

---

---

# **FÍSICA MATEMÁTICA II**

---

---

Autor:

Pedro A. Contreras-Corral

Enero 2025

v1.0

# Prefacio

Este documento ha sido preparado por Pedro Contreras Corral como material de apoyo para el curso Física Matemática II. En cuanto a su contenido, se han utilizado como base las notas de clase de las ocasiones en que el curso fue dictado por el profesor Guillermo Rubilar, y las profesoras Ariana Muñoz e Ivana Sebestova, además del apunte preparado por Alejandro Saavedra como ayudante de esta última, que también fue utilizado como base para el *template* de este documento.

También se han usado como base (en mayor o menor medida) los textos establecidos en la bibliografía, *Mathematical Physics* de Butkov, *Mathematical Methods for Physicists* de Arfken, *Mathematical Methods for Physics and Engineering* de Riley. Junto a ellos, se han usado algunas ideas del libro *Mathematical Physics, a Modern Introduction to its Foundations* de Hassani.

Es necesario recordar que esta es la primera versión de este documento, por lo que es probable que contenga algunos typos y errores menores. En caso de que estos se presenten, serán mencionados en clases para que puedan tomar notas al respecto, y serán corregidos en versiones posteriores del documento.

Agradezco los aportes de Lixin Lai, Fernanda Mella y Amaro Díaz al facilitarme sus notas y el material del curso de la profesora Ivana Sebestova, así como los de José Huenchual por sus notas del curso de la profesora Ariana Muñoz.

*“...El trabajo en equipo se convertirá en el método de investigación científica.”*

John Desmond Bernal.

# Índice general

<b>1. Análisis de Fourier</b>	<b>5</b>
1.1. Periodicidad y paridad de funciones	5
1.1.1. Funciones periódicas	5
1.1.2. Funciones pares e impares	7
1.2. Serie de Fourier trigonométrica	8
1.2.1. Definición	8
1.2.2. Series de senos y cosenos	10
1.2.3. Ejemplos	10
1.3. Serie exponencial	14
1.4. Diferenciación e integración de las series de Fourier	16
1.5. Fenómeno de Gibbs	18
<b>2. Transformada de Fourier</b>	<b>22</b>
2.1. Definiciones	22
2.2. Ejemplos	26
2.3. Propiedades de la transformada de Fourier	30
2.4. Convolución	33
2.5. Aplicación de la transformada de Fourier	38
<b>3. Ecuaciones Diferenciales en Física</b>	<b>41</b>
3.1. Algunas ecuaciones básicas	42
3.1.1. Ecuación de Laplace	42
3.1.2. Ecuación de Poisson	42
3.1.3. Ecuación de Helmholtz	43
3.1.4. Ecuación de difusión de calor dependiente del tiempo	43
3.1.5. Ecuación de onda dependiente del tiempo	43
3.1.6. Ecuación de Klein-Gordon	43

3.1.7.	Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo	43
3.2.	Condiciones de borde	44
3.3.	Encontrando soluciones para ecuaciones diferenciales parciales	44
3.3.1.	Método de la transformada de Fourier	45
<b>4.</b>	<b>El Método de Separación de Variables</b>	<b>47</b>
4.1.	Resolviendo la ecuación de Helmholtz	47
4.1.1.	Coordenadas cartesianas	48
4.1.2.	Coordenadas cilíndricas	50
4.2.	Coordenadas esféricas	51
<b>5.</b>	<b>El método de series para EDO y una introducción al problema de Sturm-Liouville</b>	<b>54</b>
5.1.	Resolver EDOs por el método de series	54
5.2.	El problema de Sturm-Liouville	55
5.3.	Condiciones de contorno de Sturm-Liouville	56
5.3.1.	Condiciones de contorno periódicas	57
5.3.2.	Condiciones de contorno de tipo Robin, o regulares	57
5.3.3.	Condiciones de contorno singulares	57
<b>6.</b>	<b>Funciones de Legendre</b>	<b>59</b>
6.1.	Ecuación de Legendre	59
6.1.1.	Resolviendo la ecuación de Legendre	60
6.1.2.	Función Generatriz	62
6.1.3.	Propiedades	63
6.1.4.	Funciones de Legendre de segunda especie	64
6.2.	Ecuación asociada de Legendre	65
6.2.1.	Resolviendo la ecuación asociada de Legendre	66
6.2.2.	Función generatriz	67
6.2.3.	Propiedades	68
6.3.	Armónicos Esféricos	69
6.3.1.	Propiedades	69
<b>7.</b>	<b>Funciones de Bessel</b>	<b>71</b>
<b>8.</b>	<b>Funciones de Green</b>	<b>72</b>
8.1.	Motivación: Potencial electrostático	72
8.2.	Encontrando soluciones mediante funciones de Green	73
8.3.	Simetría de las funciones de Green	75
8.4.	Algunas funciones de Green comunes	76
8.4.1.	Ecuación de Laplace	76
8.4.2.	Ecuación de Helmholtz	76
8.5.	Método de las imágenes	76
<b>9.</b>	<b>Introducción a los Tensores Cartesianos</b>	<b>78</b>
9.1.	Covarianza y contravarianza	80

9.1.1. Convenio de suma de Einstein . . . . .	80
9.2. Tensores Cartesianos . . . . .	80
9.3. Operaciones con tensores . . . . .	80
9.4. Pseudovectores y pseudotensores . . . . .	80
<b>A. Un breve repaso: Espacios vectoriales y espacio de funciones</b>	<b>81</b>
A.1. Definiciones . . . . .	81
A.2. Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt . . . . .	86
A.3. Coeficientes de Fourier . . . . .	88

# Análisis de Fourier

En el curso Física Matemática I ya se discutió el estudio de la Serie de Fourier. En este curso, haremos un rápido resumen de dichos contenidos, pues son la base para introducir el concepto de la *transformada de Fourier*, que será de utilidad para la resolución de algunas ecuaciones diferenciales parciales cuyas condiciones de borde son periódicas.

## 1.1. Periodicidad y paridad de funciones

### 1.1.1. Funciones periódicas

**Definición 1.1.** Una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  se dice que es **periódica de período**  $T$ , con  $T \neq 0$ , si

$$f(t) = f(t + T), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

La constante  $T$  la tomaremos como la menor constante positiva que satisface la igualdad (1.1).

**Observación:** No es difícil de ver que se verifica:

1.

$$f(t) = f(t + nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

2. Si  $f(t)$  y  $g(t)$  son funciones periódicas de período  $T$ , entonces la función

$$h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t); \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

tiene el mismo período  $T$ .

**Ejemplo 1.1.1.** Encontrar el período de la función  $f(t) = \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4}$ .

**Solución:** Si la función  $f(t)$  es periódica con período  $T$ , entonces, de (1.1),

$$\cos \frac{1}{3}(t + T) + \cos \frac{1}{4}(t + T) = \cos \frac{t}{3} + \cos \frac{t}{4}.$$

Como  $\cos(\theta + 2\pi n) = \cos \theta$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , obtenemos que

$$\frac{1}{3}T = 2\pi n, \quad \frac{1}{4}T = 2\pi m; \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Por consiguiente  $T = 6\pi n = 8\pi m$ ; cuando  $n = 4$  y  $m = 3$ , se obtiene el mínimo valor de  $T$ . Así,  $T = 24\pi$ .

En general, si la función

$$f(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$$

es periódica de período  $T$ , entonces es posible encontrar dos enteros  $n$  y  $m$  tales que

$$\omega_1 T = 2\pi n, \tag{1.2}$$

$$\omega_2 T = 2\pi m. \tag{1.3}$$

El cociente de (1.2) y (1.3) es

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m},$$

es decir, la relación  $\omega_1/\omega_2$  debe ser un número racional.

**Proposición 1.1.** Sea  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$  una función periódica de período  $T$ . Sea  $a \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\int_{a-T/2}^{a+T/2} f(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt.$$

**Demostración.** Utilizando la propiedad de aditividad de la integral compleja:

$$\int_{a-T/2}^{a+T/2} f(t) dt = \int_{a-T/2}^{-T/2} f(t) dt + \int_{-T/2}^{a+T/2} f(t) dt.$$

Haciendo la sustitución  $t = t' - T \Rightarrow dt = dt'$  en la primera integral, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \int_{a-T/2}^{-T/2} f(t) dt + \int_{-T/2}^{a+T/2} f(t) dt &= \int_{a+T/2}^{T/2} f(t' - T) dt' + \int_{-T/2}^{a+T/2} f(t) dt \\
 &= \int_{a+T/2}^{T/2} f(t' - T + T) dt' + \int_{-T/2}^{a+T/2} f(t) dt \\
 &= \int_{a+T/2}^{T/2} f(t') dt' + \int_{-T/2}^{a+T/2} f(t) dt \\
 &= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt.
 \end{aligned}$$

**Definición 1.2.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  seccionalmente continua, se llama **extensión periódica** de  $f$  a la función  $f_e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f_e(t) = f(t + k_0(b - a))$$

donde  $k_0 \in \mathbb{Z}$  es el único entero que verifica  $t + k_0(b - a) \in [a, b]$ .

**Ejemplo 1.1.2.** La extensión periódica de  $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$  real es

$$f_e(t) = f_e(t + 2\pi)$$

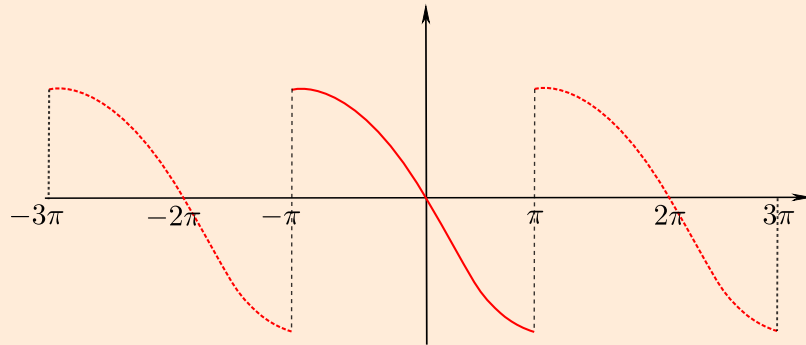


Figura 1.1: Extensión periódica de una función real seccionalmente continua en  $[-\pi, \pi]$ .

### 1.1.2. Funciones pares e impares

**Definición 1.3.** Sea  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  perteneciente a  $\mathcal{C}[-a, a]$ .

$$f \text{ es par} \Leftrightarrow \forall x \in [-a, a] : f(-x) = f(x).$$

$$f \text{ es impar} \Leftrightarrow \forall x \in [-a, a] : f(-x) = -f(x).$$



**Proposición 1.2.** Sea  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable,

$$f \text{ es par} \Rightarrow \int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt.$$

$$f \text{ es impar} \Rightarrow \int_{-a}^a f(t) dt = 0.$$

**Observación 2:** Toda función  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  puede expresarse como la suma de una función par más otra impar:  $f = f_p + f_i$  con

$$f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}, \quad f_i(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}.$$

**Definición 1.4.** Sea  $f \in \mathcal{C}[0, a]$  real, entonces la **extensión par** y la **extensión impar** de  $f$  están definidas, respectivamente, por:

$$E_f(t) = \begin{cases} f(-t) & \text{si } -a \leq t < 0 \\ f(t) & \text{si } 0 \leq t \leq a \end{cases}, \quad O_f(t) = \begin{cases} -f(-t) & \text{si } -a \leq t < 0 \\ f(t) & \text{si } 0 \leq t \leq a \end{cases}.$$

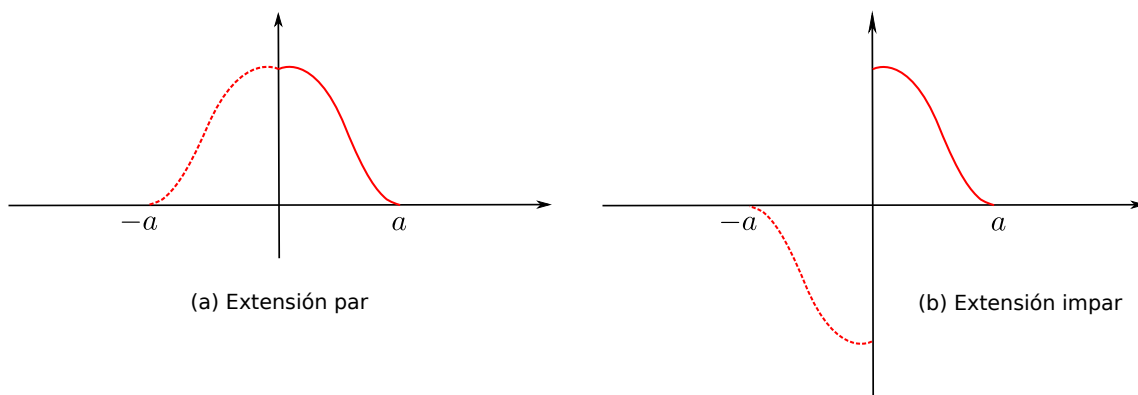


Figura 1.2: Extensión par e impar de una función real seccionalmente continua en  $[0, a]$ .

## 1.2. Serie de Fourier trigonométrica

### 1.2.1. Definición

**Proposición 1.3.** En el espacio  $\mathcal{C}[a, b]$ , el conjunto formado por las funciones

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

es un conjunto ortogonal, con  $L = b - a$ .

**Definición 1.5.** Llamamos **sistema trigonométrico** al conjunto de funciones ortonormales en el espacio  $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ , definido como

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

**Definición 1.6.** Sea  $f \in \mathcal{C}[a, a + 2L]$ , una función con un número finito de discontinuidades. Entonces, ella puede ser aproximada por la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right). \quad (1.4)$$

Esta expansión se denomina **serie trigonométrica de Fourier** o simplemente **serie de Fourier**, donde los *coeficientes de Fourier* están dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt, \quad n = 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_a^{a+2L} f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

**Observación:** La serie de Fourier de  $f$  converge en media a  $f$ , o sea,

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)).$$

Sea  $f = u + iv \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ , su serie de Fourier trigonométrica está dada por (1.4) con

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) dt + \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(t) dt, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos(nt) dt + \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(t) \cos(nt) dt, \quad n = 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \sin(nt) dt + \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(t) \sin(nt) dt, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Entonces, su serie de Fourier nos queda

$$f(t) \sim \left\{ \frac{\operatorname{Re}(a_0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re}(a_n) \cos(nt) + \operatorname{Re}(b_n) \sin(nt)) \right\} \\ + i \left\{ \frac{\operatorname{Im}(a_0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Im}(a_n) \cos(nt) + \operatorname{Im}(b_n) \sin(nt)) \right\},$$

es decir, la serie de Fourier de  $f = u + iv$  es la de  $u(t) + i$  (la de  $v(t)$ ).

### 1.2.2. Series de senos y cosenos

Sea  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  seccionalmente continua, entonces la extensión par e impar de  $f$  están definidas por:

$$E_f(t) = \begin{cases} f(-t) & \text{si } -\pi \leq t < 0 \\ f(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \end{cases}, \quad O_f(t) = \begin{cases} -f(-t) & \text{si } -\pi \leq t < 0 \\ f(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \end{cases}.$$

Puesto que  $E_f, O_f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  son seccionalmente continuas, se puede obtener el desarrollo en serie de Fourier de éstas, los cuales están definidos por:<sup>1</sup>

$$E_f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt), \quad \text{donde } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

y

$$O_f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt), \quad \text{donde } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

Estos son llamados **desarrollos en serie de Fourier de coseno y de seno de  $f$** , respectivamente.

### 1.2.3. Ejemplos

**Ejemplo 1.2.1.** Consideremos la función  $f(x) = x^2$  definida para  $x \in [-\pi, \pi]$ , la cual es continua con derivada  $f'(x) = 2x$  también continua, luego la serie de Fourier de  $f$  converge puntualmente a  $f$  para todo  $x \in (-\pi, \pi)$ . Para los extremos  $x = \pm\pi$  vemos que  $f(\pi) = f(-\pi)$ , por lo tanto la serie converge puntualmente a  $f$  para todo  $x \in [-\pi, \pi]$ .

<sup>1</sup>La forma de las series seno y coseno, con sus respectivos coeficientes, se obtienen al aplicar las propiedades vistas para las funciones pares e impares.

Sus coeficientes de Fourier están dados por:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{x^3}{3\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2, \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{1}{n\pi} x^2 \sin(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx \\
 &= \frac{2}{n^2\pi} x \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx \xrightarrow{0} \\
 &= \frac{4}{n^2} \cos(n\pi) = (-1)^n \frac{4}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(nx) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Entonces, su serie de Fourier es

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx), \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (1.5)$$

Es claro que la serie de Fourier de  $f(x) = x^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  representa la extensión periódica de los valores de  $f(x)$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

La gráfica de  $f$  en conjunto con diferentes sumas parciales de su serie de Fourier están representadas en la figura 1.3.

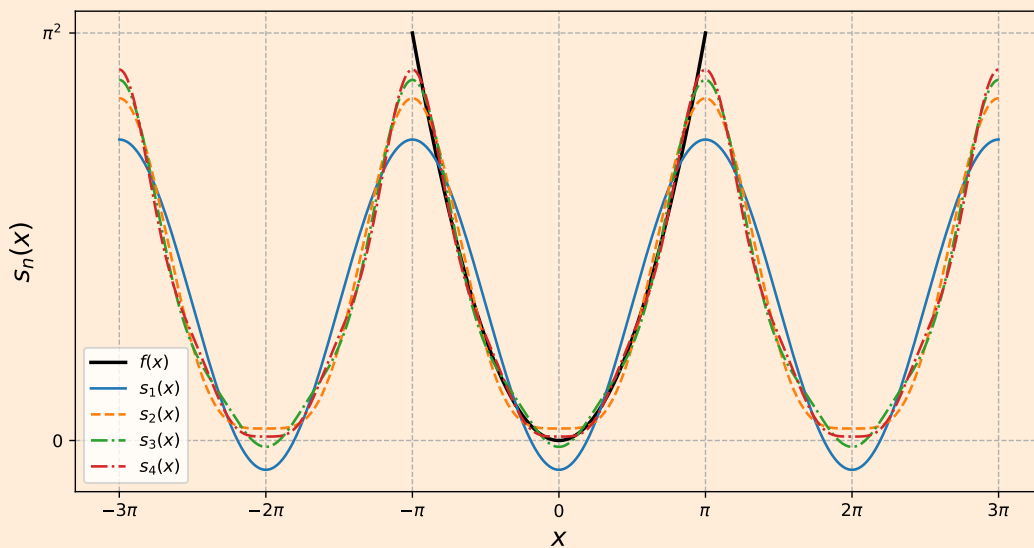


Figura 1.3: Serie de Fourier de la función  $f(x) = x^2$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ , truncada hasta  $n = 4$ .

El teorema visto para convergencia uniforme nos garantiza que esta serie converge uniformemente a  $f(x) = x^2$  en  $[-\pi, \pi]$ , es más, al aplicar el criterio de M de Weierstrass a la serie, ésta

converge para todo  $x \in \mathbb{R}$ , pues

$$\forall x \in \mathbb{R} : \left| (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) \right| \leq \frac{4}{n^2} = M_n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Podemos usar la expansión en serie de Fourier de  $f(x) = x^2$  en  $[-\pi, \pi]$  para probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

En efecto, al evaluar  $x = \pi$  en (1.5), obtenemos que

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(n\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{4}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}.$$

Así,

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Ejemplo 1.2.2.** Consideremos la función signo definida por

$$f(x) := \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

La función es seccionalmente continua con  $x = 0$  punto de discontinuidad de salto y las derivadas laterales existen para todo  $x \in (-\pi, \pi)$ , luego la serie de Fourier de  $f$  converge puntualmente a  $f$  en los puntos de continuidad y a

$$\frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = 0, \quad \text{en } x = 0 \text{ y}$$

$$\frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = 0, \quad \text{en } x = \pm\pi.$$

Sus coeficientes de Fourier están dados por:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) \sin(nx) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1) \sin(nx) dx \\
 &= \frac{1}{\pi n} \cos(nx) \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{\pi n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n] \\
 &= \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{4}{\pi n}, & n \text{ impar} \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Entonces, su serie de Fourier es

$$f(x) = \sum_{n \text{ impar}} \frac{4}{\pi n} \sin(nx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\sin[(2k-1)x]}{(2k-1)}.$$

**Aclaración:** Note que a pesar de haber escrito que la función  $f$  es igual a la serie, debemos tener en cuenta que en los puntos  $x = 0$  y  $x = \pm\pi$  converge al valor medio del salto de la discontinuidad.

Es claro que la serie de Fourier de  $f$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  representa la extensión periódica de los valores de  $f(x)$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

La gráfica de  $f$  en conjunto con diferentes sumas parciales de su serie de Fourier están representadas en la figura 1.4.

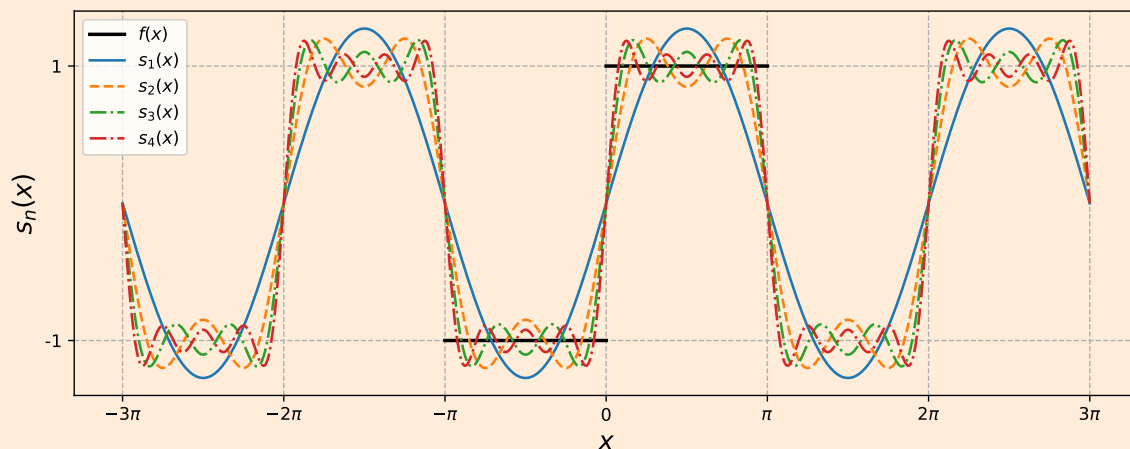


Figura 1.4: Serie de Fourier de la función signo truncada hasta  $n = 4$ .

