u) e^{-i(k/\alpha)u} du \right) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i(k/\alpha)u} du \right) \\ &= -\frac{1}{\alpha} \mathcal{F}\{f(x)\} \left( \frac{k}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que, para  $\alpha \neq 0$ , se tendrá que

$$\mathcal{F}\{f(\alpha x)\}(k) = \frac{1}{|\alpha|} \mathcal{F}\{f(x)\} \left( \frac{k}{\alpha} \right).$$

5. Por la definición (2.4) de la transformada de Fourier, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x)e^{-ax}\}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ax} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx - ax} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx + i^2 ax} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix(k - ia)} dx \\ &= \mathcal{F}\{f(x)\}(k - ia). \end{aligned}$$

**Transformada de  
Fourier de una  
derivada**

**Proposición 2.1.** Sea  $f(x)$  con transformada de Fourier  $\mathcal{F}\{f(x)\}$  y  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ . Entonces,

$$\boxed{\mathcal{F}\{f'(x)\} = ik\mathcal{F}\{f(x)\}}, \quad (2.11)$$

y en general,

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\} = (ik)^n \mathcal{F}\{f(x)\}, \quad (2.12)$$

**Demostración.** Demostraremos el caso para la primera derivada, pues derivadas más



altas se deducen a partir de este. Usando la definición (2.4) de la transformada de Fourier, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{f'(x)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d}{dx} [f(x) e^{-ikx}] - (-ik) f(x) e^{-ikx} \right\} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{ik}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
 &= ik \mathcal{F}\{f(x)\} + f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty}.
 \end{aligned}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ , obtenemos

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = ik \mathcal{F}\{f(x)\}.$$

Dado que hemos entendido la transformada de Fourier como una extensión de las series de Fourier, como es el caso de que las condiciones de existencia de la transformada de Fourier son las mismas *condiciones de Dirichlet* para la existencia de los coeficientes de Fourier. Por ello, esperaríamos una analogía a la fórmula de Parseval propia de las series de Fourier. Esta corresponde al siguiente teorema.

**Teorema 2.3** (de Parseval). Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones reales y si  $\tilde{f}(k)$  y  $\tilde{g}(k)$  son sus correspondientes transformadas de Fourier, entonces

(i) (Primer teorema)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

(ii) (Segundo teorema)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) \tilde{g}(-k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx.$$

**Demostración.** Notemos que (i) es consecuencia de (ii) al tomar  $g(x) = f(x)$  real tal que  $f^*(x) = f(x)$  y  $\tilde{g}(-k) = \tilde{f}^*(k)$ . Luego, nos bastará demostrar el segundo teorema de Parseval.

Usando la definición (2.4), tenemos que

$$\tilde{g}(-k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ikx} dx.$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) \tilde{g}(-k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) dk \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(x) e^{ikx} dx.$$

Supongamos que podemos intercambiar el orden de integración, por ejemplo, al suponer que las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \text{ y } \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ikx} dx$$

son absolutamente integrables. Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) \tilde{g}(-k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \right) dx.$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier dada por (2.5), concluimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) \tilde{g}(-k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx.$$

**Ejemplo 2.3.** Use el teorema de Parseval para evaluar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx.$$

**Solución:** Esta integral puede ser calculada usando el teorema del residuo. En nuestro caso, usaremos el primer teorema de Parseval, teniendo en cuenta el resultado de la transformada de Fourier del pulso cuadrado en el ejemplo 2.1.

Para  $a = 1$  en la ecuación (2.8), tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(k)}{\pi^2 k^2} dk = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(k)}{k^2} dk.$$

Por el primer teorema de Parseval,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \\ \Rightarrow \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(k)}{k^2} dk &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 dx = \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(k)}{k^2} dk = \pi.$$

## 2.2. Transformadas seno y coseno

Dependiendo de la paridad de las funciones a las cuales le aplicamos una transformada de Fourier, es posible utilizar una forma *abreviada* de transformada, de manera similar a lo que podemos hacer para una serie de Fourier.

Notemos que, dada una función real  $f(x)$  impar, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-ikx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^0 f(-x) e^{ikx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{ikx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) [e^{ikx} - e^{-ikx}] dx \\
 &= -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx \\
 &= -i \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx \right).
 \end{aligned}$$

**Definición 2.5.** Se define la **transformada seno de Fourier**,  $\tilde{f}_s(k) = \mathcal{F}_s(k)$  como

**Transformada seno de Fourier**

$$\tilde{f}_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx, \quad (2.13)$$

cuya transformada inversa es dada por

$$f(x) = \mathcal{F}_s^{-1}\{F(k)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(k) \sin(kx) dx. \quad (2.14)$$

Dada una función  $f(x)$  real e impar, su transformada de Fourier puede obtenerse como

$$\tilde{f}(k) = -i \tilde{f}_s(k).$$

De forma análoga, dada una función  $f(x)$  real y par, tenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-ikx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^0 f(-x) e^{ikx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{ikx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) [e^{ikx} + e^{-ikx}] dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx .
\end{aligned}$$

### Transformada coseno de Fourier

**Definición 2.6.** Se define la **transformada coseno de Fourier**,  $\tilde{f}_C(k) = F_C(k)$  como

$$\tilde{f}_C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx , \quad (2.15)$$

cuya transformada inversa es dada por

$$f(x) = \mathcal{F}_C^{-1}\{F(k)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_C(k) \cos(kx) dx . \quad (2.16)$$

Dada una función  $f(x)$  real y par, su transformada de Fourier puede obtenerse como

$$\tilde{f}(k) = \tilde{f}_C(k) .$$

Nuevamente, la elección del factor  $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$  es convencional, y otras elecciones pudieron ser hechas, mientras se satisfaga la integral de Fourier (2.6).

## 2.3. Delta de Dirac

Es común en física utilizar el concepto de *pulso con duración infinitamente corta*. Por ejemplo, un cuerpo en movimiento por un golpe repentino alcanza un momentum igual al impulso del golpe, matemáticamente,

$$mv = I = \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t) dt ,$$

donde  $F(t)$  es la fuerza y  $\tau$  es la duración de la acción de la fuerza. Al referirnos a un *golpe*, insinuamos que la duración es lo suficientemente pequeña como para que el

cambio en el momentum sea casi instantáneo. Sin embargo, para que esto sea posible, la fuerza debería haber sido infinita durante el golpe, y cero en otros lados.

Sin embargo, lo más probable es que la función se parezca a la figura X, donde  $h$  es muy grande y  $\tau$  muy pequeño, tal que el área debajo de la curva corresponde al impulso  $I$ . Para esto, necesitaríamos conocer la forma exacta de  $F(t)$ , lo que no siempre es posible. Para resolver este problema, aproximamos un pulso de esta forma por la ‘función’<sup>2</sup> *Delta de Dirac*, que será de gran utilidad en diferentes áreas de la Física.

**Definición 2.7.** Se define la **Delta de Dirac** centrada en  $x = a$  como la función

**Delta de Dirac**

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0, & x \neq a, \\ \infty, & x = a, \end{cases} \quad (2.17)$$

tal que la integral de  $\delta(x)$  está normalizada,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1, \quad (2.18)$$

y que para cualquier función  $f(x)$  continua, satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a). \quad (2.19)$$

### Propiedad 2.2. Propiedades de la Delta de Dirac.

1. Si  $\delta'(x)$  denota a la derivada de la delta de Dirac, y  $f'(x)$  representa la derivada de  $f(x)$ , entonces se satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x) dx = -f'(0). \quad (2.20)$$

Esta idea se puede generalizar a derivadas de orden superior, tal que, asumiendo que  $f$  es  $m$  veces diferenciable

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(m)}(x) f(x) dx = -f^{(m)}(0). \quad (2.21)$$

2. Dada la **función escalón de Heaviside**, definida como

$$\begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

<sup>2</sup>Existe toda una discusión respecto al hecho de que este elemento no es una función propiamente dicha. Esta será omitida durante el curso.

entonces la delta de Dirac puede entenderse como su derivada, es decir,

$$\delta(x) = \frac{dH}{dx} . \quad (2.23)$$

3. Dada una función continua  $\phi(x)$ , la delta de Dirac satisface

$$\phi(x + a)\delta(x) = \phi(a)\delta(x) , \quad (2.24)$$

y en particular,

$$x\delta(x) = 0 . \quad (2.25)$$

4. A partir de las reglas de cambio de variables, podemos obtener que

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} , \quad (2.26)$$

donde  $x_i$  son las raíces de la función  $g$ , es decir,  $g(x_i) = 0$ , y que además satisfacen  $g'(x_i) \neq 0$ , para todo  $x_i$ .

5. Como caso particular de la propiedad anterior, tenemos que

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) , \quad a \neq 0 . \quad (2.27)$$

Como consecuencia,

$$\delta(-x) = \delta(x) . \quad (2.28)$$

### 2.3.1. Representación integral

La delta de Dirac puede ser representada como

$$\delta(x - a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-a)} dk . \quad (2.29)$$

Podemos observar que esta definición es similar a la transformada de Fourier inversa de  $e^{-ika}$ . En efecto, utilizando la definición de la delta de Dirac, tenemos que

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ika} . \quad (2.30)$$

**Ejemplo 2.4.** Determine la transformada de Fourier de las funciones  $\sin(ax)$  y  $\cos(ax)$ .

Observamos que, para  $f(x) = \sin(\alpha x)$ , tendremos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{\sin(\alpha x)\}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\alpha x) e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i} \right) e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha-k)x} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\alpha+k)x} dx \right\} \\
 &= \frac{1}{2i} \left\{ \sqrt{2\pi} \delta(\alpha - k) - \sqrt{2\pi} \delta(\alpha + k) \right\},
 \end{aligned}$$

donde hemos usado la definición de la delta de Dirac (2.29). Luego,

$$\boxed{\mathcal{F}\{\sin(\alpha x)\}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} i [\delta(k + \alpha) - \delta(k - \alpha)].} \quad (2.31)$$

De forma análoga, para  $f(x) = \cos(\alpha x)$ , tendremos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{\cos(\alpha x)\}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha x) e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2} \right) e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha-k)x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\alpha+k)x} dx \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{2\pi} \delta(\alpha - k) + \sqrt{2\pi} \delta(\alpha + k) \right\},
 \end{aligned}$$

donde hemos usado la definición de la delta de Dirac (2.29). Luego,

$$\boxed{\mathcal{F}\{\cos(\alpha x)\}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(k + \alpha) + \delta(k - \alpha)].} \quad (2.32)$$

### 2.3.2. Delta de Dirac tridimensional

Por último, mencionaremos que es común en Física utilizar una delta de Dirac en tres (o más) dimensiones para describir distribuciones puntuales en el espacio, como lo puede ser una carga eléctrica puntual. Para ello, utilizamos una definición análoga al caso unidimensional, donde

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{a}) = 0 \quad \vec{x} \neq \vec{a}, \quad (2.33)$$

donde  $\vec{x} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  es el vector posición de nuestro sistema coordenado, y  $\vec{a} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$  es un vector cualquiera que localiza a nuestro punto en el espacio. Para

cualquier campo escalar, se cumplirá queda

$$\int_V \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{a}) f(\vec{x}) dV = \begin{cases} f(\vec{a}), & \text{si } \vec{a} \in V, \\ 0, & \text{si } \vec{a} \notin V. \end{cases} \quad (2.34)$$

En coordenadas cartesianas, esta corresponde únicamente al producto de tres deltas de Dirac unidimensionales, una por cada coordenada del sistema, tal que

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{a}) = \delta(x - a_x) \delta(y - a_y) \delta(z - a_z), \quad (2.35)$$

mientras que en un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales, cuyas coordenadas son  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , y factores de escala

$$h_i = \left\| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_i} \right\| = \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \xi_i} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.36)$$

la delta de Dirac será dada por

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \delta(\xi_1 - \xi_{10}) \delta(\xi_2 - \xi_{20}) \delta(\xi_3 - \xi_{30}). \quad (2.37)$$

**Demostración.** Proponemos un ansatz de la forma

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0) = A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \delta(\xi_1 - \xi_{10}) \delta(\xi_2 - \xi_{20}) \delta(\xi_3 - \xi_{30}),$$

donde  $A(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  es una función que depende de las coordenadas.

Este ansatz deberá satisfacer la condición de normalización de la delta de Dirac,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0) dV &= \int A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \delta(\xi_1 - \xi_{10}) \delta(\xi_2 - \xi_{20}) \delta(\xi_3 - \xi_{30}) h_1 h_2 h_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &= A(\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30}) h_1(\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30}) h_2(\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30}) h_3(\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30}) \\ &= 1, \end{aligned}$$

con lo que podemos proponer que  $A(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (h_1 h_2 h_3)^{-1}$ , con lo que la delta de Dirac en un sistema curvilíneo ortogonal arbitrario está dada por

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \delta(\xi_1 - \xi_{10}) \delta(\xi_2 - \xi_{20}) \delta(\xi_3 - \xi_{30}).$$

En particular, para **coordenadas esféricas**, la delta de Dirac es dada por

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0), \quad (2.38)$$



mientras que en **coordenadas cilíndricas**, será dada por

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(\phi - \phi_0) \delta(z - z_0). \quad (2.39)$$

Mención aparte merece el caso en que el problema tiene simetría azimutal o axial. De acuerdo con la propiedad de normalización,  $\int_V \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0) = 1$ . Si omitimos la existencia de la delta en la coordenada azimutal  $\phi$ , esta integral se cumplirá únicamente si definimos la delta como

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \right), \quad = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0) \delta(z - z_0) \right),$$

ya que la integral de normalización incluirá un término de la forma

$$\int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\phi = 2\pi r^2 \sin \theta, \\ \int_0^{2\pi} \rho d\phi = 2\pi \rho.$$

Si en el caso esférico tenemos simetría axial, entonces

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{2r^2} \delta(r - r_0) \delta(\phi - \phi_0),$$

ya que

$$\int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta = 2r^2.$$

Por último, si tenemos tanto simetría axial como azimutal, entonces

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \delta(r - r_0),$$

ya que

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta = 4\pi r^2.$$

**Ejemplo 2.5.** Considere un anillo de carga  $Q$  distribuida uniformemente y radio  $a$  ubicado en el plano  $xy$  con su centro en el origen. Encuentre la densidad volumétrica de carga en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas.

Recordamos que una densidad de carga, integrada sobre la región de interés, debe corresponderse con la carga total del sistema, es decir,

$$\int_V \rho(\vec{x}) dV = Q.$$

Además, para una carga puntual  $Q$  situada en el punto  $\vec{x}_0$ , podemos describir su densidad como

$$\rho(\vec{x}) = Q\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0).$$

Usaremos un enfoque similar a aquel de la carga puntual, pero considerando que el anillo es un objeto en dos dimensiones. Dado que la carga se distribuye uniformemente sobre el anillo, podemos suponer que el sistema tiene simetría azimutal. Además, como se ubica en el plano  $xy$ , esto quiere decir que  $z_0 = 0$ , y que  $\theta_0 = \pi/2$ . De esta forma, la densidad de carga del sistema será dada por

$$\begin{aligned}\rho(\vec{x}) &= Q \frac{1}{2\pi\rho} \delta(\rho - a)\delta(z), \\ &= Q \frac{1}{2\pi r^2 \sin\theta} \delta(r - a)\delta(\theta - \pi/2).\end{aligned}$$

Es directo comprobar que, en ambos casos,

$$\int_V \rho(\vec{x}) = Q.$$

## 2.4. Convolución

Imaginemos algún tipo de *estímulo* físico, por ejemplo, una fuerza en el tiempo,  $f(t)$ . Consideremos que la respuesta a este estímulo puede ser modelada mediante la función  $g(x, t) = g(x - t)$ , como puede ser, por ejemplo, el movimiento de una partícula en la posición  $x$  frente a esta fuerza. Si el sistema es *lineal*, entonces la respuesta total en el punto  $x$  al estímulo global  $\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$  será la *suma* de todas las contribuciones infinitesimales  $[dt f(t)]g(x, t)$ . Matemáticamente, a estas contribuciones las llamamos **convolución**.

### Convolución

**Definición 2.8.** Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  dos funciones reales, se define la operación **convolución** de dos funciones  $f$  y  $g$  como

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y) dy. \quad (2.40)$$

Si nuestro estímulo es el potencial electrostático debido a una densidad de carga  $\rho(\vec{x})$ , nuestra respuesta total, que corresponde al potencial electrostático  $\phi(\vec{x})$ , se puede escribir como

$$\phi(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' = \rho * \phi(\vec{x}), \quad (2.41)$$

donde  $f(\vec{x}) = 1/|\vec{x}|$ .



Figura 2.6: Distribución de carga de densidad  $\rho(\vec{x})$ .

Matemáticamente, podemos entender la convolución  $f * g$  como *el grado de traslape* entre dos pulsos,  $f(y)$  y  $g(-y)$ , cuando uno  $g(-y)$  se encuentra desplazado en  $x$  unidades. Esta idea se puede observar en la figura 2.7.

### Propiedad 2.3. Propiedades de la convolución.

Sean  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(x)$  funciones reales. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

#### 1. Conmutatividad:

$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x).$$

#### 2. Asociatividad:

$$[f(x) * g(x)] * h(x) = f(x) * [g(x) * h(x)].$$

#### 3. Distributividad:

$$f(x) * [g(x) + h(x)] = f(x) * g(x) + f(x) * h(x).$$



Figura 2.7: Idea matemática de la convolución. En (a), se expresa cada función en términos de la variable de integración  $y$ . En (b), se refleja la gráfica de  $g(y)$  con respecto al eje vertical, es decir,  $g(y) \rightarrow g(-y)$ . En (c), se traslada la gráfica de  $g(-y)$ ,  $x$  unidades. Luego, se traslapan las gráficas de  $f(y)$  y  $g(x - y)$  de tal forma que el área sombreada corresponde al valor de  $f * g$  para ese valor de  $x$ .

**Teorema 2.4** (de convolución de Fourier). Sean  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(x)$  funciones reales y sean  $\tilde{f}(k)$ ,  $\tilde{g}(k)$  y  $\tilde{h}(k)$  sus correspondientes transformadas de Fourier.

- Si  $\tilde{h}(k) = \tilde{f}(k)\tilde{g}(k)$ , entonces

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y) dy.$$

- Si  $h(x) = f(x)g(x)$ , entonces

$$\tilde{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\tilde{f} * \tilde{g})(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y)\tilde{g}(k - y) dy. \quad (2.42)$$

#### Demostración.

- Supongamos que  $\tilde{h}(k) = \tilde{f}(k)\tilde{g}(k)$ . Aplicando la transformada de Fourier inversa

dada por (2.5), tenemos que

$$\begin{aligned} h(x) &= \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{h}(k)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(k)\tilde{g}(k)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\tilde{g}(k)e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iky} dy \right) \tilde{g}(k)e^{ikx} dk. \end{aligned}$$

Si el intercambio de orden de integración es posible, entonces

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k)e^{ikx}e^{-iky} dk \right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k)e^{ik(x-y)} dk \right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f * g)(x). \end{aligned}$$

Como la convolución es conmutativa:

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}(g * f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy.$$

- Supongamos que  $h(x) = f(x)g(x)$ . Aplicando la transformada de Fourier dada por (2.4), tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{h}(k) &= \mathcal{F}\{f(x)g(x)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y)e^{iyx} dy \right) g(x)e^{-ikx} dx. \end{aligned}$$

Si el intercambio de orden de integración es posible, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{h}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{iyx}e^{-ikx} dx \right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i(k-y)x} dx \right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y)\tilde{g}(k-y) dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\tilde{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\tilde{f} * \tilde{g})(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y)\tilde{g}(k-y) dy.$$

**Ejemplo 2.6.** Sabiendo que [22]

$$\mathcal{F}\left\{\frac{2c}{x^2 + c^2}\right\} = e^{-c|k|}, \quad \text{para } c > 0.$$

Podemos usar el teorema de convolución para encontrar la transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}. \quad (2.43)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x)\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{8} \frac{2}{x^2 + 1} \frac{4}{x^2 + 4}\right\} \\ &= \frac{1}{8} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} e^{-2|k-y|} dy \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( \int_{-\infty}^0 e^y e^{-2|k-y|} dy + \int_0^{\infty} e^{-y} e^{-2|k-y|} dy \right). \end{aligned}$$

Si  $k > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x)\} &= \frac{1}{8} \left( \int_{-\infty}^0 e^y e^{-2(k-y)} dy + \int_0^k e^{-y} e^{-2(k-y)} dy + \int_k^{\infty} e^{-y} e^{2(k-y)} dy \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( \int_{-\infty}^0 e^{-2k+3y} dy + \int_0^k e^{-2k+y} dy + \int_k^{+\infty} e^{2k-3y} dy \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( \frac{1}{3} e^{-2k} + e^{-k} - e^{-2k} + \frac{1}{3} e^{-k} \right) \\ &= \frac{1}{6} e^{-k} - \frac{1}{12} e^{-2k}. \end{aligned}$$

Si  $k < 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x)\} &= \frac{1}{8} \left( \int_{-\infty}^k e^y e^{-2(k-y)} dy + \int_k^0 e^y e^{2(k-y)} dy + \int_0^{\infty} e^{-y} e^{2(k-y)} dy \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( \int_{-\infty}^k e^{-2k+3y} dy + \int_k^0 e^{2k-y} dy + \int_0^{\infty} e^{2k-3y} dy \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( \frac{1}{3} e^k - e^{2k} + e^k + \frac{1}{3} e^{2k} \right) \\ &= \frac{1}{6} e^k - \frac{1}{12} e^{2k}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para  $k$  positivo como negativo,

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{6}e^{-|k|} - \frac{1}{12}e^{-2|k|}$$

Una mejor forma de encontrar la transformada de Fourier de (2.43) es, en primer lugar, descomponer la función en fracciones parciales,

$$f(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{3} \frac{1}{x^2 + 4},$$

para luego hacer usar de la linealidad de la transformada.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(x)\} &= \frac{1}{6} \mathcal{F}\left\{\frac{2}{x^2 + 1}\right\} - \frac{1}{12} \mathcal{F}\left\{\frac{4}{x^2 + 4}\right\} \\ &= \frac{1}{6}e^{-|k|} - \frac{1}{12}e^{-2|k|}.\end{aligned}$$





## Ecuaciones Diferenciales en Física

En física, es muy común que diversas situaciones sean modeladas no por ecuaciones que únicamente contengan potencias (enteras o semienteras) de alguna variable física, sino que incluyan derivadas de estas.

En sus cursos de Mecánica y de Ecuaciones Diferenciales, probablemente se familiarizaron con los casos del Oscilador Armónico y del Oscilador amortiguado, que son descritos por las ecuaciones (3.1) y (3.2), respectivamente.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.2)$$

Ambas ecuaciones consisten en ecuaciones diferenciales *ordinarias*, debido a que la función a derivar,  $x(t)$ , depende de una única variable, por lo cual todas las derivadas en ella son totales.

Sin embargo, muchas otras situaciones físicas no pueden ser descritas únicamente en términos de funciones de una sola variable, incluso cuando dicha función solo dependa de la posición. Por ejemplo, podríamos querer describir el potencial eléctrico de una distribución esférica de cargas, cuya densidad dependa de nuestra posición tanto respecto al centro de la esfera (variable  $r$ ), así como también respecto al ángulo que forma con respecto de su polo norte (variable  $\theta$ ), de modo que este potencial será una función tanto de  $r$  como de  $\theta$ . Este tipo de sistemas serán descritos por ecuaciones diferenciales *parciales* (EDPs).

Hasta el día de hoy, el desarrollo de métodos para resolver EDPs es un área de investigación activa en matemáticas, por lo que en este curso nos limitaremos a algunos de los métodos más tradicionales y que son la base para la descripción de la física de los siglos XVIII y XIX, como lo son la mecánica hamiltoniana, la teoría clásica de campos o la electrodinámica clásica.

### 3.1. Algunas ecuaciones básicas

A continuación listamos algunos ejemplos de EDPs *lineales* en la función incógnita  $\psi$ , y de, a lo más, *segundo orden*. Algunos puntos que mencionar antes de entrar en ellas, es que siempre que veamos una derivada respecto al tiempo, esto quiere decir que la función incógnita *tendrá una evolución temporal*.

También cabe mencionar que no todos los sistemas físicos pueden ser descritos por ecuaciones “bien portadas” como las que listaremos a continuación, ya que por ejemplo, en fenómenos que involucren turbulencias, como la física de plasmas o la física atmosférica, las ecuaciones son no lineales, lo que complica la posibilidad de resolverlas de forma analítica, y se encuentran fuera del alcance de este curso.

#### Ecuación de Laplace

Esta corresponde a la expresión

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad (3.3)$$

la que surge en el estudio de diferentes sistemas físicos, como por ejemplo:

- el **potencial electrostático** en una región sin cargas.
- un **fluido irrotacional incompresible** en un movimiento estacionario, cuyo campo de velocidades es descrito como  $\vec{v} = -\nabla\psi$ .
- el **potencial gravitatorio**.
- una **distribución de temperatura estacionaria**, donde en este caso  $\psi = T(x, t)$  corresponde al campo de temperaturas de un material.

#### Ecuación de Poisson

Esta corresponde, por llamarlo de una manera, a la generalización de la ecuación de Laplace para cualquier sistema con una función *fente*  $f$  conocida. Es dada por la expresión

$$\nabla^2 \psi = f(\vec{x}). \quad (3.4)$$

Esta corresponde a una ecuación *inhomogénea*, cuyas soluciones generales pueden escribirse como  $\psi = \psi_h + \psi_p$ , donde el primer término corresponde a la solución de la *ecuación homogénea* donde  $f(x) = 0$ , que en este caso corresponde a la ecuación de Laplace, y el segundo término es una *solución particular* de la ecuación de Poisson.

Esta puede surgir en situaciones similares a la ecuación de Laplace, pero en las cuales existen *fuentes* para los respectivos campos. Por ejemplo, para el caso electrostático, puede existir una fuente con densidad de carga  $\rho(\vec{x})$ , de modo que la ecuación que

describe el potencial eléctrico en dicha región será

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}. \quad (3.5)$$

## Ecuación de Helmholtz

Es una ecuación que surge al aplicar el método de separación de variables a una ecuación de onda (siendo ambos términos explicados más abajo), de modo que es una especie de *ecuación de onda independiente del tiempo*, o en otros contextos, una *ecuación de difusión independiente del tiempo*. Se escribe como

$$\nabla^2 \psi \pm k^2 \psi = 0. \quad (3.6)$$

Esta ecuación aparece en el estudio de diversas áreas, como la radiación electromagnética, la sismología, la acústica o el estudio de membranas (ondas elásticas en medios continuos).

## Ecuación de difusión de calor dependiente del tiempo

Su nombre es autodescriptivo. Las series de Fourier surgen como un método para resolver esta ecuación en el siglo XIX.

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad (3.7)$$

donde  $\alpha$  corresponde al coeficiente de difusión térmica.

## Ecuación de onda dependiente del tiempo

Describe la propagación de una onda  $\psi$  tanto espacial como temporalmente. Suele escribirse como

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (3.8)$$

o bien, definiendo el operador *d'Alembertiano* (comúnmente pronunciado como *box*) como  $\square \equiv \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ ,

$$\square \psi = 0. \quad (3.9)$$

## Ecuación de Klein-Gordon

Corresponde a una generalización de la ecuación de onda para trabajar con sistemas cuánticos relativistas, como es el trabajo de la física de partículas. Esta incorpora las constantes  $\hbar$  y  $c$ , que corresponden respectivamente a la constante de Planck reducida, y que es una de las constantes que nos indicará que estamos trabajando con

un sistema cuántico; y a la velocidad de la luz, que nos indica que trabajamos con un sistema relativista. Es dada por

$$\square \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0. \quad (3.10)$$

### Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

Esta corresponde al límite no relativista de la ecuación de Klein-Gordon (es decir, cuando  $c \sim \infty$ ) y es la que describe la evolución de un sistema en Mecánica Cuántica. Es dada por

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right) \psi(x, t) = \hat{H} \psi(x, t). \quad (3.11)$$

## 3.2. Condiciones de borde

Para una EDP dada, las soluciones dependerán del dominio  $\Omega$  en que queramos trabajar. Por ejemplo, un potencial electrostático en el vacío debe cumplir la ecuación de Laplace, pero será distinto en una esfera de radio  $r$  que en un cilindro de largo  $\ell$  y radio  $\rho$ .

Por ello, debemos entregar información adicional a nuestro problema para poder resolver el problema. Esta información suele denominarse **condiciones de borde, de frontera o de contorno**, ya que tradicionalmente dan información del comportamiento de la función en los límites o bordes  $\partial\Omega$  del sistema (véase figura 3.1).

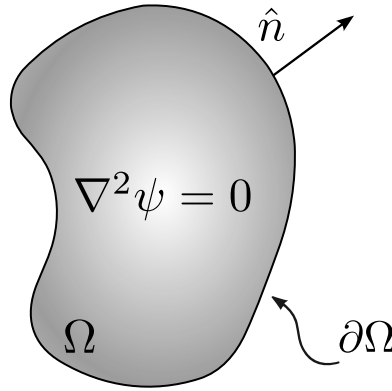


Figura 3.1: Dominio  $\Omega$  de la ecuación de Laplace con borde  $\partial\Omega$  y vector normal  $\hat{n}$ .

#### Condiciones de Borde

**Definición 3.1.** En una ecuación diferencial, una **condición de borde, o de contorno** corresponde a información del comportamiento de la función variable  $\psi$  (y sus derivadas) en algún punto dado de su dominio, las que son requeridas para resolver completamente la ecuación diferencial.

Al trabajar con EDP de segundo orden, estas pueden clasificadas en 3 tipos.

- Tenemos condiciones de tipo **Dirichlet** cuando nos dan información del comportamiento de la función  $\psi$  en la frontera  $\partial\Omega$  de la región en que trabajamos.
- Tenemos condiciones de tipo **Neumann** cuando tenemos información de la derivada normal de la función, es decir  $\partial\psi/\partial n := \hat{n} \cdot \nabla\psi$ , en la frontera  $\partial\Omega$ .
- Tenemos condiciones de tipo **Cauchy** cuando tenemos a la vez condiciones de tipo Dirichlet y de tipo Neumann.

