

# Notas de Aula - F 540

Felippe Barbosa

23 de Março de 2017

# Capítulo 1

## Transformada de Fourier

### 1.1 Série de Fourier

Uma tensão AC com uma única frequência é descrita como

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi), \quad (1.1)$$

onde  $\omega = 2\pi f$  é a *frequência angular*,  $f$  é a frequência,  $V_0$  a amplitude e  $\phi$  é a fase. A função  $V(t)$  é periódica com período  $T = 1/f$ , pois

$$V(t) = V(t + T). \quad (1.2)$$

Uma senóide como  $V(t)$  é claramente periódica, porém há outros tipos de funções periódicas, cuja definição é dada pela equação (1.2). Se a tensão é composta por várias componentes de frequência,

$$V(t) = V_{DC} + \sum_{n=1}^N V_n \cos(\omega_n t - \phi_n) \quad (1.3)$$

A condição de periodicidade (1.2) corresponde a

$$V_{DC} + \sum_{n=1}^N V_n \cos(\omega_n t - \phi_n) = V_{DC} + \sum_{n=1}^N V_n [\cos(\omega_n t - \phi_n) \cos(\omega_n T) - \sin(\omega_n t - \phi_n) \sin(\omega_n T)] \quad (1.4)$$

O que é chamada de *condições periódicas de contorno*. Como a relação (1.4) deve ser válida para todas as frequências,

$$\cos(\omega_n T) = 1 \quad \text{e} \quad \sin(\omega_n T) = 0 \quad \implies \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T} \quad \text{com} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.5)$$

Desta forma, as combinações de frequências distintas são periódicas somente se estas frequências são múltiplas da frequência fundamental  $f = 1/T$ , ainda que haja uma parte DC,

$$V(t) = V_{DC} + \sum_{n=1}^N V_n \cos(\omega_n t - \phi_n) \quad \text{tal que} \quad V(t) = V(t + T) \quad (1.6)$$

Este tipo de função descreve diversas situações no laboratório, onde mais de uma componente de frequência colabora para o sinal observado. Note que funções periódicas não são necessariamente contínuas. Funções como as ondas *quadrada* e *dente-de-serra* são descontínuas e são exemplos de *funções seccionalmente contínuas*. O Teorema de Fourier diz que

**Toda função periódica, seccionalmente contínua e de quadrado integrável pode ser escrita como uma combinação de cossenos.**