### 1.3. Serie exponencial

**Proposición 1.4.** En el espacio  $\mathcal{C}[a, a + 2L]$ , el conjunto formado por las funciones

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i \frac{n\pi}{L} x} \right\}_{n=-\infty}^{n=\infty} \quad (1.6)$$

es un conjunto ortonormal.

**Definición 1.7.** Llamamos **sistema exponencial** al conjunto de funciones ortonormales en el espacio  $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ , definido como

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \right\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$$

**Definición 1.8.** Sea  $f \in \mathcal{C}[a, a + 2L]$  una función con un número finito de discontinuidades. Entonces, ella puede ser aproximada por la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{L} x} \quad (1.7)$$

Esta expansión se denomina **serie exponencial de Fourier** donde los *coeficientes de Fourier* están dados por:

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_a^{a+2L} f(t) e^{-i \frac{n\pi}{L} t} dt.$$

**Observación:** La serie de Fourier de  $f$  converge en media a  $f$ , o sea,

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}.$$

**Proposición 1.5.** La  $n$ -ésima suma parcial de la serie de Fourier trigonométrica de una función (real o compleja) es igual a la  $n$ -ésima suma parcial de la serie exponencial.

**Demostración.** La  $n$ -ésima suma parcial de la serie exponencial es

$$s_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}.$$

Separando la suma:

$$\begin{aligned}
 s_n(t) &= \sum_{k=-n}^{-1} c_k e^{ikt} + c_0 + \sum_{k=1}^n c_k e^{ikt} \\
 &= c_0 + \sum_{k=1}^n c_k e^{ikt} + \sum_{k=1}^n c_{-k} e^{-ikt} \\
 &= c_0 + \sum_{k=1}^n [c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}].
 \end{aligned}$$

Usando la identidad de Euler,  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ , encontramos que

$$s_n(t) = c_0 + \sum_{k=1}^n [(c_k + c_{-k}) \cos(kt) + i(c_k - c_{-k}) \sin(kt)].$$

Desarrollando los coeficientes de la serie exponencial de Fourier, tenemos que

$$\begin{aligned}
 c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \\
 c_k + c_{-k} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [e^{ikt} + e^{-ikt}] dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt; \quad k = 1, 2, \dots \\
 i(c_k - c_{-k}) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt \\
 &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [e^{ikt} - e^{-ikt}] dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt; \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Comparando las expresiones obtenidas con los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica, podemos concluir que

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k + c_{-k} = a_k, \quad i(c_k - c_{-k}) = b_k; \quad k = 1, 2, \dots$$

Por lo tanto,

$$s_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)).$$



**Observación 1:** Una consecuencia inmediata de la proposición 1.5 es que todos los teoremas vistos para la serie de Fourier trigonométrica son aplicables a la serie de Fourier exponencial.

**Observación 2:** Los coeficientes de las series (1.4) y (1.7) están relacionados por

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}); \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

o bien,

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & n \geq 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}), & n \leq -1 \end{cases} \quad (1.9)$$

Si  $f(t)$  es una función real, entonces sus respectivos coeficientes complejos  $c_n$  satisfacen la relación:

$$c_n^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(e^{-int})^* dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int} dt = c_{-n}.$$

## 1.4. Diferenciación e integración de las series de Fourier

Supongamos que tenemos una serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t),$$

y queremos integrarla (o derivarla). Resulta tentador intercambiar la integral (o derivada) por la serie, es decir, integrar (o derivar) término a término. Sin embargo, este intercambio no es siempre posible porque puede romper la convergencia de la serie. Por ejemplo, las series de potencia se pueden integrar (o derivar) término a término en su región de convergencia sin problema. En nuestro caso, nos interesa saber que condiciones deben cumplirse para las series de Fourier.

**Teorema 1.1** (Integración). Sea  $f$  una función seccionalmente continua en el intervalo  $-\pi < t < \pi$ . Independiente si la serie (1.4) converge, la siguiente ecuación es válida cuando  $-\pi \leq t \leq \pi$ :

$$\int_{-\pi}^t f(s) ds = \frac{a_0}{2}(t + \pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{ a_n \sin(nt) - b_n [\cos(nt) + (-1)^{n+1}] \}.$$

**Teorema 1.2** (Derivación). Sea  $f$  una función continua en  $[-\pi, \pi]$ , donde  $f(-\pi) = f(\pi)$ , y  $f'$  es seccionalmente continua en el intervalo  $(-\pi, \pi)$ . Entonces, la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad t \in [-\pi, \pi],$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt,$$

es derivable para todo  $t \in (-\pi, \pi)$  en el cual  $f''(t)$  existe:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin(nt) + nb_n \cos(nt)).$$

**Ejemplo 1.4.1.** Obtener el desarrollo en serie de Fourier de la función  $x^3$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

**Solución:** Las funciones del tipo  $x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  son continuas, derivables e integrables, por lo que podemos aplicar estas operaciones a las series de Fourier que se obtengan a partir de ellas. En nuestro caso obtendremos el desarrollo de  $x^3$  por integración de  $x^2$ , cuyo desarrollo en serie de Fourier ya obtuvimos en el ejemplo 1.2.1:

$$\begin{aligned} \forall x \in [-\pi, \pi] : \int_{-\pi}^x t^2 dt &= \int_{-\pi}^x \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nt) dt \\ \Rightarrow \frac{x^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} &= \frac{\pi^2}{3}(x + \pi) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^3} \sin(nx) \\ \Rightarrow x^3 &= \pi^2 x + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx). \end{aligned}$$

Lo que obtuvimos es el desarrollo en serie de  $x^3 - \pi^2 x$ . Para obtener el desarrollo de  $x^3$ , encontremos la serie de Fourier de  $x$ , para ello utilicemos el desarrollo de  $x^2$ , pero esta vez derivando:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^2] &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx) \right] \\ \Rightarrow 2x &= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n} \sin(nx) \\ \Rightarrow x &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx). \end{aligned}$$

Sustituyendo en  $x^3$ :

$$\begin{aligned} x^3 &= -2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx) + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} [12 - 2\pi^2 n^2] \sin(nx). \end{aligned}$$

## 1.5. Fenómeno de Gibbs

Cuando queremos aproximar una función  $f$  con las sumas parciales de su serie de Fourier, se puede observar un comportamiento particular cerca de los puntos de discontinuidad aislados, por ejemplo, al graficar la serie de Fourier de la función signo para un  $n$  alto, ver figura 1.5, se comete un error considerable en las cercanías al punto de discontinuidad, y además este error no disminuye si se incluyen más términos en la serie. Este efecto indeseado se denomina **fenómeno de Gibbs**.

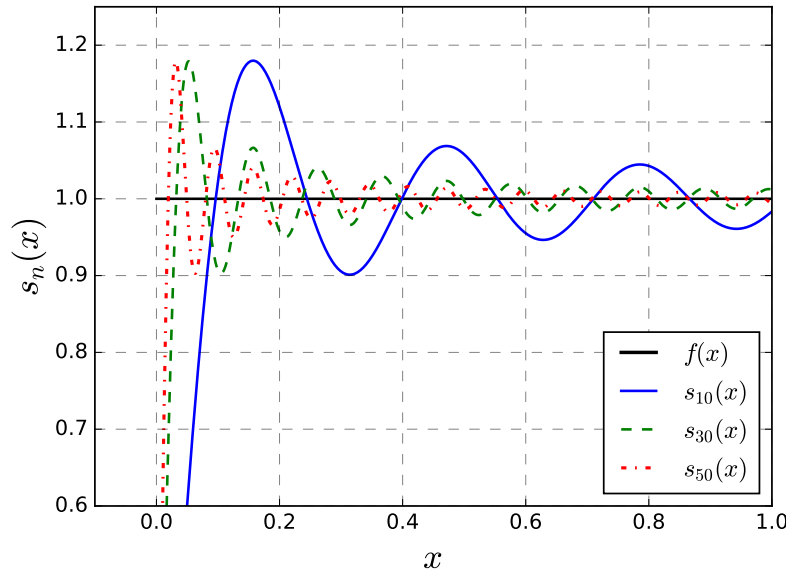


Figura 1.5: Fenómeno de Gibbs en la función signo para  $n = 10, 30, 50$ .

Ilustremos este hecho con un análisis analítico de la función ya estudiada

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

Su serie de Fourier está dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\sin[(2n-1)x]}{(2n-1)}.$$

Sea

$$s_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin[(2k-1)x]}{2k-1}$$

su  $n$ -ésima suma parcial. Derivando y multiplicando por  $\pi \sin(x)$ , encontramos que

$$\begin{aligned}
 \pi(\sin x)s'_n(x) &= 4 \sin(x) \sum_{k=1}^n \cos[(2k-1)x] = 4 \sum_{k=1}^n \sin(x) \cos[(2k-1)x] \\
 &= 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} [\sin(x + (2k-1)x) + \sin(x - (2k-1)x)] \\
 &= 2 \sum_{k=1}^n [\sin(2kx) - \sin([2k-2]x)] \\
 &= 2 \sin(2nx).
 \end{aligned}$$

Luego,

$$2 \sin(2nx_c) = 0 \Leftrightarrow x_c = \frac{m\pi}{2n}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Nos interesa encontrar el primer máximo de  $s_n(x)$ , así que tomaremos los valores  $m = \pm 1$  de prueba, pues en  $m = 0$  no se alcanza un máximo dado que  $s_n(0) = 0$ . Como  $\sin(x_c) \neq 0$ , para estos valores de  $m$ ,  $s'_n(x_c) = 0$  y, en consecuencia,  $x_c$  son los puntos críticos de  $s_n$ .

En la siguiente tabla se analizan los signos de  $s'_n(x)$ .

	$-\frac{\pi}{n}$	$-\frac{\pi}{2n}$	0	$\frac{\pi}{2n}$	$\frac{\pi}{n}$
$2 \sin(2nx)$	+	+	+	-	-
$\pi \sin(x)$	-	-	-	+	+
$s'_n(x)$	-	+	+	-	-

Figura 1.6: Tabla con el análisis de signos de  $s'_n(x)$  asociada a la función signo.

Por el criterio de la primera derivada, vemos que  $s_n$  tiene un máximo en  $x_n = \frac{\pi}{2n}$ . El valor de ese máximo es

$$s_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin[(2k-1)\pi/2n]}{2k-1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin[(2k-1)\pi/2n]}{(2k-1)\pi/2n} \left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Notemos que la sumatoria

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin[(2k-1)\pi/2n]}{(2k-1)\pi/2n} \left(\frac{\pi}{n}\right)$$

es una suma de Riemann para la función  $\sin y/y$  en  $[0, \pi]$  para la partición regular  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi$  con  $x_i = (\pi/n)i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  y eligiendo el punto medio de cada intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$ ,

$$\frac{x_{k-1} + x_k}{2} = (2k-1)\frac{\pi}{2n}, \quad k = 1, \dots, n,$$

para evaluar  $\sin y/y$ . Entonces,

$$\int_0^\pi \frac{\sin y}{y} dy \approx \frac{\pi}{2} s_n \left( \frac{\pi}{2n} \right).$$

Como

$$\int_0^\pi \frac{\sin y}{y} dy \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \left( \frac{\pi}{2n} \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin y}{y} dy.$$

Usando un método numérico de integración (o su calculadora de integrales favorita),

$$\int_0^\pi \frac{\sin y}{y} dy \approx 1.85193 \dots$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \left( \frac{\pi}{2n} \right) \approx 1.179.$$

Así, las aproximaciones exceden el valor real de  $f(0^+) = 1$  por 0.179 o 8.95 % del salto de  $f(0^-)$  a  $f(0^+)$ .

En general, se puede demostrar el siguiente teorema, debido a M. Bôcher [5]:

**Teorema 1.3.** Sea  $f$  una función de variable real, con período  $2\pi$ . Supongamos que  $f$  y  $f'$  son ambas continuas excepto para un número finito de discontinuidades de salto en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Sea  $s_n(x)$  la suma parcial de orden  $n$  de Fourier. Entonces, en un punto  $a$  de discontinuidad, las gráficas de las funciones  $s_n(x)$  convergen al segmento vectical (ver figura 1.7) de longitud

$$L = \frac{2}{\pi} Si(\pi) |f(a^+) - f(a^-)| \approx 1.179 |f(a^+) - f(a^-)|$$

centrada en el punto

$$\left( a, \frac{f(a^+) + f(a^-)}{2} \right),$$

donde  $Si(x)$  es la función seno integral definida por

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

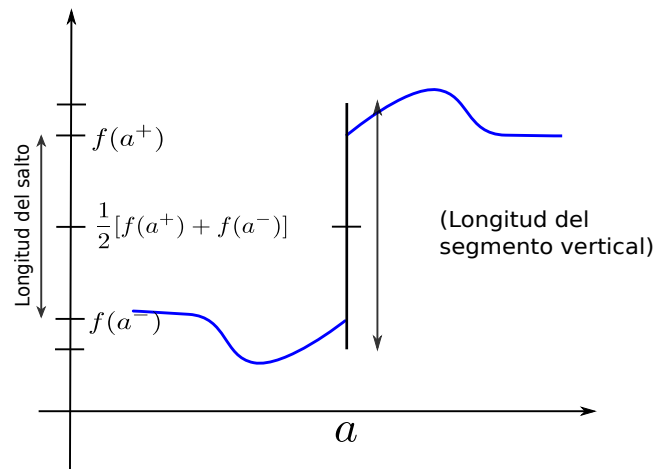


Figura 1.7: Fenómeno de Gibbs en un punto de discontinuidad. Adaptado de [20], pág. 202.

# Transformada de Fourier

## 2.1. Definiciones

Aprendimos que la serie de Fourier de  $f \in \mathcal{C}[-L/2, L/2]$  está dada por

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2n\pi}{L} x}, \quad (2.1)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-i \frac{2n\pi}{L} x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

Una consecuencia inmediata de la expansión en serie de Fourier es que la función  $f(x)$  representada por la serie resulta periódica, con período  $L$ . Por lo tanto, decimos que la serie de Fourier permite *expandir funciones periódicas*. Sin embargo, no todas las funciones son periódicas, y nos interesará expandirlas dentro de algún intervalo de validez. Necesitamos, entonces, algún modo de expandir, en una base ortonormal, funciones no periódicas.

Podemos decir que el conjunto de coeficientes  $\{c_n\}$  también definen a  $f(x)$ . Este conjunto de números  $c_n$  puede ser entendido como una función en la variable  $n$ , escrita como  $c(n)$ , definida para un conjunto discreto de valores de la variable independiente (en lugar de un intervalo continuo). La función  $c(n)$  es a menudo llamada el **espectro de Fourier** de  $f(x)$  y puede ser graficado, asumiendo  $c(n)$  real, como sigue.

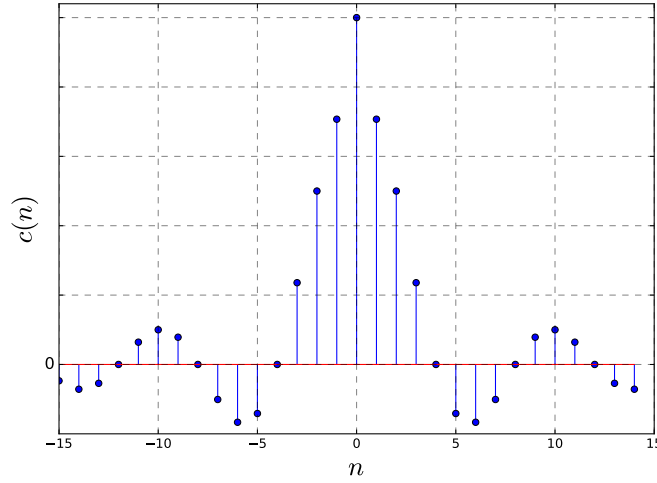


Figura 2.1: Espectro de Fourier.

En lugar de graficar  $c$  vs  $n$ , podemos graficar  $c$  vs el *número de onda*, que corresponde a la frecuencia asociada a la parte espacial:

$$k = \frac{2\pi n}{L}.$$

Si  $L \rightarrow \infty$ , entonces las frecuencias se encuentran estrechamente espaciadas debido a que la diferencia entre valores consecutivos de  $k$  es

$$\Delta k = \frac{2\pi \Delta n}{L} = \frac{2\pi}{L}, \quad \text{pues } \Delta n = 1.$$

En otras palabras, para  $L \rightarrow \infty$ ,  $\Delta k$  es pequeño. Con este cambio de escala, el espectro de Fourier puede parecerse a lo mostrado en la figura 2.2.

Es natural especular sobre la posibilidad de un espectro continuo cuando  $L$  tiende al infinito de tal forma que todas las frecuencias están presentes. Puede ser instructivo considerar la siguiente derivación heurística: Sabemos que una función puede ser expandida como una serie de Fourier tal como se muestra en (2.1). Luego, la transición  $L \rightarrow \infty$  puede resultar difícil de realizar directamente ya que  $c_n$  aparentemente tiende a cero. Seguimos entonces la idea de usar las frecuencias  $k = 2\pi n/L$  tal que  $\Delta k = (2\pi/L)\Delta n = 2\pi/L$  para valores de  $k$  adyacentes y definimos

$$c_L(k) = \frac{L}{2\pi} c_n.$$

Usando las definiciones anteriores en las ecuaciones (2.1) y (2.2), obtenemos que la función



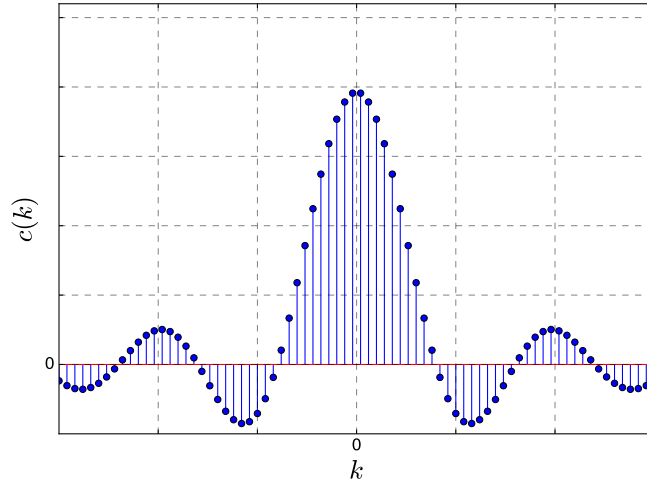


Figura 2.2: Espectro de Fourier cuando  $L \rightarrow +\infty$ .

y sus coeficientes de Fourier se pueden escribir como:

$$f(x) = \sum_{Lk/2\pi=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{L} c_L(k) e^{ikx} \left( \frac{\Delta k L}{2\pi} \right) = \sum_{Lk/2\pi=-\infty}^{\infty} c_L(k) e^{ikx} \Delta k,$$

$$c_L(k) = \frac{L}{2\pi} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Al hacer  $L \rightarrow \infty$ , la función  $f$  puede considerarse como una función no-periódica arbitraria definida en todo el intervalo  $(-\infty, \infty)$ , mientras que la primera suma “se convierte en una integral:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk,$$

$$c(k) = \lim_{L \rightarrow +\infty} c_L(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

De aquí, definimos la **transformada de Fourier** de la función  $f(x)$  como

$$\tilde{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad (2.3)$$

de modo que la **transformada inversa** resulta ser

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk. \quad (2.4)$$

Note que la transformada de Fourier es la extensión natural del concepto de series de Fourier para funciones no periódicas. Además, al ser  $n$  una variable discreta, y  $k$  continua, podemos decir que la transformada de Fourier es la generalización del concepto de series de Fourier cuando las funciones pertenecen a un espacio vectorial de dimensión continua.

### Observaciones:

- Otras notaciones usadas son:  $\tilde{f}(k) = \hat{f}(x) = g(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$ .
- El factor  $1/\sqrt{2\pi}$  en la definición (2.3) es convencional. Lo importante es que se cumpla la identidad

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] e^{ikx} dk. \quad (2.5)$$

- Al igual que el factor  $1/\sqrt{2\pi}$  en la definición (2.3), la función  $e^{-ikx}$  es convencional y puede ser reemplazada por  $e^{ikx}$ , siempre y cuando se verifique (2.5) [7, 14].
- Es común en Física trabajar con funciones del tiempo,  $f = f(t)$ . En este caso, se acostumbra usar la frecuencia  $\omega$  en lugar del número de onda  $k$ , de modo que la integral de Fourier adopta a forma

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

donde

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

- En 3 dimensiones, la integral de Fourier está dada por:

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} d^3 k, \\ \tilde{f}(\vec{k}) &:= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} d^3 x. \end{aligned}$$

En general, en  $n$  dimensiones:

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} d^n k, \\ \tilde{f}(\vec{k}) &:= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{r}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} d^n x. \end{aligned}$$

**Definición 2.1.** Si  $f(x)$  es tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

entonces se dice que  $f \in L^1$  o que es **absolutamente integrable**.

**Teorema 2.1.** Si  $f \in L^1$ , entonces la transformada de Fourier  $\tilde{f}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}(k)$  existe y  $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \tilde{f}(k) = 0$ .

**Demostración.** Demostraremos solo la primera parte del teorema.

Notemos que

$$e^{-ikx} = \cos(kx) - i \sin(kx) \Rightarrow |e^{-ikx}| = 1.$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-ikx}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

En consecuencia,  $f(x)e^{-ikx}$  es absolutamente integral y

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

es finita, es decir,  $\tilde{f}(k)$  existe.

**Observación:** La condición de que  $f$  sea absolutamente integrable es suficiente pero no necesaria para la existencia de la transformada de Fourier.

**Teorema 2.2.** Sea  $f(x)$  una función seccionalmente continua en cada intervalo finito del eje  $x$ , y supongamos que es absolutamente integrable en  $(-\infty, +\infty)$ . Entonces la **integral de Fourier**

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos k(\xi - x) d\xi dk = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2},$$

donde ambas derivadas laterales,  $f'(x^+)$  y  $f'(x^-)$ , existen.