¿Cómo sabemos qué tipo de condición de borde es apropiada para nuestro problema? Es una discusión un tanto complicada que considero que escapa a los contenidos del curso, pero que puede revisar en el capítulo 6 de [23] y el capítulo 20, sección 3 de [28]. La idea, sin embargo, es que esto dependerá tanto del tipo de EDP como de la definición del dominio, es decir, si este es acotado por una superficie (o curva, en el caso de dos variables independientes) abierta o cerrada.

### 3.3. Encontrar soluciones para ecuaciones diferenciales parciales

Como se mencionó al inicio de este capítulo, las EDPs siguen siendo un área de investigación activa en matemáticas, por lo que no todas ellas tendrán soluciones exactas, o analíticas. Un ejemplo de esto son las *ecuaciones de Navier-Stokes*, que describen el comportamiento de un fluido viscoso, y surgen en el estudio de sistemas como la atmósfera terrestre o las corrientes oceánicas. Estas ecuaciones son particularmente conocidas por ser uno de los *problemas del milenio*, de modo que existe una recompensa monetaria para quien pueda demostrar la existencia (o inexistencia) de soluciones analíticas para cualquier conjunto de condiciones de borde.

Sin embargo, las ecuaciones que listamos en secciones previas sí pueden ser resueltas de forma analítica mediante uno de tres métodos que estudiaremos en el curso. Dos de ellos, el **método de separación de variables** y el **método de las funciones de Green** los veremos en capítulos siguientes del curso. El tercero corresponde al **método de las transformadas integrales**, donde diferentes transformadas son útiles para diferentes condiciones de contorno. En este curso, analizaremos únicamente a la transformada de Fourier.

#### 3.3.1. Método de la transformada de Fourier

Como se discutió anteriormente, la transformada de Fourier puede aplicarse sobre una derivada  $n$ -ésima de una función sobre, por ejemplo, la variable temporal, de modo que se cumple la propiedad

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = (i\omega)^n \mathcal{F}\{f(t)\}. \quad (3.12)$$

Gracias a ella, podemos (potencialmente) reducir una ecuación diferencial parcial en dos variables, a una ecuación diferencial ordinaria en una variable en el espacio de Fourier, que será en principio más fácil de resolver. Luego, aplicando la transformada inversa, podemos recuperar la solución a la EDP original.

Es posible que esta idea les sea familiar de su curso de Ecuaciones Diferenciales, al menos a quienes cursaron Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, donde se plantea un método similar para EDOs mediante la transformada de Laplace, donde el objetivo es reducir nuestra EDO a una ecuación algebraica. La transformada de Fourier también puede ser utilizada en EDOs con el mismo objetivo.

**Ejemplo 3.1.** Considere la EDO para  $x(t)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x(t) = e^{-\alpha|t|}, \quad -\infty < t < \infty, \quad (3.13)$$

donde  $\alpha > 0$ , y sujeta a las condiciones de borde  $x(\pm\infty) = 0$ . Utilice la transformada de Fourier para resolver esta ecuación.

**Solución.** Aplicamos la transformada de Fourier a la ecuación, de modo que

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^2x}{dt^2} - x(t) \right\}(\omega) = \mathcal{F} \{ e^{-\alpha|t|} \}(\omega) \quad (3.14)$$

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^2x}{dt^2} \right\}(\omega) - \mathcal{F} \{ x(t) \}(\omega) = \mathcal{F} \{ e^{-\alpha|t|} \}(\omega), \quad (3.15)$$

donde tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{ e^{-\alpha|t|} \}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-i\omega t} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-i\omega)t} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{(-\alpha-i\omega)t} dt \\ &= \frac{e^{t(\alpha-i\omega)}}{\alpha-i\omega} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{t(-\alpha-i\omega)}}{-\alpha-i\omega} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\alpha-i\omega} + \frac{1}{\alpha+i\omega} \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \frac{d^2x}{dt^2} \right\}(\omega) &= (i\omega)^2 \mathcal{F} \{ x \}(\omega) \\ &= -\omega^2 \mathcal{F} \{ x \}(\omega), \end{aligned} \quad (3.17)$$

de modo que la ecuación original, en el espacio de Fourier, se convierte en

$$-\omega^2 \hat{x}(\omega) - \hat{x}(\omega) = \frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}, \quad (3.18)$$

que es una ecuación algebraica para  $\hat{x}(\omega)$ . Despejando, obtenemos

$$\hat{x}(\omega) = \frac{-2\alpha}{(\omega^2 + \alpha^2)(\omega^2 + 1)}. \quad (3.19)$$

Dado que esta ecuación es algebraica, es directo comprobar que satisface la condición de borde, y no debemos determinar ningún coeficiente. Ahora, podemos aplicar la transformada inversa a la solución (3.19), tal que

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{\hat{x}(\omega)\}(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2\alpha}{(\omega^2 + \alpha^2)(\omega^2 + 1)} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{(\alpha^2 - 1)} \left( \frac{1}{\omega^2 + \alpha^2} - \frac{1}{\omega^2 + 1} \right) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\alpha^2 - 1} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \frac{2}{\omega^2 + 1} e^{i\omega t} d\omega \right) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha^2 - 1} (e^{-\alpha|t|} - \alpha e^{-|t|}), \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde el factor  $\sqrt{2\pi}$  surge de la convención utilizada para la transformada de Fourier.

¿Para qué tipo de problemas puede ser útil trabajar con transformada de Fourier? Principalmente para resolver ecuaciones diferenciales en el dominio  $(-\infty, \infty)$  con condiciones de borde homogéneas en el infinito. Particularmente, se recomienda utilizarla en ecuaciones diferenciales *lineales* con *coeficientes constantes*, pues en ambos casos podemos hacer uso de la propiedad de la linealidad de la transformada de Fourier.

¿En qué momento esto es útil para resolver EDPs? Supongamos que tenemos una función de dos variables, por ejemplo, de la posición  $x$  y del tiempo  $t$ . Al calcular la transformada de Fourier, lo hacemos **respecto de una sola variable**, ya sea de la posición, gracias a la cual pasamos al dominio del número de onda, o respecto del tiempo, caso en el que pasamos al dominio de las frecuencias. Por ello, si tenemos una ecuación diferencial que involucra tanto derivadas respecto a la posición como derivadas respecto al tiempo, podemos aplicar la transformada de Fourier respecto de una de las variables, tras lo cual la segunda actuará como una “constante” en el sistema.

### Proposición 3.1. Método de la transformada de Fourier.

Dada una EDP que involucre tanto componentes espaciales como temporales, es posible aplicar la transformada de Fourier *sobre un tipo de componentes*, ya sea espaciales o temporales, con el objetivo de convertir nuestra ecuación en una EDO de menor orden. Para ello, seguimos el siguiente procedimiento:

**Método de la transformada de Fourier**

1. Evaluar qué transformada es más conveniente en nuestro problema. Normalmente utilizaremos aquella que nos permita utilizar nuestras condiciones de borde de la manera más sencilla.
2. Aplicar la transformada sobre las variables escogidas, de modo que nuestra EDP se convierta en una EDO, idealmente de menor orden que nuestro problema original.
3. Resolvemos la EDO en el espacio de Fourier.
4. De ser necesario, calculamos la transformada de Fourier de nuestra condición de borde, y la aplicamos a la solución obtenida en el espacio de Fourier.
5. De ser posible, calculamos la transformada de Fourier inversa, recuperando la solución al problema original.

El proceso descrito anteriormente puede sintetizarse en la figura 3.2.

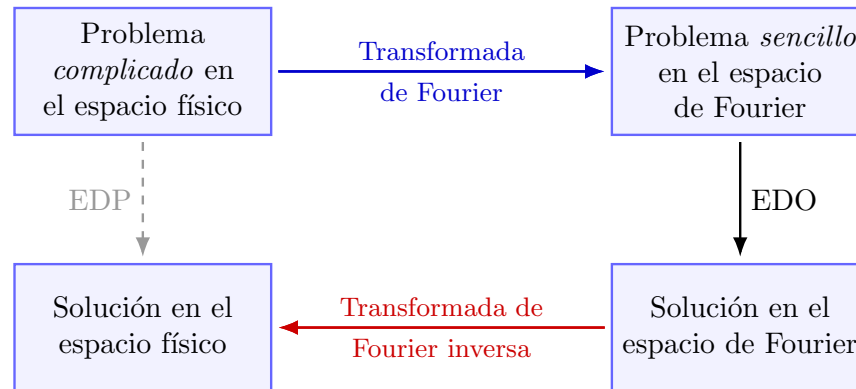


Figura 3.2: Diagrama de uso del método de la transformada de Fourier.

Para hacer más clara esta idea, consideremos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.2.** Sea la ecuación de difusión del calor dada por

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (3.21)$$

con condiciones de contorno dadas por  $u(x, 0) = \sin(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Mediante el método de la transformada de Fourier, encuentre la solución al problema.

**Solución.** Aplicamos la transformada de Fourier respecto a la coordenada  $x$ , de mo-



do que la ecuación (3.21) se transformará en

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} (k, t) &= \mathcal{F}\{0\}(k, t) \\ \frac{1}{\alpha} \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} (k, t) - \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} (k, t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Al hacer uso de la propiedad de la derivada *respecto de la variable de la transformada*, tenemos que

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} (k, t) = (ik)^2 \mathcal{F}\{u\}(k, t) = -k^2 \hat{u}(k, t). \quad (3.23)$$

Dado que la transformada la hemos calculado *respecto de la posición*, la transformada y la derivada parcial respecto del tiempo conmutan, es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx \right\} \\ &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(k, t), \end{aligned} \quad (3.24)$$

de modo que la ecuación (3.22) puede reescribirse como

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(k, t) + k^2 \hat{u}(k, t) = 0, \quad (3.25)$$

la que puede resolverse como una EDO en la variable  $t$ , cuya solución particular contiene una constante que, potencialmente, es una función de la variable  $k$ ,

$$\hat{u}(k, t) = A(k) e^{-\alpha k^2 t}, \quad (3.26)$$

donde para  $t = 0$ ,  $\hat{u}(k, 0) = A(k)$ .

Aquí, podemos resolver el problema calculando la transformada de Fourier de la condición inicial, que en este caso será

$$\mathcal{F}\{u(x, 0)\} = \mathcal{F}\{\sin(x)\} = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(k+1) - \delta(k-1)] = A(k). \quad (3.27)$$

Así, la solución a nuestro problema original corresponderá a la transformada de Fourier inversa de la solución (3.26), es decir,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i \sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta(k+1) - \delta(k-1)] e^{-\alpha k^2 t} e^{ikx} dk \\ &= -\frac{1}{2i} (e^{-\alpha t} e^{-ix} - e^{-\alpha t} e^{ix}) \\ &= e^{-\alpha t} \sin(x). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Un punto de discusión relevante sobre el último ejemplo tiene que ver con el hecho de que no siempre podremos calcular la transformada de Fourier inversa de una forma simple, pues nuestra condición inicial puede no ser tan sencilla. En ese caso, podemos hacer uso de la operación de convolución entre dos funciones, obteniendo una *solución general para la ecuación de difusión del calor*.

**Ejemplo 3.3. Solución general a la ecuación de difusión del calor.** Sea la ecuación de difusión del calor dada por

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (3.29)$$

con condiciones de contorno general dada por  $u(x, 0) = u_0$ . Mediante el método de la transformada de Fourier, encuentre la solución general al problema.

**Solución.** Continuamos desde la ecuación (3.26). A partir de esta, tendremos que la transformada inversa tomará la forma

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \hat{u}_0 e^{-\alpha k^2 t} \right\}, \quad (3.30)$$

lo que corresponde al producto de dos transformadas de Fourier, la de  $\hat{u}_0$  y la de una *gaussiana*, las que pueden ser calculadas gracias a la ecuación (2.9), con  $n = 1$  y  $\beta = \frac{1}{4\alpha t}$ . De este modo, la transformada de Fourier de la gaussiana es

$$\mathcal{F} \left\{ e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}} \right\} = \sqrt{2\alpha t} e^{-\alpha k^2 t}, \quad (3.31)$$

mientras que la transformada inversa toma la forma

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-\alpha k^2 t} \right\} = \frac{e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}}{\sqrt{2\alpha t}}. \quad (3.32)$$

Utilizando el teorema de convolución (2.40), la solución general puede ser obtenida como

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(v, 0) \frac{e^{-\frac{(x-v)^2}{4\alpha t}}}{\sqrt{2\alpha t}} dv \quad (3.33)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} u(v, 0) e^{-\frac{(x-v)^2}{4\alpha t}} dv \quad (3.34)$$

$$= u(x, 0) * \frac{1}{\sqrt{2\alpha t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}}. \quad (3.35)$$

Queda como ejercicio comprobar que para la condición de borde  $u(x, 0) = \sin(x)$ , la solución obtenida por este camino es equivalente a (3.28).

## El Método de Separación de Variables

Ya observamos que podemos hacer uso del método de la transformada de Fourier para reducir una ecuación diferencial en dos variables diferentes a una EDO en una sola variable. Sin embargo, no siempre será cómodo calcular la transformada de Fourier de una función, por lo que sería agradable tener una forma más general de hacer funcionar esta idea.

Para ello, hacemos uso del **método de separación de variables**, gracias al cual podemos reducir una EDP lineal de  $n$  variables en un conjunto de  $n$  EDOs para  $n$  funciones auxiliares, cada una asociada a una variable independiente de la EDP *y que no depende de las otras variables independientes*. Antes de ello, introduciremos la siguiente definición.

**Definición 4.1.** Una función de  $n$  variables  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se dice **separable** si puede escribirse como producto de dos o más funciones diferentes, donde cada una de ellas depende de variables distintas, es decir, **Función separable**

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_k)g(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n), \quad (4.1)$$

y se dice **completamente separable** cuando puede escribirse como el producto de  $n$  funciones de una sola variable,

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = X_1(x_1)X_2(x_2) \dots X_n(x_n). \quad (4.2)$$

### Proposición 4.1. Método de Separación de Variables

**Método de Separación de Variables**

Dada una EDP lineal de  $n$  variables, podemos intentar resolverla mediante el método de separación de variables siguiendo el siguiente algoritmo:

1. Identificamos las variables independientes  $x_i$  de nuestra ecuación.
2. Proponemos una solución (o *ansatz*) completamente separable a nuestra ecuación, correspondiente al producto de  $n$  funciones auxiliares, donde cada fun-

- ción depende de solo una variable  $x_i$ .
3. Reemplazamos la solución propuesta en el paso anterior en nuestra ecuación diferencial.
  4. Dividimos la ecuación diferencial por la solución separable.
  5. Reordenamos la ecuación, de modo que a un lado de la igualdad quede una ecuación que depende únicamente de una de las variables.
  6. Dado que ambos lados de la igualdad obtenida en el paso anterior depende de variables diferentes, *separamos las variables*. Con esto nos referimos al hecho que la igualdad será válida únicamente si ambos lados son iguales a una *constante de separación*  $\lambda_i$ , por lo que igualamos ambas ecuaciones a esta constante.
  7. Hemos reducido nuestra EDP original a un sistema formado por una EDO en la variable  $x_i$ , y una EDP de  $n - 1$  variables.
  8. Repetimos el paso 6, hasta haber introducido  $n - 1$  constantes de separación.
  9. Nuestra EDP se ha convertido en un sistema de  $n$  EDOs, las que en principio podemos resolver, hallando las  $n$  funciones auxiliares de nuestro ansatz.
  10. Imponemos las restricciones físicas que correspondan a nuestro problema, como puede ser el no incluir soluciones con parte imaginaria. De ser posible, imponemos también las condiciones de borde sobre las EDO, siempre y cuando ellas dependan de una sola variable.
  11. Hallamos una solución particular a nuestra EDP, correspondiente al producto de las  $n$  funciones auxiliares.
  12. La solución general corresponderá a la combinación lineal de todas las posibles soluciones particulares, es decir, a la suma sobre las  $n - 1$  constantes de separación.
  13. Imponemos las condiciones de borde de nuestro problema.

Una duda totalmente razonable es por qué consideramos soluciones separables. La verdad no hay una respuesta directa a esto, más allá de “*esperemos que funcione*”. Si no fuera el caso, y nuestro sistema comienza a complicarse, puede que sea una mejor idea utilizar algún método alternativo. Sin embargo, cabe mencionar que si los operadores diferenciales (derivadas  $n$ -ésimas) presentes en nuestra ecuación son aditivos, es decir, no tenemos combinaciones de las variables, una solución de este estilo suele funcionar.

Es posible que el algoritmo descrito anteriormente no sea tan claro de entender en primera instancia. Por ello, como ejemplo bastante ilustrativo, durante el capítulo resolveremos la ecuación de Helmholtz en diferentes sistemas coordenados, dando origen a diferentes *funciones especiales*, que serán discutidas en mayor profundidad en los ca-

pítulos siguientes.

## 4.1. Resolviendo la ecuación de Helmholtz

Recordemos que la ecuación de Helmholtz es dada por la expresión

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad (4.3)$$

donde  $k$  es una constante asociada al sistema. Desarrollaremos esta ecuación en los tres sistemas de coordenadas más comunes en física.

### 4.1.1. Coordenadas cartesianas

En un sistema cartesiano, el operador laplaciano se define simplemente como

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4.4)$$

De esta forma, dado que nuestra ecuación posee tres variables independientes, podremos reducirla a un sistema de 3 EDOs en las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Antes de realizar este procedimiento, plantearemos una solución de la forma

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (4.5)$$

Evaluando la expresión (4.5) en la ecuación (4.3), podemos escribirla como

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 XYZ = 0, \quad (4.6)$$

donde ahora utilizamos derivadas totales en lugar de parciales, puesto que cada una de las funciones depende únicamente de una variable.

Dividimos ahora por la solución  $XYZ$ , donde hemos asumido que  $\psi(x, y, z) \neq 0$ , de modo que, luego de reordenar los términos, la ecuación resulta en

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2 - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}. \quad (4.7)$$

Hemos llegado al paso en donde se aprecia esta *separación de variables*. Notemos que el lado izquierdo de la ecuación (4.7) contiene únicamente términos asociados a la variable  $x$ , mientras que el lado derecho aún tiene dependencia en  $y$  y en  $z$ . La única posibilidad de que ambos lados sean iguales, dado que dependen de variables distintas, es que ambos son a su vez iguales a una *constante de separación*, que en este caso

asumiremos real y llamaremos  $\lambda_1$ ,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda_1, \quad (4.8)$$

$$-k^2 - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \lambda_1. \quad (4.9)$$

Notemos que, reordenando términos en la ecuación (4.9), podemos nuevamente separar las variables mediante una constante  $\lambda_2$ , de modo que hemos *dividido la EDP original, dependiente de tres variables, en un sistema de tres EDOs, introduciendo dos constantes de separación*,

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda_1 X = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda_2 Y = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + (k^2 + \lambda_1 + \lambda_2)Z = 0. \quad (4.12)$$

Cada una de estas EDOs son resolubles mediante los métodos vistos en su primer curso de Ecuaciones Diferenciales, y las soluciones dependerán del valor y del signo de las constantes de separación. Analicemos las posibles soluciones de la ecuación (4.10):

$$X_{\lambda_1}(x) = \begin{cases} c_1 \sinh(\sqrt{\lambda_1}x) + c_2 \cosh(-\sqrt{\lambda_1}x), & \text{si } \lambda_1 > 0, \\ c_1 + c_2 x, & \text{si } \lambda_1 = 0, \\ c_1 \cos(\sqrt{-\lambda_1}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda_1}x), & \text{si } \lambda_1 < 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Aquí es importante no olvidar que tenemos una motivación física para realizar estos cálculos, lo que nos ayudará a determinar el signo de la constante de separación. Para la mayoría de los problemas físicos, la solución para  $X(x)$  que tiene sentido es aquella en que  $\lambda_1$  es negativo, de modo que la solución es una oscilación en la coordenada  $x$ . Así mismo, podemos hacer un análisis análogo para cada una de las otras ecuaciones, obteniendo soluciones denotadas por  $Y_{\lambda_2}(y)$  y  $Z_{\lambda_1\lambda_2}(z)$ , donde es importante indicar el subíndice, ya que esta solución es válida para un valor particular de las constantes de separación.

De esta forma, una solución particular a nuestra EDP es dada por

$$\psi_{\lambda_1\lambda_2}(x, y, z) = X_{\lambda_1}(x)Y_{\lambda_2}(y)Z_{\lambda_1\lambda_2}(z), \quad (4.14)$$

y la solución general corresponderá a una combinación lineal de la solución (4.14), correspondiendo a una suma sobre todos los valores posibles de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , es decir,

$$\psi(x, y, z) = \sum_{\lambda_1\lambda_2} C_{\lambda_1\lambda_2} \psi_{\lambda_1\lambda_2}(x, y, z), \quad (4.15)$$

donde los coeficientes  $C_{\lambda_1\lambda_2}$  serán obtenidos al imponer las condiciones de contorno del problema, que por lo general nos llevará a un conjunto finito de valores para  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

### 4.1.2. Coordenadas cilíndricas

En este caso, el laplaciano debe definirse de una forma diferente, dada por

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (4.16)$$

de modo que la ecuación de Helmholtz (4.3) se podrá escribir como

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0. \quad (4.17)$$

Nuevamente plantearemos una solución que sea producto de tres funciones, cada una dependiente de una de las variables del problema, es decir

$$\psi(\rho, \phi, z) = P(\rho)\Phi(\phi)Z(z), \quad (4.18)$$

que al sustituirlas en la expresión (4.17) resultará en

$$\frac{\Phi Z}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{PZ}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + P\Phi \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 P\Phi Z = 0, \quad (4.19)$$

y dividiendo por  $P\Phi Z$ , junto a un reordenamiento de los términos, llegamos a la expresión

$$\frac{1}{\rho P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}. \quad (4.20)$$

Dado que a ambos lados de la ecuación tenemos una dependencia en variables diferentes, ambos lados deben ser iguales a una constante para no depender de ellas. Llamaremos a esta constante  $\lambda_1$ , de modo que

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\lambda_1, \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{\rho P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 = \lambda_1. \quad (4.22)$$

En este caso, pueden ser soluciones físicas tanto el caso en que  $\lambda_1 > 0$ , donde obtendremos soluciones oscilantes (como lo hace Riley), o bien que  $\lambda_1 < 0$ , donde obtendremos soluciones exponenciales (como lo hace Arfken). La solución que escojamos dependerá de las condiciones de borde del problema.

Ahora, definiendo un valor auxiliar  $n^2 = k^2 + \lambda_1$ , podemos separar la ecuación (4.22) en una parte que dependa de  $\rho$  y una que dependa de  $\phi$ , de modo que luego de multiplicar por  $\rho^2$  y manipular un poco los términos, obtenemos la ecuación

$$\frac{\rho}{P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \rho^2 n^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}, \quad (4.23)$$

e introduciendo una constante de separación  $\lambda_2$ , obtenemos las siguientes expresiones

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -\lambda_2, \quad (4.24)$$

$$\frac{\rho}{P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + n^2 \rho^2 = \lambda_2. \quad (4.25)$$

Las soluciones físicas para la EDO de  $\phi$  deberán ser periódicas, dado que  $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$ , con lo que necesitamos que  $\lambda_2 > 0$ , ya que el signo menos en (4.24) produce que el lado derecho de la igualdad sea negativo. Llamamos  $\lambda_2 = m^2$ , donde  $m$  es un número entero para satisfacer la condición de periodicidad.

Solo nos queda resolver la ecuación radial, es decir, la EDO

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + (n^2 \rho^2 - m^2)P = 0, \quad (4.26)$$

que al realizar el cambio de variable  $x = n\rho$ ,  $dx = n d\rho$ , y definiendo  $Y(x) = P(\rho) = P(x/n)$ , puede reescribirse como

$$x \frac{d}{dx} \left( x \frac{dY}{dx} \right) + (x^2 - m^2)Y = 0, \quad (4.27)$$

ecuación que se conoce como **ecuación diferencial de Bessel**, cuyas soluciones son las *funciones de Bessel* que estudiaremos más adelante en el curso.

De esta forma, una solución particular de la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas será

$$\psi_{\lambda_1, m}(\rho, \phi, z) = P_{\lambda_1, m}(\rho) \Phi_m(\phi) Z_{\lambda_1}(z), \quad (4.28)$$

y la solución general será la combinación lineal de las soluciones (4.28), con coeficientes a determinar mediante las condiciones de contorno,

$$\psi(\rho, \phi, z) = \sum_{\lambda_1, m} C_{\lambda_1, m} P_{\lambda_1, m}(\rho) \Phi_m(\phi) Z_{\lambda_1}(z). \quad (4.29)$$

Algo interesante que señalar es que esta solución se mantiene incluso si  $k^2$  no es una constante, sino una función de la forma

$$k^2 \rightarrow f(\rho) + \frac{g(\phi)}{\rho^2} + h(z). \quad (4.30)$$

### 4.1.3. Coordenadas esféricas

En un sistema esférico  $(r, \theta, \phi)$  el operador laplaciano se define como

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right), \quad (4.31)$$



con lo que la ecuación de Helmholtz queda como

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) + k^2 \psi = 0, \quad (4.32)$$

por lo que planteamos un *ansatz* de la forma

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi), \quad (4.33)$$

que al ser sustituido en la ecuación (4.32) resulta en

$$\frac{\Theta\Phi}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R\Phi}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{R\Theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 R\Theta\Phi = 0. \quad (4.34)$$

Dividiendo por  $R\Theta\Phi$  y reordenando los términos, podemos llegar a la expresión

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = r^2 \sin^2 \theta \left[ -\frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{1}{\Theta r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - k^2 \right]. \quad (4.35)$$

En este momento, podemos separar ambos lados de la ecuación al igualarlas a una constante  $\lambda_1$ , de modo que obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \lambda_1 \quad (4.36)$$

$$r^2 \sin^2 \theta \left[ -\frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{1}{\Theta r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - k^2 \right] = \lambda_1, \quad (4.37)$$

y como en la coordenada azimutal  $\phi$  debe cumplirse la condición de periodicidad  $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$ , entonces  $\lambda_1 < 0$ , y lo denotamos por  $\lambda_1 = -m^2$ , con  $m$  un número entero. Luego, reemplazamos este valor en la ecuación (4.37) para poder separarla. Multiplicando por  $r^2$ , y manipulando un poco los términos, obtenemos la expresión

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta}. \quad (4.38)$$

Introduciendo una segunda constante de separación  $\lambda_2$ , obtenemos las ecuaciones

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - \lambda_2) R = 0 \quad (4.39)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( \lambda_2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0. \quad (4.40)$$

En este caso, vale la pena hacer un análisis en función del valor de  $m^2$  para la ecuación axial.

- Si  $m = 0$ , hacemos el cambio de variable  $x = \cos \theta$ , de modo que  $dx = -\sin \theta d\theta$ . Definiendo una función  $Y(x) = \Theta(\theta) = \Theta(\arccos x)$ , la EDO toma la forma

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dY}{dx} \right] + \lambda_2 Y = 0, \quad (4.41)$$

lo que corresponde a la **ecuación diferencial de Legendre**, cuyas soluciones son los *polinomios de Legendre*, que se estudiarán en detalle más adelante en el curso.

Dado que nuestra variable  $x$  es definida a partir de un coseno, esta estará acotada en su dominio, es decir, si  $\theta \in [0, \pi]$ , entonces  $x \in [-1, 1]$ . Si además exigimos que la solución sea acotada, podemos demostrar (como se hará más adelante) que  $\lambda_2 = \ell(\ell+1)$ , con  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ .

- Si  $m \neq 0$ , podemos realizar el mismo cambio de variables, obteniendo la ecuación

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dY}{dx} \right] + \left( \lambda_2 - \frac{m^2}{1-x^2} \right) Y = 0, \quad (4.42)$$

que corresponde a la **ecuación diferencial asociada de Legendre**, cuyas soluciones son los *polinomios asociados de Legendre*. Nuevamente, una solución acotada requerirá que  $\lambda_2 = \ell(\ell+1)$ , pero en este caso no puede tomar cualquier valor entero, sino que debe satisfacer  $\ell \geq m$ .

Por otra parte, en la ecuación radial podemos hacer el cambio de variable  $x = kr$ , de modo que  $dx = kdr$ . Definiendo una función  $Y(x) = R(r) = R(x/k)$ , podemos reescribir la EDO como

$$\frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dY}{dx} \right) + (x^2 - \lambda_2) Y = 0, \quad (4.43)$$

que corresponde a la **ecuación diferencial esférica de Bessel**, cuyas soluciones son las *funciones esféricas de Bessel*, que serán estudiadas más adelante.

En el caso particular en que  $k = 0$ , recuperamos la ecuación de Laplace, y la ecuación radial se convierte en una EDO de Euler-Cauchy,

$$r^2 R'' + 2rR' - \lambda_2 R = 0, \quad (4.44)$$

con soluciones que dependen del valor de  $\lambda_2$ . Sin embargo, al exigir soluciones finitas e imponer que  $\lambda_2 = \ell(\ell+1)$ , solo tenemos una solución posible, de la forma

$$R(r) = Ar^\ell + Br^{-(\ell+1)}. \quad (4.45)$$

Así, una solución particular será dada por

$$\psi_{\ell,m}(r, \theta, \phi) = R_\ell(r) \Phi_m(\phi) \Theta_{\ell,m}(\theta), \quad (4.46)$$

y la solución general corresponde a su combinación lineal con coeficientes a determinar mediante las condiciones de contorno,

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell,m} R_\ell(r) \Phi_m(\phi) \Theta_{\ell,m}(\theta). \quad (4.47)$$

## 4.2. El método de series para EDO

Hasta ahora, hemos estudiado ecuaciones que al cumplir ciertas propiedades, como tener una forma u otra, sabemos hallar una solución de una forma sencilla, como una ecuación de Euler-Cauchy, una EDO lineal de segundo orden con coeficientes constantes, entre otras. Sin embargo, existen algunas ecuaciones que pese a aparentar ser sencillas, no es posible hallar una solución en términos de funciones conocidas, como es el caso de la *ecuación de Airy*

$$y'' - xy = 0. \quad (4.48)$$

En estos casos, podemos hacer uso del llamado *método de series de potencias* para obtener una solución que, si bien no tiene una forma compacta, nos permite resolver dichos problemas, y encontrar aproximaciones válidas.

