STATISTICA

Corso A

Autore
Giuseppe Acocella
2024/25

Ultima Compilazione - March 22, 2025

Contents

1 Statistica Descrittiva

Questo ramo della statistica cerca di raccogliere dati per descrivere degli oggetti. Elenchiamo delle definizioni standard:

1. **Popolazione**: Insieme di oggetti da studiare.
2. **Carattere**: Caratteristiche degli oggetti della popolazione.
   (a) Colore di una biglia, altezza di un individuo.

   Ricordiamo che un carattere può essere sia **qualitativo** (es. colore) sia **quantitativo** (es. altezza).
3. **Modalità**: Possibili valori che il carattere può assumere.
   (a) Colore biglia istanziato: rosso, blu. Lancio moneta istanziato: testa/croce.
4. **Campione Statistico (Sample)**: Sottoinsieme della popolazione scelto a rappresentarla.
5. **Dati**: Esiti delle misure del carattere sugli individui del campione.
   (a) Lanci moneta: $T, C, T, T, T, C,$ ....
6. **Taglia Campione**: Numero di elementi nel campione.

1.1 Frequenze e Campioni

Abbiamo due tipi di frequenze:

1. **Frequenza Assoluta**: Corrisponde al numero di volte in cui la **modalità** appare nei **dati**:
$$\#\{\, i \mid x_i = a \,\}$$
2. **Frequenza Relativa**: Corrisponde al numero di volte in cui la **modalità** appare nei dati fratto il numero dei dati stessi:
$$\text{frequenza relativa} = \frac{\text{frequenza assoluta di } a}{\text{taglia campione}}$$

1.2 Caratteri e Rappresentazioni Grafiche

La rappresentazione dei dati dipende fortemente dal tipo di **carattere**:

1. **Carattere Discreto**: Quantità piccola e finita di modalità assumibili.
   (a) Lancio di un dado, esiti di un sondaggio.

In questo caso per le rappresentazioni si utilizzano **diagrammi a barre**.

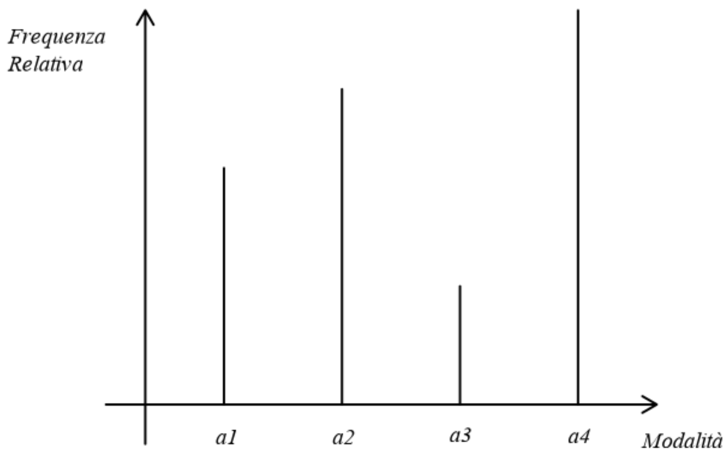


Figure 1: Esempio di diagramma a barre.

2. **Carattere Continuo**: Quantità assumibili in un intervallo continuo.

    (a) Altezza della popolazione.

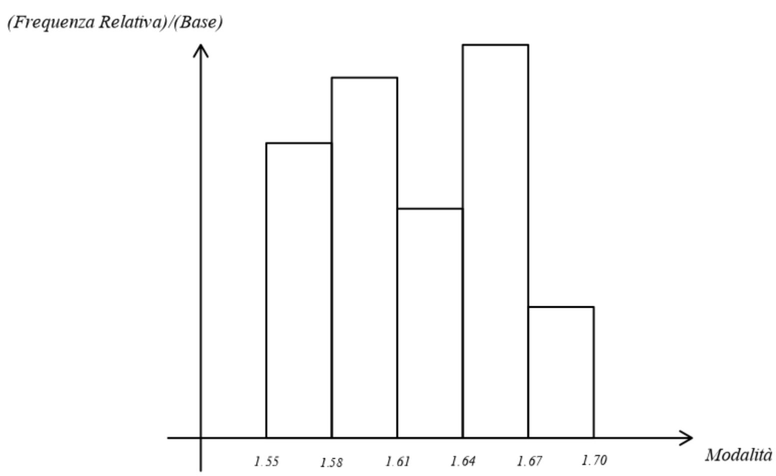


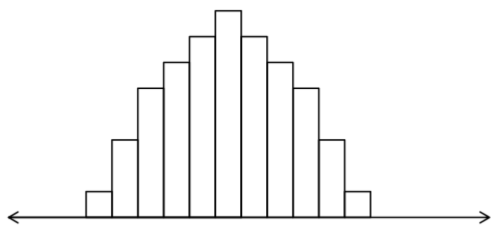
Figure 2: Esempio di istogramma.

La scelta di mettere sull'asse y il rapporto tra freq. relativa e base non è casuale, infatti se scegliessimo intervalli di ampiezza diversa si andrebbe in contro ad un errore di rappresentazione.