**Demostración.** Consulte el capítulo 6 «Fourier Integrals and Applications» en [6].

## 2.2. Ejemplos

**Ejemplo 2.2.1** (Pulso cuadrado). Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}.$$

Su transformada de Fourier es

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a (1) e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{ik} e^{-ikx} \right]_{-a}^a \\
 &= \frac{1}{2\pi ik} [e^{ika} - e^{-ika}] \\
 &= \frac{\sin(ka)}{\pi k}.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

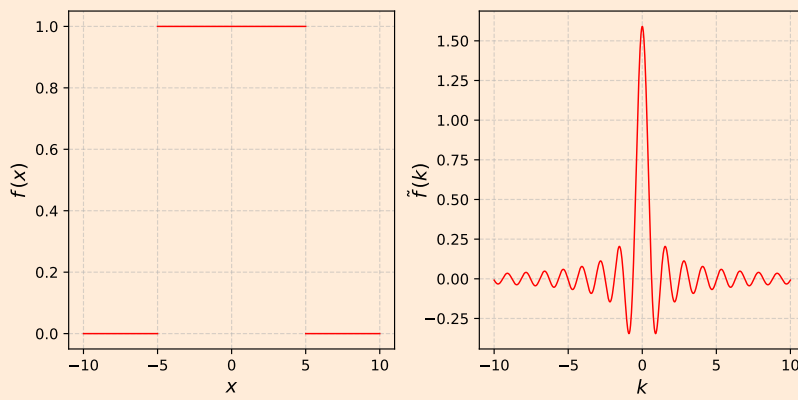


Figura 2.3: Pulso cuadrado y su transformada de Fourier, con  $a = 5$ .

**Ejemplo 2.2.2** (Distribución gaussiana). Considere la gaussiana

$$f(x) = n e^{-\alpha x^2}, \quad \alpha > 0.$$

Su transformada de Fourier está dada por

$$\tilde{f}(k) = \frac{n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-ikx} dx = \frac{n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - ikx} dx.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
 -\alpha x^2 - ikx &= -\alpha \left( x^2 + \frac{ik}{\alpha} x \right) \\
 &= -\alpha \left( x^2 + \frac{ik}{\alpha} x + \left( \frac{ik}{2\alpha} \right)^2 - \left( \frac{ik}{2\alpha} \right)^2 \right) \\
 &= -\alpha \left( x + \frac{ik}{2\alpha} \right)^2 + \alpha \left( \frac{ik}{2\alpha} \right)^2 \\
 &= -\alpha \left( x + \frac{ik}{2\alpha} \right)^2 - \left( \frac{k^2}{4\alpha} \right).
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\tilde{f}(k) = \frac{n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \left( x + \frac{ik}{2\alpha} \right)^2 - \left( \frac{k^2}{4\alpha} \right)} dx = \frac{n}{2\pi} e^{-\left( \frac{k^2}{4\alpha} \right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \left( x + \frac{ik}{2\alpha} \right)^2} dx.$$

Haciendo el cambio de variable  $u = x + \frac{ik}{2\alpha}$ , obtenemos que <sup>1</sup>

$$\hat{f}(\omega) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left( \frac{\omega^2}{4\alpha} \right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u^2} du. \quad (2.7)$$

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad (2.8)$$

obtenemos que

$$\hat{f}(\omega) = \frac{n}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\left( \frac{\omega^2}{4\alpha} \right)}. \quad (2.9)$$

---

<sup>2</sup> En estricto rigor se debería calcular una integral compleja, vea [4].

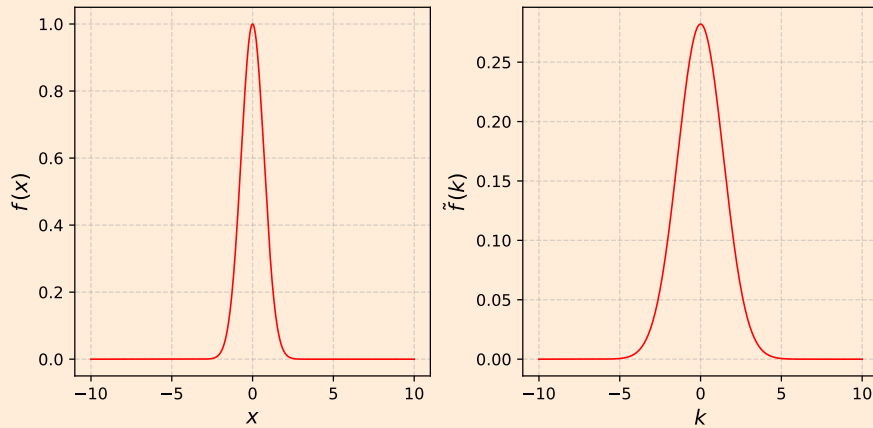


Figura 2.4: Distribución gaussiana y su transformada de Fourier para  $n = 1$  y  $\alpha = 1$ .

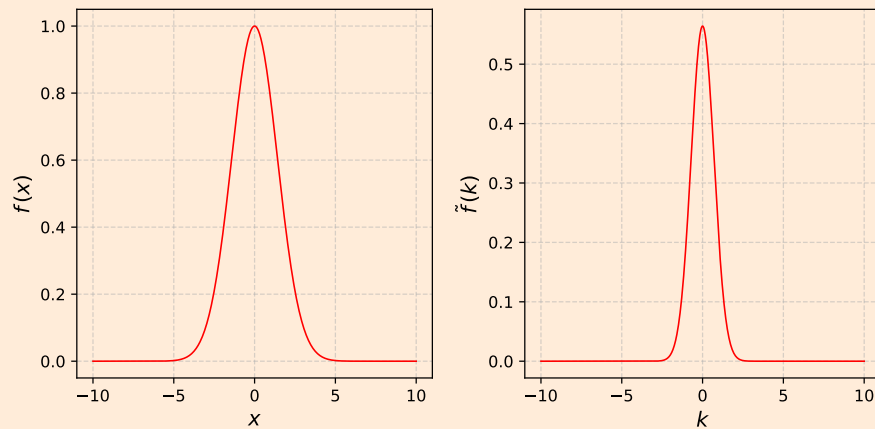


Figura 2.5: Distribución gaussiana y su transformada de Fourier para  $n = 1$  y  $\alpha = 0.25$ .

**Ejemplo 2.2.3** (Paridad). Si  $f(x) \in \mathbb{R}$  e impar, entonces

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^0 f(-x) e^{ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(x) e^{ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(x) [e^{ikx} - e^{-ikx}] dx \\
 &= -\frac{2i}{2\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx \equiv -i \tilde{f}_s(k),
 \end{aligned}$$

donde  $\tilde{f}_s$  es conocida como la **transformada seno de Fourier** de la función  $f(x)$ , y viene definida por [17]

$$\tilde{f}_s(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx$$

Análogamente a la definición de la transformada seno de Fourier, si  $f(x) \in \mathbb{R}$  y par, entonces

$$\begin{aligned}\tilde{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^0 f(-x) e^{ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(x) e^{ikx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(x) [e^{ikx} + e^{-ikx}] dx \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx \equiv \tilde{f}_c(k),\end{aligned}$$

donde  $\tilde{f}_c$  es conocida como la **transformada coseno de Fourier** de la función  $f(x)$ , y viene definida por [17]

$$\tilde{f}_c(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx$$

**Observación:** Esta forma de escribir la transformada seno y coseno de Fourier es convencional, por el factor  $1/\pi$ .

## 2.3. Propiedades de la transformada de Fourier

**Proposición 2.1.** Sean  $f, g \in L^1$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

1. **Linealidad:**

$$\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\}(k) = \alpha \mathcal{F}\{f(x)\}(k) + \beta \mathcal{F}\{g(x)\}(k).$$

2. Si  $f$  es real, entonces

$$\tilde{f}(-k) = \tilde{f}^*(k).$$

3. **Traslación:**

$$\mathcal{F}\{f(x + a)\}(k) = e^{ika} \mathcal{F}\{f(x)\}(k), \quad a \in \mathbb{R}.$$

4. **Cambio de escala:**

$$\mathcal{F}\{f(\alpha x)\}(k) = \frac{1}{|\alpha|} \mathcal{F}\{f(x)\}\left(\frac{k}{\alpha}\right), \quad \alpha \neq 0.$$

5. **Atenuación:**

$$\mathcal{F}\{f(x) e^{-ax}\}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}(k - ia), \quad a \in \mathbb{C}.$$

6. Si  $f$  es una función par, entonces  $\tilde{f}$  es una función real.

7. Si  $f$  es una función impar, entonces  $\tilde{f}$  es una función puramente imaginaria, es decir,  $\tilde{f}(k) = -\tilde{f}(-k)$ .

**Demostración.** A modo de ejemplo, se demostrará los puntos 1. y 2., el resto se encontrará en el documento extra de las demostraciones del apunte.

1. Por la definición (2.3) de la transformada de Fourier y usando el hecho de que las funciones son absolutamente convergentes, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)] e^{-ikx} dx \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx + \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx \\ &= \alpha \mathcal{F}\{f(x)\}(k) + \beta \mathcal{F}\{g(x)\}(k).\end{aligned}$$

2. Por la definición (2.3) de la transformada de Fourier y suponiendo que  $f$  es real:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(x)\}(-k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-(-ikx)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (e^{-ikx})^* dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) e^{-ikx}]^* dx \\ &= (\mathcal{F}\{f(x)\}(k))^*.\end{aligned}$$

**Proposición 2.2.** Sea  $f(x)$  con transformada de Fourier  $\mathcal{F}\{f(x)\}$  y  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ . Entonces,

$$\boxed{\mathcal{F}\{f'(x)\} = ik\mathcal{F}\{f(x)\}}$$

**Demostración.** Usando la definición (2.3) de la transformada de Fourier, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f'(x)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{d}{dx} [f(x) e^{-ikx}] - (-ik) f(x) e^{-ikx} \right\} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{ik}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ &= ik\mathcal{F}\{f(x)\} + f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty}.\end{aligned}$$



Como  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ , obtenemos

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = ik\mathcal{F}\{f(x)\}.$$

En general,

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\} = (ik)^n \mathcal{F}\{f(x)\},$$

siempre que todas las partes integradas se anulen cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

**Teorema 2.3** (de Parseval). Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones reales y si  $\tilde{f}(k)$  y  $\tilde{g}(k)$  son sus correspondientes transformadas de Fourier, entonces

(i) (Primer teorema)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

(ii) (Segundo teorema)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\tilde{g}(-k) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx.$$

**Demostración.** Notemos que (i) es consecuencia de (ii) al tomar  $g(x) = f(x)$  real tal que  $f^*(x) = f(x)$  y  $\tilde{g}(-k) = \tilde{f}^*(k)$ . Luego, nos bastará demostrar el segundo teorema de Parseval.

Usando la definición (2.3), tenemos que

$$\tilde{g}(-k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ikx} dx.$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\tilde{g}(-k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) dk \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} g(x)e^{ikx} dx.$$

Supongamos que podemos intercambiar el orden de integración, por ejemplo, al suponer que las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)e^{ikx} dk \text{ y } \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ikx} dx$$

son absolutamente integrables. Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\tilde{g}(-k) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)e^{ikx} dk \right) dx.$$

Ahora, aplicando la transformada inversa de Fourier dada por (2.4), concluimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) \tilde{g}(-k) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx.$$

**Ejemplo 2.3.1.** Use el teorema de Parseval para evaluar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx.$$

**Solución:** Esta integral puede ser calculada usando el teorema del residuo. En nuestro caso, usaremos el primer teorema de Parseval, teniendo en cuenta el resultado de la transformada de Fourier del pulso cuadrado en el ejemplo 2.2.1.

Para  $a = 1$  en la ecuación (2.6), tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(k)}{\pi^2 k^2} dk = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(k)}{k^2} dk.$$

Por el primer teorema de Parseval,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(k)|^2 dk &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \\ \Rightarrow \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(k)}{k^2} dk &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 dx = \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(k)}{k^2} dk = \pi.$$

## 2.4. Convolución

**Definición 2.2.** Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  dos funciones reales, se define la operación **convolución** de dos funciones  $f$  y  $g$  como

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy. \quad (2.10)$$

**Idea física:** Sea  $f(t)$  algún estímulo físico, como puede serlo una fuerza en el tiempo  $t$ , la densidad de carga en la posición  $x$ , etc. Sea  $g(x, t) = g(x - t)$  la respuesta en  $x$  a un estímulo en  $t$ . Si el sistema es *lineal*, la respuesta total en el punto  $x$  al estímulo global  $\{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$  será

la "suma" de todas las contribuciones  $[dt f(t)]g(x, t)$ , que es la convolución  $(f * g)(x)$ .

Por ejemplo, el potencial electrostático debido a una densidad de carga  $\rho(\vec{x})$  se puede escribir como

$$\phi(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' = \rho * f(\vec{x}),$$

donde  $f(\vec{x}) = 1/|\vec{x}|$ .

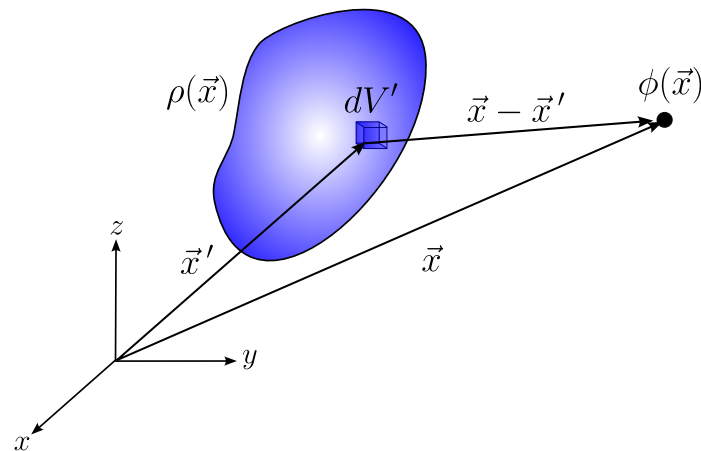


Figura 2.6: Distribución de carga de densidad  $\rho(\vec{x})$ .

**Idea matemática:** La interpretación matemática de la convolución está ilustrada en la figura 2.7.

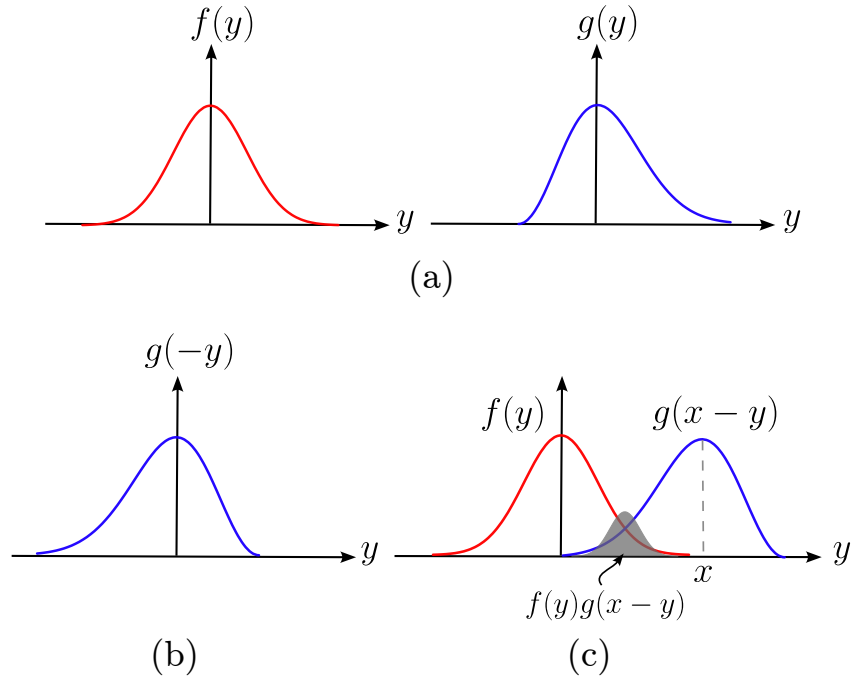


Figura 2.7: Idea matemática de la convolución. En (a), se expresa cada función en términos de la variable de integración  $y$ . En (b), se refleja la gráfica de  $g(y)$  con respecto al eje vertical, es decir,  $g(y) \rightarrow g(-y)$ . En (c), se traslada la gráfica de  $g(-y)$ ,  $x$  unidades. Luego, se traslapan las gráficas de  $f(y)$  y  $g(x-y)$  de tal forma que el área sombreada corresponde al valor de  $f * g$  para ese valor de  $x$ .

Entonces,  $f * g$  mide el grado de traslape entre  $f(y)$  y  $g(-y)$ , luego de trasladar  $g$  a una distancia  $x$ .

**Proposición 2.3** (Propiedades de la convolución). Sean  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(x)$  funciones reales, se verifica:

1. **Conmutatividad:**

$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x).$$

2. **Asociatividad:**

$$[f(x) * g(x)] * h(x) = f(x) * [g(x) * h(x)].$$

3. **Distributividad:**

$$f(x) * [g(x) + h(x)] = f(x) * g(x) + f(x) * h(x).$$

**Teorema 2.4** (de convolución de Fourier). Sean  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(x)$  funciones reales y sean  $\tilde{f}(k)$ ,  $\tilde{g}(k)$  y  $\tilde{h}(k)$  sus correspondientes transformadas de Fourier.

- Si  $\tilde{h}(k) = \tilde{f}(k)\tilde{g}(k)$ , entonces

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}(g * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy.$$

- Si  $h(x) = f(x)g(x)$ , entonces

$$\tilde{h}(k) = (\tilde{f} * \tilde{g})(k) = (\tilde{g} * \tilde{f})(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y)\tilde{g}(k-y) dy.$$

### **Demostración.**

- Supongamos que  $\tilde{h}(k) = \tilde{f}(k)\tilde{g}(k)$ . Aplicando la transformada de Fourier inversa dada por (2.4), tenemos que

$$\begin{aligned} h(x) &= \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{h}(k)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{f}(k)\tilde{g}(k)\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k)\tilde{g}(k)e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-iky} dy \right) \tilde{g}(k)e^{ikx} dk. \end{aligned}$$

Si el intercambio de orden de integración es posible, entonces

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k)e^{ikx}e^{-iky} dk \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(k)e^{ik(x-y)} dk \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy = \frac{1}{2\pi}(f * g)(x). \end{aligned}$$

Como la convolución es conmutativa:

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}(g * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy.$$

- Supongamos que  $h(x) = f(x)g(x)$ . Aplicando la transformada de Fourier dada por (2.3), tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{h}(k) &= \mathcal{F}\{f(x)g(x)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y)e^{iyx} dy \right) g(x)e^{-ikx} dx. \end{aligned}$$

Si el intercambio de orden de integración es posible, entonces

$$\begin{aligned}\tilde{h}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{iyx} e^{-ikx} dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i(k-y)x} dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y) \tilde{g}(k-y) dy.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\tilde{h}(k) = (\tilde{f} * \tilde{g})(k) = (\tilde{g} * \tilde{f})(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y) \tilde{g}(k-y) dy.$$

**Ejemplo 2.4.1.** Sabiendo que [17]

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{2c}{x^2 + c^2} \right\} = e^{-c|k|}, \quad \text{para } c > 0.$$

Podemos usar el teorema de convolución para encontrar la transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}. \quad (2.11)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(x)\} &= \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{8} \frac{2}{x^2 + 1} \frac{4}{x^2 + 4} \right\} \\ &= \frac{1}{8} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|} e^{-2|k-y|} dy \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( \int_{-\infty}^0 e^y e^{-2|k-y|} dy + \int_0^{\infty} e^{-y} e^{-2|k-y|} dy \right).\end{aligned}$$

Si  $k > 0$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(x)\} &= \frac{1}{8} \left( \int_{-\infty}^0 e^y e^{-2(k-y)} dy + \int_0^k e^{-y} e^{-2(k-y)} dy + \int_k^{\infty} e^{-y} e^{2(k-y)} dy \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( \int_{-\infty}^0 e^{-2k+3y} dy + \int_0^k e^{-2k+y} dy + \int_k^{+\infty} e^{2k-3y} dy \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( \frac{1}{3} e^{-2k} + e^{-k} - e^{-2k} + \frac{1}{3} e^{-k} \right) \\ &= \frac{1}{6} e^{-k} - \frac{1}{12} e^{-2k}.\end{aligned}$$

Si  $k < 0$ ,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{f(x)\} &= \frac{1}{8} \left( \int_{-\infty}^k e^y e^{-2(k-y)} dy + \int_k^0 e^y e^{2(k-y)} dy + \int_0^{\infty} e^{-y} e^{2(k-y)} dy \right) \\
 &= \frac{1}{8} \left( \int_{-\infty}^k e^{-2k+3y} dy + \int_k^0 e^{2k-y} dy + \int_0^{\infty} e^{2k-3y} dy \right) \\
 &= \frac{1}{8} \left( \frac{1}{3} e^k - e^{2k} + e^k + \frac{1}{3} e^{2k} \right) \\
 &= \frac{1}{6} e^k - \frac{1}{12} e^{2k}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para  $k$  positivo como negativo,

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{6} e^{-|k|} - \frac{1}{12} e^{-2|k|}$$

Una mejor forma de encontrar la transformada de Fourier de (2.11) es, en primer lugar, descomponer la función en fracciones parciales,

$$f(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{3} \frac{1}{x^2 + 4},$$

para luego hacer usar de la linealidad de la transformada.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{f(x)\} &= \frac{1}{6} \mathcal{F} \left\{ \frac{2}{x^2 + 1} \right\} - \frac{1}{12} \mathcal{F} \left\{ \frac{4}{x^2 + 4} \right\} \\
 &= \frac{1}{6} e^{-|k|} - \frac{1}{12} e^{-2|k|}.
 \end{aligned}$$

## 2.5. Aplicación de la transformada de Fourier

La transformada de Fourier es útil para resolver ecuaciones diferenciales en el dominio  $(-\infty, \infty)$  con condiciones de borde homogéneas en el infinito. En particular, en ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, debido a la propiedad de linealidad de la transformada.