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria, lineal y de segundo orden cuyos coeficientes son polinomios en la variable independiente del problema, de la forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y(x) = 0. \quad (4.49)$$

En general, consideraremos que  $P(x)$  y  $Q(x)$  son funciones *analíticas* de  $x$  en, al menos, un punto  $x = x_0$  a menos que se indique lo contrario.

Antes de discutir la existencia de soluciones para esta ecuación, debemos definir las nociones de punto *ordinario* y de punto *singular*.

**Definición 4.2.** Dada una ecuación diferencial de la forma (4.49), decimos que un punto  $x_0$  es un **punto ordinario** de la ecuación si las funciones  $P(x)$  y  $Q(x)$  son *analíticas* en  $x = x_0$ . En caso de que  $P(x)$  o  $Q(x)$  diverjan en  $x = x_0$ , diremos que  $x_0$  es un **punto singular**.

**Puntos ordinarios y singulares**

**Definición 4.3.** Dado un punto singular  $x = x_0$  para una EDO de la forma (4.49), diremos que  $x_0$  es un **punto singular regular** si tanto  $(x - x_0)P(x)$  como  $(x - x_0)^2 Q(x)$  son analíticas en  $x = x_0$ . En caso contrario,  $x_0$  es un **punto singular irregular, o esencial**.

**Puntos singulares regulares y esenciales**

### Proposición 4.2. Método de Series

### Método de Series

Dada una EDO lineal de segundo orden de la forma (4.49) sin singularidades en su dominio de definición, es decir, donde únicamente existen puntos ordinarios, podemos proponer una solución en serie de potencias alrededor del punto  $x_0$ , de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad a_0 \neq 0. \quad (4.50)$$

Para ello, seguiremos este algoritmo, asumiendo  $x_0 = 0$  para no sobrecargar la notación:

1. Hallamos la primera y segunda derivada de nuestra serie, re-indexando, de ser necesario, de modo que ambas queden en términos de  $x^n$ :

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) a_{k+1} x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k. \end{aligned} \quad (4.52)$$

2. Sustituimos las derivadas en nuestra EDO homogénea (4.49), obteniendo la expresión

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)(k+2)a_{k+2} + P(x)(k+1)a_{k+1} + Q(x)a_k] x^k = 0.$$

3. Dado que buscamos soluciones no triviales, la igualdad anterior se satisface si, término a término, se cumple la relación de recurrencia

$$a_{k+2} = \frac{P(x)(k+1)a_{k+1} + Q(x)a_k}{(k+1)(k+2)}. \quad (4.53)$$

4. Podemos determinar los primeros coeficientes,  $a_0$  y  $a_1$ , a partir de las condiciones de contorno del sistema, por lo que, en general, actuarán como los coeficientes de dos soluciones linealmente independientes para nuestro problema.

**Ejemplo 4.1.** Encuentre una solución a la ecuación de Airy

$$y'' - xy = 0, \quad (4.54)$$

utilizando el método de series alrededor de  $x_0 = 0$ .

**Solución.** Según la estructura (4.49), tenemos que  $P(x) = 0$  y  $Q(x) = -x$ . Como  $P(x)$  y  $Q(x)$  son funciones analíticas en  $\mathbb{R}$  (función constante y lineal, respectivamente) y en particular en  $x_0 = 0$ , entonces  $x_0 = 0$  es un punto ordinario de la EDO, por lo que podemos utilizar el método de Frobenius con  $s = 0$ . Entonces, postulamos una solución de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (4.55)$$

Calculando las derivadas, tenemos

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \quad (4.56)$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n. \quad (4.57)$$

Reemplazamos en nuestra ecuación original, obteniendo la expresión

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad (4.58)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \quad (4.59)$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0. \quad (4.60)$$

Iguamos la expresión a cero término a término, ya que buscamos una solución no trivial. Esto conlleva a que  $a_2 = 0$ , y a la relación de recurrencia

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} = a_{n-1}, \quad (4.61)$$

$$a_{n-2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}. \quad (4.62)$$

Desarrollemos esta relación de recurrencia. Notamos que

$$\begin{aligned} n=1; \quad a_3 &= \frac{a_0}{2 \cdot 3} \\ n=2; \quad a_4 &= \frac{a_1}{3 \cdot 4} \\ n=3; \quad a_5 &= \frac{a_2}{4 \cdot 5} = 0 \\ n=4; \quad a_6 &= \frac{a_3}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} \\ n=5; \quad a_7 &= \frac{a_4}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \\ n=6; \quad a_8 &= \frac{a_5}{7 \cdot 8} = 0 \\ n=7; \quad a_9 &= \frac{a_6}{8 \cdot 9} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Por lo tanto, tenemos que

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \quad (4.63)$$

$$= a_0 \left( 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots \right) \quad (4.64)$$

$$+ a_1 \left( x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{x^{10}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} + \dots \right) \quad (4.65)$$

$$= a_0 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3n-1) \cdot (3n)} \right) \quad (4.66)$$

$$+ a_1 \left( x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n) \cdot (3n+1)} \right) \quad (4.67)$$

$$= a_0 \text{Ai}(x) + a_1 \text{Bi}(x), \quad (4.68)$$

donde Ai y Bi son las *funciones de Airy*, que son linealmente independientes entre sí.

**Ejemplo 4.2.** Considere la ecuación de Hermite

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.69)$$

donde  $\lambda$  es un valor constante. Encuentre la solución general en serie de potencias.

**Solución.** Según la estructura (4.49), tenemos que  $P(x) = -2x$  y  $Q(x) = \lambda$ . Como  $P(x)$  y  $Q(x)$  son funciones analíticas en  $\mathbb{R}$  (función lineal y constante, respectivamente) y en particular en  $x_0 = 0$ . Entonces,  $x_0 = 0$  es un punto ordinario de la EDO, por lo que podemos utilizar el método de Frobenius con  $s = 0$ . Entonces, postulamos una solución de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (4.70)$$

Reemplazamos en la ecuación original, obteniendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad (4.71)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad (4.72)$$

$$2a_2 + \lambda a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + \lambda a_n]x^n = 0. \quad (4.73)$$

Para que la igualdad a cero sea verdadera, descartando la solución trivial ( $x = 0$ ), deberán cumplirse las relaciones de recurrencia

$$a_2 = -\frac{\lambda}{2}a_0, \quad a_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)}a_n. \quad (4.74)$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
 n = 1; \quad a_3 &= \frac{2 - \lambda}{2 \cdot 3} a_1 \\
 n = 2; \quad a_4 &= \frac{4 - \lambda}{3 \cdot 4} a_2 = -\frac{(4 - \lambda)\lambda}{2 \cdot 3 \cdot 4} a_0 \\
 n = 3; \quad a_5 &= \frac{6 - \lambda}{4 \cdot 5} a_3 = \frac{(6 - \lambda)(2 - \lambda)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a_1 \\
 n = 4; \quad a_6 &= \frac{8 - \lambda}{5 \cdot 6} a_4 = -\frac{(8 - \lambda)(4 - \lambda)\lambda}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a_0 \\
 n = 5; \quad a_7 &= \frac{10 - \lambda}{6 \cdot 7} a_5 = \frac{(10 - \lambda)(6 - \lambda)(2 - \lambda)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} a_1,
 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Luego,

$$\begin{aligned}
 y(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \\
 &= a_0 \left( 1 - \frac{\lambda}{2} x^2 - \frac{(4 - \lambda)\lambda}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 - \frac{(8 - \lambda)(4 - \lambda)\lambda}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^6 + \dots \right) \\
 &\quad + a_1 \left( x + \frac{2 - \lambda}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{(6 - \lambda)(2 - \lambda)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \frac{(10 - \lambda)(6 - \lambda)(2 - \lambda)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots \right) \\
 &= a_0 \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(4 - \lambda) \dots (4n - 4 - \lambda)}{(2n)!} x^{2n} \right) \\
 &\quad + a_1 \left( x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 - \lambda)(6 - \lambda) \dots (4n - 2 - \lambda)}{(2n + 1)!} x^{2n+1} \right). \tag{4.75}
 \end{aligned}$$

En el caso en que  $\lambda$  sea un número par no negativo, una de las dos series se hace finita. Es más, cuando  $\lambda = 2n$ , y normalizando por una constante adecuada, obtenemos los *polinomios de Hermite*  $H_n(x)$ , que surgen como soluciones a la ecuación de Schrödinger para un oscilador armónico cuántico.

En el caso en que el coeficiente  $P(x)$  no se anula en el dominio del sistema, podemos garantizar la existencia de una solución para (4.49) mediante el siguiente teorema<sup>1</sup>

**Teorema 4.1** (de Fuchs). Una ecuación diferencial de la forma (4.49) posee al menos una solución expresable en una serie de potencias en torno a  $x = x_0$  si este es un punto ordinario o un punto singular regular de la EDO (4.49). La solución será de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+s}, \quad a_0 \neq 0 \tag{4.76}$$

<sup>1</sup>En este apunte hemos omitido gran parte de la discusión sobre la naturaleza de este tipo de soluciones. Si desea revisarla en más detalle, puede consultar el capítulo 3, sección 5 de [10].

para un número  $s$  real y positivo, o bien, de la forma

$$y(x) = y_0 \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r}, \quad b_0 \neq 0 \quad (4.77)$$

para algún número  $r$  real y positivo, donde  $y_0$  es una solución de la forma (4.76).

A la solución de la forma (4.76) se le conoce como **serie de Frobenius**, mientras que a una solución de la forma (4.77) se le suele denominar **serie generalizada de Frobenius**.

### Método de Frobenius

#### Proposición 4.3. Método de Frobenius.

Dada una EDO lineal de segundo orden de la forma (4.49), podemos proponer una solución en forma de serie de Frobenius (4.76), que en general, podrá ser diferenciada al menos dos veces dentro de su radio de convergencia. Podremos determinar los coeficientes de nuestra serie siguiendo el siguiente algoritmo, donde hemos asumido  $x_0 = 0$  para no sobrecargar la notación:

1. Hallamos la primera y segunda derivada de nuestra serie, re-indexando, de ser necesario, de modo que siempre empecemos nuestra suma en  $k = 0$ . Esto es,

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k + s) A_k x^{k+s-1}, \quad (4.78)$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k + s - 1)(k + s) A_k x^{k+s-2}. \quad (4.79)$$

2. Sustituimos las derivadas en nuestra EDO homogénea (4.49). Multiplicamos la ecuación por  $x^2$ , y luego de manipulaciones algebraicas, obtenemos la expresión

$$[s(s-1) + p(x)s + q(x)]A_0 x^s + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+s-1)(k+s) + p(x)(k+s) + q(x)]A_k x^{k+s} = 0, \quad (4.80)$$

donde  $p(x) = xP(x)$  y  $q(x) = x^2Q(x)$ .<sup>2</sup>

3. Dado que la ecuación (4.80) es nula término a término y asumiendo que el coeficiente  $A_0$  es no nulo, podemos obtener la *ecuación indicial* para  $k = 0$ ,

$$I(s) = s(s-1) + p(0)s + q(0). \quad (4.81)$$

4. Igualando a cero las potencias superiores de  $x$ , nos lleva a las *relaciones de recurrencia* de la forma

$$A_k = f(j, s)A_j, \quad (4.82)$$

donde  $j$  es un índice tal que  $j > k$ . Usualmente, podemos hacer que estas dependan de solo uno o dos coeficientes, típicamente  $A_0$  y  $A_1$ .



5. A partir de nuestras condiciones de contorno, podemos determinar los valores de los coeficientes  $A_k$ . Además, es posible determinar el valor de  $s$  a partir de la ecuación indicial (4.81).
6. La solución general a nuestra ecuación dependerá de las raíces  $s_1$  y  $s_2$  de la ecuación indicial:

- a. Si  $s_1$  y  $s_2$  son tales que su diferencia *no es un número entero*, entonces la solución general es de la forma

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \\ &= C_1 \left( x^{s_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) + C_2 \left( x^{s_2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right). \end{aligned} \quad (4.83)$$

- b. Si  $s_1 = s_2$ , entonces el método de Frobenius nos entrega solo una solución, y la segunda solución será una serie de Frobenius generalizada (4.77), de modo que la solución general será

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \\ &= C_1 \left( x^s \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) + C_2 \left( \alpha y_1(x) \ln(x) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+s} \right), \end{aligned} \quad (4.84)$$

donde  $\alpha$  es una constante a determinar.

- c. Si  $s_1$  y  $s_2$  son tales que su diferencia *sí es un número entero*, existirá al menos una solución en forma de serie de potencias, correspondiente a la raíz mayor, mientras que la segunda puede ser tanto una serie de potencias (a.) o una solución logarítmica (b.).

<sup>2</sup>Puede encontrar algo más de información respecto a esta elección en el capítulo 6 de [36]. Para efectos de este curso, confíen en que funciona.



## Funciones de Legendre

Como vimos anteriormente en el capítulo 4, al resolver la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas, podemos obtener dos ecuaciones, según el valor de la constante de separación  $m^2$ .

### 5.1. Ecuación y Funciones de Legendre

Analizaremos en primer lugar el caso en que  $m = 0$ , donde luego del cambio de variables  $x = \cos \theta$ , obtuvimos la EDO

$$\frac{d}{dx} \left( (1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right) + \lambda y = 0, \quad (5.1)$$

expresión que nombraremos como **ecuación de Legendre**, y que también puede ser escrita de forma más explícita como

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0. \quad (5.2)$$

Dado que  $x = \cos \theta$ , nuestra ecuación, y por ello sus soluciones, están definidas en el intervalo  $[-1, 1]$ . Nos interesa que estos casos extremos posean soluciones finitas, lo que nos permitirá encontrar el valor de  $\lambda$  para esta ecuación.

#### 5.1.1. Resolviendo la ecuación de Legendre

Utilizando el método de series, observamos que  $P(x) = -2x/(1 - x^2)$ , y que  $Q(x) = \lambda/(1 - x^2)$ . Ambas expresiones tienen puntos singulares en  $x = \pm 1$ , pero  $x = 0$  es un punto ordinario. Por ello, planteamos soluciones de la forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad (5.3)$$

de modo que sustituyendo en la expresión (5.2) tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)a_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k-1)ka_kx^k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} ka_kx^k + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)(k+2)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2ka_k + \lambda a_k] x^k = 0,$$

donde hemos usado que  $\sum_{k=0}^{\infty} k = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} k$ . Dado que  $x^k = 0$  corresponde a la solución trivial, analizamos la relación entre los coeficientes de nuestra ecuación,

$$(k+1)(k+2)a_{k+2} - [(k-1)k + 2k - \lambda]a_k = 0, \quad (5.4)$$

de donde encontramos la siguiente relación de recurrencia,

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+1)(k+2)} a_k, \quad (5.5)$$

de modo que dados unos valores para  $a_0$  y  $a_1$  podremos determinar todos los coeficientes de nuestra expresión. Luego, si desarrollamos los términos pares e impares por separado, podemos observar la siguiente recurrencia,

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-\lambda}{2} a_0 \\ a_4 &= \frac{2(2+1) - \lambda}{3 \cdot 4} a_2 = \frac{-\lambda(2(2+1) - \lambda)}{4!} a_0 \\ a_6 &= \frac{4(4+1) - \lambda}{5 \cdot 6} a_4 = \frac{-\lambda(2(2+1) - \lambda)(4(4+1) - \lambda)}{6!} a_0 \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{a_0}{n!} \prod_{\ell=0}^{n-2} [\ell(\ell+1) - \lambda], \end{aligned}$$

mientras que para el caso de coeficientes impares,

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1(1+1) - \lambda}{2 \cdot 3} a_1 \\ a_5 &= \frac{(3(3+1) - \lambda)}{4 \cdot 5} a_3 = \frac{(1(1+1) - \lambda)(3(3+1) - \lambda)}{5!} a_1 \\ a_7 &= \frac{5(5+1) - \lambda}{6 \cdot 7} a_5 = \frac{(1(1+1) - \lambda)(3(3+1) - \lambda)(5(5+1) - \lambda)}{7!} a_1 \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{a_1}{n!} \prod_{\ell=1}^{n-2} [\ell(\ell+1) - \lambda], \end{aligned}$$

de modo que la solución general para la ecuación de Legendre será la combinación lineal de la solución para los valores pares y la solución para los valores impares,

$$\begin{aligned}
 y(x) &= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \\
 &= a_0 \left( \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{2m} \right) + a_1 \left( \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{2m+1} \right) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_0}{(2m)!} \left( \prod_{\ell=0}^{2m-2} [\ell(\ell+1) - \lambda] \right) x^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_1}{(2m+1)!} \left( \prod_{\ell=1}^{2m-1} [\ell(\ell+1) - \lambda] \right) x^{2m+1}.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Con esto, podemos darnos cuenta de que la solución general de la ecuación de Legendre es una serie infinita, para la cual debemos analizar su convergencia en el intervalo  $x \in [-1, 1]$ .

Según el criterio de la razón<sup>1</sup>, la serie converge para  $|x| < 1$ , independientemente del valor de  $\lambda$ . Nos queda analizar los casos extremos, es decir,  $x = \pm 1$ .

Para  $\lambda \neq n(n+1)$ , la serie diverge, puesto que ella se convierte en una serie numérica sin ningún tipo de restricción, que crece indefinidamente. Volveremos a este caso más tarde.

Para  $\lambda = n(n+1)$ , existirá algún término  $a_n = 0$  para una de las soluciones, la solución par  $y_1(x)$  o la solución impar  $y_2(x)$ , tal que gracias a la relación de recurrencia (5.5), todo término superior a este se anulará. Luego, basta imponer que el primer coeficiente de la solución de paridad opuesta se anule para así obtener una solución convergente. Es decir, si  $n$  es par,  $a_1 = 0$ , mientras que si  $n$  es impar, escogemos  $a_0 = 0$ .

De esta forma, nos gustaría poder escribir una expresión general para las soluciones que son válidas en todo el dominio, es decir, cuando  $\lambda = n(n+1)$ . Notamos que  $\ell(\ell+1) - n(n+1) = (\ell-n)(\ell+n+1)$ , podemos encontrar que, como una serie de potencias,

$$y_{1,n}(x) = \sum_{m=0}^{n/2} b_m x^{2m} = \sum_{m=0}^{n/2} \left( \frac{1}{(2m)!} \prod_{\ell=0}^{2m-2} (\ell-n)(\ell+n+1) \right) x^{2m} \tag{5.7}$$

$$y_{2,n}(x) = \sum_{m=0}^{(n-1)/2} c_m x^{2m+1} = \sum_{m=0}^{(n-1)/2} \left( \frac{1}{(2m)!} \prod_{\ell=0}^{2m-2} (\ell-n)(\ell+n+1) \right) x^{2m+1} \tag{5.8}$$

o bien, mediante una expansión en términos de un conjunto de funciones  $P_n(x)$ ,

$$y_{1,n}(x) = d_{n,1} P_n(x) = \frac{(-1)^{n/2} 2^n \left[ \left( \frac{n}{2} \right)! \right]^2}{n!} P_n(x), \tag{5.9}$$

$$y_{2,n}(x) = d_{n,2} P_n(x) = \frac{(-1)^{(n+1)/2} 2^{n-1} \left[ \left( \frac{n-1}{2} \right)! \right]^2}{n!} P_n(x). \tag{5.10}$$

<sup>1</sup>Véase el capítulo 7 de [7]

**Polinomios de Legendre**

**Definición 5.1.** Los **Polinomios de Legendre de orden  $n$**  corresponden a soluciones de la EDO de Legendre (5.2), que pueden ser definidas a partir de una serie de potencias como

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}. \quad (5.11)$$

También pueden ser definidos a partir de la *fórmula de Rodrigues*, según la cual pueden expresarse como

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (5.12)$$

En la figura 5.1, puede encontrar las gráficas de los primeros seis polinomios de Legendre, los que corresponden a

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 15x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

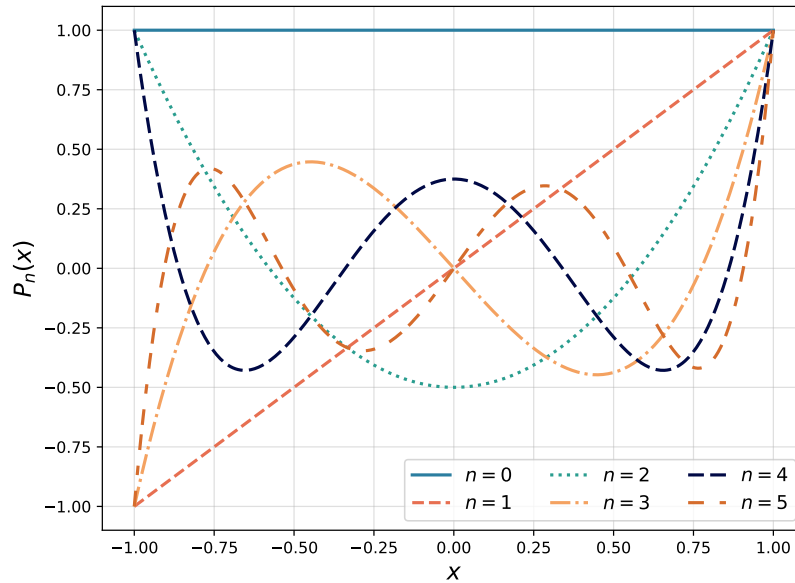


Figura 5.1: Primeros seis polinomios de Legendre. Adaptación de [este](#) código. La adaptación se encuentra [aquí](#).

### 5.1.2. Función Generatriz

**Definición 5.2.** Para cualquier conjunto de *polinomios ortogonales*  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , se denomina **función generatriz** (o generadora) de dicho conjunto a la función  $G(x, t)$ , tal que al ser desarrollada en una serie de Taylor para  $t$ , los coeficientes de dicha expansión son los polinomios  $P_n(x)$ :

**Función Generatriz**

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n. \quad (5.13)$$

En particular, la función generatriz para los polinomios de Legendre es dada por la expresión

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}. \quad (5.14)$$

Si observamos esta expresión en detalle, y hacemos  $t = r/a$  y  $x = \cos \theta$ , podemos escribir la función generatriz como

$$G(\theta, r) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos(\theta)/a + r^2/a^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}} = \frac{a}{|\vec{x} - \vec{a}|}, \quad (5.15)$$

donde  $|\vec{x} - \vec{a}|$  es la distancia entre los puntos  $\vec{x}$  y  $\vec{a}$ . Así, obtenemos la relación entre la distancia entre dos puntos del espacio con los Polinomios de Legendre,

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} = \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta). \quad (5.16)$$

En esta expresión, hemos asumido que  $r > a$ . En caso contrario, deben invertirse las relaciones dentro de la suma, ubicando  $r$  en el lugar de  $a$ , y viceversa.

**Ejemplo 5.1.** Expanda la expresión para un potencial electrostático generado por una carga puntual  $q$  en la posición  $\vec{a}$  en la región  $r < a$ .

**Solución.** Recordamos que el potencial electrostático debido a una carga puntual es dado por

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{x} - \vec{a}|}. \quad (5.17)$$

Reemplazando el resultado obtenido en (5.16), tenemos que

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta). \quad (5.18)$$

La importancia de este resultado es que es la base de la llamada *expansión multipolar*, que estudiarán detalladamente en su curso de electrodinámica.

A partir de su función generadora, podemos encontrar explícitamente los polinomios de Legendre mediante la relación

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \left[ \frac{\partial^n G(t, x)}{\partial t^n} \right]_{t=0}. \quad (5.19)$$

### 5.1.3. Propiedades

#### Propiedad 5.1. Propiedades de los polinomios de Legendre.

1. **Normalización.** Los polinomios de Legendre son funciones normalizadas, de modo que  $P_n(1) = 1$ , para cualquier valor de  $n$ .
2. **Paridad.** Podemos encontrar que los polinomios de Legendre pueden ser funciones pares o impares según el valor de  $n$ , ya que

3.

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \quad (5.20)$$

4. **Valor en el origen.** A partir de la función generatriz, podemos mostrar que

$$P_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar.} \\ (-1)^{n/2} \frac{n!}{2^n ((n/2)!)^2}, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \quad (5.21)$$

5. **Ortogonalidad.** Los polinomios de Legendre satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}. \quad (5.22)$$

6. **Complejitud.** Los polinomios de Legendre forman un *conjunto completo* de funciones definidas en  $[-1, 1]$ , por lo que forma una base para dichas funciones, lo que se expresa como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x) P_n(x') = \delta(x - x'). \quad (5.23)$$

7. **Serie de Fourier-Legendre.** Dado que los polinomios de Legendre forman un abase en el intervalo  $[-1, 1]$ , podemos expandir cualquier función en una Serie de Fourier-Legendre, tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad (5.24)$$

donde

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx. \quad (5.25)$$

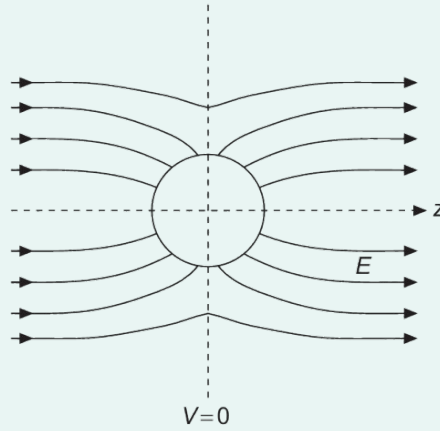


8. **Relaciones de recurrencia.** Los polinomios de Legendre satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia,

$$nP_{n-1}(x) + (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)P_n(x), \quad (5.26)$$

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x). \quad (5.27)$$

**Ejemplo 5.2. (Arfken 15.2.2.)** Considere una esfera conductora sin carga de radio  $r_0$  que es ubicada en un campo eléctrico uniforme de magnitud  $E_0$ , como se observa en la figura. Encuentre el nuevo potencial electrostático, perturbado por la ubicación de la esfera, y que satisface la ecuación de Laplace  $\nabla^2 \psi = 0$ .



**Solución.** Trabajaremos en coordenadas esféricas con el origen en el centro de la esfera y el eje  $z$  orientado paralelamente al campo uniforme original. Recordemos que el potencial electrostático es una función *continua*, de modo que en la frontera entre el interior y el exterior de la esfera (es decir, en  $r = r_0$ ) la función potencial interior deberá tener el mismo valor que la función potencial exterior.

Dado que la esfera es conductora, esta es *equipotencial*, lo que significa que el potencial es el mismo en todo su volumen, tal que  $\psi(r \leq r_0) = V_0$ . En particular, dado que la esfera no está cargada,  $V_0 = 0$ . Supondremos también que en el plano  $\theta = \pi/2$ ,  $V = 0$ . Esta será nuestra primera condición de borde.

Separando variables, obtendremos una ecuación radial con soluciones  $a_\ell r^\ell + b_\ell r^{-\ell-1}$ , y una ecuación axial que corresponde a la ecuación de Legendre. Dada la simetría esférica del sistema, se ha asumido que  $m = 0$ , de modo que la ecuación azimutal da origen a una constante. De este modo, nuestro potencial tendrá la forma

$$\psi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (a_\ell r^\ell + b_\ell r^{-\ell-1}) P_\ell(\cos \theta), \quad r > r_0.$$

El efecto de insertar la esfera en el campo eléctrico es local, por lo que el poten-

cial electrostático *muy lejos* de la esfera deberá comportarse como si el campo siguiera siendo uniforme,

$$\psi(r \rightarrow \infty, \theta) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta = -E_0 r P_1(\cos \theta),$$

que será nuestra segunda condición de borde. Esta corresponde al caso en que nuestra serie satisface

$$a_1 = -E_0, \quad a_n = 0, n > 1.$$

¿Por qué es relevante esta elección? Si considerásemos que, por ejemplo,  $a_2 \neq 0$ , tendríamos términos cuadráticos que dominarían el comportamiento del potencial, de modo que la segunda condición de borde no se estaría satisfaciendo.

Volviendo a nuestra primera condición de borde, estudiemos el comportamiento de la función en  $r = r_0$  y  $\theta = \pi/2$ . tendremos

$$\psi(r = r_0, \theta = \pi/2) = \frac{b_0}{r_0} + \left( \frac{b_1}{r_0^2} - E_0 r_0 \right) P_1(\cos \theta) + \sum_{\ell=2}^{\infty} b_{\ell} \frac{P_{\ell}(\cos \theta)}{r_0^{\ell+1}} = 0.$$

Esta igualdad se satisface si  $b_n = 0$  para  $n > 2$ . Dado que la esfera no se encuentra cargada,  $b_0 = 0$ . Por último, despejando  $b_1$ , encontramos que su valor es

$$b_1 = E_0 r_0^3.$$

Así, el potencial electrostático en el exterior de la esfera tendrá la forma

$$\psi_{\text{ext}}(r, \theta) = -E_0 r P_1(\cos \theta) + \frac{E_0 r_0^3}{r^2} P_1(\cos \theta) = -E_0 r \left( 1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) P_1(\cos \theta).$$

#### 5.1.4. Funciones de Legendre de segunda especie

Como discutimos anteriormente, al escoger  $\lambda = n(n+1)$  para un número entero  $n$ , debemos truncar una de las series que aparecen en la ecuación (5.6), de modo que la solución se reduce a los polinomios de Legendre. El motivo de hacer esto es hallar una solución que converja en  $x = \pm 1$ . Sin embargo, ¿debemos hacer esto si nuestro problema no requiere convergencia en los contornos  $x = \pm 1$ ?

denotadas por  $Q_n(x)$ . Estas se definen como

$$Q_n(x) = \begin{cases} d_{1,n}y_{2,n}(x), & \text{si } n \text{ es par,} \\ d_{2,n}y_{1,n}(x), & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases} \quad (5.28)$$

$$= \begin{cases} (-1)^{n/2} \frac{[(n/2)!]^2}{n!} 2^n y_{2,n}(x), & \text{si } n \text{ es par,} \\ (-1)^{(n+1)/2} \frac{[((n-1)/2)!]^2}{n!} 2^{n-1} y_{1,n}(x), & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases} \quad (5.29)$$

donde  $y_{1,n}$  e  $y_{2,n}$  son las funciones definidas en (5.9) y (5.10), respectivamente.