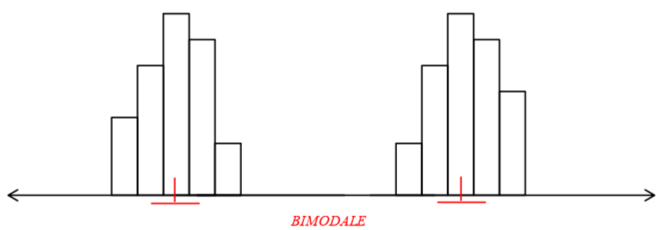
1.2.1 Classi di grafici

Elenchiamo qualche classificazione di rappresentazioni grafiche:

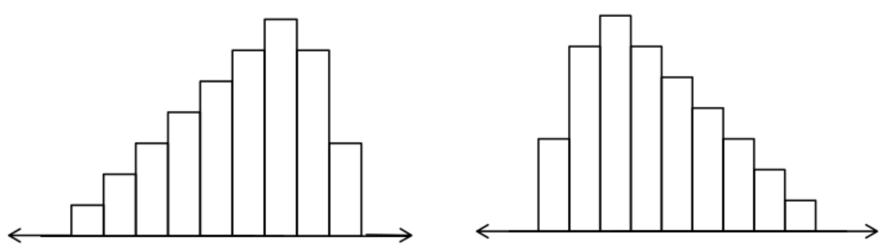
1. **Normale**: Simile ad una campana simmetrica:



2. **Uni/Bi/Tri Modale**: Si concentra attorno ad un numero k di colonne più alte:



   (a) **Modale Asimmetrico Sx/Dx**: Si concentrano attorno ad una colonna più alta in maniera asimmetrica:



1.3 Indici

Gli indici statistici sono quantità numeriche che riassumono proprietà significative sulla **distribuizione dei dati**.

1.3.1 Indici di Centralità - (Media, Mediana, Moda)

Descriviamo tre tipi di indici di centralità:

1. **Media Campionaria**: Descriviamo questo indice:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

   ossia semplicemente la media aritmetica dei dati. Un modo **alternativo** è rappresentarlo così:

$$\frac{\text{modalita} * \text{frequenza ass. della modalita}}{\text{quantità di dati}}$$

   che formalmente si esprime così:

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{M} a_j \, p(a_j)$$

   dove a_j sta per modalità e $p(a_j)$ sta per frequenza relativa della modalità.

   Sensibilità ai Valori Estremi Una delle caratteristiche della media campionaria è quella di essere molto sensibile ai valori estremi del campione.

   Caratteristiche Riesce a vedere tutti i dati del campione e gode di alcune proprietà matematiche come la linearità.

2. **Mediana Campionaria**: Il dato x_i sarà **centrale**, dunque avrà metà dei dati a sinistra e metà a destra. La calcoliamo dunque in due modi:

   (a) **Numero dispari di modalità**: Dato centrale.

$$\text{mediana} = x(\frac{n+1}{2})$$

   (b) **Numero pari di modalità**: Media tra i due dati centrali.

$$\text{mediana} = \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$$

   Caratteristiche Più robusta rispetto ai valori estremi.

3. **Moda**: Modalità più frequente tra i dati.

1.3.2 Indici di Dispersione - (Varianza, Deviazione Standard)

Gli indici di dispersione ci permettono di stabilire quanto i valori della distribuzione si allontanino da un valore centrale scelto come riferimento. Elenchiamoli:

1. **Varianza Campionaria/Empirica**: Permette di

$$\text{CAMPIONARIA:} \quad Var(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$$\text{EMPIRICA:} \quad Var_e(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2) - \overline{x}^2$$

   E' possibile calcolare la varianza anche con le frequenze relative:

$$Var_e(x) = (\sum_{j=1}^{M} a_j^2 * p(a_j)\ ) - \overline{x}^2$$

2. **Scarto Quadratico Medio**: Indice basato sulla varianza.

$$\sigma(x) = \sqrt{Var(x)}$$

3. **Indice Campionario di Asimmetria**: Un indice che permette di stabilire se una distribuzione sia o meno asimmetrica:

$$b = \frac{1}{b^3}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3$$

   (a) $b > 0$: Distribuzione Asimmetrica a destra.

   (b) $b < 0$: Distribuzione Asimmetrica a sinistra.

1.4 Funzione di Ripartizione Empirica (FDR/ECDF)

Dati $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dati quantitativi definiamo $F_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$\boxed{F_e(t) = \frac{\#\{\ i \mid x_i \leq t\ \}}{n}}$$

1.5 Quantili, Percentili, BoxPlot, Outlier

Dati $x_1, x_2, ..., x_n$ dati quantitativi, k un numero naturale tra 0 e 100 allora, avendo un $\beta = \frac{k}{100} \in (0, 1)$:

Definizione k-esimo percentile o $\beta-$quartile è il dato $r_\beta = x_i$ tale che:

1. Almeno il $k\%$ dei dati sia inferiore o uguale ad x_i.
2. Almeno il $(100 - k)\%$ dei dati sia superiore o uguale ad x_i.