A continuación se ilustra el procedimiento a seguir mediante ejemplos.

**Ejemplo 2.5.1.** Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$y''(x) - y(x) = e^{-\alpha|x|}, \quad y(\pm\infty) = 0, \quad \alpha > 0, \alpha \neq 1.$$

**Solución:** La solución del caso homogéneo

$$y''(x) - y(x) = 0,$$

está dada por

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Nos queda por encontrar la solución particular, para ello haremos uso de la transformada de Fourier.

Primero, determinemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{e^{-\alpha|x|}\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|x|} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^0 e^{x(\alpha-ik)} dx + \int_0^{\infty} e^{-x(\alpha+ik)} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\alpha-ik} + \frac{1}{\alpha+ik} \right) \\ &= \frac{\alpha/\pi}{\alpha^2 + k^2}. \end{aligned}$$

Luego, apliquemos la transformada de Fourier a la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{y''(x)\} - \mathcal{F}\{y(x)\} &= \mathcal{F}\{e^{-\alpha|x|}\} \\ \Rightarrow -k^2 \mathcal{F}\{y(x)\} - \mathcal{F}\{y(x)\} &= \frac{\alpha/\pi}{\alpha^2 + k^2}. \end{aligned}$$

Despejando la transformada de Fourier de la solución.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{y(x)\} &= \frac{-\alpha/\pi}{(k^2 + \alpha^2)(k^2 + 1)} \\ &= -\frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{\alpha^2 - 1} \left( \frac{1}{k^2 + 1} - \frac{1}{k^2 + \alpha^2} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha^2 - 1} \left( \frac{\alpha/\pi}{k^2 + \alpha^2} - \alpha \frac{1/\pi}{k^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Tomando la transformada inversa, obtenemos que

$$y(x) = \frac{e^{-\alpha|x| - \alpha e^{-|x|}}}{\alpha^2 - 1}.$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y(x) = \frac{e^{-\alpha|x| - \alpha e^{-|x|}}}{\alpha^2 - 1} + c_1 e^x + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$



**Ejemplo 2.5.2.** Consideremos un oscilador armónico amortiguado sometido a una fuerza externa  $g(t)$ . La ecuación de movimiento del oscilador está dada por

$$\ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t), \quad (2.12)$$

donde  $f(t) = g(t)/m$  y  $\alpha$  es una constante asociada al amortiguamiento del sistema. En los primeros cursos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) se trabaja con  $f(t)$  sinusoidal, pero gracias a la transformada de Fourier, podemos extender este resultado para funciones  $f(t)$  arbitrarias.

Aplicando la transformada de Fourier en la variable temporal, a saber,

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt,$$

a ambos lados de la ecuación diferencial (2.12), obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\ddot{x}(t) + 2\alpha\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t)\} &= \mathcal{F}\{f(t)\} \\ \Rightarrow \mathcal{F}\{\ddot{x}(t)\} + 2\alpha\mathcal{F}\{\dot{x}(t)\} + \omega_0^2 \mathcal{F}\{x(t)\} &= \mathcal{F}\{f(t)\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Si asumimos que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(t) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \dot{x}(t) = 0,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\ddot{x}(t)\} &= (i\omega)^2 \mathcal{F}\{x(t)\} = -\omega^2 \mathcal{F}\{x(t)\}, \\ \mathcal{F}\{\dot{x}(t)\} &= i\omega \mathcal{F}\{x(t)\}. \end{aligned}$$

Además, si definimos  $F(\omega) := \mathcal{F}\{f(t)\}$ , la ecuación (2.13) nos queda

$$-\omega^2 \mathcal{F}\{x(t)\} + 2\alpha i\omega \mathcal{F}\{x(t)\} + \omega_0^2 \mathcal{F}\{x(t)\} = F(\omega).$$

Despejando la transformada de Fourier de la solución:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{F(\omega)}{-\omega^2 - 2\alpha i\omega + \omega_0^2}.$$

Tomando la transformada inversa, obtenemos la solución

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\alpha i\omega} e^{i\omega t} d\omega$$

## Ecuaciones Diferenciales en Física

En física, es muy común que diversas situaciones sean modeladas no por ecuaciones que únicamente contengan potencias (enteras o semienteras) de alguna variable física, sino que incluyan derivadas de estas.

En sus cursos de Mecánica y de Ecuaciones Diferenciales, probablemente se familiarizaron con los casos del Oscilador Armónico y del Oscilador amortiguado, que son descritos por las ecuaciones (3.1) y (3.2), respectivamente.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.2)$$

Ambas ecuaciones consisten en ecuaciones diferenciales *ordinarias*, debido a que la función a derivar,  $x$ , depende de una única variable, de modo que todas las derivadas en ella son totales.

Sin embargo, muchas otras situaciones físicas no pueden ser descritas únicamente en términos de funciones de una sola variable, incluso cuando dicha función solo dependa de la posición. Por ejemplo, podríamos querer describir el potencial eléctrico de una distribución de cargas esférica, cuya densidad dependa de qué tan alejados de su centro nos encontremos (variable  $r$ ), así como también del ángulo que forma con respecto de su polo norte (variable  $\theta$ ), de modo que este potencial será una función tanto de  $r$  como de  $\theta$ . Este tipo de sistemas serán descritos por ecuaciones diferenciales *parciales* (EDPs).

Hasta el día de hoy, el desarrollo de métodos para resolver EDPs es un área de investigación activa en matemáticas, por lo que en este curso nos limitaremos a algunos de los métodos más tradicionales y que son la base para la descripción de la física de los siglos XVIII y XIX, como lo son la mecánica hamiltoniana, la teoría clásica de campos o la electrodinámica clásica.

## 3.1. Algunas ecuaciones básicas

A continuación listamos algunos ejemplos de EDPs *lineales* en la función incógnita, y de *segundo orden*. Algunos puntos que mencionar antes de entrar en ellas, es que siempre que veamos una derivada respecto al tiempo, esto quiere decir que la función incógnita *tendrá una evolución temporal*.

También cabe mencionar que no todos los sistemas físicos pueden ser descritos por ecuaciones “bien portadas” como las que listaremos a continuación, ya que por ejemplo, en fenómenos que involucren turbulencias, como la física de plasmas o la física atmosférica, las ecuaciones son no lineales, lo que complica la posibilidad de resolverlas de forma analítica, y se encuentran fuera del alcance de este curso.

### 3.1.1. Ecuación de Laplace

Esta corresponde a la expresión

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad (3.3)$$

la que surge en el estudio de diferentes sistemas físicos, como por ejemplo:

- el **potencial electrostático** en una región sin cargas.
- un **fluido irrotacional incompresible** en un movimiento estacionario, cuyo campo de velocidades es descrito como  $\vec{v} = -\nabla\psi$ .
- el **potencial gravitatorio**.
- una **distribución de temperatura estacionaria**, donde en este caso  $\psi = T(x, t)$  corresponde al campo de temperaturas de un material.

### 3.1.2. Ecuación de Poisson

Esta corresponde, por llamarlo de una manera, a la generalización de la ecuación de Laplace para cualquier sistema con una función *fente*  $f$  conocida. Es dada por la expresión

$$\nabla^2 \psi = f(\vec{x}). \quad (3.4)$$

Esta corresponde a una ecuación *inhomogénea*, cuyas soluciones generales pueden escribirse como  $\psi = \psi_h + \psi_p$ , donde el primer término corresponde a la solución de la *ecuación homogénea* donde  $f(x) = 0$ , que en este caso corresponde a la ecuación de Laplace, y el segundo término es una *solución particular* de la ecuación de Poisson.

Esta puede surgir en situaciones similares a la ecuación de Laplace, pero en las cuales existen *fuentes* para los respectivos campos. Por ejemplo, para el caso electrostático, puede existir una fuente con densidad de carga  $\rho(\vec{x})$ , de modo que la ecuación que describe el potencial eléctrico en dicha región será

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}. \quad (3.5)$$

### 3.1.3. Ecuación de Helmholtz

Es una ecuación que surge al aplicar el método de separación de variables a una ecuación de onda (siendo ambos términos explicados más abajo), de modo que es una especie de *ecuación de onda independiente del tiempo*, o en otros contextos, una *ecuación de difusión independiente del tiempo*. Se escribe como

$$\nabla^2 \psi \pm k^2 \psi = 0. \quad (3.6)$$

Esta ecuación aparece en el estudio de diversas áreas, como la radiación electromagnética, la sismología, la acústica o membranas.

### 3.1.4. Ecuación de difusión de calor dependiente del tiempo

BUSCAR QUÉ DECIR DE ESTA

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad (3.7)$$

donde  $\alpha$  corresponde al coeficiente de difusión térmica.

### 3.1.5. Ecuación de onda dependiente del tiempo

Describe la propagación de una onda  $\psi$  tanto espacial como temporalmente. Suele escribirse como

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (3.8)$$

o bien, definiendo el operador *d'Alembertiano* (comúnmente pronunciado como *box*) como  $\square \equiv \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ ,

$$\square \psi = 0. \quad (3.9)$$

### 3.1.6. Ecuación de Klein-Gordon

Corresponde a una generalización de la ecuación de onda para trabajar con sistemas cuánticos relativistas, como es el trabajo de la física de partículas. Esta incorpora las constantes  $\hbar$  y  $c$ , que corresponden respectivamente a la constante de Planck reducida, y que es una de las constantes que nos indicará que estamos trabajando con un sistema cuántico; y a la velocidad de la luz, que nos indica que trabajamos con un sistema relativista. Es dada por

$$\square \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0. \quad (3.10)$$

### 3.1.7. Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

Esta corresponde al límite no relativista de la ecuación de Klein-Gordon (es decir, cuando  $c \sim \infty$ ) y es la que describe la evolución de un sistema en Mecánica Cuántica. Es dada por

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x, t) + V(x) \psi(x, t) = \hat{H} \psi(x, t). \quad (3.11)$$

## 3.2. Condiciones de borde

Para una EDP dada, las soluciones dependerán del dominio  $\Omega$  en que queramos trabajar, pues no es lo mismo trabajar. Por ejemplo, un potencial electrostático debe cumplir la ecuación de Laplace, pero será distinto en una esfera de radio  $r$  que en un cilindro de largo  $\ell$  y radio  $\rho$ .

Por ello, debemos entregar información adicional a nuestro problema para poder resolver el problema. Esta información suele denominarse **condiciones de borde, de frontera o de contorno**, ya que tradicionalmente dan información del comportamiento de la función en los límites o bordes  $\partial\Omega$  del sistema (véase figura x).

Puede ser útil clasificar las condiciones de contorno en tres tipos, aplicables a EDPs de segundo orden.

- Tenemos condiciones de tipo **Dirichlet** cuando nos dan información del comportamiento *de la función* en la frontera  $\partial\Omega$  de la región en que trabajamos.
- Tenemos condiciones de tipo **Neumann** cuando tenemos información de la *derivada normal de la función*, es decir  $\partial\Phi/\partial n := \hat{n} \cdot \nabla\Phi$ , en la frontera  $\partial\Omega$ .
- Tenemos condiciones de tipo **Cauchy** cuando tenemos a la vez condiciones de tipo Dirichlet y de tipo Neumann.

¿Cómo sabemos qué tipo de condición de borde es apropiada para nuestro problema? Es una discusión un tanto complicada que considero que escapa a los contenidos del curso, pero que puede revisar en los capítulos X de X y X de X. La idea, sin embargo, es que esto dependerá tanto del tipo de EDP como de la definición del dominio, es decir, si este es acotado por una superficie (o curva, en el caso de dos variables independientes) abierta o cerrada.

## 3.3. Encontrando soluciones para ecuaciones diferenciales parciales

Como se mencionó al inicio de este capítulo, las EDPs siguen siendo un área de investigación activa en matemáticas, por lo que no todas ellas tendrán soluciones exactas, o analíticas. Un ejemplo de esto son las *ecuaciones de Navier-Stokes*, que describen el comportamiento de un fluido viscoso, y surgen en el estudio de sistemas como la atmósfera terrestre o las corrientes oceánicas. Estas ecuaciones son particularmente conocidas por ser uno de los *problemas del milenio*, de modo que existe una recompensa monetaria para quien pueda demostrar la existencia (o inexistencia) de soluciones analíticas para cualquier conjunto de condiciones de borde.

Sin embargo, las ecuaciones que listamos en secciones previas sí pueden ser resueltas de forma analítica mediante uno de tres métodos que estudiaremos en el curso. Dos de ellos, el método de separación de variables y el método de las funciones de Green los veremos en capítulos siguientes del curso. El tercero corresponde al **método de las transformadas integrales**, donde diferentes transformadas son útiles para diferentes condiciones de contorno. En este curso, analizaremos únicamente a la transformada de Fourier.

### 3.3.1. Método de la transformada de Fourier

Como se discutió anteriormente, la transformada de Fourier puede aplicarse sobre una derivada  $n$ -ésima de una función sobre, por ejemplo, la variable temporal, de modo que se cumple la propiedad

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = (i\omega)^n \mathcal{F}\{f(t)\}. \quad (3.12)$$

Es posible que esta idea les sea familiar de su curso de Ecuaciones Diferenciales, al menos a quienes cursaron Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, donde se plantea un método similar para EDOs mediante la transformada de Laplace.

¿Para qué tipo de problemas puede ser útil trabajar con transformada de Fourier? Principalmente para resolver ecuaciones diferenciales en el dominio  $(-\infty, \infty)$  con condiciones de borde homogéneas en el infinito. Particularmente, se recomienda utilizarla en ecuaciones diferenciales *lineales* con *coeficientes constantes*, pues en ambos casos podemos hacer uso de la propiedad de la linealidad de la transformada de Fourier.

¿En qué momento esto es útil para resolver EDPs? Supongamos que tenemos una función de dos variables, por ejemplo, de la posición  $x$  y del tiempo  $t$ . Al calcular la transformada de Fourier, lo hacemos **respecto de una sola variable**, ya sea de la posición, gracias a la cual pasamos al dominio del número de onda, o respecto del tiempo, caso en el que pasamos al dominio de las frecuencias. Por ello, si tenemos una ecuación diferencial que involucra tanto derivadas respecto a la posición como derivadas respecto al tiempo, podemos aplicar la transformada de Fourier respecto de una de las variables, de modo que la segunda actúe como una “constante” en el sistema.

Para hacer más clara esta idea, consideremos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.3.1.** Sea la ecuación diferencial dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (3.13)$$

con condiciones de contorno dadas por  $u(x, 0) = \sin(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Mediante el método de la transformada de Fourier, encuentre la solución al problema.

**Solución.** Aplicamos la transformada de Fourier *respecto a la coordenada  $x$* , de modo que la ecuación (3.13) se transformará en

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}(k, t) = \mathcal{F}\{0\}(k, t) \quad (3.14)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}(k, t) - \mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}(k, t) = 0. \quad (3.15)$$

Al hacer uso de la propiedad de la derivada *respecto de la variable de la transformada*, tenemos que

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}(k, t) = (ik)^2 \mathcal{F}\{u\}(k, t) = -k^2 \hat{u}(k, t). \quad (3.16)$$



## El Método de Separación de Variables

Ya observamos que podemos hacer uso del método de la transformada de Fourier para reducir una ecuación diferencial en dos variables diferentes a una EDO en una sola variable. Sin embargo, no siempre será cómodo calcular la transformada de Fourier de una función, por lo que sería agradable tener una forma más general de hacer funcionar esta idea.

Para ello, hacemos uso del **método de separación de variables**, gracias al cual podemos reducir una EDP lineal de  $n$  variables en un conjunto de  $n$  EDOs para  $n$  funciones auxiliares, cada una asociada a una variable independiente de la EDP *y que no depende de las otras variables independientes*. Esto lo podemos hacer al proponer que nuestro sistema puede ser descrito mediante una *solución separable*, que consiste en el producto de todas las funciones auxiliares que encontremos mediante la solución de las EDOs.

Para realizar la separación de las variables, haremos uso de  $(n - 1)$  *constantes de separación*, las que son escogidas, en primera instancia, de forma arbitraria para luego determinarlas gracias a las condiciones de contorno del sistema.

Finalmente, una vez hallamos las soluciones de cada una de las EDOs y planteamos la solución separable del sistema, consideraremos que la solución más general consiste en la *superposición o combinación lineal* de todas las posibles soluciones separables del sistema.

Como ejemplo bastante ilustrativo, durante el capítulo resolveremos la ecuación de Helmholtz en diferentes sistemas coordenados, dando origen a diferentes *funciones especiales*, que serán discutidas en mayor profundidad en los capítulos siguientes.

### 4.1. Resolviendo la ecuación de Helmholtz

Recordemos que la ecuación de Helmholtz es dada por la expresión

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad (4.1)$$



donde  $k$  es una constante asociada al sistema. Desarrollaremos esta ecuación en los tres sistemas de coordenadas más comunes en física.

#### 4.1.1. Coordenadas cartesianas

En un sistema cartesiano, el operador laplaciano se define simplemente como

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4.2)$$

De esta forma, dado que nuestra ecuación posee tres variables independientes, podremos reducirla a un sistema de 3 EDOs en las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Antes de realizar este procedimiento, plantearemos una solución de la forma

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (4.3)$$

Una duda totalmente razonable es por qué considerar una solución de este estilo. La verdad no hay una respuesta directa a esto, más allá de “*esperemos que funcione*”. Si no fuera el caso, y nuestro sistema comienza a complicarse, puede que sea una mejor idea utilizar algún método alternativo. Sin embargo, cabe mencionar que si los operadores diferenciales (derivadas  $n$ -ésimas) son aditivos, es decir, no tenemos combinaciones de las variables, una solución de este estilo suele funcionar.

Evaluando la expresión (4.3) en la ecuación (4.1), podemos escribirla como

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 XYZ = 0, \quad (4.4)$$

donde ahora utilizamos derivadas totales en lugar de parciales, puesto que cada una de las funciones depende únicamente de una variable.

Dividimos ahora por la solución  $XYZ$ , donde hemos asumido que  $\psi(x, y, z) \neq 0$ , de modo que, luego de reordenar los términos, la ecuación resulta en

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2 - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}. \quad (4.5)$$

Hemos llegado al paso en donde se aprecia esta *separación de variables*. Notemos que el lado izquierdo de la ecuación (4.5) contiene únicamente términos asociados a la variable  $x$ , mientras que el lado derecho aún tiene dependencia en  $y$  y en  $z$ . La única posibilidad de que ambos lados sean iguales, dado que dependen de variables distintas, es que ambos son a su vez iguales a una *constante de separación*, que en este caso asumiremos real y llamaremos  $\lambda_1$ ,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \lambda_1, \quad (4.6)$$

$$-k^2 - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \lambda_1. \quad (4.7)$$

Notemos que, reordenando términos en la ecuación (4.7), podemos nuevamente separar las variables mediante una constante  $\lambda_2$ , de modo que hemos *dividido la EDP original, dependiente de tres variables, en un sistema de tres EDOs*,

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda_1 X = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda_2 Y = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + (k^2 + \lambda_1 + \lambda_2)Z = 0. \quad (4.10)$$

Cada una de estas EDOs son resolubles mediante los métodos vistos en su primer curso de ecuaciones diferenciales, y las soluciones dependerán del valor y del signo de las constantes de separación. Analicemos las posibles soluciones de la ecuación (4.8):

$$X_{\lambda_1}(x) = \begin{cases} c_1 \sinh(\sqrt{\lambda_1}x) + c_2 \cosh(-\sqrt{\lambda_1}x), & \text{si } \lambda_1 > 0, \\ c_1 + c_2 x, & \text{si } \lambda_1 = 0, \\ c_1 \cos(\sqrt{-\lambda_1}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda_1}x), & \text{si } \lambda_1 < 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Aquí es importante no olvidar que tenemos una motivación física para realizar estos cálculos, lo que nos ayudará a determinar el signo de la constante de separación. Para la mayoría de los problemas físicos, la solución para  $X(x)$  que tiene sentido es aquella en que  $\lambda_1$  es negativo, de modo que la solución es una oscilación en la coordenada  $x$ . Así mismo, podemos hacer un análisis análogo para cada una de las otras ecuaciones, obteniendo soluciones denotadas por  $Y_{\lambda_2}(y)$  y  $Z_{\lambda_1\lambda_2}(z)$ , donde es importante indicar el subíndice, ya que esta solución es válida para un valor particular de las constantes de separación.

De esta forma, una solución particular a nuestra EDP es dada por

$$\psi_{\lambda_1\lambda_2}(x, y, z) = X_{\lambda_1}(x)Y_{\lambda_2}(y)Z_{\lambda_1\lambda_2}(z), \quad (4.12)$$

y la solución general corresponderá a una combinación lineal de la solución (4.12), correspondiendo a una suma sobre todos los valores posibles de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , es decir,

$$\psi(x, y, z) = \sum_{\lambda_1\lambda_2} C_{\lambda_1\lambda_2} \psi_{\lambda_1\lambda_2}(x, y, z), \quad (4.13)$$

donde los coeficientes  $C_{\lambda_1\lambda_2}$  serán obtenidos al imponer las condiciones de contorno del problema, que por lo general nos llevará a un conjunto finito de valores para  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

### 4.1.2. Coordenadas cilíndricas

En este caso, el laplaciano debe definirse de una forma diferente, dada por

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (4.14)$$

de modo que la ecuación de Helmholtz (4.1) se podrá escribir como

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0. \quad (4.15)$$

Nuevamente plantearemos una solución que sea producto de tres funciones, cada una dependiente de una de las variables del problema, es decir

$$\psi(\rho, \phi, z) = P(\rho)\Phi(\phi)Z(z), \quad (4.16)$$

que al sustituirlas en la expresión (4.15) resultará en

$$\frac{\Phi Z}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{PZ}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + P\Phi \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 P\Phi Z = 0, \quad (4.17)$$

y dividiendo por  $P\Phi Z$ , junto a un reordenamiento de los términos, llegamos a la expresión

$$\frac{1}{\rho P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}. \quad (4.18)$$

Dado que a ambos lados de la ecuación tenemos una dependencia en variables diferentes, ambos lados deben ser iguales a una constante para no depender de ellas. Llamaremos a esta constante  $\lambda_1$ , de modo que

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\lambda_1, \quad (4.19)$$

$$\frac{1}{\rho P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 = \lambda_1. \quad (4.20)$$

En este caso, pueden ser soluciones físicas tanto el caso en que  $\lambda_1 > 0$ , donde obtendremos soluciones oscilantes (como lo hace Riley), o bien que  $\lambda_1 < 0$ , donde obtendremos soluciones exponenciales (como lo hace Arfken). La solución que escojamos dependerá de las condiciones de borde del problema.