Nótese que a la solución para  $n$  par, hemos multiplicado los coeficientes de la solución impar, y viceversa.

Las funciones asociadas de Legendre satisfacen las mismas relaciones de recurrencia que las funciones de Legendre, de modo que

$$nQ_{n-1}(x) + (n+1)Q_{n+1}(x) = (2n+1)xQ_n(x), \quad (5.30)$$

$$(2n+1)Q_n(x) = Q'_{n+1}(x) - Q'_{n-1}(x). \quad (5.31)$$

Gracias a ellas, podemos obtener las expresiones explícitas para funciones de orden superior, debiendo utilizar la definición (5.28) únicamente para las funciones  $Q_0(x)$  y  $Q_1(x)$ . Pueden encontrar estas derivaciones en el capítulo 5 de [30].

Las primeras seis funciones de Legendre de segunda especie son graficadas en la figura 5.2, y las expresiones para las primeras cuatro son dadas por

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right), & Q_2(x) &= \frac{3x^2-1}{4} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{3x}{2}, \\ Q_1(x) &= \frac{x}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) - 1, & Q_3(x) &= \frac{5x^3-3x}{4} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{5x^2}{2} + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

### Propiedad 5.2. Propiedades de las funciones de Legendre de segunda especie.

1. **Paridad.** Se tiene que

$$Q_n(-x) = (-1)^{n+1} Q_n(x). \quad (5.32)$$

2. **Valor en el origen.** Dada su paridad, las relaciones se invierten respecto a los polinomios de Legendre, de modo que

$$Q_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ (-1)^{(n+1)/2} \frac{[(\frac{n-1}{2})!]^2}{n!} 2^{n-1}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (5.33)$$

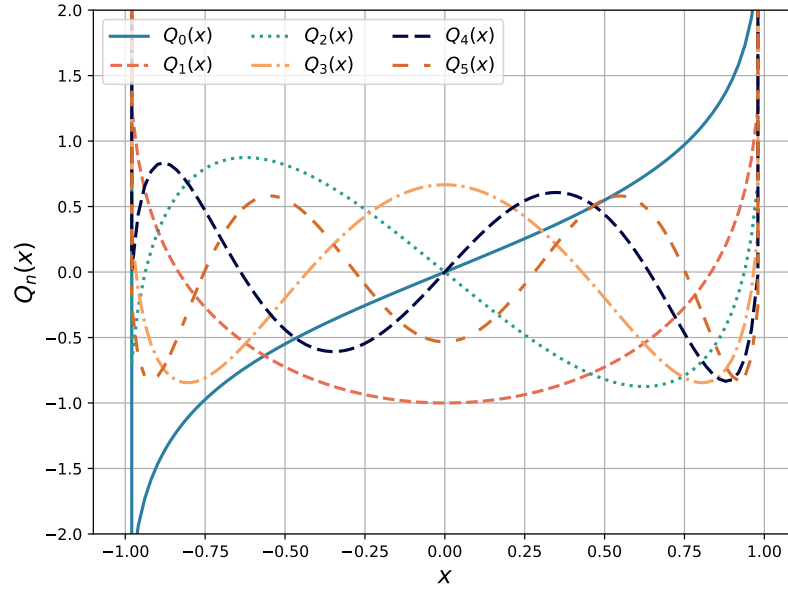


Figura 5.2: Primeras seis funciones de Legendre de segunda especie. Nótese el comportamiento asintótico alrededor de los extremos  $x = -1$  y  $x = 1$ . Adaptación de [este](#) código. La adaptación se encuentra [aquí](#).

3. **Valor en el extremo del intervalo.** Los extremos del intervalo son puntos singulares para estas funciones, de modo que

$$\lim_{x \rightarrow 1} Q_n(x) = +\infty. \quad (5.34)$$

En resumen, la solución general de la EDO de Legendre para  $\lambda = n(n+1)$ , es dada por

$$y(x) = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x), \quad (5.35)$$

donde los polinomios de Legendre  $P_n(x)$  convergen en todo el intervalo  $[-1, 1]$ , incluidos los extremos, mientras que las funciones de segunda especie  $Q_n(x)$  convergen en el interior del intervalo  $(-1, 1)$ , mas no en los extremos.

## Observación

Si bien lo más adecuado es plantear siempre la solución a la EDO de Legendre considerando las funciones de primera y segunda especie, la gran mayoría de problemas físicos descartarán la solución de segunda especie, dada su divergencia en los extremos.

La referencia [20] plantea que las funciones de segunda especie aparecerán en problemas poco comunes, como el campo electrostático en un conductor toroidal, o en la atracción gravitacional ejercida por un esferoide sólido, entre otras. Puede revisar el capítulo 8 de esa referencia para más detalles.

## 5.2. Ecuación y funciones asociadas de Legendre

Hasta ahora, analizamos el caso en que  $m = 0$  en la EDO axial (4.32) que se obtiene de la ecuación de Helmholtz. En lo que resta del capítulo, analizaremos el caso en que  $m \neq 0$ .

En este caso, bajo el cambio de variable  $x = \cos \theta$ , la ecuación (4.32) toma la forma de la **ecuación asociada de Legendre**,

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left( \lambda - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) y = 0, \quad (5.36)$$

cuyas soluciones se encuentran definidas en el intervalo  $[-1, 1]$ .

### 5.2.1. Resolviendo la ecuación asociada de Legendre

Para hacer más fácil el proceso de utilizar el método de series, realizamos la sustitución  $y(x) = (1 - x^2)^{m/2} u(x)$ , de modo que

$$y'(x) = \frac{(1 - x^2)^{\frac{m}{2}} ((1 - x^2)u'(x) - mxu(x))}{1 - x^2}$$

$$y''(x) = \frac{(1 - x^2)^{\frac{m}{2}} [(1 - x^2)^2 u''(x) - 2mx(1 - x^2)u'(x) + m((m - 1)x^2 - 1)u(x)]}{(1 - x^2)^2}.$$

Reemplazamos esta función y sus derivadas en (5.36), de modo que

$$\begin{aligned}
 & (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{[(1-x^2)^2 u''(x) - 2mx(1-x^2)u'(x) + m((m-1)x^2 - 1)u(x)]}{(1-x^2)^2} \\
 & - 2x \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}} ((1-x^2)u'(x) - mxu(x))}{1-x^2} + \left( \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) (1-x^2)^{m/2} u(x) = 0 \\
 & (1-x^2)u''(x) - 2m(x+1)u'(x) + \left[ \left( \lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) + \frac{2mx + m[(m-1)x^2 - 1]}{1-x^2} \right] u(x) = 0 \\
 & (1-x^2)u''(x) - 2m(x+1)u'(x) + \left[ \frac{\lambda(1-x^2) - m(m+1)(1-x^2)}{1-x^2} \right] u(x) = 0
 \end{aligned}$$

lo que resulta en la EDO para  $u(x)$

$$(1-x^2)u''(x) - 2x(m+1)u'(x) + (\lambda - m(m+1))u(x) = 0. \quad (5.37)$$

En este caso,  $P(x) = 2x(m+1)/(1-x^2)$  y que  $Q(x) = (\lambda - m(m+1))/(1-x^2)$ , de modo que como ambas funciones son analíticas en  $x = 0$ , podemos plantear una solución de la forma

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad (5.38)$$

que nos llevará a la relación de recurrencia

$$a_{k+2} = \frac{k^2 + (2m+1)k - \lambda + m(m+1)}{(k+1)(k+2)} a_k, \quad (5.39)$$

que al igual que para la ecuación de Legendre, resultará en series que convergen para  $|x| < 1$  y, en general, divergen para  $|x| = 1$ , salvo para ciertos valores de  $\lambda$ . Para encontrar dichos valores, necesitamos que el numerador de la ecuación (5.39) sea cero. Esto impone que  $\lambda$  debe satisfacer la igualdad

$$\lambda = m(m+1) + k(k+1) + 2mk = (m+k)(m+k+1), \quad (5.40)$$

y definiendo  $n = m + k \geq m$ , observamos que nuevamente requeriremos que  $\lambda = n(n+1)$ , de modo que la serie se truncará luego del  $(n-m)$ -ésimo término.

Podemos hallar de forma explícita las soluciones a esta EDO diferenciando repetidamente la ecuación de Legendre (5.2), al hacer uso de la regla de Leibniz, es decir,

$$\frac{d^m}{dx^m} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \frac{d^{m-s} f_1(x)}{dx^{m-s}} \frac{d^s f_2(x)}{dx^s}, \quad (5.41)$$

de donde obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{d^m}{dx^m} [(1-x^2)y''] &= \binom{m}{m}(1-x^2)\frac{d^m y''}{dx^m} - \binom{m}{m-1}2x\frac{d^{m-1} y''}{dx^{m-1}} - \binom{m}{m-2}2\frac{d^{m-2} y''}{dx^{m-2}} \\
 &= (1-x^2)\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)'' - 2mx\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)' - m(m-1)\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right) \\
 \frac{d^m}{dx^m} [2xy'] &= \binom{m}{m}2x\frac{d^m y'}{dx^m} + \binom{m}{m-1}2\frac{d^{m-1} y'}{dx^{m-1}} \\
 &= 2x\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)' + 2m\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) \\
 \frac{d^m}{dx^m} [n(n+1)y] &= n(n+1)\frac{d^m y}{dx^m},
 \end{aligned}$$

donde hemos usando que  $\binom{m}{m} = 1$ ,  $\binom{m}{m-1} = m$ , y  $\binom{m}{m-2} = \frac{m(m-1)}{2}$ . Así, la EDO resulta en

$$\begin{aligned}
 (1-x^2)\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)'' - (2mx+2x)\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)' + [m(m-1)+2m+n(n+1)]\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right) &= 0 \\
 (1-x^2)\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)'' - 2x(m+1)\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)' + [m(m+1)+n(n+1)]\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right) &= 0,
 \end{aligned}$$

donde al hacer la sustitución  $f(x) = y^{(m)}(x)$ , obtenemos la EDO para  $u(x)$  cuando  $\lambda = n(n+1)$ . De esta forma, concluimos que las funciones  $u(x)$  deberán ser proporcionales a  $\frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ .

**Definición 5.4.** Se definen los **polinomios asociados de Legendre**, soluciones de la EDO (5.36), como

**Polinomios asociados de Legendre**

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \quad (5.42)$$

donde el factor  $(1-x^2)^{m/2}$  es introducido para una correcta normalización. Nótese que cuando  $m = 0$ , se recuperan los polinomios de Legendre (5.6), de modo que  $P_n^0(x) \equiv P_n(x)$ .

También se admite la definición mediante la fórmula de Rodrigues

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n, \quad (5.43)$$

obtenida al sustituir la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre en la ecuación (5.42), y es también válida para  $m < 0$ , siempre y cuando  $|m| \leq n$ .

### 5.2.2. Función generatriz

En este caso, podemos hacer uso de la relación entre los polinomios asociados de Legendre y los polinomios de Legendre para obtener la función generatriz de los prime-

ros. En efecto, observamos que derivando  $m$  veces la función generatriz de los polinomios de Legendre respecto a  $x$ , tenemos

$$\frac{d^m G}{dx^m} = \frac{d^m}{dx^m} (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) t^n, \quad (5.44)$$

y multiplicando ambos lados por  $(1 - x^2)^{m/2}$ , tenemos que

$$\frac{d^m G}{dx^m} = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^m(x) t^n. \quad (5.45)$$

Derivando el lado izquierdo de la ecuación, obtenemos

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)(1 - x^2)^{m/2} t^m}{(1 - 2xt + t^2)^{m+1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^m t^n. \quad (5.46)$$

Dividimos la expresión por  $t^m$ , definimos una variable auxiliar  $r = n - m$ , y además notamos que

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2r}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2r} = \frac{(2r)!}{2^r r!}. \quad (5.47)$$

De este modo, podemos hallar que

$$G_m(x, t) = \frac{(2m)!(1 - x^2)^{m/2}}{2^m m! (1 - 2xt + t^2)^{m+1/2}} = \sum_{r=0}^{\infty} P_{r+m}^m(x) t^r. \quad (5.48)$$

### 5.2.3. Propiedades

#### Propiedad 5.3. Propiedades de los polinomios asociados de Legendre.

1. **Simetría.** Los polinomios  $P_n^{-m}$  se pueden obtener a partir de los  $P_n^m$  siguiendo la relación

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x). \quad (5.49)$$

Esto se puede demostrar a partir de la expresión (5.42), aplicando la fórmula de Leibniz al producto  $(n+1)^n(x-1)^n$ .

A partir de la fórmula de Rodrigues (5.43), se pueden demostrar las siguientes propiedades,

2. **Valor en los extremos.** Evaluados en los extremos del intervalo  $x = \pm 1$ , los polinomios asociados de Legendre son nulos, salvo cuando  $m = 0$ .

$$P_n^m(\pm 1) = \begin{cases} (\pm 1)^n, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}. \quad (5.50)$$



3. **Paridad.** A partir de la paridad de los polinomios de Legendre  $P_n(x)$ , podemos encontrar que los polinomios asociados pueden ser tanto funciones pares como impares, dependiendo del valor de  $m$  y  $n$ ,

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(x). \quad (5.51)$$

4. **Ortogonalidad.** Los polinomios asociados de Legendre satisfacen las siguientes relaciones de ortogonalidad,

$$\int_{-1}^1 P_\ell^m(x) P_k^m(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell,k}. \quad (5.52)$$

5. **Relaciones de recurrencia.** Los polinomios asociados de Legendre satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia,

$$(2n+1)xP_n^m(x) = (n+m)P_{n-1}^m(x) + (n-m+1)P_{n+1}^m(x), \quad (5.53)$$

$$(2n+1)\sqrt{1-x^2}P_n^m(x) = P_{m+1}^{m+1}(x) - P_{n-1}^{m+1}(x) \quad (5.54)$$

$$= (n+m)(n+m-1)P_{n-1}^{m-1} - (n-m+1)(n-m+2)P_{n+1}^{m-1}. \quad (5.55)$$

6. En general, la EDO asociada de Legendre también posee un segundo conjunto de soluciones, no analíticas en  $x = \pm 1$ , que corresponden a las *funciones asociadas de Legendre de segunda especie*, que se obtienen a partir la ecuación (5.42), utilizando las funciones de Legendre de segunda especie  $Q_n(X)$  como derivando. Por ello, la solución general será dada por

$$y(x) = C_1 P_n^m(x) + C_2 Q_n^m(x). \quad (5.56)$$

7. La mayoría de los problemas físicos descartan esta segunda solución, ya que en general esperamos que nuestra solución sea finita en  $x = \pm 1$ , es decir, en  $\theta = 0$  y en  $\theta = \pi$ , con lo que hacemos  $C_2 = 0$ .

## 5.3. Armónicos Esféricos

Como último tema de este capítulo, analizaremos qué ocurre al resolver la ecuación de Laplace, es decir, el caso en que  $k = 0$  en la ecuación de Helmholtz. Mediante el método de separación de variables, llegamos a las ecuaciones angulares

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0 \quad (5.57)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right) \Theta = 0, \quad (5.58)$$

y a la ecuación radial

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \ell(\ell+1)R = 0, \quad (5.59)$$

donde la elección de la constante de separación  $\ell(\ell+1)$  proviene de exigir una solución analítica cuando  $\cos \theta = \pm 1$ . Luego, la solución de la ecuación (5.57) es oscilante para satisfacer la condición de periodicidad  $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$ , la solución a la ecuación (5.58) son los polinomios asociados de Legendre, y la solución para (5.59) es  $R_\ell(r) = D_\ell r^\ell + E_\ell r^{-(\ell+1)}$ .

Una solución para la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas será, por ende,

$$\begin{aligned} \psi_{m\ell}(r, \theta, \phi) &= R_\ell(r) \Theta_{m\ell}(\theta) \Phi_m(\phi) \\ &= (D_\ell r^\ell + E_\ell r^{-(\ell+1)}) C_{m\ell} P_\ell^m(\cos \theta) (A_m \cos(m\phi) + B_m \sin(m\phi)), \end{aligned} \quad (5.60)$$

o bien,

$$\psi_{m\ell}(r, \theta, \phi) = R_\ell(r) P_\ell^m(\cos \theta) C_\ell e^{im\phi}, \quad (5.61)$$

donde se cumplirá que  $-\ell \leq m \leq \ell$ .

#### Armónicos esféricos

**Definición 5.5.** Se denominan **funciones armónicas esféricas**, o simplemente **Armónicos esféricos**  $Y_\ell^m$ , a las soluciones de la parte angular de la ecuación de Laplace, definidos como

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (5.62)$$

Las constante bajo raíz permite que las funciones se encuentren normalizadas, mientras que el factor  $(-1)^m$  es convencional al trabajar en mecánica cuántica en el contexto del momento angular. Esta fase es conocida como *fase de Condon-Shortley*, y a veces es introducida en la definición de los polinomios asociados de Legendre.

### 5.3.1. Propiedades

#### Propiedad 5.4. Propiedades de los armónicos esféricos.

1. **Simetría.** Los armónicos esféricos  $Y_\ell^{-m}$  se pueden obtener según la relación

$$Y_\ell^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m (Y_\ell^m(\theta, \phi))^*. \quad (5.63)$$

2. **Paridad.** Los armónicos esféricos pueden ser pares o impares, según el valor de  $\ell$ ,

$$Y_\ell^m(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta, \phi). \quad (5.64)$$

3. **Ortonormalidad.** Los armónicos esféricos forman un conjunto ortonormal, es decir,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_j^k(\theta, \phi) Y_\ell^m(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{j,\ell} \delta_{k,m}. \quad (5.65)$$

4. **Complejitud.** EL conjunto de funciones  $\{Y_\ell^m(\theta, \phi)\}_{\ell=0, m=-\ell}^{\ell=\infty, m=\ell}$  es un *conjunto completo de funciones*, con lo que *forma una base en el espacio de funciones*, lo que se expresa como

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (Y_\ell^m(\theta, \phi))^* Y_\ell^m(\theta', \phi') = \frac{1}{\sin \theta} \delta(\phi - \phi') \delta(\theta - \theta'). \quad (5.66)$$

5. **Expansión en términos de Armónicos Esféricos.** Dada la completitud de los armónicos esféricos, cualquier función  $f(\theta, \phi)$  cuadrado integrable, es decir, que satisface

$$\int |f(\theta, \phi)|^2 d\Omega < \infty, \quad (5.67)$$

puede ser desarrollada en términos de funciones armónicas esféricas, también llamada *serie de Laplace*,

$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_\ell^m(\theta, \phi), \quad (5.68)$$

donde los coeficientes  $a_{\ell m}$  son dados por

$$a_{\ell m} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) (Y_\ell^m)^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi. \quad (5.69)$$

6. **Teorema de adición de armónicos esféricos.** Dados dos vectores unitarios  $\hat{r}_1$  y  $\hat{r}_2$ , con direcciones  $(\theta_1, \phi_1)$  y  $(\theta_2, \phi_2)$ , podemos obtener el ángulo  $\gamma$  formado entre ambos vectores como

$$\hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 = \cos \gamma = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos \phi_1 \cos \phi_2, \quad (5.70)$$

y podremos hallar los polinomios de Legendre de este ángulo como

$$P_\ell(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta_1, \phi_1) (Y_\ell^m(\theta_2, \phi_2))^*. \quad (5.71)$$

En particular, cuando  $\gamma = 0$ , y por ende  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$  y  $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ , obtenemos que

$$P_\ell(1) = 1 = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y_\ell^m(\theta, \phi)|^2, \quad (5.72)$$

y así,

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y_\ell^m(\theta, \phi)|^2 = \frac{2\ell + 1}{4\pi}. \quad (5.73)$$

**Ejemplo 5.3.** Dada una partícula cuántica en presencia de un potencial central  $V(r)$ , su movimiento es descrito por la ecuación de Schrödinger (3.11), tal que

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + V(r) \right] \psi = E \psi .$$

Notemos que, bajo la sustitución

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V(r) - E) ,$$

y reordenando términos, nuestra ecuación puede escribirse como

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + k^2 \right] \psi = 0 ,$$

lo que corresponde a la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas (4.32), por lo que al realizar separación de variables, llegaremos a las ecuaciones angulares (5.57) y (5.58). De esta forma, **para cualquier potencial central**, la componente angular del movimiento tendrá por solución los armónicos esféricos  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ .

**Ejemplo 5.4.** En mecánica cuántica, puede utilizarse el llamado *formalismo de primera cuantización*, donde se asume que cantidades físicas como posición y momentum corresponden a *operadores* en un espacio vectorial de dimensión infinita. Comúnmente se trabaja en el llamado *espacio de posiciones*, que corresponde al espacio vectorial formado por todos los vectores posición  $\vec{x}$  en tres dimensiones.

Podemos entender estos operadores como *matrices de dimensión infinita*, por lo que tendrán valores y vectores propios. Sin embargo, los vectores propios no corresponden necesariamente a vectores tuplas, sino que pueden corresponder a *funciones*, pues ellas también son vectores en un espacio vectorial, el *espacio de funciones*.

El operador *momento angular* se define como un vector en “tres dimensiones”, cuyas componentes pueden escribirse en coordenadas esféricas como

$$\begin{aligned} L_x &= i\hbar \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ L_y &= i\hbar \left( -\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ L_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} , \end{aligned}$$

y su “operador norma” se puede escribir como

$$L^2 = -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) .$$

En este contexto, es sabido que los operadores  $L^2$  y  $L_z$  comparten las mismas funciones propias  $\psi(r, \theta, \phi)$ , de modo que ellas satisfacen

$$L^2 \psi = -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \psi = -\ell(\ell+1)\hbar^2 \psi$$

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = m\hbar \psi.$$

Derivando respecto a  $\phi$  la segunda ecuación, tenemos que

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = im \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = (im)(im)\psi = -m^2 \psi,$$

de modo que reemplazando en  $L^2 \psi$ , tenemos que

$$L^2 \psi - \ell(\ell+1)\hbar^2 \psi = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \left( \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \right] \psi,$$

con lo que nuestro sistema de ecuaciones se ha convertido en las ecuaciones (5.57) y (5.58), cuyas soluciones son los armónicos esféricos. Así, concluimos que las funciones propias comunes a  $L^2$  y  $L_z$  son los armónicos esféricos, pudiendo escribir que

$$L^2 Y_\ell^m(\theta, \phi) = \ell(\ell+1)\hbar^2 Y_\ell^m(\theta, \phi)$$

$$L_z Y_\ell^m(\theta, \phi) = m\hbar Y_\ell^m(\theta, \phi).$$

¿Por qué es útil este hecho? Definiendo los operadores  $L_\pm = L_x \pm iL_y$ , tendremos que estos satisfacen

$$L_\pm Y_\ell^m(\theta, \phi) = \hbar \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)} Y_\ell^{m \pm 1}(\theta, \phi),$$

por lo que podemos construir una base para las componentes angulares de nuestro espacio vectorial con propiedades bien conocidas, facilitando el estudio del momento angular.



## Funciones de Bessel

Cuando resolvemos la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas, obtenemos una EDO para la coordenada radial, que bajo el cambio de variable  $x = n\rho$ , tomará la forma

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)y = 0, \quad (6.1)$$

conocida como la **ecuación de Bessel**.

Si bien, al surgir del desarrollo de la ecuación de Helmholtz, se ha impuesto que  $m$  es un valor entero, esta no es una restricción propia de la EDO de Bessel, por lo que comúnmente se denota a esta constante como  $\nu$ , la que puede tomar *valores reales no negativos*<sup>1</sup>.

### 6.1. Funciones de Bessel

#### 6.1.1. Resolviendo la ecuación de Bessel mediante el método de Series

En la EDO de Bessel,  $P(x) = 1/x$  y  $Q(x) = 1/x^2$ , de modo que es claro que  $x = 0$  es un punto *singular regular*, pues  $xP(x)$  y  $x^2Q(x)$  son analíticas en  $x = 0$ . Dado el tipo de singularidad, el teorema de Fuchs 4.1 nos asegura la existencia de una solución para la EDO mediante el método de Frobenius. Así, proponemos una solución de la forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k}, \quad (6.2)$$

que tras derivarla, podemos incluirla en la ecuación de Bessel, obteniendo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (s+k)(s+k-1)x^{k+s} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (s+k)x^{s+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{s+k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \nu^2 x^{s+k} = 0. \quad (6.3)$$

<sup>1</sup>Comúnmente, se utilizan letras latinas para denotar números enteros, y letras griegas para números reales.

Haciendo  $k = 0$ , obtenemos el coeficiente que acompañará a  $x^s$ , la potencia de  $x$  más pequeña que aparecerá al lado izquierdo de la ecuación, de modo que, como en general  $x^s \neq 0$ , tenemos

$$a_0 [s(s-1) + s - \nu^2] = 0, \quad (6.4)$$

y como por definición  $a_0 \neq 0$ , obtenemos la **ecuación indicial**

$$s^2 - \nu^2 = 0, \quad (6.5)$$

cuyas soluciones son  $s = \pm \nu$ .

Haciendo lo mismo para  $k = 1$ , tenemos la ecuación

$$a_1 [(s+1)s + s + 1 - \nu^2] = 0, \quad (6.6)$$

que puede ser reescrito como

$$a_1 (s+1-\nu)(s+1+\nu) = 0, \quad (6.7)$$

y como anteriormente impusimos que  $s = \pm \nu$ , tendremos que

$$a_1 (1+2\nu) = 0, \quad (6.8)$$

de modo al suponer que  $\nu \neq -1/2$ , requerimos que  $a_1 = 0$ .

Siguiendo el mismo proceso con los siguientes términos, podemos llegar a la relación de recurrencia

$$a_{k+2} = -a_k \frac{1}{(s+\nu+(k+2))(s-\nu+(k+2))}. \quad (6.9)$$

Es más, ya que los coeficientes impares se anulan al ser  $a_1 = 0$ , podemos escribir la relación de recurrencia únicamente para los coeficientes pares, de modo que

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k} k! (\nu+1)(\nu+2) \dots (\nu+k)} a_0. \quad (6.10)$$

### Función Gamma

**Definición 6.1.** Definimos la **función Gamma** como una extensión de la función factorial para números no enteros, tal que

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = (x-1)\Gamma(x-1), \quad (6.11)$$

que en el caso en que  $x = n$ , tendremos que

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (6.12)$$

Si  $x = -n$ , la función Gamma *diverge*, con lo que

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0. \quad (6.13)$$



Gracias a la definición de la función Gamma, podemos reescribir la relación de recurrencia (6.10) como

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{\Gamma(\nu + 1)}{2^{2k} k! \Gamma(\nu + k + 1)} a_0. \quad (6.14)$$

#### Observación

Existe una variedad de definiciones alternativas para la función Gamma, particularmente aquellas que tienen que ver con su extensión a los números negativos y complejos. Sin embargo, no cumplen un propósito para este curso. Pueden encontrar las definiciones alternativas en el capítulo 13 de [6].

#### Caso $\nu$ no entero

Dado un valor  $a_0$  arbitrario, será solución de la EDO de Bessel cualquier función de la forma

$$y_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\nu + 1)}{2^{2k} k! \Gamma(\nu + k + 1)} x^{2k+\nu}. \quad (6.15)$$

En particular, nos interesa la solución obtenida al escoger el valor convencional

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1 + \nu)}. \quad (6.16)$$

**Definición 6.2.** Se conoce como **función de Bessel de primera especie y de orden  $\nu$**  a la solución hallada por el método de Frobenius de la forma (6.15), donde  $a_0$  toma el valor convencional (6.16), es decir,

**Funciones de Bessel de primera especie**

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \quad (6.17)$$

Dado que la ecuación de Bessel (6.1) depende del cuadrado de  $\nu$ , podemos también definir la **función de Bessel de orden  $-\nu$** ,

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k - \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}. \quad (6.18)$$

#### Observación

Cuando  $\nu$  es positivo, pero no entero,  $J_\nu(0) = 0$ , mientras que  $J_{-\nu}(0)$  es divergente.

Cuando  $\nu$  no es un número entero,  $J_{\pm\nu}$  son funciones linealmente independientes, por lo que una solución general a la ecuación de Bessel será

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x). \quad (6.19)$$

**Observación**

¿Qué pasaría si suponemos que  $\nu = -1/2$ ? En este caso, no podemos suponer que  $a_1$  se anulará, de modo que obtendríamos la relación de recurrencia

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}. \quad (6.20)$$

Como consecuencia, si  $n$  es par, entonces

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{(2k)!}, \quad (6.21)$$

mientras que si  $n$  es impar, entonces

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{a_1}{(2k+1)!}. \quad (6.22)$$

Así, al reemplazar en la solución (6.2), tendremos que la solución será de la forma

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} (a_0 \cos x + a_1 \sin x), \quad (6.23)$$

las que no son independientes, sino que son combinaciones lineales de  $J_{1/2}(x)$  y de  $J_{-1/2}(x)$ .

**Caso  $\nu$  entero**

En este caso, podemos nuevamente hallar una solución de la forma (6.17), reemplazando la función Gamma por la función factorial, esto es,

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \quad (6.24)$$

¿Qué ocurre con las funciones de orden  $-n$ ? Como se mencionó anteriormente, la función Gamma diverge para valores enteros negativos, de modo que mientras  $k - n < 0$ , los términos dentro de la suma no contribuirán a la función de Bessel. Tenemos, pues,

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \quad (6.25)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)! \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+n)-n} \quad (6.26)$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+n)! k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \quad (6.27)$$

$$= (-1)^n J_n(x). \quad (6.28)$$

Dado que

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad (6.29)$$

ambas soluciones ya no son linealmente independientes. Por ello, deberemos hallar otra solución a la ecuación de Bessel para estos casos.