Se i due dati soddisfano questa condizione, si prende come k-esimo percentile la loro media aritmetica.

Outlier Valore anomalo che differisce in modo significativo dalla maggioranza dei dati.

$$10, 22, 23, 5, 23, 7, 1001$$

In questo caso l'Outlier risulta essere 1001 e può essere causato da errori di misurazione o da dati molto rari. Gli outlier influenzano in modo significativo alcuni indici statistici: media, varianza. Altri indici sono invece poco influenzati: mediana, percentili.

2 Dati Bivariati

Consideriamo coppie di dati (due caratteri di un individuo di un campione), analizzando se esistono eventuali relazioni tra i dati x_i ed y_i.

2.1 Scatterplot e Regressione

In uno scatterplot sono riportati i dati bivariati (x_i, y_i) sul piano cartesiano.

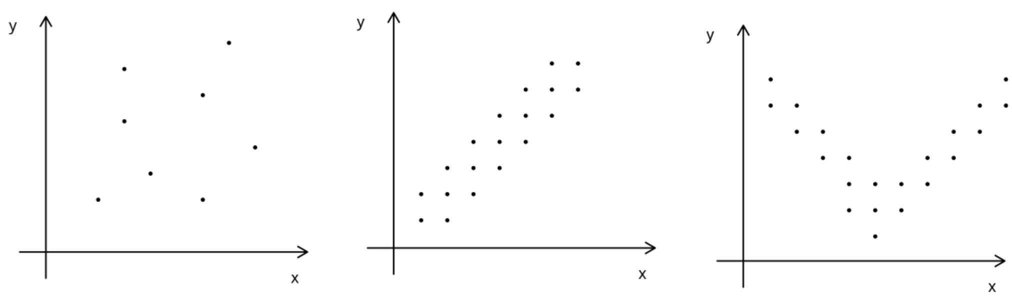


Figure 3: Da sinistra verso destra: Scatterplot Generico, Scatterplot Relazione Lineare, Scatterplot Relazione Non Lineare

Regressione Dato un insieme di punti (x_i, y_i) come possiamo determinare quale curva nel piano approssima meglio quell'insieme? Ci occuperemo solo di relazioni lineari, la cui classe di curve corrisponde alle rette.

2.1.1 Covarianza e Correlazioni Campionarie

Definiamo prima la notazione necessaria:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} \quad \boxed{Var(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})} \quad \boxed{\sigma(x) = \sqrt{Var(x)}}$$

$$\boxed{\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i} \quad \boxed{Var(y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})} \quad \boxed{\sigma(y) = \sqrt{Var(y)}}$$

Covarianza Campionaria Empirica tra x ed y

$$Cov_e(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

$$Cov(x) = \frac{n}{n-1}Cov_e(x, y)$$

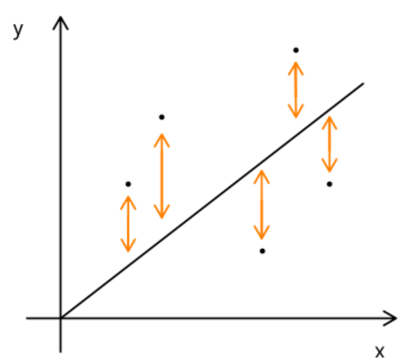
Coefficiente di Correlazione Campionario tra x e y Supponiamo $\sigma(x) \neq 0$ e $\sigma(y) \neq 0$ allora:

$$r(x, y) = \frac{Cov(x, y)}{\sigma(x)\,\sigma(y)}$$

2.1.2 Th. Retta di Regressione ai Minimi Quadrati

Vogliamo trovare la retta di equazione $y = a + bx$ che meglio approssima un insieme di dati bivariati (x_i, y_i). Risulta quindi necessario trovare a e b in modo tale da minimizzare

$$min_{a,b\in\mathbb{R}}\sum_{i=1}^{n}(y_i - (a + bx_i))^2$$



Teorema Ricaviamo dunque a, b della funzione $y = ax + b$:

$$b = b^* = \frac{Cov(x, y)}{Varx} \qquad a = a^* = \overline{y} - b^*\overline{x}$$

Dunque sostituendo nella funzione da minimizzare definita sopra:

$$min_{a,b\in\mathbb{R}}\sum_{i=1}^{n}(y_i - (a + bx_i))^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2(1 - r(x, y)^2)$$

La retta di regressione è quindi la retta che meglio approssima l'insieme di dati bivariati, la bontà dell'approssimazione lineare è tanto migliore tanto è più piccolo $1 - r^2$.