Ahora, definiendo un valor auxiliar  $n^2 = k^2 + \lambda_1$ , podemos separar la ecuación (4.20) en una parte que dependa de  $\rho$  y una que dependa de  $\phi$ , de modo que luego de multiplicar por  $\rho^2$  y manipular un poco los términos, obtenemos la ecuación

$$\frac{\rho}{P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \rho^2 n^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}, \quad (4.21)$$

e introduciendo una constante de separación  $\lambda_2$ , obtenemos las siguientes expresiones

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -\lambda_2, \quad (4.22)$$

$$\frac{\rho}{P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + n^2 \rho^2 = \lambda_2. \quad (4.23)$$

Las soluciones físicas para la EDO de  $\phi$  deberán ser periódicas, dado que  $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$ , con lo que necesitamos que  $\lambda_2 > 0$ , ya que el signo menos produce que el término sea negativo. Llamamos  $\lambda_2 = m^2$ , donde  $m$  es un número entero para satisfacer la condición de periodicidad.

Solo nos queda resolver la ecuación radial, es decir, la EDO

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + (n^2 \rho^2 - m^2)P = 0, \quad (4.24)$$

que al realizar el cambio de variable  $x = n\rho$ ,  $dx = n d\rho$ , y definiendo  $Y(x) = P(\rho) = P(x/n)$ , puede reescribirse como

$$x \frac{d}{dx} \left( x \frac{dY}{dx} \right) + (x^2 - m^2)Y = 0, \quad (4.25)$$

ecuación que se conoce como **ecuación diferencial de Bessel**, cuyas soluciones son las *funciones de Bessel* que estudiaremos más adelante en el curso.

De esta forma, una solución particular de la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas será

$$\psi_{\lambda_1, m}(\rho, \phi, z) = P_{\lambda_1, m}(\rho) \Phi_m(\phi) Z_{\lambda_1}(z), \quad (4.26)$$

y la solución general será la combinación lineal de las soluciones (4.26), con coeficientes a determinar mediante las condiciones de contorno,

$$\psi(\rho, \phi, z) = \sum_{\lambda_1, m} C_{\lambda_1, m} P_{\lambda_1, m}(\rho) \Phi_m(\phi) Z_{\lambda_1}(z). \quad (4.27)$$

Algo interesante que señalar es que esta solución se mantiene incluso si  $k^2$  no es una constante, sino una función de la forma

$$k^2 \rightarrow f(\rho) + \frac{g(\phi)}{\rho^2} + h(z). \quad (4.28)$$

## 4.2. Coordenadas esféricas

En un sistema esférico  $(r, \theta, \phi)$  el operador laplaciano se define como

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right), \quad (4.29)$$

con lo que la ecuación de Helmholtz queda como

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) + k^2 \psi = 0, \quad (4.30)$$

y planteando un *ansatz* de la forma

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi), \quad (4.31)$$

que al ser sustituida en la ecuación (4.30) resulta en

$$\frac{\Theta\Phi}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R\Phi}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{R\Theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 R\Theta\Phi = 0. \quad (4.32)$$

Dividiendo por  $R\Theta\Phi$  y reordenando los términos, podemos llegar a la expresión

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = r^2 \sin^2 \theta \left[ -\frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{1}{\Theta r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - k^2 \right]. \quad (4.33)$$

En este momento, podemos separar ambos lados de la ecuación al igualarlas a una constante  $\lambda_1$ , de modo que obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \lambda_1 \quad (4.34)$$

$$r^2 \sin^2 \theta \left[ -\frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{1}{\Theta r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - k^2 \right] = \lambda_1, \quad (4.35)$$

y como en la coordenada azimutal  $\phi$  debe cumplirse la condición de periodicidad  $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$ , entonces  $\lambda_1 < 0$ , y lo denotamos por  $\lambda_1 = -m^2$ , con  $m$  un número entero. Luego, reemplazamos este valor en la ecuación (4.35) para poder separarla. Multiplicando por  $r^2$ , y manipulando un poco los términos, obtenemos la expresión

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta}. \quad (4.36)$$

Introduciendo una segunda constante de separación  $\lambda_2$ , obtenemos las ecuaciones

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - \lambda_2) R = 0 \quad (4.37)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( \lambda_2 - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0. \quad (4.38)$$

En este caso, vale la pena hacer un análisis en función del valor de  $m^2$  para la ecuación axial.

- Si  $m = 0$ , hacemos el cambio de variable  $x = \cos \theta$ , de modo que  $dx = -\sin \theta d\theta$ . Definiendo una función  $Y(x) = \Theta(\theta) = \Theta(\arccos x)$ , la EDO toma la forma

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dY}{dx} \right] + \lambda_2 Y = 0, \quad (4.39)$$

lo que corresponde a la **ecuación diferencial de Legendre**, cuyas soluciones son los *polinomios de Legendre*, que se estudiarán en detalle más adelante en el curso.

Dado que nuestra variable  $x$  es definida a partir de un coseno, esta estará acotada en su dominio, es decir, si  $\theta \in [0, \pi]$ , entonces  $x \in [-1, 1]$ . Si además exigimos que la solución sea acotada, podemos demostrar (como se hará más adelante) que  $\lambda_2 = \ell(\ell + 1)$ , con  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ .

- Si  $m \neq 0$ , podemos realizar el mismo cambio de variables, obteniendo la ecuación

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dY}{dx} \right] + \left( \lambda_2 - \frac{m^2}{1-x^2} \right) Y = 0, \quad (4.40)$$

que corresponde a la **ecuación diferencial asociada de Legendre**, cuyas soluciones son los *polinomios asociados de Legendre*. Nuevamente, una solución acotada requerirá que  $\lambda_2 = \ell(\ell + 1)$ , pero en este caso no puede tomar cualquier valor entero, sino que debe satisfacer  $\ell \geq m$ .

Por otra parte, en la ecuación radial podemos hacer el cambio de variable  $x = kr$ , de modo que  $dx = kdr$ . Definiendo una función  $Y(x) = R(r) = R(x/k)$ , podemos reescribir la EDO como

$$\frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dY}{dx} \right) + (x^2 - \lambda_2) Y = 0, \quad (4.41)$$

que corresponde a la **ecuación diferencial esférica de Bessel**, cuyas soluciones son las *funciones esféricas de Bessel*, que serán estudiadas más adelante.

En el caso particular en que  $k = 0$ , recuperamos la ecuación de Laplace, y la ecuación radial se convierte en una EDO de Euler-Cauchy,

$$r^2 R'' + 2rR' - \lambda_2 R = 0, \quad (4.42)$$

con soluciones que dependen del valor de  $\lambda_2$ . Sin embargo, al exigir soluciones finitas e imponer que  $\lambda_2 = \ell(\ell + 1)$ , solo tenemos una solución posible, de la forma

$$R(r) = Ar^\ell + Br^{-(\ell+1)}. \quad (4.43)$$

## El método de series para EDO y una introducción al problema de Sturm-Liouville

Hasta ahora, hemos estudiado ecuaciones que al cumplir ciertas propiedades, como tener una forma u otra, sabemos hallar una solución de una forma sencilla, como una ecuación de Euler-Cauchy, una EDO lineal de segundo orden con coeficientes constantes, entre otras. Sin embargo, existen algunas ecuaciones que pese a aparentar ser sencillas, no es posible hallar una solución en términos de funciones conocidas, como es el caso de la *ecuación de Airy*

$$y'' + xy = 0. \quad (5.1)$$

En estos casos, podemos hacer uso del llamado *método de series de potencias* para obtener una solución que, si bien no tiene una forma compacta, nos permite resolver dichos problemas, y encontrar aproximaciones válidas.

### 5.1. Resolver EDOs por el método de series

Consideremos una ecuación lineal de segundo orden cuyos coeficientes son polinomios en la variable independiente del problema, de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y(x) = R(x). \quad (5.2)$$

En general, consideraremos que  $P(x)$ ,  $Q(x)$  y  $R(x)$  son funciones *analíticas* de  $x$  en, al menos, un punto  $x = x_0$  a menos que se indique lo contrario.

Antes de discutir la existencia de soluciones para esta ecuación, debemos definir las nociones de punto *ordinario* y de punto *singular*.

**Definición 5.1.** Dada una ecuación diferencial de la forma (5.2), decimos que un punto  $x_0$  es un **punto ordinario** de la ecuación si las funciones  $P(x)$  y  $Q(x)$  son *analíticas* en  $x = x_0$ . En caso de que  $P(x)$  o  $Q(x)$  diverjan en  $x = x_0$ , diremos que  $x_0$  es un **punto singular**.

**Definición 5.2.** Dado un punto singular  $x = x_0$  para una EDO de la forma (5.2), diremos que  $x_0$  es un **punto singular regular** si tanto  $(x - x_0)P(x)$  como  $(x - x_0)^2Q(x)$  son analíticas en  $x = x_0$ . En caso contrario,  $x_0$  es un **punto singular irregular, o esencial**.

En el caso en que el coeficiente  $P(x)$  no se anula en el dominio del sistema, podemos garantizar la existencia de una solución para (5.2) mediante el siguiente teorema

**Teorema 5.1** (de Fuchs). Una ecuación diferencial de la forma (5.2) posee al menos una solución expresable en una serie de potencias en torno a  $x = x_0$  si este es un punto ordinario o un punto singular regular de la EDO (5.2). La solución será de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n+s}, \quad a_0 \neq 0 \quad (5.3)$$

para un número  $s$  real y positivo, o bien, de la forma

$$y(x) = y_0 \ln(x - a) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - a)^{n+r}, \quad b_0 \neq 0 \quad (5.4)$$

para algún número  $r$  real y positivo, donde  $y_0$  es una solución de la forma (5.3).

## 5.2. El problema de Sturm-Liouville

Para el caso de una EDO de segundo orden, lineal (no hay combinación de derivadas en un mismo término) y homogénea (igualable a 0) de la forma

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y + \lambda r(x)y = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (5.5)$$

donde  $p(x)$ ,  $p'(x)$ ,  $q(x)$  y  $r(x)$  son funciones reales y continuas en el intervalo  $[a, b]$  y  $\lambda$  es un parámetro a determinar se conoce como una **ecuación de Sturm-Liouville**. Cabe mencionar que, desde una perspectiva matemáticamente formal, deben también satisfacerse que tanto  $p(x)$  como  $r(x)$  son funciones definidas positivas en  $[a, b]$ . A la función  $r(x)$  se le denomina *función peso*.

Si revisamos el capítulo anterior, podemos darnos cuenta que todas las EDO que surgen de separar la ecuación de Helmholtz en diferentes sistemas coordenados corresponden a ecuaciones de Sturm-Liouville, donde ya hemos definido diferentes constantes de separación, salvo  $\lambda$ .

¿Por qué nos interesa esto? Recordamos que un *operador diferencial* es un operador lineal, es decir, puede actuar sobre un elemento de un espacio vectorial (en este caso, una función) y



transformarlo en otro elemento del mismo espacio vectorial. Gracias a ello, podemos definir el *operador de Sturm-Liouville* como

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} \right] - q(x), \quad (5.6)$$

de modo que podemos escribir la ecuación de Sturm-Liouville como

$$\mathcal{L}y = -\lambda r(x)y, \quad (5.7)$$

que corresponde a la expresión de un problema de autovalores, como los vistos en Álgebra Lineal. Por ende, nos interesaría poder determinar el valor de  $\lambda$  a partir de la teoría de operadores, pero esta perspectiva escapa a los objetivos del curso. Sin embargo, podrán encontrar en el apéndice X un desarrollo siguiendo este camino.

La perspectiva que sí nos interesa analizar en este curso, es uno de los resultados de entender la ecuación de Sturm-Liouville como un problema de autovalores: la **ortogonalidad** de sus autofunciones. Si recordamos, una propiedad de los autovectores de un operador es que, cuando están asociados a diferentes autovalores, ellos son ortogonales entre sí. Una *autofunción* es el equivalente a un autovector en el espacio de funciones, de modo que, usando un producto interno apropiado, las funciones asociadas a dos autovalores  $\lambda_m$  y  $\lambda_n$ , denotadas como  $y_m$  e  $y_n$  respectivamente, satisfacen la relación

$$\int_a^b w(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0, \quad n \neq m. \quad (5.8)$$

En el caso del problema de Sturm-Liouville, la función peso que definimos en el producto interno corresponde a la función peso  $r(x)$  del problema, de modo que sus soluciones deberán satisfacer

$$\int_a^b r(x) y_m(x) y_n(x) dx = 0, \quad n \neq m. \quad (5.9)$$

También es posible mostrar que los autovalores de esta ecuación siempre serán valores reales, demostración que se encuentra en el apéndice X.

### 5.3. Condiciones de contorno de Sturm-Liouville

Sea un conjunto de condiciones de contorno *homogéneas* (es decir, si tengo un conjunto de funciones  $f_i$  que satisfacen la condición de contorno, cualquier combinación lineal de ellas también la satisface) en  $x = a$  y en  $x = b$ . Si para dos funciones cualesquiera,  $f(x)$  y  $g(x)$ , que satisfacen estas condiciones de contorno se verifica que

$$p(x) \left[ f^*(x) \frac{dg}{dx} - g(x) \frac{df^*}{dx} \right] \Big|_a^b = 0, \quad (5.10)$$

entonces dichas condiciones de contorno se denominan **condiciones de contorno de Sturm-Liouville**, las que pueden clasificarse en tres clases, que discutiremos a continuación.

### 5.3.1. Condiciones de contorno periódicas

En este caso, nos referimos a condiciones de contorno de la forma

$$\begin{cases} y(a) = y(b), \\ y'(a) = y'(b), \end{cases} \quad (5.11)$$

donde además se verifica que  $p(a) = p(b)$ . En particular, esta última condición es necesaria para que se satisfaga (5.10).

### 5.3.2. Condiciones de contorno de tipo Robin, o regulares

Estas condiciones son de la forma

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, & \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, & \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.12)$$

donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  no son iguales a cero simultáneamente, ni tampoco lo son  $\beta_1$  y  $\beta_2$ .

Este caso corresponde a una generalización (más precisamente, una combinación lineal) de las condiciones de Dirichlet y de Neumann. En efecto, observamos que cuando  $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ , recuperamos las condiciones de Dirichlet,  $y(a) = y(b) = 0$ ; mientras que al hacer  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ , recuperamos las condiciones de Neumann,  $y'(a) = y'(b) = 0$ .

Se puede comprobar que estas condiciones satisfacen la ecuación (5.10) tomando complejo conjugado en la primera ecuación del sistema, y observando que se puede interpretar como un sistema de ecuaciones de dos incógnitas, es decir,

$$\begin{pmatrix} f^*(a) & f^{*'}(a) \\ g(a) & g'(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

donde el sistema tendrá infinitas soluciones, de modo que

$$\begin{vmatrix} f^*(a) & f^{*'}(a) \\ g(a) & g'(a) \end{vmatrix} = f^*(a)g'(a) - g(a)f^{*'}(a) = 0. \quad (5.14)$$

Mediante un procedimiento análogo para  $b$ , tenemos que

$$f^*(b)g'(b) - g(b)f^{*'}(b) = 0, \quad (5.15)$$

de modo que se satisface la expresión (5.10).

### 5.3.3. Condiciones de contorno singulares

Corresponden a aquellas soluciones que no son ni regulares ni periódicas. Muchas veces corresponden a funciones  $p(x)$  que se anulan en los contornos, o coeficientes que se vuelven infinitos en uno o ambos contornos.

Como caso ilustrativo, consideremos el caso en que  $p(a) = p(b) = 0$ . En este caso, diremos que  $x = a$  y  $x = b$  son *puntos singulares* de la ecuación de Sturm-Liouville, como se observa al escribir la ecuación (5.5) en la forma

$$y''(x) + \frac{p'(x)}{p(x)} y'(x) + \frac{q(x)}{p(x)} y(x) + \lambda \frac{r(x)}{p(x)} y(x) = 0. \quad (5.16)$$

De esta forma, deberá cumplirse que, en general, las soluciones también sean singulares en estos puntos.

## Funciones de Legendre

Como vimos anteriormente en el capítulo 4, al resolver la ecuación de Helmholtz en coordenadas esféricas, podemos obtener dos ecuaciones, según el valor de la constante de separación  $m^2$ .

### 6.1. Ecuación de Legendre

Analizaremos en primer lugar el caso en que  $m = 0$ , correspondiente a resolver la ecuación de Laplace, donde obtuvimos la EDO

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda \Theta = 0, \quad (6.1)$$

que al considerar el cambio de variables  $x = \cos \theta$ , y llamar a  $\Theta(\theta) = \Theta(\arccos(x)) = y(x)$ , de modo que

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin \theta \frac{d}{dx}, \quad (6.2)$$

con lo que podremos escribir la ecuación como

$$\frac{1}{\sin \theta} (-\sin \theta) \frac{d}{dx} \left( \sin \theta (-\sin \theta) \frac{dy}{dx} \right) + \lambda y = \frac{d}{dx} \left( (1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right) + \lambda y = 0, \quad (6.3)$$

expresión que nombraremos como **ecuación de Legendre**.

Observamos que hemos escrito la ecuación de Legendre en la forma de una ecuación de Sturm-Liouville, con  $p(x) = 1 - x^2$  y  $q(x) = r(x) = 1$ . Observamos que, dado que  $x = \cos \theta$ , nuestra ecuación está definida en el intervalo  $[-1, 1]$ . Nos interesa que estos casos extremos posean soluciones finitas, lo que nos permitirá encontrar el valor de  $\lambda$  para esta ecuación.

### 6.1.1. Resolviendo la ecuación de Legendre

En primer lugar, escribimos la ecuación de forma más explícita, es decir,

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0. \quad (6.4)$$

Utilizando el método de series, planteamos soluciones de la forma

$$\begin{cases} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \\ y''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)k a_k x^{k-2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k \end{cases}, \quad (6.5)$$

de modo que sustituyendo en la expresión (6.4) tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k-1)k a_k x^k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0, \quad (6.6)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)(k+2) a_{k+2} - k(k-1) a_k - 2k a_k + \lambda a_k] x^k = 0, \quad (6.7)$$

donde hemos usado que  $\sum_{k=1}^{\infty} k = \sum_{k=0}^{\infty} k$ . Dado que  $x^k = 0$  corresponde a la solución trivial, analizamos la relación entre los coeficientes de nuestra ecuación,

$$(k+1)(k+2) a_{k+2} - [(k-1)k + 2k - \lambda] a_k = 0, \quad (6.8)$$

de donde encontramos la siguiente relación de recurrencia,

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+1)(k+2)} a_k, \quad (6.9)$$

de modo que dados unos valores para  $a_0$  y  $a_1$  podremos determinar todos los coeficientes de nuestra expresión. Luego, si desarrollamos los términos pares e impares por separado, podemos observar la siguiente recurrencia,

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-\lambda}{2} a_0 \\ a_4 &= \frac{2(2+1) - \lambda}{3 \cdot 4} a_2 = \frac{-\lambda(2(2+1) - \lambda)}{4!} a_0 \\ a_6 &= \frac{4(4+1) - \lambda}{5 \cdot 6} a_4 = \frac{-\lambda(2(2+1) - \lambda)(4(4+1) - \lambda)}{6!} a_0 \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{a_0}{n!} \prod_{\ell=0}^{n-2} [\ell(\ell+1) - \lambda], \end{aligned}$$

mientras que para el caso de coeficientes impares,

$$\begin{aligned}
 a_3 &= \frac{1(1+1) - \lambda}{2 \cdot 3} a_1 \\
 a_5 &= \frac{(3(3+1) - \lambda)}{4 \cdot 5} a_3 = \frac{(1(1+1) - \lambda)(3(3+1) - \lambda)}{5!} a_1 \\
 a_7 &= \frac{5(5+1) - \lambda}{6 \cdot 7} = \frac{(1(1+1) - \lambda)(3(3+1) - \lambda)(5(5+1) - \lambda)}{7!} a_1 \\
 &\vdots \\
 a_n &= \frac{a_1}{n!} \prod_{\ell=1}^{n-2} [\ell(\ell+1) - \lambda],
 \end{aligned}$$

de modo que la solución general para la ecuación de Legendre será la combinación lineal de la solución para los valores pares y la solución para los valores impares,

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \quad (6.10)$$

$$= a_0 \left( \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^{2m} \right) + a_1 \left( \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{2m+1} \right) \quad (6.11)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_0}{(2m)!} \left( \prod_{\ell=0}^{2m-2} [\ell(\ell+1) - \lambda] \right) x^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_1}{(2m+1)!} \left( \prod_{\ell=1}^{2m-1} [\ell(\ell+1) - \lambda] \right) x^{2m+1}. \quad (6.12)$$

Con esto, podemos darnos cuenta de que la solución general de la ecuación de Legendre es una serie infinita. ¿Cómo imponemos la condición de finitud a estas expresiones? Podemos hacerlo al estudiar su convergencia para el intervalo en que se encuentran definidas.

Según el criterio de la razón (véase el capítulo 7 del apunte de Física Matemática I), la serie converge para  $|x| < 1$ , independientemente del valor de  $\lambda$ . Nos queda analizar los casos extremos, es decir,  $x = \pm 1$ .

Para  $\lambda \neq n(n+1)$ , la serie diverge, puesto que ella se convierte en una serie numérica sin ningún tipo de restricción, que crece indefinidamente. Volveremos a este caso más tarde.

Para  $\lambda = n(n+1)$ , existirá algún término  $a_n = 0$  para la solución par o la solución impar, y siguiendo la relación de recurrencia (6.9), todo término superior a este se anulará. Luego, basta imponer que el primer coeficiente de la solución de paridad opuesta se anule para así obtener una solución convergente. Es decir, si  $n$  es par,  $a_1 = 0$ , mientras que si  $n$  es impar, escogemos  $a_0 = 0$ .