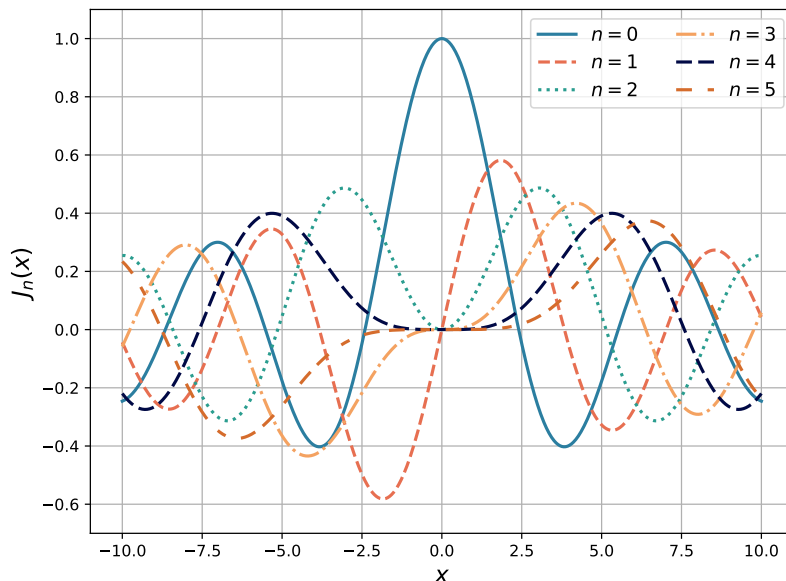


Figura 6.1: Funciones de Bessel de orden entero para  $n$  entre 0 y 5. Adaptación de [este código](#). La adaptación se encuentra [aquí](#).

### 6.1.2. Funciones de Bessel de segunda especie, o de Neumann

Mediante el método de Frobenius, podemos también encontrar soluciones logarítmicas. Mediante este método, podemos encontrar que una segunda solución de este tipo.

**Definición 6.3.** Se denominan **funciones de Bessel de segunda especie**  $Y_\nu(x)$ , o **funciones de Neumann**  $N_\nu(x)$  a las soluciones de tipo logarítmica obtenidas a partir del método de Frobenius para la EDO de Bessel (6.1), linealmente independientes a  $J_\nu(x)$ .

Alternativamente, las definimos más comúnmente como

$$Y_\nu(x) = N_\nu(x) = \frac{\cos(\pi \nu) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi \nu)}, \quad \nu \notin \mathbb{Z}. \quad (6.30)$$

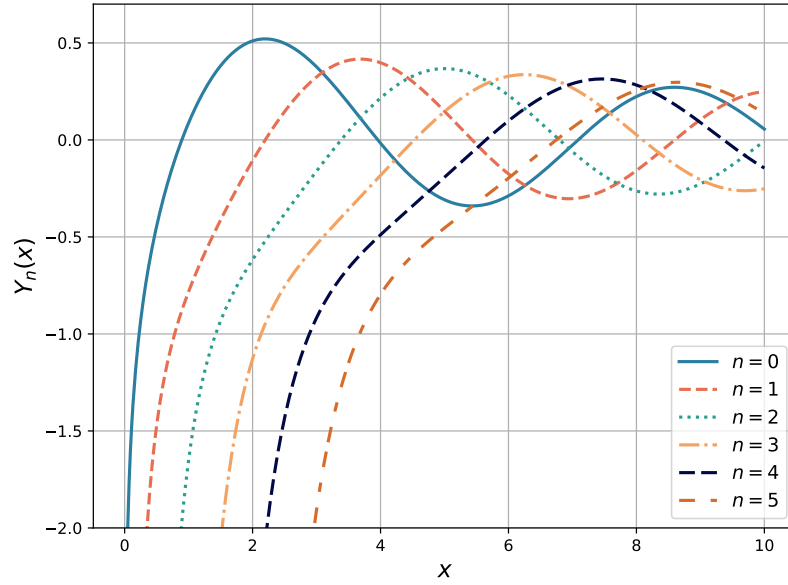


Figura 6.2: Funciones de Neumann de orden entero para  $n$  entre 0 y 5. Adaptación de [este código](#). La adaptación se encuentra [aquí](#).

En base a esta definición, podemos también escribir las soluciones generales de la ecuación de Bessel como

$$y(x) = C_3 J_\nu(x) + C_4 Y_\nu(x). \quad (6.31)$$

La definición dada más arriba es válida para números *no enteros*. Cuando deseamos trabajar con números enteros, es posible demostrar, usando la regla de L'Hôpital, que esta solución sigue siendo linealmente independiente en el límite en que  $\nu \rightarrow n$ , de modo que

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\cos(\pi \nu) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi \nu)}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6.32)$$

Nótese que estas funciones divergen para  $x = 0$ , como se observa más claramente en la figura 6.2.

De forma similar a las funciones de Bessel de primera especie, estas satisfacen, para orden entero,

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x). \quad (6.33)$$

### 6.1.3. Funciones de Hankel

**Definición 6.4.** Se definen las **funciones de Hankel**  $H_\nu^{(1)}(x)$  y  $H_\nu^{(2)}(x)$  como dos soluciones linealmente independientes para la EDO de Bessel (6.1), dadas por **Funciones de Hankel**

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x), \quad (6.34)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x). \quad (6.35)$$

¿Por qué definimos otro tipo de soluciones a la EDO de Bessel? Pues es útil trabajar con funciones de Hankel al estudiar soluciones de la ecuación de onda, e históricamente ha sido la ruta a seguir. Además, mediante su representación integral (que mencionaremos más adelante), es posible mostrar<sup>2</sup> que las funciones de Hankel satisfacen las relaciones

$$H_\nu^{(1)}(x) = e^{-i\nu\pi} H_{-\nu}^{(1)}(x), \quad (6.36)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = e^{i\nu\pi} H_{-\nu}^{(2)}(x). \quad (6.37)$$

### 6.1.4. Función generatriz (para orden entero)

En el caso en que  $\nu$  es un número entero, podemos escribir una función generatriz de una forma análoga a cualquier polinomio ortogonal, a pesar de que las funciones de Bessel no son polinomios. En este caso, esta tiene la forma

$$G(x, t) = \exp \left[ \frac{x}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n. \quad (6.38)$$

Es directo verificar la segunda igualdad al expandir la exponencial en una serie de potencias para  $t$ . Gracias a la función generatriz, podemos hallar de una forma más sencilla algunas propiedades para las funciones de Bessel de orden entero.

### 6.1.5. Ceros de las funciones de Bessel

Las funciones de Bessel son funciones oscilantes, pero no periódicas. Por ello, si bien tienen infinitos ceros (puntos para los cuales  $J_\nu(x) = 0$ ), no existe una forma analítica de calcularlos. Por este motivo, estos valores son calculados de forma numérica a partir de, por ejemplo, la expresión en serie para las funciones de Bessel. Denotaremos la  $n$ -ésima raíz de la función de Bessel de orden  $\nu$  como  $\alpha_{\nu,n}$ , tal que  $J(\alpha_{\nu,n}) = 0$ . Además, estas cumplen que  $\alpha_{\nu,n+1} > \alpha_{\nu,n}$ . Mostramos algunos ceros para funciones de orden entero en la tabla 6.1.

De igual manera, a veces es necesario utilizar los ceros de las derivadas de las funciones de Bessel, los que denotaremos por  $\beta_{\nu,n}$ . Ellos, al igual que los  $\alpha_{\nu,n}$ , satisfacen que  $\beta_{\nu,n+1} > \beta_{\nu,n}$ . Algunos valores numéricos se presentan en la tabla 6.2.

<sup>2</sup>Puede encontrar el detalle en [6], pues no considero relevante hacerlo aquí.

$\alpha_{\nu,n}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$\nu = 0$	2.4048255	5.5200781	8.6537279	11.7915344	14.9309177
$\nu = 1$	3.8317059	7.0155866	10.1734681	13.3236919	16.4706300
$\nu = 2$	5.1356223	8.4172441	11.6198411	14.7959517	17.9598194
$\nu = 3$	6.3801619	9.7610231	13.0152007	16.2234661	19.4094152
$\nu = 4$	7.5883424	11.0647094	14.3725366	17.6159660	20.8269329

Cuadro 6.1: Las primeras raíces  $\alpha_{\nu,n}$  de  $J_\nu(x)$ ,  $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$ . Un Código Python para hallarlas se encuentra disponible en [este](#) notebook.

$\beta_{m,n}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$m = 0$	3.8317059	7.0155866	10.1734681	13.3236919	16.4706300
$m = 1$	1.8411837	5.3314427	8.5363163	11.7060049	14.8635886
$m = 2$	3.0542369	6.7061331	9.9694678	13.1703708	16.3475223
$m = 3$	4.2011889	8.0152366	11.3459243	14.5858482	17.7887478
$m = 4$	5.3175531	9.2823962	12.6819084	15.9641070	19.1960288

Cuadro 6.2: Las primeras raíces  $\beta_{m,n}$  de  $J'_m(x)$ ,  $m = 0, 1, 2, 3, 4$ . Un Código Python para hallarlas se encuentra disponible en [este](#) notebook.

## 6.1.6. Propiedades

### Propiedad 6.1. Propiedades de las funciones de Bessel

1. **Ortogonalidad respecto a las raíces.** Para valores de  $\nu$  no negativos, para  $a > 0$  y para  $n, m \in \mathbb{N}$ , se tiene que

$$\int_0^a x J_\nu \left( \frac{\alpha_{\nu,n}}{a} x \right) J_\nu \left( \frac{\alpha_{\nu,m}}{a} x \right) dx = \frac{a^2}{2} [J'_\nu(\alpha_{\nu,n})]^2 \delta_{n,m} = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(\alpha_{\nu,n})]^2 \delta_{n,m}. \quad (6.39)$$

Similarmente, para las raíces de la derivada de la función de Bessel, se tiene

$$\int_0^a x J_\nu \left( \frac{\beta_{\nu,n}}{a} x \right) J_\nu \left( \frac{\beta_{\nu,m}}{a} x \right) dx = \frac{a^2}{2} \left( 1 - \frac{\nu^2}{\beta_{\nu,n}^2} \right) [J_\nu(\beta_{\nu,n})]^2. \quad (6.40)$$

2. **Ortogonalidad respecto al orden.** Las funciones de Bessel, en general, *no son ortogonales respecto a los índices*, es decir,  $\langle J_\mu(x), J_\nu(x) \rangle \neq 0$ .
3. **Complejitud.** Las funciones de Bessel (de orden no negativo) forman un *conjunto completo* de funciones en el intervalo  $[0, a]$ , lo que se puede representar aproximadamente como [27]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{\nu-1} \left( \frac{\alpha_{\mu,k}}{a} x \right) J_{\nu-1} \left( \frac{\alpha_{\mu,k}}{a} y \right)}{[J_{\mu+1}(\alpha_{\mu,k})]^2} = \frac{a}{2x} \delta \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{a} \right), \quad (6.41)$$

donde  $\mu + 1 \geq \nu$ , y  $\mu - \nu > 1$ .

4. **Serie de Fourier-Bessel.** Dado que las funciones de Bessel forman una base en el intervalo  $[0, a]$ , podemos expandir cualquier función en una Serie de Fourier-Bessel, tal que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{v,n} J_v \left( \alpha_{v,n} \frac{x}{a} \right), \quad (6.42)$$

donde

$$c_{v,n} = \frac{2}{a^2 [J_{v+1}(\alpha_{v,n})]^2} \int_0^a x f(x) J_v \left( \alpha_{v,n} \frac{x}{a} \right) dx. \quad (6.43)$$

5. **Representación Integral.** Por motivos históricos, las funciones de Bessel fueron encontradas como soluciones a ecuaciones integrales. Por ello, listamos las representaciones integrales más comunes, que pueden ser obtenidas como una Serie de Laurent de la función generatriz.

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin t) dt, \quad (6.44)$$

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu t - x \sin t) dt - \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \sinh t - \nu t} dt, \quad (6.45)$$

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin t - nt) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [e^{nt} + (-1)^n e^{-nt}] e^{-x \sinh t} dt. \quad (6.46)$$

Gracias a ellas, podemos obtener tres resultados interesantes, los que son

$$\cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos(2n\theta), \quad (6.47)$$

$$\sin(x \sin \theta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x) \sin((2n-1)\theta), \quad (6.48)$$

y para el caso en que  $\theta = 0$ ,

$$J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) = 1. \quad (6.49)$$

6. **Comportamiento asintótico.** En el límite en que  $x$  toma valores *muy grandes*, generalmente entendido como  $x \gg |\nu^2 - 1/4|$ , podemos representar las funciones de Bessel como

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left( x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad (6.50)$$

$$Y_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left( x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad (6.51)$$

$$H_\nu^{(1)}(x) = H_\nu^{(2)}(x)^* = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left[ i \left( x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (6.52)$$

7. **Relaciones de Recurrencia.** Por definición, cualquier función de Bessel (incluyendo las de Neumann y de Hankel) debe satisfacer las siguientes relaciones de recurrencia:

$$Z_{n+1}(x) + Z_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} Z_n(x), \quad (6.53)$$

$$Z_{n+1}(x) - Z_{n-1}(x) = -2Z'_n(x). \quad (6.54)$$

8. **Relaciones con derivadas.** A partir de las relaciones de recurrencia, es posible mostrar que cualquier función de Bessel satisface

$$x^\nu Z_{\nu-1}(x) = \frac{d}{dx} [x^\nu Z_\nu(x)], \quad (6.55)$$

$$-x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x) = \frac{d}{dx} [x^{-\nu} Z_\nu(x)], \quad (6.56)$$

$$\frac{d}{dx} [Z_\nu(x)] = \frac{1}{2} [Z_{\nu-1}(x) - Z_{\nu+1}(x)]. \quad (6.57)$$

**Ejemplo 6.1. (Butkov, sección 9.7, ejemplo 1.)** Las vibraciones libres de una membrana circular son descritas por la ecuación de onda bidimensional

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

donde hemos considerado que el origen de nuestro sistema coordenado se encuentra en el centro de la membrana. [10]

Considere una membrana de radio  $a$  fijada en sus contornos, de modo que

$$u(\rho = a, \phi; t) = 0,$$

y sujeta a las condiciones iniciales para el desplazamiento y la velocidad transversales dadas por

$$u(r, \phi; t = 0) = u_0(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, \phi; t = 0) = v_0(r),$$

es decir, que el desplazamiento posee simetría radial. Encuentre la función que describe el comportamiento de la membrana en cualquier instante de tiempo.

**Solución.** Separando variables, hallamos las ecuaciones

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = \lambda v^2 T,$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \lambda_1 \Phi,$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( -\lambda + \frac{\lambda_1}{r^2} \right) R = 0.$$



Físicamente, el comportamiento temporal deberá ser oscilatorio y no exponencial, de modo que  $\lambda \leq 0$ . En particular, estableceremos  $\lambda = -k^2$ , donde  $kv = \omega$  es el número de onda. Por otra parte, la componente angular deberá satisfacer la condición de periodicidad, lo que nos lleva a la elección de  $\lambda_1 = -m^2$ . Sin embargo, al suponer simetría radial, tendremos que solo  $m = 0$  será una solución adecuada. Luego, las soluciones a estas componentes son

$$\begin{aligned} T(t) &= e^{-i\omega t}, \\ \Phi(\phi) &= C. \end{aligned}$$

Con estos cambios, observamos que la ecuación radial corresponde a la ecuación de Bessel de orden 0, cuya solución general es

$$R(r) = C_1 J_0(kr) + C_2 N_0(kr).$$

Rápidamente descartamos la presencia de las funciones de Neumann, puesto que ellas divergen en  $r = 0$ . Por ello, imponemos que  $C_2 = 0$ . Aplicando nuestra condición de borde, la ecuación radial deberá cumplir que

$$J_0(ka) = 0.$$

En términos de los ceros de las funciones de Bessel, tenemos que  $k$  deberá ser tal que

$$k_{0n} = \frac{\alpha_{0n}}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Dado que la función debe ser real, los coeficientes de  $\exp(i\omega t)$  deben ser el complejo conjugado de los de  $\exp(-i\omega t)$ . Así, la solución general de este problema tendrá la forma

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\alpha_{0n} \frac{r}{a}\right) \left[ A_{0n} e^{i\omega_{0n} t} + A_{0n}^* e^{-i\omega_{0n} t} \right],$$

donde  $\omega_{0n} = vk_{0n} = \alpha_{0n}(v/a)$ .

Ahora podemos imponer nuestras condiciones iniciales, de modo que

$$u_0(r) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\alpha_{0n} \frac{r}{a}\right) \left[ A_{0n} + A_{0n}^* \right],$$

y para las velocidades,

$$v_0(r) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\alpha_{0n} \frac{r}{a}\right) i\omega_{0n} \left[ A_{0n} - A_{0n}^* \right].$$

Para determinar los coeficientes  $A_{0n}$ , multipliquemos a ambos lados por un factor

$$tJ_0(\alpha_{0n'})$$

e integremos sobre  $r$  en el intervalo entre 0 y  $a$ , de modo que utilizando la ortogonalidad de las funciones de Bessel respecto de sus raíces, tenemos que

$$\int_0^a u_0(r) \cdot r J_0\left(\alpha_{0n} \frac{r}{a}\right) dr = \frac{a^2}{2} [J_1(\alpha_{0n})]^2 (A_{0n} + A_{0n}^*).$$

Siguiendo un procedimiento análogo con la velocidad, hemos encontrado que

$$\int_0^a v_0(r) \cdot r J_0\left(\alpha_{0n} \frac{r}{a}\right) dr = i\omega_{0n} \frac{a^2}{2} [J_1(\alpha_{0n})]^2 (A_{0n} - A_{0n}^*).$$

A partir de ambas expresiones, podremos obtener los coeficientes  $A_{0n}$  y  $A_{0n}^*$  como

$$A_{0n} = \frac{1}{\pi a^2 [J_1(\alpha_{0n})]^2} \int_0^a \left[ u_0(r) - \frac{i}{\omega_{0n}} v_0(r) \right] r J_0\left(\alpha_{0n} \frac{r}{a}\right) dr.$$

## 6.2. Funciones modificadas de Bessel

¿Qué pasaría si, en la ecuación (6.1),  $x^2$  tuviera signo negativo en lugar de positivo? Es decir, si la ecuación toma la forma

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + \nu^2) y = 0. \quad (6.58)$$

Esta ecuación es conocida como la **ecuación modificada de Bessel**, y sus soluciones, a diferencia de las funciones de Bessel, *no son oscilantes*, sino que su comportamiento es exponencial. Por suerte, métodos análogos a los utilizados anteriormente nos permiten encontrar soluciones a esta ecuación.

### Funciones modificadas de Bessel

**Definición 6.5.** Un conjunto particular de soluciones a la ecuación modificada de Bessel (6.58) corresponde a las **funciones modificadas de Bessel de primera especie**,  $I_\nu(x)$ , y a las **funciones modificadas de Bessel de segunda especie**,  $K_\nu(x)$ , definidas como

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad (6.59)$$

$$K_\nu(x) = i^{\nu+1} \frac{\pi}{2} H_\nu^{(1)}(ix) = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)} \right], \quad \nu \notin \mathbb{Z}. \quad (6.60)$$

De forma análoga a lo ocurrido para las funciones de Bessel de segunda especie, en caso en que  $\nu$  sea entero, las funciones modificadas de segunda especie se definen como el límite

$$K_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\pi}{2} \left[ \frac{I_{-\nu}(x) - I_{\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \right], \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6.61)$$

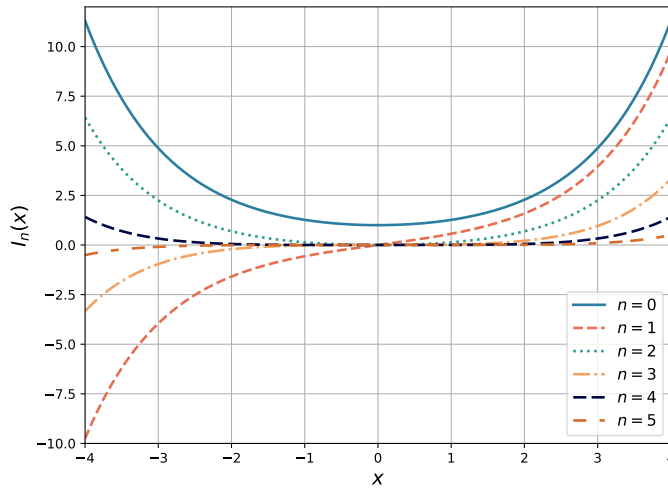


Figura 6.3: Funciones de Bessel modificadas de primera especie. Figura adaptada a partir de [este código](#). La adaptación se encuentra [aquí](#).

## 6.2.1. Propiedades

### Propiedad 6.2. Propiedades de las funciones modificadas de Bessel.

1. **Comportamiento asintótico.** En el límite en que  $x$  toma valores *muy grandes*, generalmente entendido como  $x \gg |\nu^2 - 1/4|$ , podemos representar las funciones de Bessel como

$$I_{\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x, \quad (6.62)$$

$$K_{\nu}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}. \quad (6.63)$$

2. **Relaciones de recurrencia.** Las funciones modificadas de Bessel satisfacen las

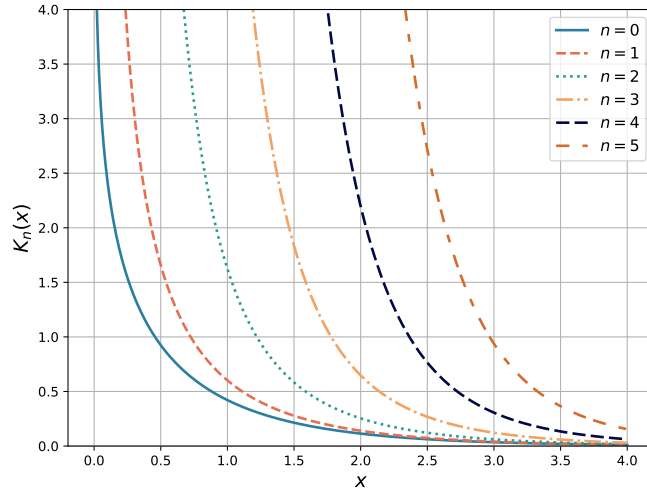


Figura 6.4: Funciones de Bessel modificadas de segunda especie. Figura adaptada a partir de [este código](#). La adaptación se encuentra [aquí](#).

siguientes relaciones de recurrencia,

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_{\nu}(x), \quad (6.64)$$

$$K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} K_{\nu}(x), \quad (6.65)$$

$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I'_{\nu}(x), \quad (6.66)$$

$$K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) = -2K'_{\nu}(x). \quad (6.67)$$

3. **Relaciones con derivadas.** A partir de las relaciones de recurrencia, podemos hallar las relaciones

$$x^{\nu} I_{\nu-1}(x) = \frac{d}{dx} [x^{\nu} I_{\nu}(x)], \quad (6.68)$$

$$-x^{\nu} K_{\nu-1}(x) = \frac{d}{dx} [x^{\nu} K_{\nu}(x)], \quad (6.69)$$

$$x^{-\nu} I_{\nu+1}(x) = \frac{d}{dx} [x^{-\nu} I_{\nu}(x)], \quad (6.70)$$

$$-x^{-\nu} K_{\nu+1}(x) = \frac{d}{dx} [x^{-\nu} K_{\nu}(x)]. \quad (6.71)$$

**Ejemplo 6.2. (Butkov, sección 9.11.)** Considere un cilindro circular sólido de radio  $b$  y longitud  $L$ . Las bases del cilindro se mantienen a temperatura cero,  $u(z = 0, t) = u(z = L, t) = 0$ , mientras que su superficie lateral es mantenida a una temperatura

$u(\rho = b, t) = T_1$  constante. Encuentre la distribución de temperatura en el interior del cilindro en el estado estacionario.

**Solución.** Cuando nos referimos a *estado estacionario*, nos referimos al caso en que la temperatura se mantenga constante en el tiempo. Dado este requisito, la ecuación de difusión del calor se convertirá en la ecuación de Laplace, pues

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Dado que el sistema es un cilindro, también imponemos la condición de periodicidad sobre la variable angular, es decir,  $u(\rho, \phi, z) = u(\rho, \phi + 2\pi, z)$ . Realizando separación de variables, tendremos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= \lambda_1 Z, \\ \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} &= \lambda_2 \Phi, \\ \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \left[ \rho \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\rho} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Imponiendo nuestras condiciones de contorno, concluimos que  $\lambda_1 = -n^2\pi^2/L^2$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$  (solución oscilante), y  $\lambda_2 = -m^2$  para  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Así, la ecuación para  $P$  se convierte en

$$\frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) - \left[ \rho \frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2}{\rho} \right] = 0,$$

lo que corresponde a la EDO modificada de Bessel. Esto se aprecia de forma más clara bajo el cambio de variable  $x = n\pi\rho/L$ ,  $P(\rho) = y(x)$ , donde tendremos

$$x^2 \frac{d^2 y}{dy^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + m^2)y = 0.$$

Esta EDO tiene por solución general a las funciones modificadas de Bessel, tal que

$$P_{mn}(\rho) = A_{mn} I_m \left( \frac{n\pi\rho}{L} \right) + B_{mn} K_m \left( \frac{n\pi\rho}{L} \right).$$

Ahora, dado que trabajamos con un cilindro de radio finito,  $\rho \rightarrow \infty$  no es parte de nuestro dominio, por lo que la función  $I_m(x)$  está definida para nuestro problema. En cambio, dado que  $\rho = 0$  es parte de nuestro dominio, y la función  $K_m(x)$  diverge para  $x = 0$ , descartamos esta solución imponiendo que  $B_{mn} = 0$ .

Por otro lado, dado que nuestro sistema posee simetría axial como consecuencia de la condición de contorno  $u(\rho = b) = T_1$ , pues este valor es válido para cualquier valor

de  $\phi$ , podemos concluir que basta con considerar el caso en que  $m = 0$ , de modo que la solución para  $P(\rho)$  es dada por

$$P_n(\rho) = A_n I_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right),$$

mientras que la solución general al problema es de la forma

$$u(\rho, \phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) I_0\left(\frac{n\pi\rho}{L}\right),$$

donde el coeficiente  $A_n$  se obtiene imponiendo la condición de contorno  $u(\rho = b) = T_1$ . Queda como ejercicio para el lector comprobar que luego de imponer la condición de contorno, la solución a nuestro problema será

$$u(\rho, \phi, z) = \frac{4T_1}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{I_0(n\pi\rho/L) \sin(n\pi z/L)}{I_0(n\pi b/L)}.$$

### 6.3. Funciones esféricas de Bessel

Hemos discutido que las funciones de Bessel surgen como solución de la *EDO radial* que surge de separar la ecuación de Helmholtz para coordenadas cilíndricas, que denominamos EDO de Bessel. De manera análoga, la EDO radial que surge en coordenadas esféricas es denominada **ecuación esférica de Bessel**, y es dada por

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \ell(\ell+1))y = 0, \quad (6.72)$$

donde hemos realizado el cambio de variables  $x = kr$ .

Notemos que, bajo la sustitución  $y(x) = x^{-1/2}S(x)$ , la ecuación toma la forma

$$x^2 \frac{d^2 S}{dx^2} + x \frac{dS}{dx} + \left[ x^2 - \left( \ell + \frac{1}{2} \right)^2 \right] S = 0, \quad (6.73)$$

que al comparar con (6.1), notamos que corresponde a la ecuación de Bessel de orden  $\ell + 1/2$ . Por ello, una solución de esta ecuación será

$$y(x) = C_1 \frac{J_{\ell+1/2}(x)}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{Y_{\ell+1/2}(x)}{\sqrt{x}}, \quad (6.74)$$

donde las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se determinan a partir de las condiciones de contorno. En particular, cuando deseamos soluciones que sean finitas en el origen, escogeremos  $C_2 = 0$ .

**Definición 6.6.** Las **funciones esféricas de Bessel** de primera y segunda especie corresponden a las soluciones de la ecuación esférica de Bessel (6.73) dadas por

**Funciones esféricas de Bessel**

$$j_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+1/2}(x), \quad (6.75)$$

$$y_\ell(x) = n_\ell(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{\ell+1/2}(x). \quad (6.76)$$

Vale la pena hacer notar que

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad (6.77)$$

$$y_0(x) = -\frac{\cos x}{x}. \quad (6.78)$$

Además, cuando  $\ell$  corresponde a un número entero, las funciones esféricas de Bessel satisfacen que

$$y_{\ell+1/2}(x) = (-1)^{\ell+1} j_{-\ell-1/2}(x), \quad (6.79)$$

lo que es consecuencia de su relación con las funciones de Bessel de orden semientero.

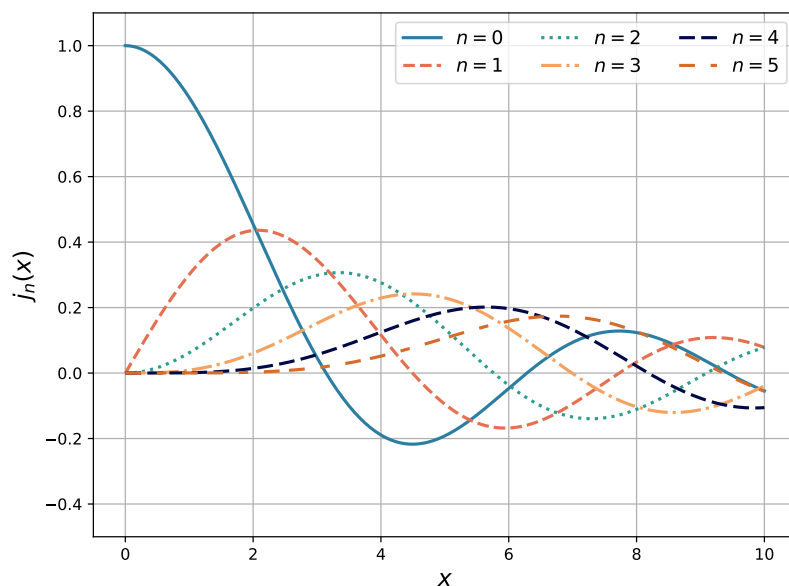


Figura 6.5: Funciones esféricas de Bessel de orden entero para  $n$  entre 0 y 5. Adaptación de [este](#) código. La adaptación se encuentra [aquí](#).

