1. $(123)(234)(5)(14)(23) = (12)(34)(5)$.

S_5中型为$1^1 2^2$的置换共有$\frac{5!}{1!2!1^1 2^2} = 15$，分别为

$$\begin{array}{lll}(12)(34)(5), & (13)(24)(5), & (14)(23)(5),\\ (12)(35)(4), & (13)(25)(4), & (15)(23)(4),\\ (12)(45)(3), & (14)(25)(3), & (15)(24)(3),\\ (13)(45)(2), & (14)(35)(2), & (15)(34)(2),\\ (23)(45)(1), & (24)(35)(1), & (25)(34)(1).\end{array}$$

2. (i)不旋转，对应于恒等变换$\sigma_I = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 2\ 3\ 4 \end{pmatrix}$，确定出$1^4$型的置换 1 个；

(ii)以顶点和相对面中心的连线为轴旋转，可旋转 120°和 240°，确定出$1^1 3^1$型的置换 8 个；

(iii)以相对棱中点的连线为轴旋转，可旋转 180°，确定出2^2型的置换 3 个。综上所述，上述 12 个置换构成所求置换群。

3. 令$R = \{0,1\}$，对于 D 的子集 A，定义映射$f_A: D \to R$，其中

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

则 A 与 B 是 G 等价的等同于$f_A(x)$与$f_B(x)$是 G 等价的，则问题转化为求在$F = \{f | f_A: D \to R\}$上的等价类个数。由 Pólya 计数定理得等价类的个数为

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\substack{\sigma \in G \\ \sigma\text{是}1^{b_1}2^{b_2}\cdots n^{b_n}\text{型的}}} 2^{b_1+b_2+\cdots b_n}.$$

5. 0，1，6，8，9 这五个数字有如下的置换关系：

对于置换群$G = \{\sigma, \tau\}$，不相等的 n 位数的个数即为置换群 G 的等价类个数。其中σ为恒等置换，型为1^n，则$c_1(\sigma) = 5^n$；

对于τ，可以分成两种情况：

(i)当 n 为奇数时，型为$1^1 2^{\frac{n-1}{2}}$，其中正中间的数字必须为 0，1 或 8，才能保证调转后的数与原来相同，则$c_1(\tau) = 3 \cdot 5^{\frac{n-1}{2}}$。

(ii)当 n 为偶数时，型为$2^{\frac{n}{2}}$，$c_1(\tau) = 5^{\frac{n}{2}}$。

所以不相等的 n 位数，即 G 的等价类个数为

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(5^n + 3 \cdot 5^{\frac{n-1}{2}}\right), & n\text{为奇数} \\ \frac{1}{2}\left(5^n + 5^{\frac{n}{2}}\right), & n\text{为偶数} \end{cases}$$

10. $g=(34)\left(\text{或}(142)\right)$。

11. $i=1$，$Z_1=\{\sigma_I,(23),(24),(34),(234),(243)\}$；
$i=2$，$Z_2=\{\sigma_I,(13),(14),(34),(134),(143)\}$；
$i=3$，$Z_3=\{\sigma_I,(12),(14),(24),(124),(142)\}$；
$i=4$，$Z_4=\{\sigma_I,(12),(13),(23),(123),(132)\}$。

12. (1)置换群$G=\{\sigma_I,(1234),(13)(24),(1432)\}$，模式表为

$$\frac{1}{16}\left((r+b)^4+(r^2+b^2)^2+2(r^4+b^4)\right).$$

(2)对$w_1=b^4$，$F_1=\{f_{16}\}$，所以$\tilde{G}=\left\{\pi_1^{(1)}\right\}$，其中$\pi_1^{(1)}(f_i)=f_1(1\le i\le 16)$。

对$w_2=r^2b^2$，$F_2=\{f_6,f_7,f_8,f_9,f_{10},f_{11}\}$，所以

$$\begin{aligned}\tilde{G}&=\left\{\sigma^{0^{(2)}},\sigma^{1^{(2)}},\sigma^{2^{(2)}},\sigma^{3^{(2)}}\right\}\\&=\{\sigma_I,(f_6f_7f_8f_9)(f_{10}f_{11}),(f_6f_8)(f_7f_9)(f_{10}f_{11}),(f_6f_9f_8f_7)(f_{10}f_{11})\}.\end{aligned}$$

15. 设$D=\{1,2,\cdots,r\}$为圆的 r 个位置，$R=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，G 为旋转的置换群，σ表示绕圆心旋转$\frac{360}{r}$度的置换，则$G=\{\sigma^0,\sigma^1,\cdots,\sigma^r\}$。

分类讨论$\sigma^i(1\le i\le r)$的型：

(i)i 与 r 互素，型为r^1，与 r 互素的 i 的个数有$\varphi(r)$，其中$\varphi(n)$为欧拉函数；

(ii) i 与 r 有最大的因子$d(d\ge 2)$，则型为$\left(\frac{r}{d}\right)^d$，对于给定的 d，与 r 互素的 i 的个数有$\varphi\left(\frac{r}{d}\right)$。

由 Pólya 计数定理得多重集合的 r 圆排列数为

$$\frac{1}{r+1}\left(n^r+\varphi(r)n+\sum_{\substack{d|r\\d\ge 2}}\varphi\left(\frac{r}{d}\right)n^d\right)=\frac{1}{r+1}\left(n^r+\sum_{\substack{d|r\\d\ge 1}}\varphi\left(\frac{r}{d}\right)n^d\right).$$

19. (1) $G=\{\sigma_I,(18)(27)(36)(45)\}$.

(2)轮换指标为

$$P_G(x_1,x_2,\cdots,x_8)=\frac{1}{2}(x_1^8+x_2^4).$$

设 m 种颜色的权分别为$w_1,w_2,\cdots,w_m$，则全部的模式表为

$$\frac{1}{2}((w_1+w_2+\cdots+w_m)^8+(w_1^2+w_2^2+\cdots+w_m^2)^4).$$

则每尺着不同颜色的方案数为上式展开式中指数均为 1 的项的系数，为

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{8!}{1!\,1!\cdots 1!}=\frac{8!}{2}.$$

(3)设蓝色、红色和绿色的权分别为w_1,w_2,w_3，则所求方案数为展开式中$w_1^3w_2^3w_3^2$项的系数，为

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{8!}{3!\,3!\,2!}=280.$$

(4) 设黄色的权分别为w_4，则所求方案数为展开式中$w_1^3w_2w_3^2w_4^2$项的系数，为

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{8!}{3!\,1!\,2!\,2!}=840.$$