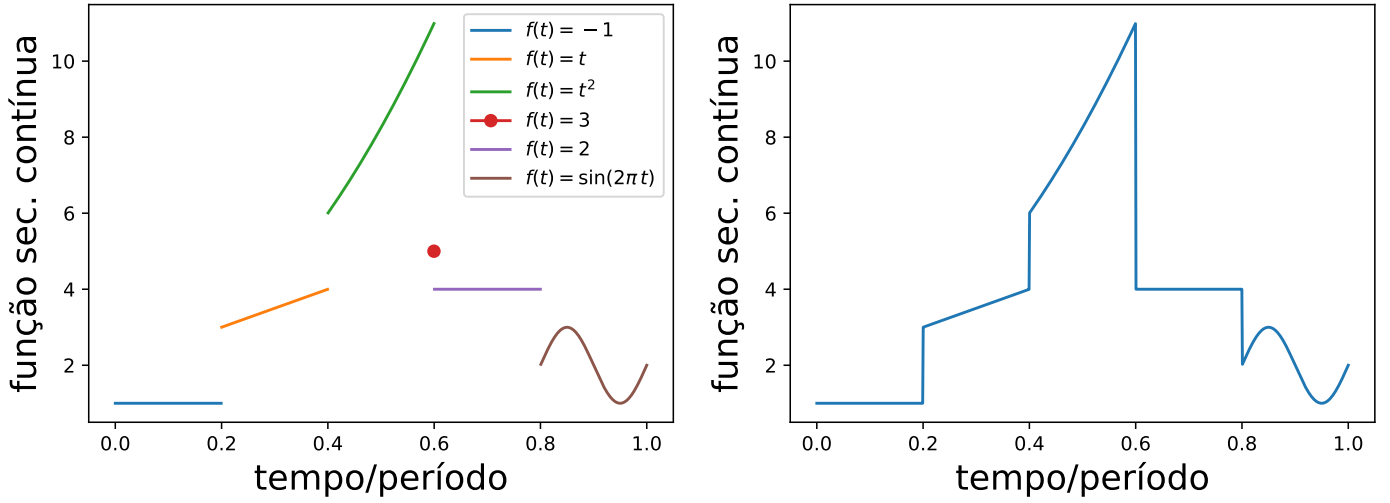


Figura 1.1: Exemplo de função seccionalmente contínua. No gráfico da esquerda, cada cor representa uma função diferente, mas contínua dentro do seu respectivo subdomínio. Note que mesmo havendo descontinuidades, este tipo de função ainda pode ser descrita pela Série de Fourier. No gráfico da direita, a mesma função pode ser vista, porém ligando-se todos os seus pontos.

$$f(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t), \quad \text{onde } \omega_n = \frac{2\pi n}{T} \text{ tal que } \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (1.7)$$

Note que este é um caso limite da função (1.3) se consideramos que  $a_0 \equiv V_{DC}$ ,  $2a_n \equiv V_n \cos(\phi_n)$  e  $2b_n \equiv V_n \sin(\phi_n)$  e tomamos o limite  $N \rightarrow \infty$ . Em muitos lugares, a série  $f(t)$  está definida sem o fator 2 antes da somatória e com  $a_0/2$  no lugar de  $a_0$ . Aqui uso a forma (1.7), por conveniência, pois as expressões de  $a_n$  e  $b_n$  ao final ficam mais simples.

O Teorema de Fourier nos diz que uma imensa gama de sinais periódicos podem ser tratados como superposições de senos e cossenos. Portanto, se sabemos como um determinado circuito linear se comporta para senos e cossenos, podemos saber o seu comportamento para demais funções periódicas se conhecemos os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ . A expansão (1.5) é chamada de *Série de Fourier*.

Para calcularmos as componentes  $a_n$  e  $b_n$ , usamos o fato de que (procure demonstrar as próximas relações)

$$A_{nk} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_n t) \cos(\omega_k t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega_n t) \sin(\omega_k t) dt = \frac{1}{2} \delta_{kn} \quad (1.8)$$

$$\text{e } \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_n t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega_n t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_n t) \sin(\omega_k t) dt = 0 \quad (1.9)$$

onde  $n$  e  $k$  são números naturais não nulos e a função  $\delta_{kn}$  é uma *delta de Kronecker*, definida como

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & \text{para } k = n \\ 0, & \text{para } k \neq n \end{cases} \quad (1.10)$$

Se multiplicamos  $\cos(\omega_k t)$  por  $f(t)$  e integramos os resultados, obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_k t) f(t) dt &= a_0 \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_k t) dt \right] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_k t) \cos(\omega_n t) dt \right] \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_k t) \sin(\omega_n t) dt \right], \end{aligned} \quad (1.11)$$

Se usamos as relações (1.8, 1.9), o primeiro e o terceiro termo entre colchetes não se anulam, sobrando

somente

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_k t) f(t) dt = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_k t) \cos(\omega_n t) dt \right] = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n A_{nk} = a_k. \quad (1.12)$$

Se  $k = 0$ ,  $\cos(\omega_k t) = 1$  e neste caso apenas o primeiro termo de (1.11) não se anula, o que nos fornece  $a_0$ . De forma semelhante, se multiplicamos  $f(t)$  por  $\sin(\omega_n t)$  e integramos, conseguimos obter os coeficientes  $b_k$ , usando argumentos similares aos usados em (1.8 - 1.12). Desta forma, os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são dados por