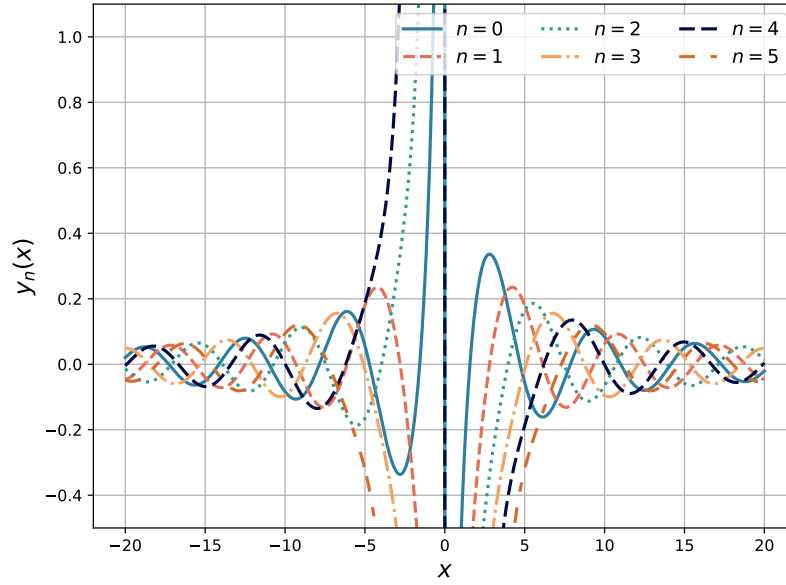


Figura 6.6: Funciones esféricas de Neumann de orden entero para  $n$  entre 0 y 5. Adaptación de [este](#) código. La adaptación se encuentra [aquí](#).

### 6.3.1. Función generatriz (para orden entero)

Las funciones esféricas de Bessel de orden entero pueden obtenerse a partir de las siguientes funciones generatrices

$$G_j(x, t) = \frac{1}{x} \cos(\sqrt{x^2 - 2xt}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} j_{n-1}(x), \quad (6.80)$$

$$G_y(x, t) = \frac{1}{x} \sin(\sqrt{x^2 - 2xt}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} y_{n-1}(x). \quad (6.81)$$

### 6.3.2. Ceros de las funciones esféricas de Bessel

Al igual que en el caso de las funciones de Bessel, no es posible hallar las raíces de las funciones esféricas de Bessel de forma analítica, por lo que en la tabla 6.3 presentamos algunos ceros para funciones de orden entero. A su vez, en la tabla 6.4 presentamos los ceros de su primera derivada.

### 6.3.3. Propiedades

#### Propiedad 6.3. Propiedades de las funciones esféricas de Bessel.

1. **Ortogonalidad respecto a las raíces.** A partir de la ortogonalidad de las fun-



$\alpha_{n,p}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$\nu = 0$	3.1416	6.2832	9.4248	12.5664	15.7080
$\nu = 1$	4.4934	7.7253	10.9041	14.0662	17.2208
$\nu = 2$	5.7635	9.0950	12.3229	15.5146	18.6890
$\nu = 3$	6.9879	10.4171	13.6980	16.9236	20.1218
$\nu = 4$	8.1826	11.7049	15.0397	18.3013	21.5254

Cuadro 6.3: Las primeras raíces  $\alpha_{n,p}$  de  $j_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ . Valores tomados del capítulo 14 de [6].

$\beta_{n,p}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$\nu = 0$	4.4934	7.7253	10.9041	14.0662	17.2208
$\nu = 1$	2.0816	5.9404	9.2058	12.4044	15.5792
$\nu = 2$	3.3421	7.2899	10.6139	13.8461	17.0429
$\nu = 3$	4.5141	8.5838	11.9727	15.2445	18.4681
$\nu = 4$	5.6467	9.8404	13.2956	16.6093	19.8624

Cuadro 6.4: Las primeras raíces  $\beta_{n,p}$  de  $j'_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ . Valores tomados del capítulo 14 de [6].

ciones de Bessel, tenemos que

$$\int_0^a j_n\left(\alpha_{n,p}\frac{x}{a}\right) j_n\left(\alpha_{n,q}\frac{x}{a}\right) r^2 dr = \frac{a^3}{2} [j_{n+1}(\alpha_{np})]^2 \delta_{pq}. \quad (6.82)$$

2. **Ortogonalidad respecto al orden.** Tenemos que, a diferencia de las funciones de Bessel, las funciones esféricas de Bessel son ortogonales respecto a su orden, tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} j_m(x) j_n(x) dx = \frac{\pi}{2n+1} \delta_{mn}. \quad (6.83)$$

3. **Funciones esféricas de Hankel.** De forma análoga a las funciones de Bessel, podemos definir las funciones esféricas de Hankel como

$$h_\ell^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{\ell+1/2}^{(1)}(x) = j_\ell(x) + i y_\ell(x), \quad (6.84)$$

$$h_\ell^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{\ell+1/2}^{(2)}(x) = j_\ell(x) - i y_\ell(x). \quad (6.85)$$

4. **Expansión en serie de potencias.** Para el caso de orden entero, es posible representar las funciones esféricas de Bessel en términos de una serie de poten-

cias, donde

$$j_n(x) = 2^n x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(k+n)!}{(2k+2n+1)!} x^{2k}, \quad (6.86)$$

$$y_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n x^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k-n)!}{k! (2k-2n)!} x^{2k}. \quad (6.87)$$

5. **Comportamiento asintótico.** A partir del comportamiento asintótico de las funciones de Bessel, tenemos que

$$j_n(x) \approx \frac{1}{x} \sin \left( x - \frac{n\pi}{2} \right), \quad (6.88)$$

$$y_n(x) \approx -\frac{1}{x} \cos \left( x - \frac{n\pi}{2} \right), \quad (6.89)$$

$$h_n^{(1)}(x) = H_n^{(2)}(x)^* \approx (-i)^{n+1} \frac{e^{ix}}{x} = -\frac{e^{i(x-n\pi/2)}}{x}. \quad (6.90)$$

6. **Relaciones de recurrencia.** Cualquier función esférica de Bessel satisface las relaciones de recurrencia

$$f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} f_n(x), \quad (6.91)$$

$$n f_{n-1}(x) - (n+1) f_{n+1}(x) = (2n+1) f'_n(x). \quad (6.92)$$

7. **Relaciones con derivadas.** Las funciones esféricas de Bessel de orden  $n$  pueden obtenerse a partir de las funciones de orden 0 mediante sucesivas derivaciones, esto es,

$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left( \frac{\sin x}{x} \right), \quad (6.93)$$

$$y_n(x) = (-1)^n x^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left( \frac{\cos x}{x} \right), \quad (6.94)$$

$$h_n^{(1)}(x) = -i(-1)^n x^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left( \frac{e^{ix}}{x} \right), \quad (6.95)$$

$$h_n^{(2)}(x) = i(-1)^n x^n \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left( \frac{e^{-ix}}{x} \right). \quad (6.96)$$

8. **Funciones esféricas modificadas de Bessel.** Puede darse el caso en que la ecuación esférica de Bessel tenga la forma de la ecuación modificada de Bessel para orden  $1/2$ . En ese caso, se definen las *funciones esféricas de Bessel modificadas* como

$$i_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{n+1/2}(x), \quad (6.97)$$

$$k_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} K_{n+1/2}(x). \quad (6.98)$$

Nótese que el factor de escala para  $k_n$  es diferente al utilizado para el resto de las funciones esféricas de Bessel.

**Ejemplo 6.3. (Arfken 7ª Edición, Ejemplo 14.7.1)** Considere una partícula cuántica libre de masa  $m$  y con energía  $E$  que se mueve dentro de una esfera de radio  $a$ . Encuentre el valor mínimo de energía para el cual la función de onda del sistema tiene una solución física. Para esto, considere que

1. La función de onda  $\psi(r)$  es finita dentro de la esfera, es decir, para  $0 \leq r \leq a$ .
2. En los bordes de la esfera,  $\psi(a) = 0$ .

**Solución.** Esta situación puede ser descrita mediante la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = (E - V(r))\psi,$$

donde podemos modelar el potencial como un pozo cuadrado, tal que

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r \leq a, \\ \infty, & r > a. \end{cases}$$

Luego, en el interior de la esfera, la ecuación de Schrödinger correspondiente será

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi.$$

Realizamos separación de variables, obteniendo la ecuación radial

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]R = 0,$$

que corresponde a la ecuación esférica de Bessel, con  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ . Así, la solución general para  $R$  será dada por

$$R(r) = A j_\ell(kr) + B y_\ell(kr).$$

Descartamos la presencia de las funciones de segunda especie, pues estas no son finitas en  $r = 0$ , para lo cual imponemos que  $B = 0$ . Por otra parte, imponiendo la condición de borde  $\psi(a) = R(a) = 0$ , necesitamos que  $j_\ell(ka) = 0$ , de donde concluimos que

$$k = \frac{\alpha_{\ell,i}}{a},$$

donde  $\alpha_{\ell,i}$  es la  $i$ -ésima raíz positiva de  $j_\ell$ . Luego, la solución para la ecuación radial tendrá la forma

$$R(r) = A j_\ell\left(\frac{\alpha_{\ell,i}}{a}r\right).$$

De la definición de  $k^2$ , observamos que el menor valor de energía se corresponderá con el menor valor de  $k^2$ , que a su vez corresponderá a la primera raíz positiva de  $j_\ell$ , siendo esta la que corresponde para  $\ell = 0$ . De la tabla 6.3, observamos que esta corresponde a  $\alpha_{0,1} \approx 3.1416 = \pi$ , de modo que el menor valor de energía posible corresponde a

$$E_{\min} = \frac{\hbar^2 k_{\min}^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{h^2}{8ma^2}.$$

Para finalizar, algunas observaciones,

- Esta *energía mínima posible* es comúnmente denominada energía del **estado fundamental, estado basal** o **groundstate**, o bien **energía del punto cero**. Por ejemplo, el átomo de hidrógeno posee una energía mínima  $E_{\min} = -13.6$  eV.
- La energía de este sistema *cuántico* no es continua, sino que solo puede tomar valores discretos, correspondientes a autovalores de la ecuación de Schrödinger.
- Para cualquier partícula encerrada dentro de una esfera, el valor mínimo de energía siempre será positivo.
- En este ejemplo, la energía mínima dependerá del valor de  $\ell$ , de modo que si deseamos encontrar la energía mínima del  $\ell$ -ésimo estado, esta será dada por

$$E_{\ell_{\min}} = \frac{\hbar^2 \alpha_{\ell,1}^2}{2ma^2}.$$

## Funciones de Green

Hasta ahora, hemos visto maneras de resolver EDPs lineales y *homogéneas*, es decir, que son igualables a cero, sin términos que no dependan de la función incógnita ni sus derivadas.

Sin embargo, muchas situaciones físicas no pueden ser descritas únicamente mediante ecuaciones homogéneas. ¿Cómo podemos resolverlas en este caso?

Una forma de hacerlo es mediante el **método de las funciones de Green**, gracias a las cuales podemos reducir una EDP lineal e inhomogénea a un problema abordable.

**Definición 7.1.** Dado un operador diferencial  $\mathcal{L}$  cualquiera, y una función *fente*  $f(\vec{x})$ , **Función de Green** tales que

$$\mathcal{L}\Psi(\vec{x}) = f(\vec{x}). \quad (7.1)$$

Una **función de Green**  $G(\vec{x}, \vec{x}')$  para el operador  $\mathcal{L}$  es aquella que satisface la ecuación

$$\mathcal{L}G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta^{(n)}(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (7.2)$$

donde  $\delta^{(n)}$  es la delta de Dirac  $n$ -dimensional.

**Propiedad 7.1. Condición de consistencia.** Integrando la definición de las funciones de Green (7.2) sobre el volumen  $V$  en el que se encuentre definida nuestro operador diferencial  $\mathcal{L}$ , la función de Green cumplirá que

**Condición de consistencia**

$$\int_V \mathcal{L}G(\vec{x}, \vec{x}') dV = \int_V \delta^{(n)}(\vec{x} - \vec{x}') dV = 1, \quad \forall \vec{x} \in V. \quad (7.3)$$

## 7.1. Motivación: Potencial electrostático

En presencia de una carga (o distribución de cargas), el potencial electrostático satisface la *ecuación de Poisson*

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}, \quad (7.4)$$

donde  $\rho(x)$  es la distribución de cargas en la región considerada.

A partir de la ley de Coulomb, sabemos que podemos describir el potencial eléctrico de una distribución de cargas como

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV', \quad (7.5)$$

donde hemos hecho la elección tradicional de que el potencial de referencia se anula en el infinito.

Observamos que, si definimos nuestra *función de Green* como

**Función de Green  
para el Laplaciano**

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (7.6)$$

podemos reescribir (7.5) como

$$\phi(x) = \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') \left( -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} \right) dV'. \quad (7.7)$$

Esta función de Green debe satisfacer la ecuación (7.2), que en este caso es dada por

$$\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (7.8)$$

De esta forma, observamos que

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) = \nabla^2 \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') \left( -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} \right) dV' \quad (7.9)$$

$$= \int_V [\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}')] \left( -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} \right) dV' \quad (7.10)$$

$$= \int_V \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \left( -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} \right) dV' \quad (7.11)$$

$$= -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}, \quad (7.12)$$

recuperando la ecuación original.

## 7.2. Encontrando soluciones mediante funciones de Green

Consideremos una EDP *lineal e inhomogénea* de la forma

$$\mathcal{L}\psi(\vec{x}) = (\nabla \cdot (p(\vec{x})\nabla) + q(\vec{x})) \psi(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad (7.13)$$

donde  $p(\vec{x})$  y  $q(\vec{x})$  son funciones conocidas.

Para resolver la EDP, encontramos primero la función de Green que satisface la expresión (7.2), junto a una solución *particular* de la ecuación (7.13) en el punto  $\vec{x}'$ , podemos hallar una solución general del problema, la que será dada por

$$\psi(\vec{x}) = \oint_{\partial V} p(\vec{x}) [\psi(\vec{x}') \nabla' G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \nabla' \psi(\vec{x}')] \cdot d\vec{S}' + \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') f(\vec{x}') dV', \quad (7.14)$$

donde  $\nabla'$  indica que el operador actúa sobre las componentes de  $\vec{x}'$ . Aquí,  $V$  denota al dominio en que la solución  $\psi(\vec{x})$  es válida, y  $\partial V$  es su frontera.

¿Cómo sabemos que esta ecuación es válida? Resolvamos la primera integral. Notemos que podemos utilizar el teorema de Gauss, de modo que

$$I = \oint_{\partial V} p(\vec{x}) [\psi(\vec{x}') \nabla' G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \nabla' \psi(\vec{x}')] \cdot d\vec{S}' \quad (7.15)$$

$$= \int_V \nabla' \cdot [p(\vec{x}') \psi(\vec{x}') \nabla' G(\vec{x}, \vec{x}') - p(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') \nabla' \psi(\vec{x}')] dV' \quad (7.16)$$

$$= \int_V [\psi(\vec{x}') \nabla' \cdot [p(\vec{x}') \nabla' G(\vec{x}, \vec{x}')] + \nabla \psi(\vec{x}') \cdot (p(\vec{x}') \nabla' G(\vec{x}, \vec{x}')) - G(\vec{x}, \vec{x}') \nabla' \cdot [p(\vec{x}') \nabla' \psi(\vec{x}')] - \nabla \psi(\vec{x}') \cdot (p(\vec{x}') \nabla' G(\vec{x}, \vec{x}'))] dV' \quad (7.17)$$

$$= \int_V [\psi(\vec{x}') (\mathcal{L}' G(\vec{x}, \vec{x}')) - G(\vec{x}, \vec{x}') (\mathcal{L}' \psi(\vec{x}'))] dV' \quad (7.18)$$

$$= \int_V [\psi(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') f(\vec{x}')] dV' \quad (7.19)$$

$$= \psi(\vec{x}) - \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') f(\vec{x}') dV', \quad (7.20)$$

donde hemos definido un nuevo operador diferencial  $\mathcal{L}'$  que actúa sobre las componentes primadas, tal que  $\mathcal{L}' \psi(\vec{x}') = f(\vec{x}')$ .

¿Cómo hallamos una solución en el punto  $\vec{x}'$ ? Haciendo uso de las condiciones de borde del problema, que usualmente serán definidas en el contorno  $\partial V$ .

### 7.2.1. Condiciones de borde de tipo Dirichlet

Si las condiciones de borde son *de tipo Dirichlet*, sabemos el valor de  $\psi(\vec{x}')$  en el borde  $\partial V$  de la región en que nos encontramos, por lo que podremos determinar el

primer término de la integral sobre  $\partial V$  en (7.15), pero el segundo, que depende de la derivada de  $\psi(\vec{x}')$ , no estará determinado. Por ello, escogeremos *de forma conveniente* una función de Green que se anule en los bordes, es decir,

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = 0, \quad \forall \vec{x}' \in \partial V. \quad (7.21)$$

En este caso, la solución general tendrá la forma

$$\psi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') f(\vec{x}') dV + \oint_{\partial V} p(\vec{x}') \psi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} dS', \quad (7.22)$$

donde  $\partial f / \partial n' = (\nabla' f) \cdot \hat{n}$ , con  $\hat{n}$  un vector normal a la superficie.

Sin embargo, muchas veces puede ser difícil hallar directamente una función de Green que satisfaga a la vez (7.21) y (7.2). Un ejemplo sencillo de esto es el operador laplaciano, cuando  $\mathcal{L} = \nabla^2$ . En este caso, es útil buscar una solución de la forma

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = F(\vec{x}, \vec{x}') + H(\vec{x}, \vec{x}'), \quad (7.23)$$

donde  $F(\vec{x}, \vec{x}')$  satisface la ecuación (7.2) pero no necesariamente la condición de borde (7.21), mientras que  $H(\vec{x}, \vec{x}')$  satisface la ecuación *homogénea del problema* (es decir, donde no hay funciones fuente) en el interior de la región  $V$ , pero su valor en  $\partial V$  es tal que, sumada a  $F(\vec{x}, \vec{x}')$ , resulta en que  $G(\vec{x}, \vec{x}') = 0$  en el borde  $\partial V$ . Cuando seguimos este procedimiento, la función  $F(\vec{x}, \vec{x}')$  es denominada **solución fundamental**. En efecto,

$$\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = \nabla^2 F(\vec{x}, \vec{x}') + \nabla^2 H(\vec{x}, \vec{x}') = \nabla^2 F(\vec{x}, \vec{x}') + 0 = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (7.24)$$

**Ejemplo 7.1. (Riley, Sección 21.5.3)** Encuentre la solución fundamental a la ecuación de Poisson en tres dimensiones, sujeta a la condición de contorno  $F(\vec{x}, \vec{x}') \rightarrow 0$  cuando  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ .

**Solución.** Dado que nuestro contorno se encuentra en infinito, el problema posee simetría esférica, y puede ser modelado como una esfera  $S$  de radio  $R$  muy grande centrada en  $\vec{x}'$ . La condición de consistencia (7.3) establece

$$\int_V \nabla^2 F(\vec{x}, \vec{x}') dV = \int_V \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') dV = 1,$$

que a su vez, usando el teorema de Gauss, puede escribirse como

$$\int_S \nabla F(\vec{x}, \vec{x}') \cdot d\vec{S}' = 1. \quad (7.25)$$

Dada la simetría esférica del problema, podemos suponer que nuestra función dependa únicamente de la distancia entre el centro y el punto  $\vec{x}$ , de modo que  $F(\vec{x}, \vec{x}') = F(|\vec{x} - \vec{x}'|) = F(r)$ . Evaluando la integral de superficie, tenemos que

$$4\pi r^2 \left. \frac{dF}{dr} \right|_{r=R} = 1.$$



Integrando sobre  $r$ , podemos encontrar una expresión para  $F$ , de modo que

$$F(r) = -\frac{1}{4\pi r} + C,$$

que sumado a la condición de contorno del problema, deducimos que  $C = 0$ . Luego, la solución fundamental en tres dimensiones es dada por

$$F(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|}.$$

### 7.2.2. Condiciones de borde de tipo Neumann

Si las condiciones de borde son **de tipo Neumann**, conocemos el valor de la derivada  $\frac{\partial \psi}{\partial n}(\vec{x}')$  en el borde  $\partial V$  de la región en que nos encontramos, por lo que podemos determinar el segundo término de la integral (7.15), mas no así el primero.

Por analogía al caso de las condiciones de Dirichlet, podríamos pensar en escoger una función de Green que satisfaga

$$\frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} = 0, \quad \forall \vec{x}' \in \partial V, \quad (7.26)$$

con lo que la solución general tendría la forma

$$\psi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') f(\vec{x}') dV - \oint_{\partial V} p(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \psi(\vec{x}')}{\partial n'} dS'. \quad (7.27)$$

Lamentablemente, en general *no es posible* encontrar una función de Green que satisfaga la condición (7.26), siendo nuevamente un ejemplo de esto el operador laplaciano  $\nabla^2$ , ya que las funciones de Green deben satisfacer la condición de consistencia (7.3). Por ello, ya que descartamos la solución más sencilla posible ( $\frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} = 0$ ), escogemos la segunda más sencilla, igualar la derivada a una constante,

$$\frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} = C, \quad \forall \vec{x}' \in \partial V. \quad (7.28)$$

Para hallar el valor de esta constante, hacemos uso de la *condición de consistencia*, de modo que el caso más sencillo será suponer que  $C = 1/\text{Área}(\partial V)$ .

De ser posible esta elección, la solución tendrá la forma

$$\psi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') f(\vec{x}') dV - \oint_{\partial V} p(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \psi(\vec{x}')}{\partial n'} dS' + \underbrace{\frac{1}{A} \oint_{\partial V} p(\vec{x}') \psi(\vec{x}') dS'}_{\langle \psi(\vec{x}') \rangle_{\partial V}}. \quad (7.29)$$

Aquí, la notación  $\langle \psi(\vec{x}') \rangle_{\partial V}$  representa una especie de *valor promedio ponderado* sobre el contorno  $\partial V$ . Este promedio actuará como una constante que puede ser determinada libremente. Es más, si el contorno  $\partial V$  de la región es el infinito, este término puede ser fijado a cero, pues no requeriremos de este término para que la solución tenga sentido físico.

#### Observación

Es importante recordar que una misma EDP puede dar origen a diferentes funciones de Green, pues estas dependen también de las condiciones de contorno.

### 7.3. Simetría de las funciones de Green

Cuando tenemos el caso particular en que  $\mathcal{L} = \nabla^2$ , la función de Green (7.6) es simétrica bajo el intercambio de argumentos, es decir,  $G(\vec{x}, \vec{x}') = G(\vec{x}', \vec{x})$ . Podemos buscar cuál es la condición general que permite que esto ocurra, escogiendo  $\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x}'', \vec{x})$ , de modo que, según la expresión (7.14),

$$G(\vec{x}'', \vec{x}) = \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') \delta(\vec{x}'' - \vec{x}') dV' + \oint_{\partial V} p(\vec{x}') [G(\vec{x}'', \vec{x}') \nabla' G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \nabla' G(\vec{x}'', \vec{x}')] \cdot d\vec{S}' \quad (7.30)$$

$$= G(\vec{x}, \vec{x}'') + \oint_{\partial V} p(\vec{x}') [G(\vec{x}'', \vec{x}') \nabla' G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \nabla' G(\vec{x}'', \vec{x}')] \cdot d\vec{S}', \quad (7.31)$$

con lo que vemos que la función de Green será simétrica siempre y cuando la integral de superficie se anule en la frontera,

$$\oint_{\partial V} p(\vec{x}') [G(\vec{x}'', \vec{x}') \nabla' G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \nabla' G(\vec{x}'', \vec{x}')] \cdot d\vec{S}' = 0. \quad (7.32)$$

A continuación, listamos algunas situaciones en que una función de Green será simétrica.

**Propiedad 7.2. Simetría de las funciones de Green.** Una función de Green para un operador diferencial  $\mathcal{L}$  será simétrica, esto es,  $G(\vec{x}, \vec{x}') = G(\vec{x}', \vec{x})$ , si

1. El problema posee condiciones de tipo Dirichlet homogéneas.
2. El problema posee condiciones de tipo Neumann homogéneas.
3. El operador diferencial es *hermítico*, esto es,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\dagger$ .
4. El operador diferencial es *real*, ya que no poseerá parte imaginaria por conjugar.
5. Cualquier otra condición que satisfaga la expresión (7.32).

## 7.4. Método de las imágenes

Anteriormente mencionamos que podemos hallar la función de Green para un problema con condiciones de Dirichlet hallando la solución fundamental y una solución que produzca que  $G(\vec{x}, \vec{x}') = 0$  en  $\partial V$ , como establecimos en (7.23). Para ello, podemos hacer uso del **método de las imágenes**, en el cual hemos de considerar *copias* de nuestra solución fundamental que representen *fuentes* ubicadas en el exterior de nuestra región  $V$ . Este método es de gran utilidad en problemas de electrostática que presenten geometrías altamente simétricas, y será aplicado en este contexto en el curso de Electrodinámica I.

**Proposición 7.1. Método de las imágenes.** Es posible hallar una función de Green para una ecuación inhomogénea al sumar a la solución fundamental  $F(\vec{x}, \vec{x}')$  diferentes copias (o *imágenes*) de la ella misma, ubicadas *fuera* de la región  $V$  en la que deseamos resolver la ecuación. Para ello, seguiremos el siguiente procedimiento, **Método de las imágenes**

1. Para una fuente singular  $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$  dentro de la región  $V$ , añadiremos fuentes imágenes *fuera* de  $V$ , donde las posiciones  $\vec{x}_n$  e intensidades  $q_n$  de estas fuentes las podremos determinar a futuro, de modo que las fuentes externas se pueden expresar como

$$\sum_{n=1}^N q_n \delta(\vec{x} - \vec{x}_n), \quad \vec{x}_n \notin V. \quad (7.33)$$

2. Ya que todas las imágenes se encuentran en el exterior de  $V$ , la solución fundamental que corresponde a cada una de las fuentes deberá satisfacer la ecuación de Laplace *dentro* de  $V$ . Por ello, podemos suponer que cada imagen tiene asociada la misma *solución fundamental* que la fuente en el interior de  $V$ , con lo que la función de Green tomará la forma

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = F(\vec{x}, \vec{x}') + \sum_{n=1}^N q_n F(\vec{x}, \vec{x}_n). \quad (7.34)$$

3. Ajustamos las posiciones  $\vec{x}_n$  e intensidades  $q_n$  de las imágenes de modo que las condiciones de contorno se satisfagan en  $S$ . En el caso de las condiciones de Dirichlet, esto es exigir que  $G(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ , para cualquier  $\vec{x}' \in \partial V$ .
4. Por último, podemos usar la función de Green hallada para encontrar la solución, sujeta a las condiciones de Dirichlet, que satisfaga (7.22).

En general, no es tarea sencilla encontrar las posiciones e intensidades correctas para cualquier problema, pero sí lo es para ciertos problemas con geometrías simples. Particularmente, este método es útil para problemas en los que los bordes sean *líneas rectas* (problema bidimensional) o *planos* (problema tridimensional), pues en esos casos simplemente supondremos que estos actúan como espejos, de modo que la fuente

verdadera se refleja simétricamente en este espejo.

**Ejemplo 7.2. (Riley, Sección 21.5.3)** Resuelva la ecuación de Laplace en la región bi-dimensional  $|\vec{x}| \leq a$  sujeta a la condición de contorno  $u = h(\phi)$  en  $|\vec{x}| = a$ , dada una carga fuente ubicada en  $\vec{x}_0$ .

**Solución.** Nuestro problema corresponde a un disco de radio  $a$  sujeto a condiciones de Dirichlet. Como queremos que nuestra función de Green satisfaga que  $G(\vec{x}, \vec{x}_0) = 0$  para  $|\vec{x}| = a$ , podemos suponer que nuestra *carga imagen* se encuentra fuera del disco en una posición  $\vec{x}_1 = (a^2/|\vec{x}_0|^2)\vec{x}_0$ , de modo que, suponiendo que la intensidad de la carga imagen es  $-1$ , nuestra función de Green toma la forma (véase la siguiente sección para la deducción detallada de la función de Green para el Laplaciano en 2D)

$$G(\vec{x}, \vec{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln(|\vec{x} - \vec{x}_0|) - \frac{1}{2\pi} \ln(|\vec{x} - \vec{x}_1|) + C.$$

Del hecho que  $G(\vec{x}, \vec{x}_0) = 0$  para  $|\vec{x}| = a$ , tenemos que

$$\begin{aligned} 2\pi C &= \ln(|\vec{x} - \vec{x}_1|) - \ln(|\vec{x} - \vec{x}_0|) \\ &= \ln\left(\frac{|\vec{x} - \vec{x}_1|}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{a^4/x_0^2 - 2a^3 \cos(\phi - \phi_0)/x_0 + a^2}}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{(a^2/x_0^2)}|\vec{x} - \vec{x}_0|}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{x_0}{a}\right) \end{aligned}$$

donde  $x_0 = |\vec{x}_0|$ . Así,

$$C = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{x_0}{a},$$

y nuestra función de Green toma la forma

$$G(\vec{x}, \vec{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \left[ \ln|\vec{x} - \vec{x}_0| - \ln\left|\vec{x} - \frac{a^2}{x_0^2}\vec{x}_0\right| - \ln \frac{x_0}{a} \right].$$

Conociendo nuestra función de Green, podemos utilizar la ecuación (7.22) para hallar una solución a nuestro problema. Como trabajamos con la ecuación de Laplace,  $f(\vec{x}_0) = 0$ , de modo que solo sobrevive la integral sobre el contorno de nuestra región en (7.22), con lo cual

$$\psi(\vec{x}) = \oint_C \psi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} d\ell' = \int_0^{2\pi} \psi(\vec{x}') \frac{\partial G}{\partial \rho'} \Big|_{\rho'=a} a d\phi'.$$

Para nuestra función de Green,

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \rho'} &= \hat{x}' \cdot \nabla' G(\vec{x}, \vec{x}') \\ &= \hat{x}' \cdot \nabla' G(\vec{x}', \vec{x}) \\ &= \frac{\vec{x}'}{2\pi x'} \cdot \left( \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^2} - \frac{\vec{x}' - (a^2/x^2)\vec{x}}{|\vec{x}' - (a^2/x^2)\vec{x}|^2} \right).\end{aligned}$$

que en  $\rho' = a$  satisface que

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial G}{\partial \rho'} \right|_{\rho'=a} &= \frac{\vec{x}'}{2\pi a} \cdot \left( \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^2} - \frac{\vec{x}' - (a^2/x^2)\vec{x}}{(a^2/x^2)|\vec{x}' - \vec{x}|^2} \right) \\ &= \frac{\vec{x}'}{2\pi a} \cdot \frac{(a^2/x^2)\vec{x}' - (a^2/x^2)\vec{x} - \vec{x}' + (a^2/x^2)\vec{x}}{(a^2/x^2)|\vec{x}' - \vec{x}|^2} \\ &= \frac{1}{2\pi a} \frac{a^2 - x^2}{|\vec{x}' - \vec{x}|^2} \\ &= \frac{1}{2\pi a} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos(\phi' - \phi)}.\end{aligned}$$

De esta manera, concluimos que una solución a nuestro problema puede ser hallada como

$$u(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - \rho^2)f(\phi') d\phi'}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos(\phi' - \phi)}.$$

También es útil mencionar que es válido utilizar el método de las imágenes al trabajar con condiciones de Neumann, donde el procedimiento descrito anteriormente sigue siendo el mismo, pero utilizando las condiciones de Neumann para establecer nuestras imágenes.