3 Probabilità

Elenchiamo delle definizioni fondamentali per lo studio delle probabilità, ossia la descrizione degli esiti di un esperimento aleatorio:

1. **Spazio Campionario**: Insieme Ω di tutti i possibili esiti dell'esperimento.
2. **Esperimento Aleatorio**: Fenomeno il cui esito non è determinato con certezza a priori.
3. **Evento**: Sottoinsieme dello Spazio Campionario, rappresentano **affermazioni** sull'**esito** dell'**esperimento**.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{"Esce numero pari"} = A = \{2, 4, 6\}$$

4. **Relazioni logiche ed operazioni insiemistiche**: Elenchiamo alcune delle operazioni eseguibili:
   (a) Accade A o B $\mapsto A \cup B$
   (b) Accade A e B $\mapsto A \cap B$
   (c) Non accade A $\mapsto \overline{A} = \Omega - A$
   (d) Accade A ma non B $\mapsto A - B$
   (e) Se accade A allora accade B $\mapsto A \subseteq B$
   (f) A e B non possono accadere contemporaneamente $\mapsto A \cap B = \varnothing$
5. **Definizioni Storiche di Probabilità**: Esistono diverse interpretazioni di probabilità:
   (a) **Definizione Classica**: Viene così definita:

$$P(A) = \frac{\text{casi favorevoli ad A}}{\text{casi possibili}} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

   (b) **Definizione Frequentista**: Viene così definita:

$$P(A) = lim_{n \to \infty} \text{(frequenza relativa di A in n prove ripetute dell'esperimento)}$$

   (c) **Definizione Soggettivista**: Viene così definita:

$$P(A) = \text{grado di fiducia che accada A da parte di un soggetto razionale}$$

L'obiettivo è dunque quello di associare un valore $P(A) \in [0, 1]$ ad un evento in modo tale da esprimere quanto sia probabile l'evento A in questione.

Regole Fondamentali di Probabilità Abbiamo visto che esistono varie interpretazioni di probabilità, di conseguenza risulta necessario trovare dei principi minimi che devono essere rispettati per definire una probabilità. Assumiamo un Ω spazio campionario ed una funzione $P : \mathbb{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dove $\mathbb{P}(\Omega)$ rappresenta l'insieme delle parti di Ω:

1. $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \subseteq \Omega$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Se A_i è una successione di eventi a due a due disgiunti (ossia $A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i \neq j$) allora:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ ... \ \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Definiamo grazie a questo uno **spazio di probabilità**, ossia la coppia (Ω, P).

Evento Trascurabile ed Evento Quasi Certo : Definiamo due specifici tipi di eventi:

1. **Evento Trascurabile**: $P(A) = 0$.
2. **Evento Quasi Certo**: $P(A) = 1$.

Proprietà di Probabilità Elenchiamo delle proprietà a disposizione di qualunque probabilità:

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $B \subseteq A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$
3. Dati $A, B \subseteq \Omega$ non necessariamente disgiunti, allora:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

3.1 Modello Uniforme

Un modello uniforme è uno spazio di probabilità (Ω, P) tale che Ω è finito ed ogni esito $\omega \in \Omega$ risulta essere equiprobabile, ossia che $P(\omega)$ risulta essere la stessa per ogni omega.

Probabilità in Modelli Se (Ω, P) è un modello uniforme, allora:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \quad \forall A \subseteq \Omega$$

3.1.1 Accenno di Combinatoria

Elenchiamo diversi tipi di sequenze dato un insieme di n oggetti:

1. Numero di sequenze ordinate con ripetizione di k oggetti:

$$\#\{(a_1, a_2, ..., a_n)\} \mid a_j \in \{1, 2, ..., n\} = n^k$$

2. Numero di sequenze ordinate senza ripetizione di k oggetti:

$$\#\{(a_1, a_2, ..., a_n)\} \mid a_j \in \{1, 2, ..., n\} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3. Numero di sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, ..., n\}$ formati da k elementi ($k \leq n$):

$$\text{numero sottoinsiemi} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

3.2 Probabilità Condizionata

Dato (Ω, P) spazio di probabilità, B evento non trascurabile, A evento di probabilità condizionata di A dato B:

$$P(A|B) = \frac{P(A|B)}{P(B)}$$

$P(A|B)$ corrisponde dunque alla probabilità che avvenga A sapendo che si verifica B.

3.2.1 Regole Prodotto, Catena, Fattorizzazione della Probab. Condizionata

Elenchiamo le regole della Probabilità Condizionata:

1. **Regola Prodotto**: $P(A \cap B) = P(A|B)\, P(B)$
2. **Regola Catena**: E' possibile applicare la regola del prodotto n volte. In questo modo di definisce la catena.
3. **Regola Fattorizzazione**: La probabilità dell'unione dei rami di una rappresentazione ad albero[1] corrisponde alla somma delle probabilità dei rami.

Formula di Fattorizzazione Definiamo prima un sistema di alternative (eventi $B_1, B_2, ..., B_n$) caratterizzato da:

1. Eventi a due a due disgiunti.
2. $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$
3. $P(B_i) > 0 \quad \forall i$

Date quindi $B_1, B_2, ..., B_n$ sistema di alternative, allora $\forall A \subseteq \Omega$:

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\, P(B_i)}$$

[1] Vedi lezione 3.3, 20/02/2025.