De esta forma, nos gustaría poder escribir una expresión general para las soluciones que son válidas en todo el dominio, es decir, cuando  $\lambda = n(n+1)$ . Notamos que  $\ell(\ell+1) - n(n+1) =$

$(\ell - n)(\ell + n + 1)$ , podemos encontrar que, para  $n$  par,

$$y_{1,n}(x) = \sum_{m=0}^{n/2} b_m x^{2m} = \sum_{m=0}^{n/2} \left( \frac{1}{(2m)!} \prod_{\ell=0}^{2m-2} (\ell - n)(\ell + n + 1) \right) x^{2m} \quad (6.13)$$

$$= d_{n,1} P_n(x) = \frac{(-1)^{n/2} 2^n \left[ \left( \frac{n}{2} \right)! \right]^2}{n!} P_n(x), \quad (6.14)$$

mientras que para  $n$  impar,

$$y_{2,n}(x) = \sum_{m=0}^{(n-1)/2} c_m x^{2m+1} = \sum_{m=0}^{n/2} \left( \frac{1}{(2m)!} \prod_{\ell=0}^{2m-2} (\ell - n)(\ell + n + 1) \right) x^{2m+1} \quad (6.15)$$

$$= d_{n,2} P_n(x) = \frac{(-1)^{(n+1)/2} 2^{n-1} \left[ \left( \frac{n-1}{2} \right)! \right]^2}{n!} P_n(x), \quad (6.16)$$

donde en ambos casos las funciones  $P_n(x)$  corresponden a los **polinomios de Legendre**, definidos como

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(-1)^k (2n - 2k)}{2^n k! (n - k)! (n - 2k)!} x^{n-2k}. \quad (6.17)$$

Otra forma de definirlos es a partir de la *fórmula de Rodrigues*, según la cual pueden expresarse como

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (6.18)$$

## 6.1.2. Función Generatriz

**Definición 6.1.** Para cualquier conjunto de *polinomios ortogonales*  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , se denomina **función generatriz** (o generadora) de dicho conjunto a la función  $G(x, t)$ , tal que cuando se desarrolla en una serie de Taylor para  $t$ , los coeficientes de dicha expansión son los polinomios  $P_n(x)$ :

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n. \quad (6.19)$$

En particular, la función generatriz para los polinomios de Legendre es dada por la expresión

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}. \quad (6.20)$$

Si observamos esta expresión en detalle, y hacemos  $t = r/a$  y  $x = \cos \theta$ , podemos escribir la función generatriz como

$$G(\theta, r) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos(\theta)/a + r^2/a^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}} = \frac{a}{|\vec{x} - \vec{a}|}, \quad (6.21)$$

donde  $|\vec{x} - \vec{a}|$  es la distancia entre los puntos  $\vec{x}$  y  $\vec{a}$ . Así, obtenemos la relación entre la distancia entre dos puntos del espacio con los Polinomios de Legendre,

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} = \frac{1}{a} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta). \quad (6.22)$$

En esta expresión, hemos asumido que  $r > a$ . En caso contrario, deben invertirse las relaciones, ubicando  $r$  en el lugar de  $a$ , y viceversa.

Podemos utilizar este resultado, por ejemplo, para escribir el potencial electrostático en un punto  $\vec{r}$  producido por una carga  $q$  en el punto  $\vec{a}$ ,

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), \quad (6.23)$$

lo que se asocia a la llamada *expansión multipolar*, que estudiarán en su curso de electrodinámica.

Por otro lado, podemos encontrar explícitamente los polinomios de Legendre a partir de su función generadora mediante

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \left[ \frac{\partial^n G(t, x)}{\partial t^n} \right]_{t=0}. \quad (6.24)$$

### 6.1.3. Propiedades

1. **Normalización.** Los polinomios de Legendre son funciones normalizadas, de modo que  $P_n(1) = 1$ , para cualquier valor de  $n$ .
2. **Paridad.** Podemos encontrar que los polinomios de Legendre pueden ser funciones pares o impares según el valor de  $n$ , ya que

3.

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \quad (6.25)$$

4. **Valor en el origen.** A partir de la función generatriz, podemos mostrar que

$$P_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar.} \\ (-1)^{n/2} \frac{n!}{2^n((n/2)!)^2}, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \quad (6.26)$$

5. **Ortogonalidad.** Los polinomios de Legendre satisfacen la relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m}. \quad (6.27)$$



6. **Compleitud.** Los polinomios de Legendre forman un *conjunto completo* de funciones definidas en  $[-1, 1]$ , por lo que forma una base para dichas funciones, lo que se expresa como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x) P_n(x') = \delta(x - x'). \quad (6.28)$$

7. **Serie de Fourier-Legendre.** Dado que los polinomios de Legendre forman un abase en el intervalo  $[-1, 1]$ , podemos expandir cualquier función en una Serie de Fourier-Legendre, tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad (6.29)$$

donde

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx. \quad (6.30)$$

8. **Relaciones de recurrencia.** Los polinomios de Legendre satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia,

$$nP_{n-1}(x) + (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)P_n(x), \quad (6.31)$$

$$(2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x). \quad (6.32)$$

#### 6.1.4. Funciones de Legendre de segunda especie

Como discutimos anteriormente, al escoger  $\lambda = n(n+1)$  para un número entero  $n$ , debemos trincar una de las series que aparecen en la ecuación (6.12), de modo que la solución se reduce a los polinomios de Legendre. El motivo de hacer esto es hallar una solución que converja en  $x = \pm 1$ . Sin embargo, si estamos estudiando un problema que no requiere convergencia en los contornos  $x = \pm 1$ , ¿es necesario descartar la segunda serie infinita?

La respuesta es no, y de hecho ciertos problemas físicos requieren de estas soluciones. Por ello, las llamaremos **funciones de Legendre de segunda especie**, denotadas por  $Q_n(x)$ , y que definimos como

$$Q_n(x) = \begin{cases} d_{1,n} y_{2,n}(x), & \text{si } n \text{ es par,} \\ d_{2,n} y_{1,n}(x), & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases} \quad (6.33)$$

$$= \begin{cases} (-1)^{n/2} \frac{[(n/2)!]^2}{n!} 2^n y_{2,n}(x), & \text{si } n \text{ es par,} \\ (-1)^{(n+1)/2} \frac{[(\frac{n-1}{2})!]^2}{n!} 2^{n-1} y_{1,n}(x), & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases} \quad (6.34)$$

donde  $y_{1,n}$  e  $y_{2,n}$  son las funciones definidas en (6.13) y (6.14), respectivamente. Nótese que a la solución para  $n$  par, hemos multiplicado los coeficientes de la solución impar, y viceversa.

Las funciones asociadas de Legendre satisfacen las mismas relaciones de recurrencia que las funciones de Legendre, de modo que

$$nQ_{n-1}(x) + (n+1)Q_{n+1}(x) = (2n+1)xQ_n(x), \quad (6.35)$$

$$(2n+1)Q_n(x) = Q'_{n+1}(x) - Q'_{n-1}(x). \quad (6.36)$$

Pueden encontrar la derivación explícita de estas relaciones en el apunte del profesor Rubilar [21].

Otras propiedades relevantes que estas satisfacen son

1. **Paridad.** Se tiene que

$$Q_n(-x) = (-1)^{n+1}Q_n(x). \quad (6.37)$$

2. **Valor en el origen.** Dada su paridad, las relaciones se invierten respecto a los polinomios de Legendre, de modo que

$$Q_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ (-1)^{(n+1)/2} \frac{\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2}{n!} 2^{n-1}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad (6.38)$$

3. **Valor en el extremo del intervalo.** Los extremos del intervalo son puntos singulares para estas funciones, de modo que

$$\lim_{x \rightarrow 1} Q_n(x) = +\infty. \quad (6.39)$$

En resumen, la solución general de la EDO de Legendre para  $\lambda = n(n+1)$ , es dada por

$$y(x) = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x), \quad (6.40)$$

donde los polinomios de Legendre  $P_n(x)$  convergen en todo el intervalo  $[-1, 1]$ , incluídos los extremos, mientras que las funciones de segunda especie  $Q_n(x)$  convergen en el interior del intervalo  $(-1, 1)$ , mas no en los extremos.

## 6.2. Ecuación asociada de Legendre

Hasta ahora, analizamos el caso en que  $m = 0$  en la EDO axial (4.30) que se obtiene de la ecuación de Helmholtz. En lo que resta del capítulo, analizaremos el caso en que  $m \neq 0$ .

En este caso, la ecuación se puede escribir como

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0. \quad (6.41)$$

Realizando nuestro cambio de variable  $x = \cos \theta$ , y desarrollando de forma más explícita la ecuación, esta toma la forma de la **ecuación asociada de Legendre**,

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2}\right)y(x) = 0, \quad (6.42)$$

cuyas soluciones se encuentran definidas en el intervalo  $[-1, 1]$ .

### 6.2.1. Resolviendo la ecuación asociada de Legendre

Para hacer más fácil el proceso de utilizar el método de series, realizamos la sustitución  $y(x) = (1 - x^2)^{m/2}u(x)$ , y resolvemos para  $u(x)$ . Esto resulta en la EDO

$$(1 - x^2)u''(x) - 2x(m + 1)u'(x) + (\lambda - m(m + 1))u(x) = 0, \quad (6.43)$$

a partir de la cual podemos plantear una solución de la forma

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad (6.44)$$

y encontrar la siguiente relación de recurrencia

$$a_{k+2} = \frac{k^2 + (2m + 1)k - \lambda + m(m + 1)}{(k + 1)(k + 2)} a_k, \quad (6.45)$$

que al igual que para la ecuación de Legendre, resultará en series que convergen para  $|x| < 1$  y, en general, divergen para  $|x| = 1$ , salvo para ciertos valores de  $\lambda$ . Para encontrar dichos valores, necesitamos que el numerador de la ecuación (6.45) sea cero, es decir,

$$\lambda = m(m + 1) + k(k + 1) + 2mk = (m + k)(m + k + 1), \quad (6.46)$$

con lo que, definiendo  $n = m + k \geq m$ , observamos que nuevamente requeriremos que  $\lambda = n(n + 1)$ , de modo que la serie terminará luego del  $(n - m)$ -ésimo término.

Podemos hallar de forma explícita las soluciones a esta EDO diferenciando repetidamente la ecuación de Legendre (6.4), al hacer uso de la regla de Leibniz, es decir,

$$\frac{d^m}{dx^m} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \frac{d^{m-s}}{dx^{m-s}} f_1(x) \frac{d^s f_2(x)}{dx^s}, \quad (6.47)$$

de donde obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} [(1 - x^2)y''(x)] &= \binom{m}{m} (1 - x^2) \frac{d^m}{dx^m} y'' + \binom{m}{m-1} (-2x) \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} y'' + \binom{m}{m-2} (-2) \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} y'' \\ &= (1 - x^2) \left( \frac{d^m y}{dx^m} \right)'' - 2mx \left( \frac{d^m y}{dx^m} \right)' - m(m-1) \left( \frac{d^m y}{dx^m} \right) \\ \frac{d^m}{dx^m} [2xy'(x)] &= \binom{m}{m} 2x \frac{d^m}{dx^m} y' + \binom{m}{m-1} 2 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} y' \\ &= 2x \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)' + 2m \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \\ \frac{d^m}{dx^m} [n(n+1)y'(x)] &= n(n+1) \frac{d^m}{dx^m} y(x), \end{aligned}$$

donde hemos usando que  $\binom{m}{m} = 1$ ,  $\binom{m}{m-1} = m$ , y  $\binom{m}{m-2} = \frac{m(m-1)}{2}$ . Así, la EDO resulta en

$$(1-x^2) \left( \frac{d^m y}{dx^m} \right)'' - (2mx + 2x) \left( \frac{d^m y}{dx^m} \right)' + [m(m-1) + 2m + n(n+1)] \left( \frac{d^m y}{dx^m} \right) = 0, \quad (6.48)$$

donde al hacer la sustitución  $f(x) = y^{(m)}(x)$ , obtenemos la EDO para  $u(x)$  cuando  $\lambda = n(n+1)$ . De esta forma, concluimos que las funciones  $u(x)$  son proporcionales a  $\frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ .

De forma convencional (por motivos de normalización), las soluciones  $u(x)$  corresponden a los **polinomios asociados de Legendre**, expresados como

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x). \quad (6.49)$$

Observamos que cuando  $m = 0$ , recuperamos los polinomios de Legendre, de modo que  $P_n^0(x) \equiv P_n(x)$ . Sustituyendo la fórmula de Rodrigues para  $P_n(x)$  en (6.49), obtenemos la *fórmula de Rodrigues para los polinomios asociados de Legendre*,

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n, \quad (6.50)$$

que también es válida para  $m < 0$ , siempre y cuando  $|m| \leq n$ .

## 6.2.2. Función generatriz

En este caso, podemos hacer uso de la relación entre los polinomios asociados de Legendre y los polinomios de Legendre para obtener la función generatriz de los primeros. En efecto, observamos que derivando  $m$  veces la función generatriz de los polinomios de Legendre respecto a  $x$ , tenemos

$$\frac{d^m G}{dx^m} = \frac{d^m}{dx^m} (1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) t^n, \quad (6.51)$$

y multiplicando ambos lados por  $(1-x^2)^{m/2}$ , tenemos que

$$\frac{d^m G}{dx^m} = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} (1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^m(x) t^n. \quad (6.52)$$

Derivando el lado izquierdo de la ecuación, obtenemos

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1) (1-x^2)^{m/2} t^m}{(1-2t+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^m t^n. \quad (6.53)$$

Dividimos la expresión por  $t^m$ , y definimos  $r = n - m$ , y además notamos que

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2r}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2r} = \frac{(2r)!}{2^r r!}. \quad (6.54)$$

De este modo, podemos hallar que

$$G_m(x, t) = \frac{(2m)!(1-x^2)^{m/2}}{2^m m! (1-2xt+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{r=0}^{\infty} P_{r+m}^m(x) t^r. \quad (6.55)$$

### 6.2.3. Propiedades

A partir de la expresión (6.49), es posible mostrar, aplicando la fórmula de Leibniz al producto  $(n+1)^n(x-1)^n$ , que

1. **Simetría.** Los polinomios  $P_n^{-m}$  se pueden obtener a partir de los  $P_n^m$  siguiendo la relación

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \quad (6.56)$$

A partir de la fórmula de Rodrigues (6.50), se pueden demostrar las siguientes propiedades,

2. Evaluados en los extremos del intervalo  $x = \pm 1$ , los polinomios asociados de Legendre son nulos, salvo cuando  $m = 0$ .

$$P_n^m(\pm 1) = \begin{cases} (\pm 1)^n, & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}. \quad (6.57)$$

3. **Paridad.** A partir de la paridad de los polinomios de Legendre  $P_n(x)$ , podemos encontrar que los polinomios asociados pueden ser tanto funciones pares como impares, dependiendo del valor de  $m$  y  $n$ ,

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(x). \quad (6.58)$$

4. **Ortogonalidad.** Los polinomios asociados de Legendre satisfacen las siguientes relaciones de ortogonalidad,

$$\int_{-1}^1 P_\ell^m(x) P_k^m(x) dx = \frac{2}{2\ell+1} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \delta_{\ell,k}. \quad (6.59)$$

5. **Relaciones de recurrencia.** Los polinomios asociados de Legendre satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia,

$$(2n+1)xP_n^m(x) = (n+m)P_{n-1}^m(x) + (n-m+1)P_{n+1}^m(x) \quad (6.60)$$

$$(2n+1)\sqrt{1-x^2}P_n^m(x) = P_{m+1}^{m+1}(x) - P_{n-1}^{m+1}(x) \quad (6.61)$$

$$= (n+m)(n+m-1)P_{n-1}^{m-1} - (n-m+1)(n-m+2)P_{n+1}^{m-1} \quad (6.62)$$

6. En general, la EDO asociada de Legendre también posee un segundo conjunto de soluciones, no analíticas en  $x = \pm 1$ , que corresponden a las *funciones asociadas de Legendre de segunda especie*, que se obtienen a partir la ecuación (6.49), utilizando las funciones de Legendre de segunda especie  $Q_n(X)$  como derivando. Por ello, la solución general será dada por

$$y(x) = C_1 P_n^m(x) + C_2 Q_n^m(x). \quad (6.63)$$

7. La mayoría de los problemas físicos descartan esta segunda solución, ya que en general esperamos que nuestra solución sea finita en  $x = \pm 1$ , es decir, en  $\theta = 0$  y en  $\theta = \pi$ , con lo que hacemos  $C_2 = 0$ .

## 6.3. Armónicos Esféricos

Como último tema de este capítulo, analizaremos qué ocurre al resolver la ecuación de Laplace, es decir, el caso en que  $k = 0$  en la ecuación de Helmholtz. Mediante el método de separación de variables, llegamos a las siguientes ecuaciones

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0 \quad (6.64)$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right) \Theta = 0 \quad (6.65)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \ell(\ell+1)R = 0, \quad (6.66)$$

donde la elección de la constante de separación  $\ell(\ell+1)$  proviene de exigir una solución analítica cuando  $\cos\theta = \pm 1$ . Luego, la solución de la ecuación (6.64) es oscilante, la solución a la ecuación (6.65) son los polinomios asociados de Legendre, y la solución para (6.66) es  $R_\ell(r) = D_\ell r^\ell + E_\ell r^{-(\ell+1)}$ .

Una solución para la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas será, por ende,

$$\begin{aligned} \psi_{m\ell}(r, \theta, \phi) &= R_\ell(r) \Theta_{m\ell}(\theta) \Phi_m(\phi) \\ &= (D_\ell r^\ell + E_\ell r^{-(\ell+1)}) C_{m\ell} P_\ell^m(\cos\theta) (A_m \cos(m\phi) + B_m \sin(m\phi)), \end{aligned} \quad (6.67)$$

o bien,

$$\psi_{m\ell}(r, \theta, \phi) = R_\ell(r) P_\ell^m(\cos\theta) C_\ell e^{im\phi}, \quad (6.68)$$

donde se cumplirá que  $-\ell \leq m \leq \ell$ .

Comúnmente, nos podemos referir a la parte angular de la solución general como **funciones armónicas esféricas**, o simplemente, **Armónicos Esféricos**, los que se definen con una normalización conveniente como

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\phi}. \quad (6.69)$$

El factor radical tiene su origen en la normalización de los armónicos esféricos, mientras que el factor  $(-1)^m$  es convencional al trabajar en mecánica cuántica en el contexto del momento angular. Esta fase es conocida como *fase de Condon-Shortley*, y a veces es introducida en la definición de los polinomios asociados de Legendre.

### 6.3.1. Propiedades

1. **Simetría.** Los armónicos esféricos  $Y_\ell^{-m}$  se pueden obtener según la relación

$$Y_\ell^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m (Y_\ell^m(\theta, \phi))^*. \quad (6.70)$$

2. **Paridad.** Los armónicos esféricos pueden ser pares o impares, según el valor de  $\ell$ ,

$$Y_\ell^m(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta, \phi). \quad (6.71)$$

3. **Ortonormalidad.** Los armónicos esféricos forman un conjunto ortonormal, es decir,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_j^k(\theta, \phi) Y_\ell^m(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{j,\ell} \delta_{k,m}. \quad (6.72)$$

4. **Completitud.** EL conjunto de funciones  $\{Y_\ell^m(\theta, \phi)\}_{\ell=0, m=-\ell}^{\ell=\infty, m=\ell}$  es un *conjunto completo de funciones*, con lo que *forma una base en el espacio de funciones*, lo que se expresa como

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (Y_\ell^m(\theta, \phi))^* Y_\ell^m(\theta', \phi') = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta'). \quad (6.73)$$

5. **Expansión en términos de Armónicos Esféricos.** Dada la completitud de los armónicos esféricos, cualquier función  $f(\theta, \phi)$  cuadrado integrable, es decir, que satisface

$$\int |f(\theta, \phi)|^2 d\Omega < \infty, \quad (6.74)$$

puede ser desarrollada en términos de funciones armónicas esféricas,

$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_\ell^m(\theta, \phi), \quad (6.75)$$

donde los coeficientes  $a_{\ell m}$  son dados por

$$a_{\ell m} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) (Y_\ell^m)^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi. \quad (6.76)$$

6. **Teorema de adición de armónicos esféricos.** Dados dos vectores unitarios  $\hat{r}_1$  y  $\hat{r}_2$ , con direcciones  $(\theta_1, \phi_1)$  y  $(\theta_2, \phi_2)$ , podemos obtener el ángulo  $\gamma$  formado entre ambos vectores como

$$\hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2 = \cos \gamma = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos \phi_1 \cos \phi_2, \quad (6.77)$$

y podremos hallar los polinomios de Legendre de este ángulo como

$$P_\ell(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta_1, \phi_1) (Y_\ell^m(\theta_2, \phi_2))^*. \quad (6.78)$$

En particular, cuando  $\gamma = 0$ , y por ende  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$  y  $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ , obtenemos que

$$P_\ell(1) = 1 = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y_\ell^m(\theta, \phi)|^2, \quad (6.79)$$

y así,

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} |Y_\ell^m(\theta, \phi)|^2 = \frac{2\ell + 1}{4\pi}. \quad (6.80)$$

## Funciones de Bessel

Cuando resolvemos la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas, obtenemos una EDO para la coordenada radial de la forma

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + (n^2 \rho^2 - m^2)P = 0. \quad (7.1)$$

Haciendo el cambio de variable  $x = n\rho$ ,  $\frac{d}{dx} = \frac{1}{n} \frac{d}{d\rho}$ , con lo que la ecuación tomará la forma

$$\frac{x}{n} \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{n} \frac{dy}{dx} \right) + (x^2 - m^2)y(x) = 0, \quad (7.2)$$

o desarrollando más explícitamente la ecuación, obtenemos la **ecuación de Bessel**

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - m^2)y(x) = 0. \quad (7.3)$$

Si bien, como parte de la ecuación de Helmholtz, se ha impuesto que  $m$  es un valor entero, esta no es una restricción propia de la EDO de Bessel, por lo que comúnmente se denota a esta constante como  $\nu$ , la que puede tomar *valores reales no negativos*.