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_n t) f(t) dt \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega_n t) f(t) dt \quad \text{onde} \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T} \quad (1.13)$$

tal que para  $a_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  e para  $b_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

O poder das séries de Fourier está no fato de que elas não somente garantem que possamos tratar qualquer função periódica como somas ponderadas de senos e cossenos, mas também nos diz quais são os seus respectivos pesos por meio das relações (1.13). Usando a regra de Euler, podemos escrever os senos e cossenos como

$$\cos(\omega_n t) = \frac{1}{2} [e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}] \quad \text{e} \quad \sin(\omega_n t) = \frac{1}{2i} [e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}] \quad (1.14)$$

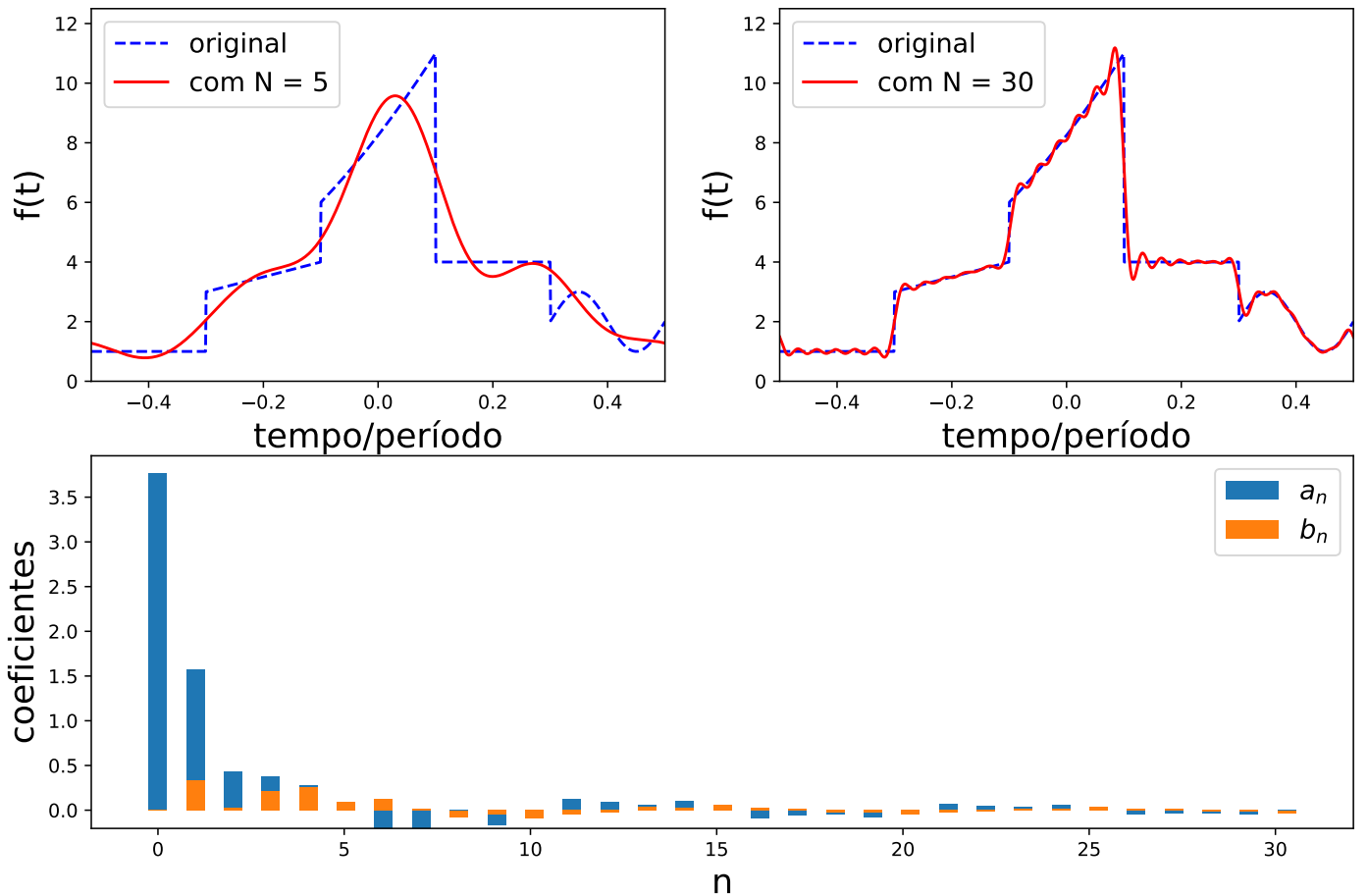


Figura 1.2: Série de Fourier de uma função seccionalmente continua vista nos domínios do tempo (superiores) e da frequência (inferior). Nos gráficos superiores, são mostradas a função  $f(t)$  original em azul tracejado e, em vermelho contínuo, a função  $a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$ , que é uma aproximação da série de Fourier. No gráfico superior esquerdo  $N = 5$  e no superior direito,  $N = 30$ . Note que quanto mais coeficientes usamos, mais o gráfico resultante fica próximo da função original. Na parte inferior, podemos ver os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  usados para construir as curvas superiores,

e com isso podemos reescrever a função  $f(t)$  como

$$f(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} [e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}] + \frac{b_n}{2i} [e^{i\omega_n t} - e^{-i\omega_n t}] \quad (1.15)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n)e^{i\omega_n t} + (a_n + ib_n)e^{-i\omega_n t} \quad (1.16)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}, \quad \text{onde } c_n = \begin{cases} a_n - ib_n, & \text{para } n > 0 \\ a_{-n} + ib_{-n}, & \text{para } n < 0 \\ a_0, & \text{para } n = 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