3.3 Formula di Bayes

Siano A e B eventi non trascurabili, allora:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)}$$

In particolare se $B_1, B_2, ..., B_n$ sistema di alternative, allora:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)\,P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)\,P(B_j)} \quad \forall i = 1, ..., n$$

Applicazione e Funzionamento : Solitamente questo teorema viene utilizzato per invertire il condizionamento, tipicamente in due casi:

1. Accade un evento A riferito ad un osservabile.
2. Vogliamo calcolare la probabilità di una possibile causa B_i.

3.4 Indipendenza

Vogliamo definire formalmente in concetto che la probabilità di un determinato evento A non cambia sapendo che accade B. Per A e B non trascurabili accade:

$$P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \iff P(A)P(B) = P(A \cap B)$$

Dunque due **eventi** sono detti **indipendenti**[2] se:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

Indipendenza a 3 o più Eventi Dati tre eventi A, B, C questi sono indipendenti se:

1. Sono a due a due indipendenti, ossia:
$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B), \quad P(A \cap C) = P(A)\,P(C), \quad P(B \cap C) = P(B)\,P(C)$$
2. Vale che $P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C)$

Questo informalmente vuol dire che avere informazioni riguardo alcuni degli eventi non cambia la probabilità relativa degli altri eventi, quindi l'indipendenza a due a due non implica indipendenza globale.

Definizione Indipendenza n-esima Generica Dati $A_1, ..., A_n$ eventi indipendenti, la probabilità di ogni possibile intersezione è il prodotto delle probabilità degli A_i coinvolti nell'intersezione:

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap ... \cap A_{ik}) = P(A_{i1})\,P(A_{i2})\,...\,P(A_{ik}) \quad \forall k \leq n,\ \forall 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k \leq n$$

[2] Se due eventi sono disgiunti, allora non sono indipendenti, dato che se accade ad esempio il primo allora non può accadere il secondo.

3.4.1 Schema di Bernoulli

Date n prove ripetute, in cui ciascuna prova può avere successo o insuccesso, la formulazione viene così definita:

$$\Omega = \{(w_1, w_2, ..., w_n) \mid w_i \in \{0,1\}\} = \{0,1\}^n$$

$$f = \text{probabilità del successo della singola prova}$$

$$P\{(w_1, w_2, ..., w_n)\} = f^{\#successi}\,(1-f)^{\#insuccessi} = f^{\sum_{i=1}^{n} w_i}\,(1-f)^{n-\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

Da questo possiamo osservare che l'indipendenza non implica l'assenza di causalità e viceversa.

4 Variabili Aleatorie

Elenchiamo delle definizioni base:

1. **Variabile Aleatoria (v.a)**: Carattere quantitativo dell'esperimento in esame. Ad esempio in n lanci di moneta $X = \#teste$. Nello specifico la definiamo come una funzione $X : \Omega \Rightarrow \mathbb{R}$.
2. **Legge/Distribuzione di X**: Distribuzione di probabilità della caratteristica X in esame:
$$P^X(A) = P(X \in A) = P(\#\text{teste in A}) \quad A \subseteq \{0, 1, ..., n\}$$
Nello specifico possiamo anche definirla come probabilità P^X su $\mathbb{R}$ data da
$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$
3. **Equidistribuzione**: Due variabili aleatore X ed Y sono dette equidistribuite se
$$P^X = P^Y$$
.

4.1 Variabili Aleatorie Discrete

Una variabile aleatoria X è detta **discreta** se può assumere un numero finito o numerabile di modalità. Ad esempio nei lanci di moneta, se

$$X = \text{teste di n lanci di moneta}, \quad \text{modalità} = \{0, 1, 2, ..., n\}$$

Questo è un esempio di **variabile discreta**. Risulta necessario ricordare che parliamo di possibili modalità e non di dati di uno specifico campione.

Funzione di Massa (Densità Discreta) Data una variabile aleatoria X definiamo $pX : \{a_1, a_2, ..., a_n\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$p^X(a_i) = P\{X = a_i\} = P^X(\{a_i\})$$

Da questo possiamo ricavare un altra caratteristica:

Calcolo delle Probabilità Relative ad X Dagli statement definiti sopra otteniamo:

$$P(X \in A) = \sum_{a_i \in A} P(X = a_i)$$

Proprietà delle Funzioni di Massa Data una funzione di massa p^X, vale che:

1. $p^X(a_i) \geq 0 \quad \forall a_i$
2. $\sum_i p^X(a_i) = 1$

Viceversa, se una funzione q soddisfa queste due proprietà allora esiste una variabile aleatoria X che ha q come funzione di massa, e la legge di X è determinata univocamente da $q = p^X$.

Interpretazione delle Definizioni Date Mostriamo un esempio di estrazione da una popolazione, elencando tutti gli elementi in analisi:

1. $\Omega = \{\text{popolazione}\}$, assumiamo di avere P uniforme, dunque ad esempio $\Omega = \{\text{italiani}\}$, $X = \#figli$
2. $X(\omega) =$ carattere quantitativo di ω.
3. $p^X(a_i) = P(X = a_i) = \frac{\#\{\text{individui con } X=a_i\}}{\#\text{popolazione}} =$ frequenza relativa di $\{X = a_i\}$ su tutta la popolazione.

4.2 Variabili Aleatorie Notevoli

Questo sottocapitolo elencherà specifiche variabili aleatorie caratterizzate da funzioni di massa predefinite.