## Funciones de Green

Hasta ahora, hemos visto maneras de resolver EDPs lineales y *homogéneas*, es decir, que son igualables a cero, sin términos que no dependan de la función incógnita ni sus derivadas.

Sin embargo, muchas situaciones físicas no pueden ser descritas únicamente mediante ecuaciones homogéneas. ¿Cómo podemos resolverlas en este caso?

Una forma de hacerlo es mediante el **método de las funciones de Green**, gracias a las cuales podemos reducir una EDP lineal e inhomogénea a un problema abordable.

En general, diremos que podemos hacer uso de las funciones de Green cuando tenemos un problema de la forma

$$\mathcal{L}\Psi(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad (8.1)$$

donde  $f(\vec{x})$  corresponde a una función *fuentes* y  $\mathcal{L}$  es un operador diferencial cualquiera. En este caso, buscamos una **función de Green**  $G(\vec{x}, \vec{x}')$  que satisfaga la ecuación

$$\mathcal{L}G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta^{(n)}(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (8.2)$$

donde  $\delta^{(n)}$  es la delta de Dirac  $n$ -dimensional.

### 8.1. Motivación: Potencial electrostático

En presencia de una carga (o distribución de cargas), el potencial electrostático satisface la *ecuación de Poisson*

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}, \quad (8.3)$$

donde  $\rho(x)$  es la distribución de cargas en la región considerada.

A partir de la ley de Coulomb, sabemos que podemos describir el potencial eléctrico de una distribución de cargas como

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV', \quad (8.4)$$

donde hemos hecho la elección tradicional de que el potencial de referencia se anula en el infinito.

Observamos que, si definimos nuestra *función de Green* como

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (8.5)$$

podemos reescribir (8.4) como

$$\phi(x) = \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') \left( -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} \right) dV'. \quad (8.6)$$

Esta función de Green debe satisfacer la ecuación (8.2), que en este caso es dada por

$$\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (8.7)$$

De esta forma, observamos que

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) = \nabla^2 \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') \left( -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} \right) dV' \quad (8.8)$$

$$= \int_V [\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}')] \left( -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} \right) dV' \quad (8.9)$$

$$= \int_V \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \left( -\frac{\rho(\vec{x}')}{\epsilon_0} \right) dV' \quad (8.10)$$

$$= -\frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}, \quad (8.11)$$

recuperando la ecuación original.

## 8.2. Encontrando soluciones mediante funciones de Green

Consideremos una EDP *lineal e inhomogénea* de la forma

$$\mathcal{L}\psi(\vec{x}) = (\nabla \cdot (p(\vec{x})\nabla) + q(\vec{x})) \psi(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad (8.12)$$

donde  $p(\vec{x})$  y  $q(\vec{x})$  son funciones conocidas.

Para resolver la EDP, encontramos primero la función de Green que satisface la expresión (8.2), junto a una solución *particular* de la ecuación (8.12) en el punto  $\vec{x}'$ , podemos hallar una solución general del problema, la que será dada por

$$\psi(\vec{x}) = \oint_{\partial V} p(\vec{x}) [\psi(\vec{x}') \nabla' G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \nabla' \psi(\vec{x}')] \cdot d\vec{S}' + \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') f(\vec{x}') dV', \quad (8.13)$$

donde  $\nabla'$  indica que el operador actúa sobre las componentes de  $\vec{x}'$ . Aquí,  $V$  denota al dominio en que la solución  $\psi(\vec{x})$  es válida, y  $\partial V$  es su frontera.

¿Cómo sabemos que esta ecuación es válida? Resolvamos la primera integral. Notemos que podemos utilizar el teorema de Gauss, de modo que

$$I = \oint_{\partial V} p(\vec{x}) [\psi(\vec{x}') \nabla' G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \nabla' \psi(\vec{x}')] \cdot d\vec{S}' \quad (8.14)$$

$$= \int_V \nabla' \cdot [p(\vec{x}') \psi(\vec{x}') \nabla' G(\vec{x}, \vec{x}') - p(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') \nabla' \psi(\vec{x}')] dV' \quad (8.15)$$

$$= \int_V [\psi(\vec{x}') \nabla' \cdot [p(\vec{x}') \nabla' G(\vec{x}, \vec{x}')] + \nabla \psi(\vec{x}') \cdot (p(\vec{x}') \nabla' G(\vec{x}, \vec{x}')) - G(\vec{x}, \vec{x}') \nabla' \cdot [p(\vec{x}') \nabla' \psi(\vec{x}')] - \nabla \psi(\vec{x}') \cdot (p(\vec{x}') \nabla' G(\vec{x}, \vec{x}'))] dV' \quad (8.16)$$

$$= \int_V [\psi(\vec{x}') (\mathcal{L}' G(\vec{x}, \vec{x}')) - G(\vec{x}, \vec{x}') (\mathcal{L}' \psi(\vec{x}'))] dV' \quad (8.17)$$

$$= \int_V [\psi(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') f(\vec{x}')] dV' \quad (8.18)$$

$$= \psi(\vec{x}) - \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') f(\vec{x}') dV', \quad (8.19)$$

donde hemos definido un nuevo operador diferencial  $\mathcal{L}'$  que actúa sobre las componentes primadas, tal que  $\mathcal{L}' \psi(\vec{x}') = f(\vec{x}')$ .

¿Cómo hallamos una solución en el punto  $\vec{x}'$ ? Haciendo uso de las condiciones de borde del problema.

**Si las condiciones de borde son de tipo Dirichlet**, sabemos el valor de  $\psi(\vec{x}')$  en el borde  $\partial V$  de la región en que nos encontramos, por lo que podremos determinar el primer término de la integral sobre  $\partial V$  en (8.14), pero el segundo, que depende de la derivada de  $\psi(\vec{x}')$ , no estará determinado. Por ello, escogeremos *de forma conveniente* una función de Green que se anule en los bordes, es decir,

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = 0, \quad \forall \vec{x}' \in \partial V. \quad (8.20)$$

En este caso, la solución general tendrá la forma

$$\psi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') f(\vec{x}') dV + \oint_{\partial V} p(\vec{x}') \psi(\vec{x}') \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} dS', \quad (8.21)$$

donde  $\partial f / \partial n' = (\nabla' f) \cdot \hat{n}$ , con  $\hat{n}$  un vector normal a la superficie.

Sin embargo, muchas veces puede ser difícil hallar directamente una función de Green que satisfaga a la vez (8.20) y (8.2). Un ejemplo sencillo de esto es el operador laplaciano, cuando  $\mathcal{L} = \nabla^2$ . En este caso, es útil buscar una solución de la forma

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = F(\vec{x}, \vec{x}') + H(\vec{x}, \vec{x}'), \quad (8.22)$$

donde  $F(\vec{x}, \vec{x}')$  satisface la ecuación (8.2) pero no necesariamente la condición de borde (8.20), mientras que  $H(\vec{x}, \vec{x}')$  satisface la ecuación *homogénea del problema* (es decir, donde no hay

funciones fuente) en el interior de la región  $V$ , pero su valor en  $\partial V$  es tal que, sumada a  $F(\vec{x}, \vec{x}')$ , resulta en que  $G(\vec{x}, \vec{x}') = 0$  en el borde  $\partial V$ . Cuando seguimos este procedimiento, la función  $F(\vec{x}, \vec{x}')$  es denominada **solución fundamental**.

**Ejemplo 8.2.1.** (Riley, Sección 21.5.3) Encuentre la solución fundamental a la ecuación de Poisson en tres dimensiones que tiende a cero cuando  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ .

**Si las condiciones de borde son de tipo Neumann**, conocemos el valor de la derivada  $\frac{\partial \psi}{\partial n}(\vec{x}')$  en el borde  $\partial V$  de la región en que nos encontramos, por lo que podemos determinar el segundo término de la integral (8.14), mas no así el primero, por lo que escogemos una función de Green que satisfaga

$$\frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} = 0, \quad \forall \vec{x}' \in \partial V. \quad (8.23)$$

En este caso, la solución general tendrá la forma

$$\psi(\vec{x}) = \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') f(\vec{x}') dV - \oint_{\partial V} p(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') \frac{\partial \psi(\vec{x}')}{\partial n'} dS'. \quad (8.24)$$

Lamentablemente, en general *no es posible* encontrar una función de Green que satisfaga la condición (8.23), siendo nuevamente un ejemplo de esto el operador laplaciano  $\nabla^2$ , ya que las funciones de Green deben satisfacer la **condición de consistencia**

$$\oint_{\partial V} \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} dS' = \int_V \nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') dV' = \int_V \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') dV = 1, \quad (8.25)$$

donde en el último paso hemos asumido que  $\vec{x} \in V$ .

En el caso de este operador, busquemos cómo podemos definir una función de Green adecuada.

Una vez descartada la solución más sencilla posible ( $\frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} = 0$ ), escogemos la segunda más sencilla, igualar la derivada a una constante,

$$\frac{\partial G(\vec{x}, \vec{x}')}{\partial n'} = C, \quad \forall \vec{x}' \in \partial V. \quad (8.26)$$

Para hallar el valor de esta constante, hacemos uso de la *condición de consistencia*, de modo que el caso más sencillo será suponer que  $C = 1/\text{Área}(\partial V)$ .

**Importante.** Una misma EDP puede dar origen a diferentes funciones de Green, pues estas dependen también de las condiciones de contorno.

### 8.3. Simetría de las funciones de Green

Cuando tenemos el caso particular en que  $\mathcal{L} = \nabla^2$ , la función de Green (8.5) es simétrica bajo el intercambio de argumentos, es decir,  $G(\vec{x}, \vec{x}') = G(\vec{x}', \vec{x})$ . Podemos buscar cuál es la

condición general que permite que esto ocurra, escogiendo  $\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{x}'', \vec{x})$ , de modo que, según la expresión (8.13),

$$G(\vec{x}'', \vec{x}) = \int_V G(\vec{x}, \vec{x}') \delta(\vec{x}'' - \vec{x}') dV' + \oint_{\partial V} p(\vec{x}') [G(\vec{x}'', \vec{x}') \nabla' G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \nabla' G(\vec{x}'', \vec{x}')] \cdot d\vec{S}' \quad (8.27)$$

$$= G(\vec{x}, \vec{x}'') + \oint_{\partial V} p(\vec{x}') [G(\vec{x}'', \vec{x}') \nabla' G(\vec{x}, \vec{x}') - G(\vec{x}, \vec{x}') \nabla' G(\vec{x}'', \vec{x}')] \cdot d\vec{S}', \quad (8.28)$$

con lo que vemos que la función de Green será simétrica siempre y cuando la integral de superficie se anule en la frontera. Esto ocurre, típicamente, para condiciones de tipo Dirichlet.

## 8.4. Algunas funciones de Green comunes

### 8.4.1. Ecuación de Laplace

### 8.4.2. Ecuación de Helmholtz

## 8.5. Método de las imágenes

Anteriormente mencionamos que podemos hallar la función de Green para un problema con condiciones de Dirichlet hallando la solución fundamental y una solución que produzca que  $G(\vec{x}, \vec{x}') = 0$  en  $\partial V$ , como establecimos en (8.22). Para ello, podemos hacer uso del **método de las imágenes**, en el cual hemos de considerar *copias* de nuestra solución fundamental que representen *fuentes* ubicadas en el exterior de nuestra región  $V$ . Para ello, seguiremos el siguiente procedimiento,

1. Para una fuente singular  $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$  dentro de la región  $V$ , añadiremos fuentes imágenes *fuera* de  $V$ , donde las posiciones  $\vec{x}_n$  e intensidades  $q_n$  de estas fuentes las podremos determinar a futuro, de modo que las fuentes externas se pueden expresar como

$$\sum_{n=1}^N q_n \delta(\vec{x} - \vec{x}_n), \quad \vec{x}_n \notin V. \quad (8.29)$$

2. Ya que todas las imágenes se encuentran en el exterior de  $V$ , la solución fundamental que corresponde a cada una de las fuentes deberá satisfacer la ecuación de Laplace *dentro* de  $V$ . Por ello, podemos suponer que cada imagen tiene asociada la misma *solución fundamental* que la fuente en el interior de  $V$ , con lo que la función de Green tomará la forma

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = F(\vec{x}, \vec{x}') + \sum_{n=1}^N q_n F(\vec{x}, \vec{x}_n). \quad (8.30)$$

3. Ajustamos las posiciones  $\vec{x}_n$  e intensidades  $q_n$  de las imágenes de modo que las condiciones de contorno se satisfagan en  $S$ . En el caso de las condiciones de Dirichlet, esto es exigir que  $G(\vec{x}, \vec{x}') = 0$ , para cualquier  $\vec{x}' \in \partial V$ .

4. Por último, podemos usar la función de Green hallada para encontrar la solución, sujeta a las condiciones de Dirichlet, que satisfaga (8.21).

En general, no es tarea sencilla encontrar las posiciones e intensidades correctas para cualquier problema, pero sí lo es para ciertos problemas con geometrías simples. Particularmente, este método es útil para problemas en los que los bordes sean *líneas rectas* (problema bidimensional) o *planos* (problema tridimensional), pues en esos casos simplemente supondremos que estos actúan como espejos, de modo que la fuente *verdadera* se refleja simétricamente en este espejo.

**Ejemplo 8.5.1.** (Riley, Sección 21.5.3) Resuelva la ecuación de Laplace en la región bidimensional  $|\vec{x}| \leq a$  sujeta a la condición de contorno  $u = f(\phi)$  en  $|\vec{x}| = a$ .

También es útil mencionar que es válido utilizar el método de las imágenes al trabajar con condiciones de Neumann, donde el procedimiento descrito anteriormente sigue siendo el mismo, pero utilizando las condiciones de Neumann para establecer nuestras imágenes.

**Ejemplo 8.5.2.** (Riley, Sección 21.5.4) Resuelva la ecuación de Laplace en la región bidimensional  $|\vec{x}| \leq a$  sujeta a la condición de contorno  $\partial u / \partial n = f(\phi)$  en  $|\vec{x}| = a$ , con  $\int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi = 0$ , como requiere la condición de consistencia.

## Introducción a los Tensores Cartesianos

Llegando al último capítulo del curso, nos desviamos un poco de la noción de que este curso se dedica a enseñar métodos matemáticos que pueden ser útiles en Física, para en su lugar introducir cantidades y conceptos con la misma utilidad.

Una de las nociones más importantes que tenemos en física clásica es el hecho de que *los fenómenos físicos son los mismos, y no deben cambiar según el observador*, más allá de que las componentes de las cantidades que los describen puedan hacerlo. Particularmente, nos centraremos en las *transformaciones ortogonales* de un sistema coordenado, referidas de forma más común como **rotaciones**.

Por ejemplo, un vector que describe la posición de un objeto en función del tiempo puede ser diferente según el sistema de coordenadas en que se lo describa, pero el movimiento *físico* seguirá siendo el mismo.

Antes de entrar más de lleno en la discusión, recordemos e introduzcamos algunas definiciones.

**Definición 9.1.** Se denomina **delta de Kronocker** al elemento  $\delta_{ij}$ , definido en un espacio vectorial de  $n$  dimensiones como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} . \quad (9.1)$$

Este elemento puede representarse de forma matricial como la matriz identidad del espacio de dimensión  $n$ .

**Definición 9.2.** Sea un conjunto de vectores unitarios  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^n$  de un espacio  $n$ -dimensional. Diremos que este forma una **base ortonormal** si al realizar el producto escalar entre elementos del conjunto, se cumple la relación

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} , \quad (9.2)$$

|| donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker.

**Definición 9.3.** Dado un sistema coordenado en un espacio de  $n$  dimensiones, podemos definir el **vector posición**  $\vec{x}$ , que une el origen del sistema con punto con coordenadas  $x_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$  como

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \hat{e}_i, \quad (9.3)$$

donde las **componentes del vector** en la base  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^n$  puede expresarse como

$$x_i = \vec{x} \cdot \hat{e}_i. \quad (9.4)$$

Más allá de que el vector posición es aquel que tiene un sentido *físico* a partir del cual hacer las definiciones, podemos descomponer *cualquier* vector en la base  $\{\hat{e}_i\}_{i=1}^n$  en términos de sus respectivas componentes, sin importar la cantidad que este pueda representar.

Una vez introducidas estas nociones, podemos definir un nuevo sistema coordenado, que llamaremos  $x'_i$  y cuya base es  $\{\hat{e}'_i\}_{i=1}^n$ , que corresponde a una *rotación* del sistema  $x_i$  definido anteriormente, como se ve en la figura X.

Respecto de esta nueva base, un vector  $\vec{v}$  cualquiera puede ser descompuesto en sus componentes  $v'_i$  en la base  $\{\hat{e}'_i\}_{i=1}^n$ ,

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n v'_i \hat{e}'_i. \quad (9.5)$$

Dado que, si bien dan origen a sistemas de coordenadas diferentes, ambas bases se encuentran en el mismo espacio vectorial, ¿Cómo podemos relacionar ambas bases entre sí? Para ello, haremos uso de una **matriz de transformación**, definida como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_1 & \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_2 & \dots & \hat{e}_1 \cdot \hat{e}'_n \\ \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_1 & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_2 & \dots & \hat{e}_2 \cdot \hat{e}'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{e}_n \cdot \hat{e}'_1 & \hat{e}_n \cdot \hat{e}'_2 & \dots & \hat{e}_n \cdot \hat{e}'_n \end{pmatrix}. \quad (9.6)$$

De este modo,



## **9.1. Covarianza y contravarianza**

### **9.1.1. *Convenio de suma de Einstein***

## **9.2. Tensores Cartesianos**

## **9.3. Operaciones con tensores**

## **9.4. Pseudovectores y pseudotensores**



# Un breve repaso: Espacios vectoriales y espacio de funciones

## A.1. Definiciones

**Definición A.1.** Un *espacio vectorial* sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$  es una terna  $(V, +, \cdot)$  formada por un **conjunto no vacío**  $V$ , una **operación de suma**  $+: V \times V \rightarrow V$  y una **operación de producto escalar**  $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ , que satisface ocho propiedades:

- |  |   |
|--|---|
| <b>EV1</b> (Asociatividad) $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ . | <b>EV5</b> $a(b\vec{x}) = (ab)\vec{x}$ .                                    |
| <b>EV2</b> (Elemento neutro) $\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$ .             | <b>EV6</b> (Distributividad) $a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$ . |
| <b>EV3</b> (Elemento opuesto) $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ .                             | <b>EV7</b> (Distributividad) $(a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$ .       |
| <b>EV4</b> (Conmutatividad) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ .                        | <b>EV8</b> $1\vec{x} = \vec{x}$ .   |

Denotemos por  $\mathcal{C}_0[a, b]$  al conjunto de funciones complejas continuas de una variable real  $t \in [a, b]$ .

Notemos que claramente se cumple:

$$f, g \in \mathcal{C}_0[a, b] \Rightarrow f + g \in \mathcal{C}_0[a, b]$$

y

$$f \in \mathcal{C}_0[a, b] \text{ y } \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{C}_0[a, b].$$

**Definición A.2.** Una función  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es **seccionalmente continua** si  $[a, b]$  tiene una partición finita  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  tal que  $f$  es continua y acotada en cada intervalo abierto  $(t_i, t_{i+1})$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ .

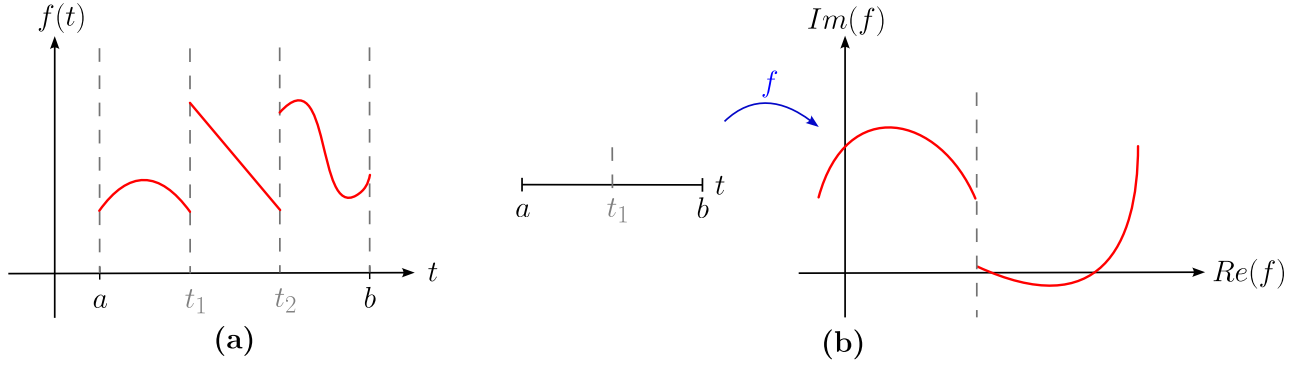


Figura A.1: En (a) una función de la forma  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y en (b) una función de la forma  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , ambas seccionalmente continuas.

Denotaremos por  $\mathcal{C}[a, b]$  al conjunto de las funciones complejas seccionalmente continuas.

Geoméricamente,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es una curva en el plano complejo y la condición de seccionalmente continua se puede apreciar en la figura A.1.

Podemos afirmar que los conjuntos  $\mathcal{C}_0[a, b]$  y  $\mathcal{C}[a, b]$  forman espacios vectoriales sobre el cuerpo de los complejos. Además,  $\mathcal{C}_0[a, b] \subset \mathcal{C}[a, b]$ .

**Definición A.3.** Consideremos dos funciones  $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$ . Definimos su **producto escalar**<sup>1</sup> como

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g^*(t) dt$$

**Proposición A.1** (Propiedades del producto escalar). Sean  $f, g, h \in \mathcal{C}[a, b]$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

- $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*$
- $\langle f, g + h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$
- $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$
- $\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$
- $\langle f, \lambda g \rangle = \lambda^* \langle f, g \rangle$
- Si  $f \neq 0$ , entonces  $\langle f, f \rangle > 0$

**Definición A.4.** Sea  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ . Definimos su **norma** como

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \in \mathbb{R}.$$

**Proposición A.2.** Sean  $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$  y  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

- $\|f\| \geq 0$
- $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
- $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$  (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)
- $\|f \pm g\| \leq \|f\| + \|g\|$  (Desigualdad triangular)
- Si  $f \neq 0$ , entonces  $\|f\| > 0$ .