onde  $c_n$  são número complexos que satisfazem  $c_{-n} = c_n^*$ , o que garante que  $f(t)$  seja real. Também usando a fórmula de Euler, temos que o par Série de Fourier e coeficiente é dado por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad \text{e} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega_n t} f(t) dt \quad \text{onde } \omega_n = \frac{2\pi n}{T} \quad \text{e} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.18)$$

As relações (1.17, 1.18) formam o par de série de Fourier no domínio complexo. Note que os coeficientes  $c_n$  guardam tanto a informação de fase quanto da amplitude da onda.

Existem diversas formas de se medir os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  experimentalmente. A primeira delas é medir a função  $f(t)$  no domínio do tempo e calcular os coeficientes numericamente. Para isto podemos usar as relações (1.13) ou uma série de algoritmos (já implementados em diversas linguagens de programação) conhecidos como *fast fourier transform* (FFT). Estes algoritmos são mais complexos que o método direto, porém são mais rápidos. Também podemos medir os  $a_n$  e  $b_n$  diretamente no domínio da frequência. Para isto, precisamos fazer duas coisas: 1 - isolar uma componente de frequência, 2 - medir  $V_n$  e  $\phi_n$  e, usando o fato de que  $2a_n = V_n \cos(\phi_n)$  e  $2b_n = V_n \sin(\phi_n)$ , calcular  $a_n$  e  $b_n$ . Ambas as etapas são feitas ao mesmo tempo quando usamos as relações (1.13). Esta abordagem é implementada experimentalmente nos *circuitos de demodulação*, usados extensivamente em rádios, *lockins*, analisadores de rede e analisadores de espectro. Se estamos interessados apenas na amplitude de cada componente, podemos usar um filtro passa-banda para calcular as componentes da série de Fourier, pois  $V_n = 2\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2|c_n|$ . Tipicamente, um filtro passa-banda deixa passar as componentes de frequências dentro de sua banda da mesma forma que estas entraram no filtro. Em outras palavras, é como se o filtro não existisse para estas componentes de frequência. Isso tem como consequência o fato de que o filtro tem ganho unitário e defasagem nula para frequências dentro da largura de banda, o que é válido tanto para o filtro passa-banda RLC quanto para uma combinação de passa-alta e passa-baixa. Desta forma, se uma função  $f(t)$  como em (1.18) incide sobre o filtro passa-banda com frequência central de  $\omega_k$ , a saída do filtro será

$$f_{out}(t) = c_k e^{i\omega_k t} = |c_k| e^{i(\omega_k t - \phi_k)} \quad (1.19)$$