Elenchiamo alcune variabili aleatorie notevoli[3]:

1. **Variabile Aleatoria Binomiale**: Variabile Aleatoria Discreta di parametri $n \in \mathbb{N}^+$, $f \in [0, 1]$ con funzione di massa data da:

$$p^X(k) = P(X = k) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} f^k(1 - f)^{n-k} \quad k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$$

Mostriamo un esempio di utilizzo a pagina successiva.

[3] Capitoli 4.3, 4.4 delle note del corso 24/25.

Singola prova: lancio di dado, 5 prove ripetute, il successo corrisponde all'esito "6", di conseguenza la probabilità è di $\frac{1}{6}$. Quanto vale la probabilità che almeno due lanci siano uguali a "6"?

$$P(\text{almeno 2 lanci "6"}) = P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) =$$

$$= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$$

$$= 1 - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-0} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-1} ...$$

2. **Variabile Aleatoria Geometrica**: Variabile Aleatoria Geometrica di parametro p con funzione di massa:

$$p^T(k) =$$

$$= f(1-f)^{k-1}, \text{ dove } T \text{ (istante) = num. prova primo successo} = min\{x \in \mathbb{N}^+ | \omega_n = 1\}$$

3. **Variabile Aleatoria Poisson**: X Variabile Aleatoria di Poisson ($Poisson(\lambda)$) di parametro $\lambda > 0$: variabile discreta, a valori a valori in $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, con funzione di massa:

$$p^X(k) = p\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-k}$$

Interpretazione La variabile aleatoria X di Poisson conta il numero di eventi rari, ossia in numero di successi in n prove ripetute con n molto grande ed f probabilità di successo molto piccola (ossia in successo è raro), con $\lambda = nf > 0$.

4.3 Variabili Aleatorie con Densità

Le variabili aleatorie X con densità sono caratterizzate appunto da una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dove $P(X)$ corrisponde a:

$$P(X \in A) = \int_A f(x) dx$$

Quindi $P(X)$ corrisponde all'area sottesa alla funzione. Questo implica che ogni caratteristica sugli estremi dell'integrale influenzerà la densità ed il suo calcolo.

Interpretazione La densità calcolata sulla funzione f corrisponde alla distribuzione di X per unità di lunghezza. Questo tipo di variabili si utilizzano per caratteri continui.

Proprietà delle Densità Elenchiamo le proprietà delle densità:

1. $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{+\infty}^{-\infty} f(x)dx = 1$

Di conseguenza se f soddisfa le due proprietà allora esiste almeno una variabile aleatoria X con densità f e la sua distribuizione è univocamente determinata da f.

4.3.1 Variabili Aleatorie con Densità Note

Elenchiamo e descriviamo alcune variabili con densità note:

1. **Variabili Aleatorie Uniformi**: X variabile uniforme su un intervallo (α, β) dato $(U(\alpha, \beta))$ con densità:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \text{se} \quad x \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{se} \quad x \notin (\alpha, \beta) \end{cases}$$

La parte a tratti viene "fattorizzata" come un ulteriore funzione, ossia:

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{se} \quad x \notin (\alpha, \beta) \end{cases}$$

Di conseguenza la funzione viene così definita:

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \, 1_{\alpha,\beta}(x)$$

Interpretazione Viene scelto un punto a caso nell'intervallo dato senza alcuna preferenza.

2. **Variabili Aleatorie Esponenziali**: X variabile esponenziale di parametro $\lambda > 0$ e con densità:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Fattorizzando con la funzione $1(x)$ vista prima otteniamo $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \, 1_{0,+\infty}(x)$.

Interpretazione Tempo di attesa tra due eventi rari.

4.4 Funzione di Ripartizione e Quantili

Data $X : \Omega \to \mathbb{R}$ variabile aleatoria, P_X legge di X e $P_X(A) = P(X \in A)$ con $A \in \mathbb{R}$, definiamo la funzione di ripartizione (FdR) di X con:

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1] \text{ data da } F_X(x) = P(X \leq x) = P_X((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

Proprietà di FdR Elenchiamo le proprieta della funzione di ripartizione:

1. Non decrescente.
2. Continua a destra.
3. $lim_{x \to +\infty} F(x) = 1, \; lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

Legame tra FdR e Densità Esiste un legame tra FdR e Densità:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

Questo accade se F_X è continua, viceversa se f è continua a tratti:

$$f(x) = F_X^{'}(x)$$

Calcolo Probabilità Intervalli Calcoliamo la probabilità di un intervallo:

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Probabilità e Beta-Quantili Data X variabile aleatoria, dato $\beta \in (0, 1)$ allora $\beta-$quantile:

$$\text{numero } r_\beta \text{ tale che } P(X \leq r_\beta) \geq \beta \text{ e } \quad P(X \geq r_\beta) \geq 1 - \beta$$

4.5 Variabili Aleatorie Gaussiane

Definiamo Z o $N(0,1)$ variabile gaussiana (o normale) standard, nello specifico corrisponde ad una variabile aleatoria con densità:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Funzione di Ripartizione e Beta Quantili di N

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \int_{x}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy \quad \text{(FdR)}$$

$$q_\beta = \Phi^{-1}(\beta) \quad \text{(Beta-Quantile)}$$

Esempio di Utilizzo FdR Mostriamo un esempio in cui risulta necessario utilizzare la FdR:

1. Immaginiamo di voler calcolare questa probabilità:

$$P(a < z < b) = \int_a^b y(x)dx$$

   Non esiste un espressione esplicita per questo integrale.