**Ejemplo 7.3. (Riley, Sección 21.5.4)** Resuelva la ecuación de Laplace en la región bidimensional  $|\vec{x}| \leq a$  sujeta a la condición de contorno  $\partial u / \partial n = f(\phi)$  en  $|\vec{x}| = a$ , con  $\int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi = 0$ , como requiere la condición de consistencia.

**Solución.** La geometría del problema es la misma que la del ejemplo anterior. Por ello, podemos suponer que la carga imagen se encuentra en la misma posición  $\vec{x}_1 = (a^2/x_0^2)\vec{x}_0$ , donde nuevamente  $\vec{x}_0$  corresponde a la carga fuente dentro del círculo. Sin embargo, ahora no asumiremos la intensidad de la carga imagen, sino que la dejaremos como un parámetro  $q$ . De esta forma, la función de Green será de la forma

$$G(\vec{x}, \vec{x}_0) = \frac{1}{2\pi} (\ln |\vec{x} - \vec{x}_0| + q \ln |\vec{x} - \vec{x}_1| + C).$$

En este caso, la derivada radial (normal) de esta función es dada por

$$\frac{\partial G}{\partial \rho} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \cdot \nabla G(\vec{x}, \vec{x}_0) = \frac{\vec{x}}{2\pi|\vec{x}|} \cdot \left[ \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^2} + q \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^2} \right],$$

que evaluada en  $\rho = a$ , tenemos que

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = \frac{1}{2\pi a} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^2} \left[ |\vec{x}|^2 + qx_0^2 - (1+q)\vec{x} \cdot \vec{x}_0 \right].$$

Como se discutió anteriormente, en problemas con condiciones de tipo Neumann es conveniente escoger que esta derivada se iguale a alguna constante, típicamente el inverso del valor del “área” del contorno de nuestra región. Dado que estamos trabajando en una región bidimensional, esta “área” corresponde al perímetro del círculo, de modo que

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = \frac{1}{2\pi a},$$

lo que se cumple escogiendo  $q = 1$ . Así, observamos que para un problema con la misma geometría, las condiciones de contorno afectarán al valor de la intensidad  $q$  de la carga imagen.

Podemos encontrar la solución a nuestro problema a partir de la ecuación (7.29), donde al tratarse de la ecuación de Laplace,  $f(x) = 0$ , con lo que la solución será de la forma

$$\psi(\vec{x}) = \langle \psi(\vec{x}) \rangle_C - \oint_{\partial V} G(\vec{x}', \vec{x}) f(\vec{x}') d\ell'$$

Así, la función de Green adecuada, al ser evaluada en  $\rho' = a$ , tomará el valor

$$\begin{aligned} G(\vec{x}', \vec{x})|_{\rho'=a} &= \frac{1}{2\pi} \left[ \ln |\vec{x}' - \vec{x}| + \ln |\vec{x}' - (a^2/x^2)\vec{x}| + C \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \ln (|\vec{x}' - \vec{x}| |\vec{x} - (a^2/x^2)\vec{x}|) + C \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \ln (|\vec{x}' - \vec{x}|^2) + \ln \frac{a}{x} C \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \ln(a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos(\phi' - \phi)) + \ln \frac{a}{\rho} + C \right], \end{aligned}$$

donde la constante  $C$ , es una constante arbitraria. Entonces,

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \phi) &= \langle \psi(\vec{x}) \rangle_C - \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi') \ln[a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos(\phi' - \phi)] d\phi' \\ &\quad - \frac{a}{2\pi} \left( \ln \frac{a}{\rho} + C \right) \int_0^{2\pi} f(\phi') d\phi' \\ &= \langle \psi(\vec{x}) \rangle_C - \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi') \ln[a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos(\phi' - \phi)] d\phi', \end{aligned}$$

donde hemos usado la condición dada en el enunciado,  $\int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi = 0$ .

## 7.5. Algunas funciones de Green comunes

Como mencionamos anteriormente, las funciones de Green no son únicas, sino que pueden construirse siempre a partir de una solución fundamental  $F(\vec{x}, \vec{x}')$  que también es una función de Green, sumada a una función  $H(\vec{x}, \vec{x}')$  que es solución al problema homogéneo asociado al operador  $\mathcal{L}$ ,

$$\mathcal{L}H(\vec{x}, \vec{x}') = 0. \quad (7.35)$$

Por ello, listamos a continuación las soluciones fundamentales para el operador Laplaciano y para el Operador de Helmholtz, a las que podemos sumar soluciones a la ecuación homogénea de modo que la suma satisfaga las condiciones de borde del problema específico que podamos estar desarrollando.

### 7.5.1. Ecuación de Laplace

En este caso, nuestro operador diferencial corresponde a  $p(x) = 1$  y  $q(x) = 0$  en la definición (7.13). Dado que este curso se centra en métodos útiles en problemas físicos, consideraremos siempre la función de Green que respete la *homogeneidad e isotropía del espacio*, es decir, que la función de Green dependa únicamente de la *diferencia* entre  $\vec{x}$  y  $\vec{x}'$  (homogeneidad), y en particular, dependa de la *distancia*  $|\vec{x} - \vec{x}'|$  (isotropía, o invariancia bajo rotaciones). Por ello, la función de Green en este caso corresponde a una función de una variable, que podemos llamar  $r = |\vec{x} - \vec{x}'|$ .

#### Caso tridimensional

En un sistema de coordenadas esféricas centradas en  $\vec{x}'$ , nuestra función de Green satisface

$$\nabla^2 G(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dG}{dr} \right) = \delta^{(3)}(r), \quad (7.36)$$

de modo que, si  $r \neq 0$ ,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dG}{dr} \right) = 0. \quad (7.37)$$

Integrando esta expresión, hallamos que

$$G(r) = \alpha + \frac{\beta}{r}, \quad (7.38)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son coeficientes a determinar. Podemos hacerlo utilizando el teorema de Gauss en la condición de consistencia (7.3), de modo que

$$\int_{\partial V} \nabla G \cdot d\vec{S} = \int_{\partial V} \frac{dG}{dr} r^2 d\Omega = 1, \quad (7.39)$$

donde  $\Omega$  corresponde a un ángulo sólido. Integrando, tenemos que

$$\beta = -\frac{1}{4\pi}. \quad (7.40)$$

Por otro lado, en la mayoría de los problemas es conveniente escoger una función de Green que se anule a grandes distancias ( $\lim_{r \rightarrow \infty} G(r) = 0$ ). Por ello, es común escoger  $\alpha = 0$ . Es más, podemos argumentar que una solución constante  $H(r) = -\alpha$  corresponde a una solución al problema homogéneo, que podemos sumar a nuestra función de Green anterior, obteniendo así la solución fundamental para la ecuación de Laplace,

**Solución fundamental  
de la ecuación de  
Laplace en 2D**

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (7.41)$$

### Caso bidimensional

En un sistema de coordenadas polares centradas en  $\vec{x}'$ , nuestra función de Green satisface

$$\nabla^2 G = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dG}{d\rho} \right) = \delta^{(2)}(\rho). \quad (7.42)$$

Integrando para  $\rho \neq 0$ , tenemos que

$$G(\rho) = \alpha + \beta \ln \rho. \quad (7.43)$$

Utilizando el teorema de Gauss (en dos dimensiones) y la condición de consistencia (7.3),

$$\int_{\partial S} \nabla G \cdot d\vec{S} = \oint \frac{dG}{d\rho} \rho d\phi = 2\pi\beta = 1, \quad (7.44)$$

por lo que nuevamente suponiendo  $\alpha = 0$ , tenemos que

**Solución fundamental  
de la ecuación de  
Laplace en 2D**

$$G(|\vec{x} - \vec{x}'|) = \frac{1}{2\pi} \ln |\vec{x} - \vec{x}'|. \quad (7.45)$$

## 7.5.2. Ecuación de Helmholtz

En este caso, nuestro operador diferencial corresponde a  $p(x) = 1$  y  $q(x) = k^2$  en (7.13), de modo que  $\mathcal{L} = \nabla^2 + k^2$ . Nuevamente, supondremos homogeneidad e isotropía, de modo que buscaremos funciones de la forma  $G(\vec{x}, \vec{x}') = G(|\vec{x} - \vec{x}'|)$ .

### Caso tridimensional

En coordenadas esféricas centradas en  $\vec{x}'$ , nuestra función de Green satisface

$$(\nabla^2 + k^2)G(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dG}{dr} \right) + k^2 G(r) = \delta^{(3)}(r), \quad (7.46)$$

de modo que al considerar  $r \neq 0$ , obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dG}{dr} \right) + k^2 G(r) = 0. \quad (7.47)$$



Bajo el cambio de variable  $u(r) = rG(r)$ , podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + k^2 u = 0, \quad (7.48)$$

que corresponde a la ecuación de un oscilador armónico simple. Luego, las soluciones son de la forma

$$G(r) = \alpha \frac{e^{ikr}}{r} + \beta \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (7.49)$$

donde nuevamente,  $\alpha$  y  $\beta$  son coeficientes a determinar. Mediante el teorema de Gauss aplicado a la condición de consistencia (7.3), sobre una esfera de radio  $R$  centrada en  $r = 0$ , de modo que

$$\oint_{\partial V} \nabla G \cdot d\vec{S} + k^2 \int_V G dV = \oint_{\partial V} \frac{dG}{dr} r^2 d\Omega + k^2 \int_V Gr^2 dr d\Omega = 1. \quad (7.50)$$

La primera integral es directa, puesto que el integrando no depende del ángulo sólido  $\Omega$ . La segunda integral, por otro lado, debe ser resuelta con más cuidado. Tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= 4\pi R^2 \left. \frac{dG}{dr} \right|_R + 4\pi k^2 \int_0^R Gr^2 dr \\ &= 4\pi R^2 \left[ \frac{1}{R} (\alpha i k e^{ikR} - \beta i k e^{-ikR}) - \frac{1}{R^2} (\alpha e^{ikR} + \beta e^{-ikR}) \right] + 4\pi k^2 \int_0^R [\alpha e^{ikr} + \beta e^{-ikr}] r dr \\ &= 4\pi [\alpha (ikR - 1) e^{ikR} - \beta (1 + ikR) e^{-ikR} + \alpha (1 - ikR) e^{ikR} + \beta (1 + ikR) e^{-ikR} - (\alpha + \beta)] \\ &= -4\pi (\alpha + \beta), \end{aligned}$$

de modo que nuestros coeficientes deben satisfacer

$$\alpha + \beta = -\frac{1}{4\pi}. \quad (7.51)$$

Luego, podemos escribir la solución (7.49) en términos del coeficiente  $\beta$  como

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} - 2i\beta \frac{\sin(kr)}{r}, \quad (7.52)$$

donde el segundo término corresponde a una solución de la ecuación de Helmholtz homogénea, pues es proporcional a la función esférica de Bessel  $j_0(kr)$ . Luego, considerando  $\beta = 0$  por este motivo, es posible escoger la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz como

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (7.53) \quad \text{Solución fundamental de la ecuación de Helmholtz en 3D}$$

**Observación**

Una elección igual de válida habría sido escribir la ecuación (7.49) en términos de  $\alpha$ , donde de igual forma obtendríamos un término proporcional a la función esférica de Bessel  $j_0(kr)$ . Luego, escogiendo  $\alpha = 0$ , obtendríamos la solución

$$G_2(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik|\vec{x} - \vec{x}'|}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (7.54)$$

Dependerá de la fuente que estén consultando cuál de las dos soluciones se prefiere.

**Caso bidimensional**

En un sistema de coordenadas polares centrado en  $\vec{x}'$ , nuestra función de Green satisface

$$(\nabla^2 + k^2)G(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dG}{d\rho} \right) + k^2 G(\rho) = \delta^{(2)}(\rho), \quad (7.55)$$

que para  $\rho \neq 0$  corresponde a la ecuación

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dG}{d\rho} \right) + k^2 G = 0. \quad (7.56)$$

Bajo el cambio de variable  $x = k\rho$ , esta se reduce a la ecuación de Bessel de orden 0,

$$x \frac{d}{dx} \left( x \frac{dG}{dx} \right) + x^2 G(x) = 0, \quad (7.57)$$

con soluciones de la forma

$$G(\rho) = \alpha J_0(k\rho) + \beta Y_0(k\rho) = \tilde{\alpha} H_0^{(1)}(k\rho) + \tilde{\beta} H_0^{(2)}(k\rho). \quad (7.58)$$

Preferiremos utilizar la solución en términos de funciones de Hankel, pues es la elección habitual.

Integrando la ecuación original sobre un círculo  $S$  de radio  $R$  centrado en  $\rho = 0$ , obtenemos

$$\oint_{\partial S} \nabla G \cdot d\vec{S} + k^2 \int_S G dS = \oint \left. \frac{dG}{d\rho} \right|_R R d\phi + 2\pi \int_0^R G \rho d\rho = 1. \quad (7.59)$$

Nuevamente, la primera integral se calcula directamente, ya que no existe dependencia de  $\phi$ , mientras que la segunda necesita un tratamiento más delicado. Recordemos que las funciones de Hankel, al ser funciones de Bessel, satisfacen las identidades

$H_0^{(1)}(x) = -H_1^{(1)}(x)$  y  $xH_0^{(1)}(x) = [xH_1^{(1)}(x)]'$ . Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
 1 &= 2\pi \left[ kR(\tilde{\alpha}H_0^{(1)}(kR) + \tilde{\beta}H_0^{(2)}(kR)) + \int_0^{kR} (\tilde{\alpha}H_0^{(1)}(x) + \tilde{\beta}H_0^{(2)}(x)) x dx \right] \\
 &= 2\pi \left[ -kR(\tilde{\alpha}H_1^{(1)}(kR) + \tilde{\beta}H_1^{(2)}(kR)) + \int_0^{kR} \left( \tilde{\alpha} \frac{d}{dx} (xH_1^{(1)}(x)) + \tilde{\beta} \frac{d}{dx} (xH_1^{(2)}(x)) \right) dx \right] \\
 &= 2\pi \left[ -kR(\tilde{\alpha}H_1^{(1)}(kR) + \tilde{\beta}H_1^{(2)}(kR)) + kR (\tilde{\alpha}H_1^{(1)}(kR) + \tilde{\beta}H_1^{(2)}(kR)) \right. \\
 &\quad \left. - \lim_{x \rightarrow 0} (\tilde{\alpha}xH_1^{(1)}(x) - \tilde{\beta}xH_1^{(2)}(x)) \right] \\
 &= 2\pi \left[ \tilde{\alpha} \frac{2i}{\pi} - \tilde{\beta} \frac{2i}{\pi} \right] \\
 &= 4i(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}),
 \end{aligned}$$

de modo que nuestros coeficientes deberán satisfacer la condición

$$\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} = -\frac{i}{4}. \quad (7.60)$$

Luego, la solución (7.58) se puede escribir, en términos de  $\tilde{\beta}$ , como

$$-\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k\rho) + \tilde{\beta} (H_0^{(1)}(k\rho) + H_0^{(2)}(k\rho)) = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k\rho) + 2\tilde{\beta}J_0(k\rho). \quad (7.61)$$

Al igual que en el caso tridimensional, la solución proporcional a la función de Bessel de orden 0 corresponde a una solución del problema homogéneo, de modo que si  $\tilde{\beta} = 0$ , la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz en 2D corresponde a

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|\vec{x} - \vec{x}'|).$$

(7.62) **Solución fundamental de la ecuación de Helmholtz en 2D**

#### Observación

Al igual que en el caso anterior, la elección de  $\tilde{\alpha} = 0$  conduce a una segunda solución posible, la que corresponde a

$$G_2(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{i}{4}H_0^{(2)}(k|\vec{x} - \vec{x}'|). \quad (7.63)$$



## Introducción a los Tensores Cartesianos

Llegando al último capítulo del curso, nos desviamos un poco de la noción de que este curso se dedica a enseñar métodos matemáticos que pueden ser útiles en Física, para en su lugar introducir cantidades y conceptos con la misma utilidad.

Una de las nociones más importantes que tenemos en física clásica es el hecho de que *los fenómenos físicos son los mismos, y no deben cambiar según el observador*, más allá de que las componentes de las cantidades que los describen puedan hacerlo. Particularmente, nos centraremos en las *transformaciones ortogonales* de un sistema coordenado, referidas de forma más común como **rotaciones**.

Por ejemplo, un vector que describe la posición de un objeto en función del tiempo puede ser diferente según el sistema de coordenadas en que se lo describa, pero el movimiento *físico* del objeto seguirá siendo el mismo.

### 8.1. Transformaciones ortogonales

Antes de entrar más de lleno en la discusión, recordemos e introduzcamos algunas definiciones.

**Definición 8.1.** Se denomina **delta de Kronecker** al elemento  $\delta_{ij}$ , definido en un espacio vectorial de  $n$  dimensiones como **Delta de Kronecker**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (8.1)$$

Este elemento puede representarse de forma matricial como la matriz identidad del espacio de dimensión  $n$ .

**Base ortonormal**

**Definición 8.2.** Sea un conjunto de vectores unitarios  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^n$  de un espacio  $n$ -dimensional. Diremos que este forma una **base ortonormal** si al realizar el producto escalar entre elementos del conjunto, se cumple la relación

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}, \quad (8.2)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker.

**Vector posición**

**Definición 8.3.** Dado un sistema coordenado en un espacio de  $n$  dimensiones, podemos definir el **vector posición**  $\vec{x}$ , que une el origen del sistema con punto con coordenadas  $x_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$  como

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \hat{e}_i, \quad (8.3)$$

donde las **componentes del vector** en la base  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^n$  pueden expresarse como

$$x_i = \vec{x} \cdot \hat{e}_i. \quad (8.4)$$

Más allá de que el vector posición es aquel que tiene un sentido *físico* a partir del cual hacer las definiciones, podemos descomponer *cualquier* vector en la base  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^n$  en términos de sus respectivas componentes, sin importar la cantidad que este pueda representar.

Una vez introducidas estas nociones, podemos definir un nuevo sistema coordenado, que llamaremos  $x'_i$  y cuya base es  $\{\hat{e}'_i\}_{i=1}^n$ , que corresponde a una *rotación* del sistema  $x_i$  definido anteriormente, como se ve en la figura 8.1.

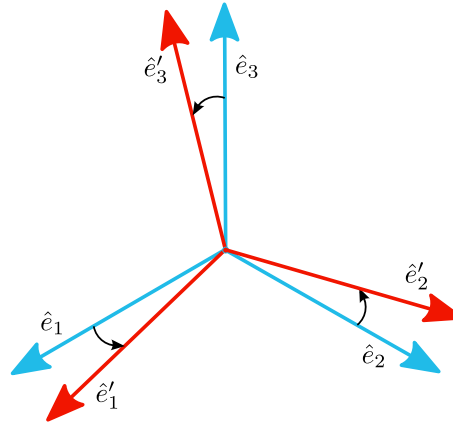


Figura 8.1: Una transformación ortogonal de dos bases ortonormales en 3 dimensiones,  $\hat{e}_i$  y  $\hat{e}'_j$

Respecto de esta nueva base, un vector  $\vec{v}$  cualquiera puede ser descompuesto en sus componentes  $v'_i$  en la base  $\{\hat{e}'_i\}_{i=1}^n$ ,

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v'_i \hat{e}'_i. \quad (8.5)$$

Dado que, si bien dan origen a sistemas de coordenadas diferentes, ambas bases se encuentran en el mismo espacio vectorial, ¿Cómo podemos relacionar ambas bases entre sí? Para ello, haremos uso de una **matriz de transformación**, definida como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_1 & \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_2 & \dots & \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_n \\ \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_1 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_2 & \dots & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{e}_n \cdot \hat{e}'_1 & \hat{e}_n \cdot \hat{e}'_2 & \dots & \hat{e}_n \cdot \hat{e}'_n \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

De este modo, un vector de la base  $\vec{e}'_i$  puede escribirse también en términos de la base  $\vec{e}_i$ ,

$$\hat{e}'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{e}_j, \quad (8.7)$$

por lo que podemos reescribir el vector  $\vec{v}$  como

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v'_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{e}_j \right). \quad (8.8)$$

### 8.1.1. Convenio de suma de Einstein

Antes de continuar la discusión, es útil introducir el **convenio de suma de Einstein**, que establece que en toda expresión donde se repitan dos índices iguales, *existe una suma implícita sobre todo el rango de variación del índice*. Es más, el índice de suma es una etiqueta arbitraria, por lo que puede ser renombrada a conveniencia.

Por ejemplo, las expresiones (8.3) y (8.8) pueden reescribirse como

$$\vec{v} = v_i \hat{e}_i, \quad (8.9)$$

$$\vec{v} = v'_i a_{ij} \hat{e}_j. \quad (8.10)$$

Además, dado que existe una suma implícita, podemos aplicar la delta de Kronecker para reemplazar índices en una multiplicación, de modo que

$$a_{ij} b_{jk} \delta_{ki} = a_{ij} b_{ji} = a_{kj} b_{jk}. \quad (8.11)$$

## 8.2. Covarianza y contravarianza

En la sección anterior, vimos que podemos reescribir un vector  $\vec{x} = x_i \hat{e}_i$  en términos de una segunda base ortonormal  $\{\hat{e}'_i\}_{i=1}^n$  como

$$\vec{x} = x'_i a_{ij} \hat{e}_j. \quad (8.12)$$

Comparando esta expresión con  $\vec{x} = x_i \hat{e}_i$ , observamos que *las componentes de un vector transforman como*

$$x'_j = a_{ji} x_i, \quad (8.13)$$

donde la inversión de los índices en las componentes de la matriz representa que estamos considerando la matriz transversa.

Nos gustaría poder encontrar una expresión explícita para dicha matriz. Para ello, podemos derivar la expresión (8.13) respecto a las coordenadas  $x_i$ , obteniendo

$$a_{ji} = \frac{\partial x'_j}{\partial x_i}, \quad (8.14)$$

mientras que la transformación inversa satisface

$$a_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}. \quad (8.15)$$

De este modo, podemos reescribir la ecuación (8.13), con lo que *las componentes de los vectores transforman, bajo transformaciones ortogonales, como*

$$x'_i = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} A_j. \quad (8.16)$$

Uno podría esperar que todos los vectores transformaran según esta regla. Sin embargo, veamos qué ocurre para el vector gradiente de un campo escalar,  $\nabla\phi$ , donde  $(\nabla\phi)_j = (\partial\phi/\partial x_j)\hat{e}_j$ . Tenemos, por regla de la cadena,

$$(\nabla\phi)'_i = \frac{\partial\phi}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}, \quad (8.17)$$

que es *una ley de transformación diferente*. Sin embargo, ambas cantidades corresponden a vectores. ¿Cómo explicamos esta diferencia?

El hecho radica en que, en efecto, ambas cantidades son vectores *en coordenadas cartesianas*, pero no necesariamente *en cualquier sistema de coordenadas*. Por ello, es conveniente introducir las nociones de vectores **covariantes** y vectores **contravariantes**. En este curso esta distinción no es necesaria, pero quienes deseen trabajar en gravitación o en altas energías, deberán comenzar a tener en cuenta estas nociones.



**Definición 8.4.** Un vector  $\vec{v}$  es denominado **contravariante** cuando, al ser sometido a una transformación ortogonal, transforma según la regla **Vector contravariante y vector covariante**

$$v'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} v_j, \quad (8.18)$$

y se denomina **covariante** cuando transforma según la regla

$$v'_i = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} v_j. \quad (8.19)$$

Las componentes del vector posición siempre transforman como vectores contravariantes.

Al trabajar en sistemas no cartesianos, es común representar los vectores contravariantes con superíndices en lugar de subíndices, de modo que las reglas (8.18) y (8.19) se suelen escribir como

$$v'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} v^j, \\ v'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} v_j.$$

Al utilizar esta convención, la suma se representa al tener *índices cruzados*, es decir, índices repetidos tanto como superíndice y como subíndice.

## 8.3. Transformaciones Ortogonales

La discusión hecha hasta ahora es válida para cualquier transformación de coordenadas entre dos bases distintas. Para los efectos de este curso, nos interesa trabajar únicamente con *transformaciones ortogonales*.

**Definición 8.5.** Una **transformación ortogonal** es aquella transformación de cambio de base que permite convertir una base ortonormal  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^n$  en una nueva base ortonormal  $\{\hat{e}'_i\}_{i=1}^n$ . **Transformación ortogonal**

Para asegurarnos que la transformación (8.7) sea una transformación ortogonal, de-

be además satisfacer que

$$\delta_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j \quad (8.20)$$

$$= \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} \hat{e}_k \right) \left( \sum_{l=1}^n a_{jl} \hat{e}_l \right) \quad (8.21)$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{jl} (\hat{e}_k \cdot \hat{e}_l) \quad (8.22)$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{jl} \delta_{kl} \quad (8.23)$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk}, \quad (8.24)$$

o bien, matricialmente,

$$A \cdot (A^T) = I, \quad (8.25)$$

que al calcular el determinante, observamos que

$$\det(A)^2 = 1, \quad (8.26)$$

de modo que una transformación ortogonal deberá satisfacer que  $\det(A) = 1$ , caso en que se denomina *transformación propia*, o bien que  $\det(A) = -1$ , lo que se conoce como *transformación impropia*.

En particular, de (8.25) podemos observar que para una transformación ortogonal,  $A^T = A^{-1}$ , es decir, la transpuesta de la transformación coincide con su inversa, de modo que también se satisface que

$$(A^T) \cdot A = I, \quad (8.27)$$

o en notación indicial,

$$\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}. \quad (8.28)$$

## 8.4. Tensores Cartesianos

Hasta ahora, hemos discutido las propiedades de los vectores, elementos con los que ya somos familiares. Sin embargo, seguimos sin responder la incógnita de *¿qué es un tensor?*. Para ello, introduzcamos una operación entre vectores.

### Producto externo

**Definición 8.6.** Dados dos vectores  $\vec{u} = u_i \hat{e}_i$  y  $\vec{v} = v_i \hat{e}_i$ , se define el **producto externo** entre ambos vectores como la cantidad

$$T_{ij} = u_i v_j. \quad (8.29)$$

Como podemos ver de la definición anterior, necesitamos de *dos índices* para definir el producto externo. ¿Qué ocurre con esta cantidad si, en lugar de utilizar la base  $\hat{e}_i$ , utilizamos la base  $\hat{e}'_i$ ? En otras palabras, ¿cómo transforma  $T_{ij}$  bajo transformaciones ortogonales? Notamos que

$$T'_{ij} = u'_i v'_j = (a_{ik} u_k)(a_{jl} v_l) = a_{ik} a_{jl} (u_k v_l) = a_{ik} a_{jl} T_{kl} . \quad (8.30)$$

Observamos pues, que  $T_{ij}$  transforma de manera similar a los vectores bajo transformaciones ortogonales. A cantidades que siguen una regla de transformación de este tipo, las llamamos *tensores (cartesianos) de rango 2*, pues requerimos de dos matrices de transformación para definir las adecuadamente. Observamos que, para un espacio de  $n$  dimensiones, estos elementos tendrán  $n^2$  componentes.

Esta noción puede ampliarse a más dimensiones, según la siguiente definición,

**Definición 8.7.** Dado un espacio de  $n$  dimensiones, el conjunto de  $n^r$  cantidades  $T_{i_1 i_2 \dots i_r}$  definidas en cada sistema ortogonal de coordenadas, son las componentes de un **tensor cartesiano de rango  $r$**  si, bajo transformaciones ortogonales, sus valores siguen la regla de transformación

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_r} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_r j_r} T_{j_1 j_2 \dots j_r} . \quad (8.31)$$

Gracias a esta definición, observamos que los **vectores**, que tienen una sola matriz de transformación en su definición (8.8), son *tensores de rango 1*. A su vez, los **escalares** son cantidades que no se ven modificadas frente a una transformación de coordenadas, de modo que  $\rho' = \rho$ . Por ello, podemos considerarlos *tensores de rango 0*.

