3. 任意一个整数除以 n 的余数最多只可能有 n 种情况：0，1，2…n - 1。所以 $n+1$ 个整数除以 n，必有至少两个数的余数相同，那么它们的差是 n 的倍数。

4. (1)令 b_1，b_2，…，b_{77} 分别为这 11 周期间他每天下棋的次数，并作部分和

$$
\begin{aligned}
&a_1 = b_1,\\
&a_2 = b_1 + b_2,\\
&\cdots,\\
&a_{77} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{77}.
\end{aligned}
$$

依题意，$b_i \geq 1 (1 \leq i \leq 77)$，且$b_i + b_{i+1} + \cdots + b_{i+6} \leq 12 (1 \leq i \leq 71)$，故有$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{77} \leq 12 \times 11 = 132$。

当$1 \leq k \leq 21$时，考虑数列$a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1 + k, a_2 + k, \cdots, a_{77} + k$，它们都在 1 与$132 + k (133 \leq 132 + k \leq 153)$之间，共有 154 项。由鸽巢原理，其中必有两项相等。由于$a_1, a_2, \cdots, a_{77}$这 77 项互不相等，所以$a_1 + k, a_2 + k, \cdots, a_{77} + k$这 77 项也互不相等，所以一定存在$1 \leq i < j \leq 77$，使得$a_j = a_i + k$。所以$k = a_j - a_i$。即存在连续的一些天，棋手恰好下了$k (k = 1,2, \cdots 21)$盘棋。

(2)考虑数列$a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1 + 22, a_2 + 22, \cdots, a_{77} + 22$，

(i)如果这 154 项中有两项相等，则存在$1 \leq i < j \leq 77$，使得$a_j = a_i + 22$，则从第 i 天到第 j 天棋手恰好下了 22 盘棋。

(ii)如果这 154 项中任意两项都不相等，则数列$a_1, a_2, \cdots, a_{77}, a_1 + 22, a_2 + 22, \cdots, a_{77} + 22$是 1 到 154 的一个全排列。然而这种全排列其实是不存在的，数列中最小的数为a_1，所以$a_1 = 1$，$a_1 + 22 = 23$；除去a_1，最小的数为a_2，所以$a_2 = 2$，$a_2 + 22 = 24$等等，具体结果如下：

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 1, a_2 = 2, \cdots, a_{22} = 22,\\
&a_1 + 22 = 23, a_2 + 22 = 24, \cdots, a_{22} + 22 = 44,\\
&a_{23} = 45, a_{24} = 46, \cdots, a_{44} = 66,\\
&a_{23} + 22 = 67, a_{24} + 22 = 68, \cdots, a_{44} + 22 = 88,\\
&a_{45} = 89, a_{46} = 90, \cdots, a_{66} = 110,\\
&a_{45} + 22 = 111, a_{46} + 22 = 112, \cdots, a_{66} + 22 = 132,
\end{aligned}
$$

此时a_{67}最小，$a_{67} = 133$，而$a_{67} + 22 = 155$，所以这种全排列是不存在的。

综上所述，这 154 项中存在连续的一些天，棋手恰好下了 22 盘棋。

6. 任意一个整数可以表示为$2^{p_n} \cdot r_n$，p_n为非负整数，r_n为奇数，按照r_n将 1 到 200 这 200 个数划分成 100 个集合：

$$
\begin{aligned}
&A_1 = \{2^0 \cdot 1, 2^1 \cdot 1, \dots, 2^7 \cdot 1\};\\
&A_3 = \{2^0 \cdot 3, 2^1 \cdot 3, \dots, 2^6 \cdot 3\};\\
&\cdots
\end{aligned}
$$

$$A_{2k+1}=\{2^0\cdot k,2^1\cdot k,\ldots\};$$
$$\cdots$$
$$A_{199}=\{2^0\cdot 199\}.$$

每个集合内的任意两个元素，一个都可以被另一个整除，因此取 100 个数时要分别从这 100 个集合里各取一个，设取的 100 个数为：

$$b_1=2^{p_1}\cdot 1$$
$$b_3=2^{p_3}\cdot 3$$
$$\cdots$$
$$b_{199}=2^{p_{199}}\cdot 199$$

因为存在$b_i<16$，则 $b_i=2^{p_i}\cdot i<16$。因为$b_{3\mathrm{i}}=2^{p_{3i}}\cdot 3$，则$\frac{b_{3i}}{b_i}=3\cdot 2^{p_{3i}-p_i}$。因为存在$b_i$与$b_{3i}$互不整除，所以$p_{3\mathrm{i}}<p_{\mathrm{i}}$，所以$p_{3i}\le p_i-1$。

所以，$b_{3i}=2^{p_{3i}}\cdot 3i\le 2^{p_{i-1}}\cdot 3i=3/2b_i$，因为$b_i<16$，所以$b_{3i}<24,b_{9i}<36,\cdots,b_{81i}<81$，又因为$b_{81i}=2^{p_{81i}}\cdot 81i\ge 81$，矛盾！所以，原命题得证！

7. 取出 101 到 200 即可。

10. 根据横坐标对 3 取余将这 9 个整点分成 3 类：

$$x_0=\{(x,y)|x=0(mod\ 3)\};$$
$$x_1=\{(x,y)|x=1(mod\ 3)\};$$
$$x_2=\{(x,y)|x=2(mod\ 3)\}.$$