**Demostración.** Demostraremos solo la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la triangular.

■ **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:**

Sea  $\lambda \in \mathbb{C}$  arbitrario,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\lambda f + g\|^2 &= \langle \lambda f + g, \lambda f + g \rangle = \langle \lambda f, \lambda f \rangle + \langle \lambda f, g \rangle + \langle g, \lambda f \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \lambda \lambda^* \|f\|^2 + \lambda \langle f, g \rangle + \lambda^* \langle g, f \rangle + \|g\|^2. \end{aligned}$$

Siendo  $\lambda$  arbitrario, consideremos entonces

$$\lambda = -\frac{\langle g, f \rangle}{\|f\|^2} \Rightarrow \lambda^* = -\frac{\langle f, g \rangle}{\|f\|^2}, \quad \|f\| \neq 0.$$

Luego,

$$0 \leq \frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\|f\|^4} \|f\|^2 - 2 \frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\|f\|^2} + \|g\|^2 = -\frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\|f\|^2} + \|g\|^2.$$

Lo que implica

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \cdot \|g\|^2 \Rightarrow \boxed{|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|}$$

Si suponemos que  $\|f\| = 0$ ,  $f \equiv 0$  y la desigualdad se demuestra trivialmente.

■ **Desigualdad triangular:** De la definición de norma

$$\begin{aligned} \|f \pm g\|^2 &= \langle f \pm g, f \pm g \rangle = \langle f \pm g, f \rangle \pm \langle f \pm g, g \rangle \\ &= \langle f, f \rangle \pm \langle f, g \rangle^* \pm \langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \|f\|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(\langle f, g \rangle) + \|g\|^2. \end{aligned}$$

Como  $\pm \operatorname{Re}(z) \leq |z|$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ , obtenemos que

$$\|f \pm g\|^2 \leq \|f\|^2 + 2|\langle f, g \rangle| + \|g\|^2.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Shwarz:

$$\|f \pm g\|^2 \leq \|f\|^2 + 2\|f\| \cdot \|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2 \Rightarrow \boxed{\|f \pm g\| \leq \|f\| + \|g\|}$$

**Definición A.5.** El conjunto de funciones  $\{\varphi_n(t)\}_{n=0,\pm 1,\pm 2,\dots}$  se dice **ortogonal** si

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = 0, \quad \text{para } n \neq m.$$

Si además,  $\|\varphi_n\| = 1$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , se dice que es un conjunto **ortonormal**, entonces podemos escribir

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{nm}, \quad \forall n, m.$$

**Ejemplo A.1.1.** Como ejemplo de funciones ortonormales tenemos las  $c_n(t) \in \mathcal{C}_0[-\pi, \pi]$  con  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  que se definen como

$$c_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}.$$

En efecto, para  $n \neq m$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \langle c_n, c_m \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{i}{n-m} e^{i(n-m)t} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{i}{2\pi(m-n)} [e^{in\pi} + e^{-im\pi} - e^{-in\pi} - e^{im\pi}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, para  $n = m$ :

$$\begin{aligned} \langle c_n, c_n \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-n)t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 1. \\ \therefore \langle c_n, c_m \rangle &= \delta_{nm}. \end{aligned}$$

**Ejemplo A.1.2.** Pruebe que el conjunto de funciones

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

es ortonormal en  $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ .

**Solución:** Probemos primero la normalización.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 dt &= 1, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(nt)}{\pi} dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2nt) dt = 1, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(nt)}{\pi} dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2nt) dt = 1.\end{aligned}$$

Para la ortogonalidad, tengamos en cuenta las siguientes identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)], \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)].\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(nt) dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}n} \sin(nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin(nt) dt &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}n} \cos(nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \cos(nt) \sin(mt) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)t + \sin(m-n)t dt = 0; \quad n, m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $m \neq n$ , se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \cos(nt) \cos(mt) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)t + \cos(n+m)t dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{n-m} \sin(n-m)t + \frac{1}{n+m} \sin(n+m)t \right]_{-\pi}^{\pi} = 0. \\ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \sin(nt) \sin(mt) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)t - \cos(n+m)t dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{n-m} \sin(n-m)t - \frac{1}{n+m} \sin(n+m)t \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

es ortonormal en  $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ .

**Definición A.6.** Sea  $S = \{\varphi_n(t)\}_{n=0,\pm 1,\pm 2,\dots}$ . Se dice que  $S$  es **linealmente independiente** (l.i.) si todo subconjunto finito de  $S$  también lo es.

**Proposición A.3.** Todo conjunto ortogonal en  $\mathcal{C}[a, b]$  que no contenga al vector nulo es linealmente independiente.

**Demostración.** Sea  $S = \{\varphi_n(t)\}_{n=0,\pm 1,\pm 2,\dots}$  ortogonal tal que  $\varphi_n \neq 0, \forall n$ . Consideremos el subconjunto finito de  $S$ ,  $S' = \{\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_n}\}$  y además la combinación lineal

$$\alpha_1 \varphi_{i_1} + \alpha_2 \varphi_{i_2} + \dots + \alpha_n \varphi_{i_n} \equiv 0.$$

Entonces, para un cierto  $\varphi_{i_m}$ , se tiene que

$$\langle \alpha_1 \varphi_{i_1} + \alpha_2 \varphi_{i_2} + \dots + \alpha_n \varphi_{i_n}, \varphi_{i_m} \rangle = \alpha_m \underbrace{\|\varphi_{i_m}\|^2}_{\neq 0} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\alpha_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n$$

probando así que  $S'$  es linealmente independiente y en consecuencia  $S$  es l.i.

## A.2. Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Sea  $\{v_n\}_{n=1,2,\dots}$  un conjunto linealmente independiente de funciones en  $\mathcal{C}[a, b]$ . Para construir un conjunto ortonormal debemos seguir los siguientes pasos:

1. Construimos

$$\varphi_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

tal que  $\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = 1$ .

2. Consideramos

$$\bar{\varphi}_2 = v_2 - \langle v_2, \varphi_1 \rangle \varphi_1.$$

Entonces,

$$\langle \bar{\varphi}_2, \varphi_1 \rangle = \langle v_2, \varphi_1 \rangle - \langle v_2, \varphi_1 \rangle \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \langle v_2, \varphi_1 \rangle - \langle v_2, \varphi_1 \rangle = 0.$$

Normalizando,

$$\varphi_2 = \frac{\bar{\varphi}_2}{\|\bar{\varphi}_2\|}.$$

3. En general para un cierto  $n \geq 2$ , consideremos

$$\bar{\varphi}_n = v_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle v_n, \varphi_j \rangle \varphi_j.$$

Entonces, para  $1 \leq i \leq n-1$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \bar{\varphi}_n, \varphi_i \rangle &= \langle v_n, \varphi_i \rangle - \sum_{j=1}^{n-1} \langle v_n, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle \\ &= \langle v_n, \varphi_i \rangle - \sum_{j=1}^{n-1} \langle v_n, \varphi_j \rangle \delta_{ji} \\ &= \langle v_n, \varphi_i \rangle - \langle v_n, \varphi_i \rangle = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, normalizando

$$\varphi_n = \frac{\bar{\varphi}_n}{\|\bar{\varphi}_n\|}.$$

El conjunto de funciones  $\{\varphi_n\}_{n=1,2,\dots}$  construido de la manera anterior es un conjunto ortonormal.

Geoméricamente, el método se encuentra ilustrado en la figura A.2, donde se ha considerado las funciones como vectores y solo el proceso de ortogonalización.

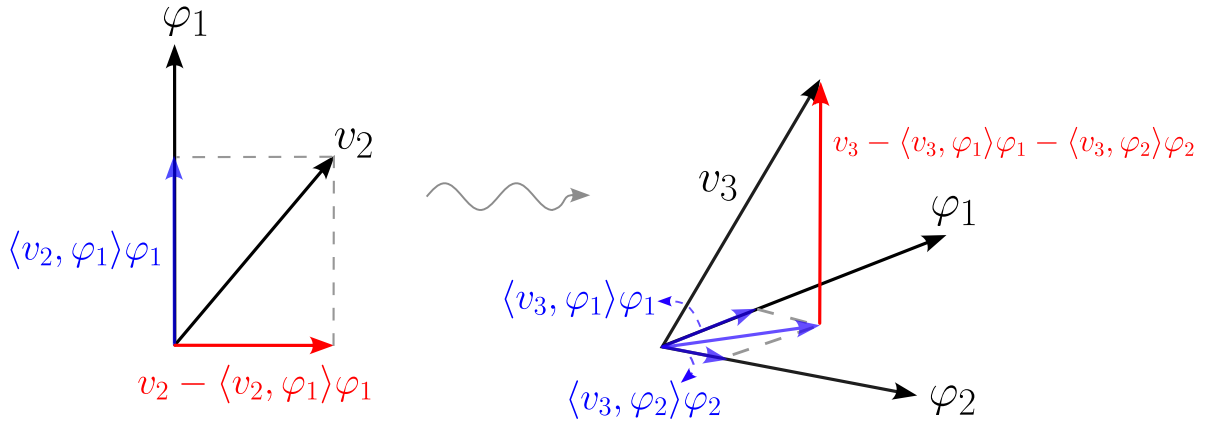


Figura A.2: Proceso de ortogonalización (sin la normalización) de Gram-Schmidt para tres funciones  $\{v_1, v_2, v_3\}$ .



### A.3. Coeficientes de Fourier

Ahora, definiremos un espacio de funciones más general que  $\mathcal{C}[a, b]$ , las funciones cuadrado integrables.<sup>2</sup>

**Definición A.7.** Definimos  $\mathcal{L}^2[a, b]$  como el espacio de funciones  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , tales que

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty.$$

**Teorema A.1.** El espacio  $\mathcal{L}^2[a, b]$  es un espacio vectorial con producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g^*(t) dt$$

y norma

$$\|f\| = \left( \int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

La demostración requiere verificar las propiedades del producto interno (escalar) dadas por A.1, la cual está fuera de los alcances de los contenidos de este apunte.<sup>3</sup>

**Observación:** Las funciones seccionalmente continuas son funciones cuadrado integrables.

Sea  $\{\varphi_\nu(t)\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  un conjunto ortonormal de funciones tales que  $\varphi_\nu \in \mathcal{C}[a, b]$  para todo  $\nu \in \mathbb{N}$ . Sea  $f(t)$  una función cuadrado integrable en  $[a, b]$ . Deseamos aproximar  $f(t)$  por una suma finita

$$S_n(t) = \sum_{\nu=1}^n C_\nu \varphi_\nu(t),$$

de manera que  $\|f - S_n\|$  sea mínimo. Es decir, el objetivo es encontrar los coeficientes  $C_\nu$  de modo que el **error cuadrático medio**

$$M_n(f) = \|f - S_n\|^2 = \int_a^b \left| f(t) - \sum_{\nu=1}^n C_\nu \varphi_\nu(t) \right|^2 dt,$$

<sup>2</sup>La condición de cuadrado integrable es usada, por ejemplo, en Mecánica Cuántica, pues constituye la base para que las funciones de onda describan el comportamiento de los sistemas físicos, consecuencia de la interpretación de Copenhague (probabilística) de la mecánica cuántica.

<sup>3</sup>Para más información puede consultar bibliografía relacionada a la integral de Lebesgue.

sea mínimo. Evaluemos el error cuadrático medio

$$\begin{aligned}
M_n(f) &= \int_a^b \left( f(t) - \sum_{v=1}^n C_v \varphi_v(t) \right) \left( f(t) - \sum_{v=1}^n C_v \varphi_v(t) \right)^* dt \\
&= \int_a^b |f(t)|^2 dt + \sum_{v=1}^n |C_v|^2 \int_a^b |\varphi_v(t)|^2 dt - \sum_{v=1}^n C_v^* \int_a^b f(t) \varphi_v^*(t) dt \\
&\quad - \sum_{v=1}^n C_v \int_a^b f^*(t) \varphi_v(t) dt \\
&= \|f\|^2 + \sum_{v=1}^n |C_v|^2 - \sum_{v=1}^n C_v^* \langle f, \varphi_v \rangle - \sum_{v=1}^n C_v \langle f, \varphi_v \rangle^* + \sum_{v=1}^n |\langle f, \varphi_v \rangle|^2 - \sum_{v=1}^n |\langle f, \varphi_v \rangle|^2 \\
&= \|f\|^2 - \sum_{v=1}^n |\langle f, \varphi_v \rangle|^2 + \sum_{v=1}^n |C_v - \langle f, \varphi_v \rangle|^2 \geq 0,
\end{aligned} \tag{A.1}$$

ya que la norma es mayor o igual a cero siempre. Claramente el mínimo se obtiene cuando  $C_v = \langle f, \varphi_v \rangle$ .

De lo anterior se desprende:

$$\sum_{v=1}^n |C_v|^2 = \sum_{v=1}^n |\langle f, \varphi_v \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \quad \textbf{Desigualdad de Bessel.} \tag{A.2}$$

Como el número a la derecha de la desigualdad es independiente de  $n$ , la suma está acotada superiormente. Siendo todos sus términos no negativos, tenemos que

$$\sum_{v=1}^{\infty} |C_v|^2 < \infty \Rightarrow \lim_{v \rightarrow +\infty} |C_v|^2 = 0 \Rightarrow \lim_{v \rightarrow +\infty} \langle f, \varphi_v \rangle = 0.$$

Luego,

$$\sum_{v=1}^{\infty} |C_v|^2 = \sum_{v=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_v \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

**Definición A.8.** Los coeficientes  $\langle f, \varphi_v \rangle$  son llamados los **coeficientes de Fourier** de  $f$  respecto al sistema ortonormal  $\{\varphi_v\}_{v=1,2,\dots}$ . La serie  $\sum_{v=1}^{\infty} C_v \varphi_v(t)$  se llama **serie generalizada de Fourier** de  $f$  relativa al sistema ortonormal  $\{\varphi_v\}_{v=1,2,\dots}$ .

**Definición A.9.** Si un conjunto de funciones  $\{\varphi_v\}$  en cierto espacio permite aproximar en la norma (en media), con sus combinaciones lineales, cualquier función  $f$  del espacio tan bien como se quiera, es decir,

$$\left\| f - \sum_v C_v \varphi_v \right\| < \varepsilon, \quad \text{para } \varepsilon \text{ arbitrario,}$$

|| se dice que es un **conjunto completo** respecto a este espacio.

Sean  $C_v = \langle f, \varphi_v \rangle$  los coeficientes de Fourier de  $f$  respecto del conjunto ortonormal  $\{\varphi_v\}$ , entonces la completitud de este conjunto se puede expresar por

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{v=1}^n C_v \varphi_v \right\| = 0,$$

es decir,

$$f \sim \sum_{v=1}^{\infty} C_v \varphi_v.$$

Lo anterior NO implica que  $f(t) = \sum_{v=1}^{\infty} C_v \varphi_v(t)$  en algún otro sentido (convergencia puntual o uniforme). Si

$$f \sim \sum_{v=1}^{\infty} C_v \varphi_v,$$

entonces de la relación (A.1), tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{v=1}^n C_v \varphi_v \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \|f\|^2 - \sum_{v=1}^n |C_v|^2 \right\} = \|f\|^2 - \sum_{v=1}^{\infty} |C_v|^2 = 0.$$

Lo que implica que

$$\|f\|^2 = \sum_{v=1}^{\infty} |C_v|^2 \quad \textbf{Igualdad de Parseval} \quad (\text{A.3})$$

**Observación:** El conjunto ortogonal completo  $\{\varphi_v\}$  se le conoce también como **base ortonormal** del espacio de funciones en cuestión.

**Ejemplo A.3.1.** El conjunto  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es ortonormal completo respecto a  $[-\pi, \pi]$ .

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \|f\|^2.$$

|| **Teorema A.2.** Si el conjunto ortonormal  $\{\phi_v\}$  es completo respecto a  $\mathcal{C}[a, b]$ , entonces en  $\mathcal{C}[a, b]$  la única función ortonormal a todo  $\phi_v$  es  $f(t) \equiv 0$ .

**Demostración.** Sea  $f$  una función ortonormal a todo  $\varphi_\nu$ , si  $f(t_0) \neq 0$  para algún  $t_0 \in [a, b]$ , la función también es no nula en una vecindad en torno a  $t_0$  (por continuidad), por lo tanto

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt = \|f\|^2 > 0,$$

pero usando la igualdad de Parseval, tenemos para la norma de  $f$  que

$$\|f\|^2 = \sum_\nu |C_\nu|^2 = \sum_\nu |\langle f, \varphi_\nu \rangle|^2 > 0,$$

es decir,  $f$  no es ortogonal a todos los  $\varphi_\nu$ , lo cual es una contradicción. Luego,  $f$  debe ser idénticamente nula.

**Teorema A.3.** Sea  $\{S_n(t) \in \mathcal{C}_0[a, b]\}$ ; si existe  $F(t)$  tal que la sucesión  $S_n(t) = \sum_{\nu=1}^n C_\nu \varphi_\nu(t)$  converge uniformemente a  $F(t)$ , entonces  $F(t)$  es continua, es decir,  $F(t) \in \mathcal{C}_0[a, b]$ .

**Demostración.** Por convergencia uniforme, dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$  tal que

$$n \geq N \wedge \forall t \in [a, b] \Rightarrow |S_n(t) - F(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Además, por la continuidad de  $S_n$  para todo  $t_0 \in [a, b]$ , existe  $\delta(\varepsilon, N, t_0)$  tal que

$$\forall t \in [a, b] : 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |S_N(t) - S_N(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b] : 0 < |t - t_0| < \delta &\Rightarrow |F(t) - F(t_0)| \\ &= |F(t) - S_n(t) + S_n(t) - S_n(t_0) + S_n(t_0) - f(t_0)| \\ &\leq |F(t) - S_n(t)| + |S_n(t) - S_n(t_0)| + |S_n(t_0) - F(t_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Este teorema nos asegura que una función discontinua no puede ser aproximada uniformemente por una familia de funciones continuas (por ejemplo, las funciones sinusoidales).

**Teorema A.4.** Si dos funciones  $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$  tienen igual expansión en base completa (en el sentido de aproximación en la norma), entonces  $f(t) = g(t)$ .

**Demostración.** Sea

$$S(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \langle f, \varphi_{\nu} \rangle \varphi_{\nu}(t)$$

la aproximación en la norma para  $f$  y  $g$ . Luego,

$$\|f - S\| = \|g - S\| = 0.$$

Así,

$$\|f - g\| = \|f - S + S - g\| \leq \|f - S\| + \|S - g\| = 0 + 0 = 0 \Rightarrow f = g.$$

## Referencias

- [1] R. P. Agarwal y D. O'Regan. *Ordinary and Partial Differential Equations: With Special Functions, Fourier Series, and Boundary Value Problems*. Springer, 2009.
- [2] T. M. Apostol. *Análisis matemático*. 2.<sup>a</sup> ed. Editorial Reverté, 1996.
- [3] T. M. Apostol. *Calculus*. 2.<sup>a</sup> ed. Vol. 2. Editorial Reverté, 1985.
- [4] G. Arfken y H. Weber. *Mathematical methods for physicists*. 6.<sup>a</sup> ed. Elsevier Academic Press, 2005.
- [5] M. Bôcher. «On Gibb's Phenomenon». En: *Math* 1914.144 (1914), págs. 41-47. DOI: <https://doi.org/10.1515/crll.1914.144.41>.
- [6] J. W. Brown y R. V. Churchill. *Fourier series and boundary value problems*. 5.<sup>a</sup> ed. McGraw-Hill, 1993.
- [7] E. Butkov. *Mathematical Physics*. 1.<sup>a</sup> ed. Addison-Wesley, 1968.
- [8] E. A. Coddington. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. 5.<sup>a</sup> ed. Dover Publications, 1961.
- [9] R. Courant y D. Hilbert. *Methods of mathematical physics*. 1.<sup>a</sup> ed. Vol. 1. Interscience Publishers, 1937.
- [10] M. Recarte F. Andino y M. Spilsbury. «La función delta de Dirac». En: *Revista de la escuela de física* 2.1 (2014), págs. 60-61. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/648b/67463802aae055392666c8f305a2b23c5977.pdf>.
- [11] S. Hassani. *Mathematical physics: a modern introduction to its foundations*. Springer, 1999.
- [12] H. Hochstadt. *The functions of mathematical physics*. Dover Publications, 1986.
- [13] H. P. Hsu. *Análisis de Fourier*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
- [14] M.P. Hobson K. F. Riley y S. J. Bence. *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. Cambridge University Press, 2006.
- [15] Serge Lang. *Analysis I*. Addison-Wesley, 1968. Cap. 10 y 13.
- [16] J. E. Marsden y M. J. Hoffman. *Análisis clásico elemental*. 2.<sup>a</sup> ed. Addison-Wesley Iberoamericana, 1998.
- [17] Sean Mauch. *Introduction to Methods of Applied Mathematics or Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. 2004. URL: <http://www.its.caltech.edu/~sean>.

- [18] V. Muñoz y J. Rogan. *Métodos de la física matemática II*. Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, 2009.
- [19] E. D. Rainville. *Special functions*. The Macmillan company, 1960.
- [20] R. Rodríguez del Río y E. Zuazua. «Series de Fourier y fenómeno de Gibbs». En: *CUBO, A Mathematical Journal* 5.2 (2003), págs. 185-224. URL: <http://revistas.ufro.cl/ojs/index.php/cubo/article/view/1695>.
- [21] G. F. Rubilar. *Física matemática II*. Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Concepción, 2019. URL: <https://github.com/gfrubi/FM2>.
- [22] J. Ruiz. *Series de Fourier*. Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Concepción, 2012.
- [23] Murray R. Spiegel, John Liu y Seymour Lipschutz. *Mathematical handbook of formulas and tables*. eng. 3. ed. Schaum's outline series. New York: McGraw-Hill, 2009. ISBN: 978-0-07-154855-7.
- [24] G. P. Tolstov. *Fourier Series*. Dover Publications, 1962.