### Ejemplo 8.1. Tensor de inercia.

Consideremos un cuerpo con densidad  $\rho(x_i)$ , contenido en una región  $V$  que rota *rígidamente* respecto de un eje con dirección  $\hat{\omega}$  con velocidad angular  $\omega$ . Entonces, podemos hallar su momento angular respecto al origen del sistema (ubicado sobre el eje de rotación) como

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \int_V \vec{x} \times d\vec{p} \\ &= \int_V \rho(x) \vec{x} \times \vec{v} dV \\ &= \int_V \rho(x) \vec{x} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) dV . \end{aligned}$$

Usando la identidad  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ , podemos escribir

$$\vec{L} = \int_V \rho(x) [\vec{\omega}(\vec{x} \cdot \vec{x}) - \vec{x}(\vec{\omega} \cdot \vec{x})] dV ,$$

o en términos de las componentes del vector,

$$\begin{aligned} L_i &= \int_V \rho(x) [\omega_i(x_k x_k) - x_i(\omega_j x_j)] dV \\ &= \int_V \rho(x) [(\delta_{ij} \omega_j)(x_k x_k) - x_i(\omega_j x_j)] dV \\ &= \left( \int_V \rho(x) [\delta_{ij}(x_k x_k) - x_i x_j] dV \right) \omega_j, \end{aligned}$$

es decir,

$$L_i = I_{ij} \omega_j$$

donde  $I_{ij}$  es el *tensor de inercia* definido como

$$\int_V \rho(x) [\delta_{ij}(x_k x_k) - x_i x_j] dV.$$

¿Es esta cantidad efectivamente un tensor cartesiano? Revisemos cómo transforma bajo una transformación ortogonal,

$$\begin{aligned} I'_{ij} &= \int_{V'} \rho'(x') [\delta_{ij}(x'_k x'_k) - x'_i x'_j] dV' \\ &= \int_V \underbrace{\rho(x)}_{\text{Escalar}} [\underbrace{\delta_{ij}(x_k x_k)}_{\text{Escalar}} - (a_{il} x_l)(a_{jm} x_m)] dV \\ &= \int_V \rho(x) [(a_{il} a_{jl})(x_k x_k) - (a_{il} x_l)(a_{jm} x_m)] dV \\ &= \int_V \rho(x) [(a_{il} a_{jm} \delta_{lm})(x_k x_k) - (a_{il} x_l)(a_{jm} x_m)] dV \\ &= (a_{il} a_{jm}) \int_V \rho(x) [(\delta_{lm})(x_k x_k) - x_l x_m] dV \\ &= a_{il} a_{jm} I_{lm}, \end{aligned}$$

de modo que efectivamente  $I_{jl}$  transforma como un tensor cartesiano.

### 8.4.1. Propiedades

En este contexto, vale la pena mencionar con algo más de detalle a dos propiedades.

#### Propiedad 8.1. Propiedades de los tensores cartesianos.

1. Si todas las componentes de un tensor se anulan en un sistema coordenado ortogonal, ellas se anularán en todo sistema coordenado ortogonal. Esta propiedad nos interesa, ya que nos indica que la anulación de un tensor **es una propie-**

**dad intrínseca** de este. Por ello, utilizar tensores en Física es tan importante, pues nos permite plantear leyes *que no dependen del sistema coordenado en que trabajamos*, sino únicamente del fenómeno estudiado.

Por ejemplo, podemos estar estudiando el momento de inercia de un cuerpo en movimiento, el cual es un tensor de rango 2. Si diera la casualidad de que este es cero en algún sistema coordenado ortogonal, esto quiere decir que en cualquier sistema coordenado ortogonal, el cuerpo *no se encuentra rotando*.

2. Existen algunos **tensores invariantes** o **isotrópicos**, los cuales tienen siempre las mismas componentes *en cualquier sistema coordenado*. Un ejemplo de estos es la delta de Kronecker, pues en cualquier sistema coordenado tendrá las mismas componentes, 1 si  $i = j$  y 0 si  $i \neq j$ .

En efecto, podemos observar que la delta de Kronecker transforma como

$$\delta'_{ij} = a_{ik} a_{jl} \delta_{kl} = a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} . \quad (8.32)$$

## 8.5. Álgebra Tensorial

Dicho rápido y sencillo, hemos visto que los tensores de rango 1 y rango 2 se comportan como vectores columna y como matrices, respectivamente. Por ello, esperaríamos que sea posible definir operaciones tensoriales similares a las definidas para estos elementos, incluyendo la posibilidad de construir tensores a partir de otros.

- **Adición y sustracción.** Se define la adición (o suma) y sustracción (o resta) de dos tensores *del mismo orden* componente a componente, es decir,

$$S_{ij\dots k} = V_{ij\dots k} + W_{ij\dots k} , \quad (8.33)$$

$$D_{ij\dots k} = V_{ij\dots k} - W_{ij\dots k} . \quad (8.34)$$

- **Permutación de índices.** La operación de permutar dos índices de un tensor de rango  $r$ , define un nuevo tensor de rango  $r$ . Es decir, dado un tensor  $T_{ijk\dots l}$  de rango  $r$ , la cantidad

$$B_{ijk\dots l} = T_{ikj\dots l} \quad (8.35)$$

es también un tensor de rango  $r$ .

- **Producto tensorial, o directo.** De manera similar al *producto externo* de dos vectores que calculamos anteriormente, podemos definir el producto entre dos tensores de diferente rango, digamos  $r$  y  $s$ , lo que permite formar un nuevo vector de rango  $r + s$ ,

$$C_{i_1 i_2 \dots i_{r+s}} = A_{i_1 i_2 \dots i_r} \cdot B_{i_{r+1} i_{r+2} \dots i_{r+s}} . \quad (8.36)$$

En este caso, es relevante respetar la posición de los índices en el producto, pues en general el tensor  $C_{ij} = A_i B_j$  será distinto al vector  $D_{ij} = A_j B_i$ , como consecuencia de la permutación de índices.

Esta operación incluye, por supuesto, el producto entre un tensor de rango 0 (un escalar) y un tensor de rango  $r$ , definiendo el *producto por un escalar*.

- **Contracción de índices.** El producto escalar entre dos vectores nos entrega un escalar en lugar de un tensor de orden 2 como consecuencia de la repetición de índices en el producto. De manera similar, la repetición de dos índice dentro de un tensor de orden  $r$  (digamos, el  $s$ -ésimo y el  $t$ -ésimo índice), es equivalente a un tensor de orden  $r - 2$ ,

$$B_{i_1 i_2 \dots i_{r-2}} = A_{i_1 i_2 \dots j \dots j \dots i_{r-2}} , \quad (8.37)$$

o de forma equivalente,

$$B_{i_1 i_2 \dots} = A_{i_1 i_2 \dots i_r} \delta_{i_s i_t} . \quad (8.38)$$

- **Ley del cociente.** Consideremos el caso en que tenemos una expresión de la forma

$$A_{pq \dots k \dots m} B_{ij \dots k \dots n} = C_{pq \dots m i j \dots n} , \quad (8.39)$$

donde sabemos que  $B$  y  $C$  son tensores de rango  $r$  y  $s$ , respectivamente, pero desconocemos si  $A$  es un tensor. La ley del cociente establece que *si la relación (8.39) es válida en cualquier sistema de coordenadas, entonces  $A$  es un tensor de orden  $s - r + 2$* . La demostración (para el caso  $r = s = 2$ ) puede ser hallada en el capítulo 26, sección 7 de Riley [28].

- **Simetría.** Cuando un tensor no cambia bajo la permutación de dos de sus índices,

$$T_{i_1 i_2 \dots i_s \dots i_t \dots i_r} = T_{i_1 i_2 \dots i_t \dots i_s \dots i_r} , \quad (8.40)$$

se dice que este es *simétrico* respecto a dichos índices. Si, en cambio,

$$T_{i_1 i_2 \dots i_s \dots i_t \dots i_r} = -T_{i_1 i_2 \dots i_t \dots i_s \dots i_r} , \quad (8.41)$$

decimos que el tensor es *antisimétrico* respecto de dichos índices. En general, un tensor de rango  $r$  puede escribirse como la suma de un tensor simétrico y un tensor antisimétrico respecto de la misma permutación de índices, de modo que

$$T_{i_1 i_2 \dots i_s \dots i_t \dots i_r} = \frac{1}{2}(T_{i_1 i_2 \dots i_s \dots i_t \dots i_r} + T_{i_1 i_2 \dots i_t \dots i_s \dots i_r}) + \frac{1}{2}(T_{i_1 i_2 \dots i_s \dots i_t \dots i_r} - T_{i_1 i_2 \dots i_t \dots i_s \dots i_r}) \quad (8.42)$$

$$= S_{i_1 i_2 \dots i_s \dots i_t \dots i_r} + A_{i_1 i_2 \dots i_s \dots i_t \dots i_r} . \quad (8.43)$$

En física, a veces es común utilizar la siguiente notación,

$$T_{i_1 i_2 \dots (i_s | \dots | i_t) \dots i_r} \equiv S_{i_1 i_2 \dots i_s \dots i_t \dots i_r} , \quad (8.44)$$

$$T_{i_1 i_2 \dots [i_s | \dots | i_t] \dots i_r} \equiv A_{i_1 i_2 \dots i_s \dots i_t \dots i_r} , \quad (8.45)$$

donde los índices entre paréntesis o corchetes son los índices respecto de los cuales el tensor es simétrico o antisimétrico.

Un tensor **completamente simétrico** de rango  $r$  es aquel que es simétrico respecto a la permutación de cada par de índices. Este tendrá  $\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}$  componentes linealmente independientes.

De forma análoga, un tensor **completamente antisimétrico** de rango  $r$  es aquel que es antisimétrico respecto a la permutación de cada par de índices. Este tendrá  $\frac{n!}{(n-r)!r!}$  componentes linealmente independientes. En particular, un tensor de rango  $r = n$ , tendrá una única componente linealmente independiente.

## 8.6. Pseudovectores y pseudotensores

Hasta ahora, de manera implícita, hemos utilizado transformaciones ortogonales *propias*, es decir, que solo rotan el sistema, pero no modifican la orientación de los tensores. Sin embargo, al considerar transformaciones *impropias*, que no solo rotan el sistema sino que realizan una inversión de coordenadas o *reflexión* ( $x_i \rightarrow -x_i$ ). Cuando también incluimos este tipo de transformaciones, los vectores siguen cumpliendo la regla de transformación (8.8), pero existen ciertas cantidades físicas que comúnmente supondríamos como vectores, pero que bajo una reflexión no transforman de igual manera, como es el caso de aquellas relacionadas a cantidades *angulares*, como la velocidad angular, el torque o el momento angular.

**Definición 8.8.** Las cantidades que transforman según la regla

**Pseudovector**

$$\vec{v}' = \det(A)A\vec{v}, \quad (8.46)$$

se denominan **pseudovectores**, o **vectores axiales**.

De forma análoga, es posible extender esta noción a tensores y *pseudotensores*.

**Definición 8.9.** Los elementos que transforman según la regla

**Pseudotensor**

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_r} = \det(A) a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_r j_r} T_{j_1 j_2 \dots j_r} \quad (8.47)$$

se denominan **pseudotensores**.

### 8.6.1. Propiedades

**Propiedad 8.2. Propiedades de los pseudotensores.**

1. La suma y la diferencia de dos pseudotensores del mismo rango es también un pseudotensor del mismo rango.

2. El producto tensorial de dos pseudotensores es un tensor cartesiano.
3. El producto tensorial de un pseudotensor y un tensor es un pseudotensor.
4. La contracción de dos índices de un pseudotensor define un nuevo pseudotensor.
5. Un **pseudoescalar** es una cantidad que cambia de signo bajo una transformación impropia.
6. En física, es común considerar únicamente transformaciones propias. En estos casos, la distinción entre tensores y pseudotensores no es necesaria.

### 8.6.2. Símbolo de Levi-Civita

**Definición 8.10. Símbolo de Levi-Civita** En un espacio  $n$ -dimensional, se define el **símbolo de Levi-Civita** como un objeto de  $n$  índices *totalmente antisimétrico*, es decir,

$$\varepsilon_{ijkl\dots} = -\varepsilon_{jikl\dots} = -\varepsilon_{kjl\dots} = -\varepsilon_{ljki} = \varepsilon_{jilk} = \dots, \quad (8.48)$$

tal que en todo sistema de coordenadas,

$$\varepsilon_{123\dots n} = 1. \quad (8.49)$$

De forma equivalente, se puede definir como

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{si } i_1 \dots i_n \text{ es una permutación par de } 12 \dots n, \\ -1, & \text{si } i_1 \dots i_n \text{ es una permutación impar de } 12 \dots n, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (8.50)$$

#### Propiedad 8.3. Propiedades del símbolo de Levi-Civita.

1. El símbolo de Levi-Civita puede utilizarse para calcular determinantes, mediante la relación

$$\det(A) = a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n}. \quad (8.51)$$

2. El símbolo de Levi-Civita transforma como un pseudotensor.

De la propiedad 1, se desprende que el símbolo de Levi-Civita transforma, bajo una transformación arbitraria, como

$$\varepsilon'_{i_1 \dots i_n} = \frac{1}{\det(A)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n}. \quad (8.52)$$

Como en las transformaciones ortogonales,  $\det(A) = 1 / \det(A) = \pm 1$ , concluimos que el símbolo de Levi-Civita *transforma como un pseudotensor*.



3. El símbolo de Levi-Civita puede ser utilizado para representar productos vectoriales entre dos vectores en notación tensorial, de modo que si  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ , podemos escribir

$$C_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k . \quad (8.53)$$

Como consecuencia, *todo vector que se obtiene a partir del producto vectorial entre dos vectores, es un pseudovector*, lo que explica por qué las cantidades angulares se comportan como pseudovectores.

4. El símbolo de Levi-Civita satisface la identidad

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1 1} & \delta_{i_1 2} & \dots & \delta_{i_1 n} \\ \delta_{i_2 1} & \delta_{i_2 2} & \dots & \delta_{i_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_n 1} & \delta_{i_n 2} & \dots & \delta_{i_n n} \end{vmatrix} , \quad (8.54)$$

de donde es directo hallar que el producto de dos símbolos de Levi-Civita se puede hallar como

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1 j_1} & \delta_{i_1 j_2} & \dots & \delta_{i_1 j_n} \\ \delta_{i_2 j_1} & \delta_{i_2 j_2} & \dots & \delta_{i_2 j_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_n j_1} & \delta_{i_n j_2} & \dots & \delta_{i_n j_n} \end{vmatrix} . \quad (8.55)$$

5. En tres dimensiones, el símbolo de Levi-Civita satisface las identidades

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} , \quad (8.56)$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ljk} = 2 \delta_{il} , \quad (8.57)$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6 . \quad (8.58)$$

### 8.6.3. Tensores duales

A cualquier (pseudo-)tensor totalmente antisimétrico de rango  $r$  en  $n$  dimensiones se le puede asociar un (pseudo-)tensor totalmente antisimétrico de rango  $(n - r)$ , pues ambos tienen el mismo número de componentes linealmente independientes.

**Definición 8.11.** Si  $A_{i_1 \dots i_r}$  es un tensor totalmente antisimétrico de rango  $r$ , se define **Pseudotensor dual** un **pseudotensor dual** de rango  $n - r$  como

$$\mathcal{A}_{i_1 \dots i_{n-r}} = \frac{1}{r!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{n-r} j_1 \dots j_r} A_{j_1 \dots j_r} , \quad (8.59)$$

mientras que la transformación inversa se define como

$$A_{i_1 \dots i_r} = \frac{1}{(n - r)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{n-r}} \mathcal{A}_{j_1 \dots j_{n-r}} . \quad (8.60)$$

Cuando trabajamos en tres dimensiones, a cualquier tensor de rango 3 totalmente antisimétrico,  $A_{ijk}$ , le podemos asociar un pseudoescalar dual  $\mathcal{A}$ , tal que

$$\mathcal{A} = \frac{1}{3!} \varepsilon_{ijk} A_{ijk}, \quad A_{ijk} = \varepsilon_{ijk} \mathcal{A}, \quad (8.61)$$

y a cualquier tensor antisimétrico  $A_{ij}$  se le puede asociar un pseudovector  $\mathcal{A}_i$ , tal que

$$\mathcal{A}_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} A_{jk}, \quad A_{ij} = \varepsilon_{ijk} \mathcal{A}_k, \quad (8.62)$$

y viceversa.

En Física, el uso de tensores y sus duales nos permite tener cantidades diferentes que contienen la misma información, y que pueden ser útiles en diferentes contextos. Por ejemplo, el *momento multipolar magnético de orden 1*,  $M_{ij} = -M_{ji}$ , contiene la misma información que el pseudovector *momento magnético*, definido como  $\mu_i = \varepsilon_{ijk} M_{jk} / 2$ .

## 8.7. Análisis tensorial

En el curso de Física Matemática I, ya estudiaron la noción de *análisis vectorial*, que correspondía al uso del operador nabla en diferentes sistemas coordenados. En este, hicieron uso de las nociones de *campo escalar* y *campo vectorial*. Estas nociones pueden también extenderse a elementos de mayor rango mediante los campos tensoriales.

### Campo tensorial

**Definición 8.12.** Se define un **campo tensorial** como la función que asocia a cada punto del espacio con un tensor  $T_{i_1 i_2 \dots i_r}$ , es decir,

$$x \mapsto T_{i_1 i_2 \dots i_r}(x). \quad (8.63)$$

### 8.7.1. Derivación

Dado que un campo tensorial de rango  $r$  consta de  $n^r$  cantidades definidas en cada punto del espacio, podemos derivar cada una de estas cantidades respecto a las  $n$  coordenadas del espacio, obteniendo  $n^{r+1}$  derivadas parciales

$$\frac{\partial T_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_j} \equiv \partial_j T_{i_1 \dots i_r}, \quad (8.64)$$

que forman un tensor cartesiano de rango  $r + 1$  bajo transformaciones ortogonales. En efecto,

$$(\partial_j T_{i_1 \dots i_r})' = \frac{\partial T'_{i_1 \dots i_r}}{\partial x'_j} \quad (8.65)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x'_j} (a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r} T_{j_1 \dots j_r}) \quad (8.66)$$

$$= a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r} \frac{\partial T_{j_1 \dots j_r}}{\partial x'_j} . \quad (8.67)$$

Usando ahora la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{\partial T_{j_1 \dots j_r}(x')}{\partial x'_j} = \frac{\partial T_{j_1 \dots j_r}(x')}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_j} = a_{jk} \frac{\partial T_{j_1 \dots j_r}(x')}{\partial x_k} , \quad (8.68)$$

de modo que

$$(\partial_j T_{i_1 \dots i_r})' = a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r} \frac{\partial T_{j_1 \dots j_r}(x')}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_j} \quad (8.69)$$

$$= a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r} a_{jk} \frac{\partial T_{j_1 \dots j_r}(x')}{\partial x_k} \quad (8.70)$$

$$= a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r} a_{jk} (\partial_k T_{j_1 \dots j_r}) , \quad (8.71)$$

comprobando así que transforma como un tensor de orden  $r + 1$ .

También podemos calcular la derivada de un tensor de rango  $r$  respecto de un parámetro  $t$  independiente de las coordenadas. En este caso, el resultado es también un tensor de orden  $r$ ,

$$\frac{dT'_{i_1 \dots i_r}}{dt} = a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r} \frac{dA_{j_1 \dots j_r}}{dt} . \quad (8.72)$$

De una manera similar, podemos operar sobre este nuevo tensor *derivada* con todas las operaciones tensoriales disponibles. En particular, podemos definir el operador nábla en un espacio de  $n$  dimensiones. En notación indicial, dado un campo escalar  $\phi$  y un vector  $\vec{A}$ , tenemos

$$(\nabla \phi)_i = \partial_i \phi , \quad (8.73)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \partial_i A_i , \quad (8.74)$$

$$(\nabla \times \vec{A})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k , \quad (8.75)$$

$$\nabla^2 \phi = \partial_i \partial_i \phi . \quad (8.76)$$

## 8.7.2. Integración

Al igual que tenemos *integrales vectoriales* para campos vectoriales, que pueden dar como resultado un vector o un escalar, podemos definir *integrales tensoriales* para campos tensoriales. En particular, revisaremos las integrales de línea, superficie y volumen.

### Integrales de línea

Una integral de línea sobre un campo tensorial  $T_{i_1 \dots i_r}(x)$  de rango  $r$  a lo largo de una curva  $C$  definida por un parámetro  $\lambda$  tal que  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ , genera un tensor de rango  $r + 1$  definido como

$$C_{ji_1 \dots i_r} = \int_C T_{i_1 \dots i_r}(x) dx_j, \quad (8.77)$$

o de forma explícita,

$$C_{ji_1 \dots i_r} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} T_{i_1 \dots i_r}(x(\lambda)) \left( \frac{dx_j}{d\lambda}(\lambda) \right) d\lambda. \quad (8.78)$$

En efecto, observamos que

$$C'_{ji_1 \dots i_r} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [T'_{i_1 \dots i_r}(x(\lambda))] \left[ \frac{dx'_j}{d\lambda}(x) \right] d\lambda, \quad (8.79)$$

$$= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r} T_{j_1 \dots j_r}(x(\lambda))] \left[ \frac{d(a_{jk} x_k)}{d\lambda}(x) \right] d\lambda, \quad (8.80)$$

$$= a_{jk} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} T_{j_1 \dots j_r}(x(\lambda)) \frac{dx_k}{d\lambda}(\lambda) d\lambda, \quad (8.81)$$

$$= a_{jk} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r} C_{kj_1 \dots j_r}. \quad (8.82)$$

### Integrales de superficie

Dado un (pseudo)vector  $n_i(x)$  unitario y normal a la superficie  $S$  en el punto  $x_i$ , podemos definir la integral de superficie de un campo tensorial  $T_{i_1 \dots i_r}(x)$  de rango  $r$ , que será un (pseudo)tensor de rango  $r + 1$ , como

$$C_{ji_1 \dots i_r} = \int_S T_{i_1 \dots i_r}(x) dS_j, \quad dS_j = n_j dS, \quad (8.83)$$

donde  $dS$  es el elemento de superficie que, por definición, es un escalar.

Comprobamos que esta integral es un tensor, ya que

$$C'_{ji_1 \dots i_r} = \int_S T'_{i_1 \dots i_r}(x) n'_j dS', \quad (8.84)$$

$$= \int_S [a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r} T_{j_1 \dots j_r}(x)] (a_{jk} n_k) dS, \quad (8.85)$$

$$= a_{jk} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r} \int_S T_{j_1 \dots j_r}(x) n_k dS, \quad (8.86)$$

$$= a_{jk} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r} C_{kj_1 \dots j_r}. \quad (8.87)$$

### Integrales de volumen

En este caso, dado un volumen  $n$ –dimensional, la integral de volumen de un campo tensorial  $T_{i_1 \dots i_r}(x)$  de rango  $r$ , es también un tensor de rango  $r$ , definido como

$$C_{i_1 \dots i_r} = \int_V T_{i_1 \dots i_r}(x) d^n x. \quad (8.88)$$

Efectivamente, observamos que

$$C'_{i_1 \dots i_r} = \int_V T'_{i_1 \dots i_r}(x) d^n x', \quad (8.89)$$

$$= \int_V [a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r} T_{j_1 \dots j_r}(x)] \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^n x, \quad (8.90)$$

$$= a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r} \int_V T_{j_1 \dots j_r}(x) \det(A) d^n x, \quad \det(A) = 1 \quad (8.91)$$

$$= a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r} \int_V T_{j_1 \dots j_r}(x) d^n x, \quad (8.92)$$

$$= a_{i_1 j_1} \dots a_{i_r j_r} C_{j_1 \dots j_r}. \quad (8.93)$$

### Teoremas integrales

El **teorema fundamental del cálculo** en varias variables puede ser escrito en notación tensorial como

$$\int_{C_{[A,B]}} (\partial_k T_{i_1 \dots i_r}) dx_k = T_{i_1 \dots i_r}(B) - T_{i_1 \dots i_r}(A), \quad (8.94)$$

donde  $C_{[A,B]}$  es una curva que une los puntos  $A$  y  $B$ .

El **teorema de Gauss** en 3 dimensiones puede escribirse como

$$\int_V \partial_j T_{i_1 \dots k \dots i_r}(x) dV = \oint_{\partial V} T_{i_1 \dots k \dots i_r}(x) dS_j, \quad (8.95)$$

y puede generalizarse al caso en el que no necesariamente exista una contracción de índices (no necesariamente hay una divergencia) como

$$\int_V \partial_j T_{i_1 \dots i_r}(x) dV = \oint_{\partial V} T_{i_1 \dots i_r}(x) dS_j. \quad (8.96)$$

El **teorema de Stokes** se puede escribir de una manera similar, escribiendo los casos donde hay contracción de índices,

$$\int_S \varepsilon_{ijk} \partial_j T_{i_1 \dots k \dots i_r} dS_i = \oint_{\partial S} T_{i_1 \dots k \dots i_r} dx_k, \quad (8.97)$$

y el caso en que no necesariamente exista una contracción,

$$\int_S \varepsilon_{ijk} \partial_j T_{i_1 \dots i_r} dS_i = \oint_{\partial S} T_{i_1 \dots i_r} dx_k. \quad (8.98)$$



## Referencias

- [1] Milton Abramowitz e Irene A. Stegun. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs and mathematical tables [conference under the auspices of the National science foundation and the Massachusetts institute of technology]*. eng. Unabridged, unaltered and corr. republ. of the 1964 ed. Dover books on advanced mathematics. New York: Dover publ, 1972. ISBN: 978-0-486-61272-0.
- [2] R. P. Agarwal y D. O'Regan. *Ordinary and Partial Differential Equations: With Special Functions, Fourier Series, and Boundary Value Problems*. Springer, 2009.
- [3] F Andino, M. Recarte y M. Spilsbury. «La función delta de Dirac». En: *Revista de la escuela de física* 2.1 (2014), págs. 60-61. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/648b/67463802aae055392666c8f305a2b23c5977.pdf>.
- [4] T. M. Apostol. *Análisis matemático*. 2.<sup>a</sup> ed. Editorial Reverté, 1996.
- [5] T. M. Apostol. *Calculus*. 2.<sup>a</sup> ed. Vol. 2. Editorial Reverté, 1985.
- [6] G. Arfken y H. Weber. *Mathematical methods for physicists*. 7.<sup>a</sup> ed. Elsevier Academic Press, 2013.
- [7] José Barea. *Notas de clase de Física Matemática I*. Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Concepción, 2021.
- [8] M. Bôcher. «On Gibb's Phenomenon». En: *Math* 1914.144 (1914), págs. 41-47. doi: <https://doi.org/10.1515/crll.1914.144.41>.
- [9] J. W. Brown y R. V. Churchill. *Fourier series and boundary value problems*. 5.<sup>a</sup> ed. McGraw-Hill, 1993.
- [10] E. Butkov. *Mathematical Physics*. 1.<sup>a</sup> ed. Addison-Wesley, 1968.
- [11] E. A. Coddington. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. 5.<sup>a</sup> ed. Dover Publications, 1961.
- [12] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu y Franck Laloë. *Quantum mechanics. Volume 1: Basic concepts, tools, and applications*. eng. Ed. por Susan Reid Hemley, Nicole Ostrowsky y Dan Ostrowsky. Second edition. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2020. ISBN: 978-3-527-34553-3.

- [13] R. Courant y D. Hilbert. *Methods of mathematical physics*. 1.<sup>a</sup> ed. Vol. 1. Interscience Publishers, 1937.
- [14] S. Hassani. *Mathematical physics: a modern introduction to its foundations*. Springer, 1999.
- [15] H. Hochstadt. *The functions of mathematical physics*. Dover Publications, 1986.
- [16] H. P. Hsu. *Análisis de Fourier*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
- [17] Wikipedia (en inglés). *Bessel Function*. Page Version ID: 1270535814. Ene. de 2025. URL: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Bessel\\_function&oldid=1270535814](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Bessel_function&oldid=1270535814).
- [18] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. eng. Third edition, international adaption. Hoboken, NY: Wiley, 2021. ISBN: 978-1-119-77076-3.
- [19] Serge Lang. *Analysis I*. Addison-Wesley, 1968. Cap. 10 y 13.
- [20] Nikolaj Nikolaevič Lebedev y Richard A. Silverman. *Special functions and their applications*. eng. Rev. english ed. New York: Dover publ, 1972. ISBN: 978-0-486-60624-8.
- [21] J. E. Marsden y M. J. Hoffman. *Análisis clásico elemental*. 2.<sup>a</sup> ed. Addison-Wesley Iberoamericana, 1998.
- [22] Sean Mauch. *Introduction to Methods of Applied Mathematics or Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. 2004. URL: <http://www.its.caltech.edu/~sean>.
- [23] Philip McCord Morse y Herman Feshbach. *Methods of theoretical physics*. eng. International series in pure and applied physics. Boston, Mass: McGraw-Hill, 1999. ISBN: 978-0-07-043316-8.
- [24] V. Muñoz y J. Rogan. *Métodos de la física matemática II*. Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, 2009.
- [25] Mohammad Niksirat. *Differential Equations: Partial and boundary value problems*. Department of Mathematical Sciences, University of Alberta, Canada, 2018. URL: <https://sites.ualberta.ca/~niksirat/PDE/PDE.html>.
- [26] E. D. Rainville. *Special functions*. The Macmillan company, 1960.
- [27] Paulo H. F. Reimberg y L. Raul Abramo. *A completeness-like relation for Bessel functions*. 2015. arXiv: 1310.1128 [math-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/1310.1128>.
- [28] K. F. Riley, M.P. Hobson y S. J. Bence. *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. Cambridge University Press, 2006.
- [29] R. Rodríguez del Río y E. Zuazua. «Series de Fourier y fenómeno de Gibbs». En: *CUBO, A Mathematical Journal* 5.2 (2003), págs. 185-224. URL: <http://revistas.ufro.cl/ojs/index.php/cubo/article/view/1695>.
- [30] G. F. Rubilar. *Física matemática II*. Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Concepción, 2019. URL: <https://github.com/gfrubi/FM2>.
- [31] J. Ruiz. *Series de Fourier*. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Concepción, 2012.



- [32] Jun J. Sakurai y Jim Napolitano. *Modern quantum mechanics*. eng. 2. ed., international ed. Boston, Mass.: Addison-Wesley, Pearson, 2011. ISBN: 978-0-8053-8291-4.
- [33] Murray R. Spiegel, John Liu y Seymour Lipschutz. *Mathematical handbook of formulas and tables*. eng. 3. ed. Schaum's outline series. New York: McGraw-Hill, 2009. ISBN: 978-0-07-154855-7.
- [34] G. P. Tolstov. *Fourier Series*. Dover Publications, 1962.
- [35] Wikipedia contributors. *Frobenius method* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Frobenius\\_method&oldid=1226431177](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Frobenius_method&oldid=1226431177). [Online; accessed 7-February-2025]. 2024.
- [36] Dennis G. Zill. *A first course in differential equations with modeling applications*. eng. Décima edición. India: Cengage Learning, 2013. ISBN: 978-81-315-2282-0.