2. Si usa allora la FdR:

$$P(a < z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

4.5.1 Trasformazioni di Variabili Aleatorie con Densità

Data $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ed $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ allora $h\, o\, X : \Omega \to \mathbb{R}$ è anch'essa una variabile aleatoria. Ma $h\, o\, X$ ammette densità? In generale no, ammette densità solo se h è invertibile.

***** Proposizione sul cambio di variabile *****

4.5.2 Variabile Aleatoria Gaussiana Generale

Dati $Z = N(0,1)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $Y = h(z) = \sigma Z + m$ con densità:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma} y(\frac{y-m}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, exp\left(-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Definizione Y variabile aleatoria gaussiana di media m e varianza σ^2 con densità:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, exp\left(-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad y \in \mathbb{R}$$

In generale dunque ci riferiremo a questo tipo di variabile aleatoria con $(N(m, \sigma^2))$.

Standardizzazione tra due tipi di N Dato $(N(m, \sigma^2))$ possiamo dirigerci verso $Z = N(0, 1)$ tramite standardizzazione:

$$Z = N(0,1) \Leftrightarrow y = \sigma Z + m = N(m, \sigma^2) \text{ quindi}$$

$$P(a < Y < b) = P(\frac{a-m}{\sigma} < Z < \frac{b-m}{\sigma}) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) \quad (\Phi \text{ FdR di } N(0,1))$$

4.6 Valore Atteso e Momenti

Data X variabile aleatoria **discreta**, a valori in $a_1, a_2, \ldots$, con funzione di massa p il valore atteso di X:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_j a_j \, p(a_j)$$

Interpretazione Può essere visto come il baricentro di P, o la media delle a_j pesata con $p(a_j)$. E' dunque la media su tutta la popolazione e non su un singolo campione.

Valore Atteso su Variabile Aleatoria con Densità Data X variabile aleatoria con densità f, il valore atteso di X:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{+\infty}^{-\infty} x \, f(x) dx$$

Il valore atteso in queste condizioni non è sempre finito, di conseguenza non è sempre definito. Quando è definito:

1. Se X variabile aleatoria (discreta o con densità) è ≥ 0, allora:

$$\exists \; \mathbb{E}[X] = \sum_j a_j p(a_j) \text{ oppure } \int x \, f(x) dx \quad \in [0, +\infty]$$

2. Per variabile aleatoria generica, X ammette valore atteso se:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_j |a_j| \, p(a_j) \text{ oppure } \int |x| \, f(x) dx \quad < +\infty$$

rispettivamente se è un caso discreto o con densità.

3. Criteri sufficienti per $\exists \, \mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$:

   (a) Caso Discreto: Se a_j sono in numero finito.

   (b) Caso con Densità: Se $f = 0$ fuori da un intervallo limitato $[\alpha, \beta]$.

4.6.1 Calcolo e Proprietà del Valore Atteso

Calcolo Valore Atteso Data una variabile aleatoria X discreta o con densità, calcoliamo il valore atteso:

1. Se X è discreta con funzione di massa p:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_j g(a_j)\, p(a_j)$$

2. Se X ha densità f:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{+\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x)\, dx$$

Proprietà Valore Atteso Siano X, Y variabili aleatorie date e $a, b \in \mathbb{R}$:

1. **Linearità**:
   (a) $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
   (b) $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$
2. **Monotonia**:
   (a) Se $X \geq 0$, allora $\mathbb{E}[X] \geq 0$
   (b) Se $X \geq Y$, allora $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$

Momento di Ordine n-esimo Data una variabile aleatoria X:

$$\mathbb{E}[X^n] = \begin{cases} \sum_j a_j^n\, P(X = a_j) & \text{caso discreto} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, f(x)\, dx & \text{caso con densità} \end{cases}$$

Disequazione di Markov Sia X variabile aleatoria ≤ 0, $a > 0$, allora:

$$P(X \geq a) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}[X]$$

Dimostrazione Dimostriamo la disequazione di Markov:

$$a1[X] \geq a(\omega) \geq X(\omega)$$

$$E[a\, 1[X \geq a]] \leq E[X]$$

$$0\, P(X < a) + a\, P(X \geq a) = a\, P(X \geq a)$$

4.7 Varianza e Deviazione Standard

Riprendendo la varianza empirica:

$$Var_e(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{j=1}^{m}(a_j - \overline{x})^2 \, * \text{ frequenza relativa di } a_j$$

che rappresenta la dispersione dei dati attorno a $\overline{x}$.