同理，根据纵坐标对 3 取余也可以将这 9 个整点分成 3 类：

$$y_0=\{(x,y)|y=0(mod\ 3)\};$$
$$y_1=\{(x,y)|y=1(mod\ 3)\};$$
$$y_2=\{(x,y)|y=2(mod\ 3)\}.$$

所以，可以将这 9 个整点分成 9 类：

(x_0,y_0)	(x_0,y_1)	(x_0,y_2)
(x_1,y_0)	(x_1,y_1)	(x_1,y_2)
(x_2,y_0)	(x_2,y_1)	$(x_2,2)$

(1)若存在某一类的元素个数不小于 3，则从该类中选取 3 个点就满足要求；

(2)若所有类的元素个数均小于 3，则这 9 个整点至少分成 5 类，这 5 类至少满足以下一个条件：

(i)某一行的三类元素个数均非零，此时从这三类中个取一个元素就满足要求；

(ii)某一列的三类元素个数均非零，此时从这三类中个取一个元素就满足要求；

(iii)某一对角线（包括(x_0,y_1),(x_1,y_2),(x_2,y_0)这种）的三类元素均非零，此时从这三类中个取一个元素就满足要求。

假设 9 个整点分成的 5 类上述三个条件均不满足，则每行最多有两类不空且每行至少有一类不空，不妨设第一行和第二行各有两类不空，则第三行无论是哪类不空均满足上述三个条件之一，矛盾。故这与 5 类必满足上述三个条件之一。

综上所述，这 9 个整点中必有 3 个整点满足要求。

11. 有理数的分子跟分母都是整数，并且分母不等于零，十进制数展开式相当于一个整数除以另外一个整数 n，所得余数所有可能值有$n-1$个，也就是说最多除$n-1$次余数就会有重复，当余数重复时，就会产生循环。

15. $1,2,\cdots,2n$中至多有 n 个整数互不相邻，有鸽巢原理知，从这 $2n$ 个整数中任选$n+1$个整数，至少有 2 个整数相邻，则这 2 个整数的最大公因子为 1.

20. 由鸽巢原理知，P_1,P_2,P_3,P_4中至少有一个有$\left\lceil\frac{67}{4}\right\rceil=17$个整数，不妨设为$P_1$，并设这 17 个元素$a_1<a_2<\cdots<a_{17}$，令$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{17}\}$，若 A 中存在一个元素是某两个元素之差，则满足题目要求，否则，令

$$b_1=a_2-a_1,b_2=a_3-a_1,\cdots,b_{16}=a_{17}-a_1.$$

令$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_{16}\}$，显然$1\le b_i\le 67$，根据前面的假定，$b_1,b_2,\cdots,b_{16}$中无一属于$P_1$，否则与假设 A 中不存在一个元素是某两个元素之差相矛盾，所以 B 中元素属于P_2,P_3,P_4。

由鸽巢原理知，P_2,P_3,P_4中至少有一个至少包含$b_1,b_2,\cdots,b_{16}$中的$\left\lceil\frac{16}{3}\right\rceil=6$个整数，不妨设为$P_2$，且$b_{i_1}<b_{i_2}<\cdots<b_{i_6},1\le i_1<i_2<\cdots<i_6\le 16$。令$B'=\left\{b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_6}\right\}$，$B'\subseteq P_2$。根据假定，$B'$中没有一个元素是某两个元素之差。令

$$c_1=b_{i_2}-b_{i_1},c_2=b_{i_3}-b_{i_1},\cdots,c_5=b_{i_6}-b_{i_1}.$$

显然$c_i\notin P_1,c_i\notin P_2,i=1,2,3,4,5$。令$C=\{c_1,c_2,\cdots,c_5\}$,所以 C 中元素属于P_3,P_4。

由鸽巢原理知，P_3,P_4中至少有一个至少包含$c_1,c_2,\cdots,c_5$中的$\left\lceil\frac{5}{2}\right\rceil=3$个整数，不妨设为$P_3$，且$c_{i_1}<c_{i_2}<b_{i_3},1\le i_1<i_2<i_3\le 5$。令$C'=\left\{c_{i_1},c_{i_2},c_{i_3}\right\}$，$C'\subseteq P_3$。根据假定，$C'$中没有一个元素是某两个元素之差。令

$$d_1=c_{i_2}-c_{i_1},d_2=c_{i_3}-c_{i_1}.$$

显然$d_i\notin P_1,d_i\notin P_2,d_i\notin P_3,i=1,2$。令$D=\{d_1,d_2\}$，所以 D 中元素属于P_4。而$1\le d_1<d_2<67$，由假定有$d_2-d_1\notin P_1,P_2,P_3,P_4$，这和将 1 到 67 之间的整数分成四部分的前提矛盾，故原命题成立。

22. 把每个三角形的最短边染成红色，剩下的所有边染成白色，则由 Ramsey 定理可知，必出现同色三角形。又每个三角形都有最短边，即每个三角形都有红色边。于是上述同色三角形是红色的，则它的最长边也是红色的，所以原命题得证。