Note que esta função é uma senóide, cuja tensão pico-a-pico é proporcional ao módulo do coeficiente de Fourier e como estamos interessados apenas no módulo, podemos obtê-lo ao medir a tensão pico-a-pico após o filtro.

## 1.2 Limite Contínuo

Note que até aqui, não há limites para quão grande seja o período  $T$  desde que ele seja finito, pois a expressão (1.18) diverge mesmo quando a integral é convergente. Sendo assim, o que acontece quando  $T \rightarrow \infty$ ? Antes de responder a esta pergunta, há um ponto importante a ser considerar: *no mundo real, todas as medidas que fazemos são **discretas e finitas***. Por este motivo, a compreensão das séries de Fourier é tão importante, pois mesmo quando as combinações de frequências são contínuas, elas

deixarão de ser quando formos para o laboratório medi-las. Para começar, considere a diferença entre duas frequências consecutivas,

$$\Delta\omega = 2\pi\Delta f = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T} \implies \lim_{T \rightarrow \infty} \Delta\omega = 0 \quad (1.20)$$

Em outras palavras, a *frequência se torna contínua quanto o período da função se torna infinito* e uma função com período infinito é simplesmente uma função arbitrária definida em todo o eixo real. Desta forma, o teorema de Fourier para funções contínuas diz que qualquer função seccionalmente contínua pode ser expandida em uma integral de senos e cossenos desde que seja de quadrado integrável.

Se olharmos diretamente para a expressão (1.18), fica claro que  $c_n$  não converge quando  $T \rightarrow \infty$ . Entretanto, o produto  $Tc_n$  converge, pois

$$\lim_{T \rightarrow \infty} |Tc_n|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega_n t} f(t) dt \right|^2 < \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (1.21)$$

sendo que a desigualdade é consequência da *desigualdade triangular*. Funções tais que a última integral de (1.21) seja convergente são chamadas de *funções de quadrado integrável* e as transformadas de Fourier estão definidas apenas para este tipo de função. Desta forma, a *Transformada de Fourier* é definida como

$$\tilde{f}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} [Tc_n] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega_n t} f(t) dt \right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad \text{tal que} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (1.22)$$

A transformada inversa pode ser calculada a partir da definição original da série de Fourier (1.5) e o fato de que  $\Delta f = 1/T$ ,

$$f(t) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} [c_n T] e^{i\omega_n t} \Delta f \right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (1.23)$$

Na segunda igualdade, a soma converge para uma integral por se tratar de uma soma de Reimann. Desta forma, o par transformada de Fourier e transformada inversa é dado por

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad \text{e} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega) d\omega \quad \text{tal que} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (1.24)$$

Note que o fator  $2\pi$  no denominador aparece somente quando a integração é feita sobre a frequência angular ( $\omega$ ) em vez de sobre a frequência linear ( $f$ ). É importante ter isso em mente quando se faz experimentos, por que qualquer soma (ou integral) de frequências feitas no mundo real ocorre sobre  $f$  e não sobre  $\omega$ . É muito comum também que o fator  $2\pi$  seja repartido entre a transformada e a transformada inversa. Essa notação, apesar de manter uma simetria entre a transformada e a transformada inversa, não deixa claro o papel físico distinto entre tempo e frequência.

### 1.3 Derivação, Integração e Exemplos