Definizione Data X variabile aleatoria con momento secondo ($E[X^2]$), allora la varianza di X sarà:

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = \sigma(x^2)$$

La deviazione standard di X invece sarà:

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Interpretazione della Varianza Media degli scarti quadratici da $E[X]$: indice della dispersione di X, più grande sarà la dispersione e maggiore sarà in modulo da **.**.

Calcolo della Varianza Definiamo il calcolo

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

dove

$$\sum a_j^2 \, p^X(a_j) - E[X]^2 \quad \text{Se discreto}$$

$$\int x^2 \, f(x)\, dx - E[X]^2 \quad \text{Se con densità}$$

Proprietà di Scaling della Varianza Immaginiamo X v.a e $a, b \in \mathbb{R}$

$$Var(aX + b) = a^2 \, Var(X)$$

Disequazione di Chebyshev Data X v.a con momento secondo, $d > 0$:

$$P(|X - E[X]| \geq d) \leq \frac{1}{d^2} Var(x)$$

Stiamo quindi cercando di capire la probabilità che un valore stia fuori da un intervallo in termini di dispersione.

4.8 Valore Atteso e Varianza per Esempi Notevoli

1. **Binomiale** (n, p): Conta i numeri di successi in n prove ripetute, con probabilità di successo p:

$$E[X] = 0 * P(X = 0) + 1 * P(X = 1) = p$$

$$E[X^2] = 0^2 * P(X = 0) + 1^2 * P(X = 1) = p$$

$$Var(X) = p - p^2 = p(1 - p)$$

   (a) **n Generica**:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se successo alla i-esima prova} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$X = X_1 + \cdots + X_n =$$

$$E[X] = E[X_1] + \cdots + E[X_n] = np$$

$$Var(X) = np(1 - p)$$

2. **Geometrica**: Istante del primo successo è T con $P(T = k) = p(1 - p)^{k-1}$

$$E[T] = \frac{1}{p}$$

$$Var(T) = \frac{1 - p}{p^2}$$

3. **Poisson**: Avendo $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$$E[X] = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

4. **Variabile Uniforme su Intervallo**: Variabile con densità $f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} 1_{\alpha,\beta}(x)$:

$$E[X] = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$E[X] = \int_\alpha^\beta x \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \cdots = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$E[X^2] = \int_\alpha^\beta x^2 \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \cdots =$$

$$Var(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

5. **Esponenziale**: Dato un λ, avendo una densità $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{(0,+\infty)}(x)$:

$$E[X] = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \cdots = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} = \cdots = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

6. **Normali**: $X = N(m, \sigma^2)$:

$$m = 0,\ \ \sigma = 1 \quad Z = N(0,1)$$

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 0$$

$$E[Z^2] = Var(Z) = 1$$

In generale però, per standardizzazione:

$$X = \sigma Z + m$$

$$E[X] = \sigma E[Z] + m = m \quad \text{(per Linearità)}$$

$$Var(X) = \sigma^2 Var(Z) = \sigma^2 \quad \text{(per Scaling)}$$

5 Variabili Aleatorie Multivariate

Descriviamo le caratteristiche di variabili composte di più di una caratteristica:

5.1 Variabile Aleatoria Doppia

Dato uno spazio di probabilità (Ω, P) variabile rappresentata da una coppia (X, Y) che corrisponde ad una funzione $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dove

$$\omega \in \Omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2$$

Questa variabile dunque è una coppia di caratteristiche quantitative degli esiti dell'esperimento.

Legge Congiunta di (X,Y)

$$P^{(X,Y)} : \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R} \text{ data da } P^{(X,Y)}(C) = P((X,Y) \in C)\ \forall C \in \mathbb{R}^2$$

dove

$$\{(X,Y) \in C\} = (X,Y)^{-1}(C)$$

Legge Marginale di X e di Y

$$\text{Legge } P^X \text{ di } X : P^X(A) = P(X \in A)$$

$$\text{Legge } P^Y \text{ di } Y : P^Y(B) = P(Y \in B)$$

Interpretazione della Conguinta/Marginale La legge congiunta a differenza di quella marginale permette di mantenere informazioni riguardo le possibili relazioni tra le caratteristiche X ed Y. Quindi dalla congiunta sarà possibile ricavare le marginali, ma non il contrario dato che non avremo le informazioni riguardo la relazione nelle marginali.

Variabile Doppia Discreta Una variabile aleatoria doppia è detta discreta se (X, Y) assume un numero finito o numerabile di valori, cioè se X ed Y sono discrete.

Funzione di Massa Congiunta di (X,Y) Descriviamo la funzione di massa in questo contesto:

$$p^{(X,Y)}(a, b) = P(X = a, Y = b) \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Da questa è possibile calcolare la legge congiunta come somma di funzioni di massa appartenenti a C:

$$P((X, Y) \in C) = \sum_{(a,b)\in C} P(X = a, Y = b) \quad \forall C \in \mathbb{R}^2$$

Definiamo cosa abbiamo prima accennato, ossia la possibilità di poter ricavare le funzioni di massa marginali dalla legge congiunta:

$$P(X = a) = \sum_{b\in\mathbb{R}} P(X = a, Y = b)$$

$$P(Y = b) = \sum_{a\in\mathbb{R}} P(X = a, Y = b)$$