1. (3) $G\{n(n+2)\}=G\{n(n+1)\}+G\{n\}=\frac{2x}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{3x-x^2}{(1-x)^3}$

2. (2)由 1(3)知$G\{n(n+2)\}=\frac{3x-x^2}{(1-x)^3}$，设

$$G\{n(n+2)\}=A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k,$$

$$B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k.$$

其中$b_n=\sum_1^n a_k$，又$a_0=0$，所以$b_n=\sum_0^n a_k$，则

$$B(x)=\frac{A(x)}{1-x}=\frac{3x-x^2}{(1-x)^4}=\left(3x-x^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^k.$$

其中x^n的系数即为所求和

$$\begin{aligned}&3\cdot\binom{n+2}{3}-\binom{n+1}{3}\\&=\frac{n(n+1)(n+2)}{2}-\frac{(n-1)n(n+1)}{6}\\&=\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.\end{aligned}$$

(3)设数列$\{n\,(n+1)\}$的生成函数为

$$A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\frac{2x}{(1-x)^3},$$

$$B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k.$$

其中$b_n=\sum_1^n a_k$，又$a_0=0$，所以$b_n=\sum_0^n a_k$，则

$$B(x)=\frac{A(x)}{1-x}=\frac{2x}{(1-x)^4}=2x\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^k.$$

其中x^n的系数即为所求和

$$2\cdot\binom{n+2}{3}=\frac{n(n+1)(n=2)}{3}.$$

3. (1)设序列$\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$的指数型生成函数为$A(x)=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots$，则

$$A^2(x)=A(x)\cdot A(x)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(i+1)!\,(n-i+1)!}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(i+1)!\,(n-i+1)!}\cdot\frac{x^n}{n!}$$

$$=\frac{1}{x^2}[e(x)-1]^2.$$

原命题得证。

(2)

$$\frac{1}{x^2}[e(x)-1]^2$$

$$=\frac{1}{x^2}[e(2x)-2e(x)+1]$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(2^k-2)\frac{x^k}{k!}+1\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\sum_{k=2}^{\infty}(2^k-2)\frac{x^k}{k!}$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}(2^k-2)\frac{x^{k-2}}{k!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+2}-2}{(n+2)!\,(n+1)!}\cdot\frac{x^n}{n!}\ (n=k-2)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(i+1)!\,(n-i+1)!}\cdot\frac{x^n}{n!}$$

所以

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(i+1)!\,(n-i+1)!}=\frac{2^{n+2}-2}{(n+2)!\,(n+1)!}.$$

5. 这样的字有两种，a 与 b 的个数均为奇数和 a 与 b 的个数均为偶数，所以该排列数的指数型生成函数为

$$\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3+\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3$$

$$=\frac{\big(e(x)-e(-x)\big)^2}{2}\cdot e(3x)+\frac{\big(e(x)+e(-x)\big)^2}{2}\cdot e(3x)=\frac{1}{2}\big(e(5x)+e(x)\big).$$

所以$\frac{x^n}{n!}$的系数$\frac{1}{2}(5^n+1)$即为所求。

7. (1)生成函数为

$$(x+x^3+x^5+\cdots)^4=\frac{x^4}{(1-x^2)^4}.$$

(2)生成函数为

$$(1+x^3+x^6+\cdots)^4=\frac{1}{(1-x^3)^4}.$$

(3)生成函数为

$$(1+x)(1+x+x^2+\cdots)^2=\frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

(4)生成函数为

$$\begin{aligned}&(x+x^3+x^{11})(x^2+x^4+x^5)(1+x+x^2+\cdots)^2\\=&\frac{x^3(1+x^2+x^{10})(1+x^2+x^3)}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

(5)生成函数为

$$(x^{10}+x^{11}+x^{12}+\cdots)^4=\frac{x^{40}}{(1-x^2)^4}.$$

9. 1 到10^n之间各位数字之和等于 5 的整数的个数等于方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=5$$

的非负整数解的个数$\binom{n+5-1}{5}=\binom{n+4}{5}$。故$10^2$和$10^6$之间各位数字之和等于 5 的整数个数为$\binom{6+4}{5}-\binom{2+4}{5}=246$。

10. (2)等式左边的生成函数为

$$(1+x)^{n+2}-2(1+x)^{n+1}+(1+x)^n=x^2(1+x)^n.$$

设$\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=x^2(1+x)^n$，则$\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k-2}=(1+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k$.比较对应项系数得$a_k=\binom{n}{k-2}$，而$\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$为等式右边的生成函数，故原等式得证。

11. (1)生成函数为

$$\left(x+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^k=\left(\frac{e(x)-e(-x)}{2}\right)^k.$$

(2)生成函数为

$$\left(\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)^k=\left(e(x)-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\right)^k.$$

(3)生成函数为

$$(e(x)-1)(e(x)-1-x)\left(e(x)-1-x-\frac{x^2}{2!}\right)\dots\left(e(x)-1-x-\cdots-\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right).$$

(4)生成函数为

$$(1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}\right)\dots\left(1+x+\cdots+\frac{x^k}{k!}\right).$$

12. 根据题意，有$M_1=\{0,1,2,3\}, M_2=\{0,1,2,3,4\}, M_4=\{0,1,2\}$。生成函数为

$$\begin{aligned}&(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)(1+x^4+x^8)\\&=1+x+2x^2+2x^2+3x^4+3x^5+4x^6+4x^7+5x^8+5x^9+5x^{10}+\\&\quad 5x^{11}+4x^{12}+4x^{13}+3x^{14}+3x^{15}+2x^{16}+2x^{17}+x^{18}+x^{19}.\end{aligned}$$

故能称出 20 种重量，指数为重量类型，系数为方案数。

14. $B'(N,m)$分为两类，一类是拆分的数中不包括 m，为$B'(N,m-1)$；另一类是拆分的数中至少有一个 m，为$B'(N-m,m)$。原等式得证。

15. 设x^i表示一个分部量取值为$i(i=1,2,\cdots,m)$，则一个分部量的可能取值为

$$x+x^2+\cdots+x^m.$$

n 个分部量之和为

$$(x+x^2+\cdots+x^m)^n.$$

所以，$(x+x^2+\cdots+x^m)^n$对应的展开式中x^N的系数即表示将 N 有序分拆成 n 个分部量小于或等于 m 的分拆数(N,n,m)。

17. $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$, $B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{x^n}{n!}$. 由 $a_{n+1}=(n+1)b_n$， 得 $a_n=nb_{n-1}(n\geq 1)$。则

$$A(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}nb_{n-1}\frac{x^n}{n!}=1+xB(x).$$

20. 生成函数为

$$(x+x^2+\cdots+x^{10})^{15}=x^{15}\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^{15}$$

$$=x^{15}\sum_{i=0}^{15}(-1)^i\binom{15}{i}x^{10i}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{14+i}{i}x^i.$$

其中x^{38}的系数为$\binom{14+23}{23}-\binom{15}{1}\binom{14+13}{13}+\binom{15}{2}\binom{14+3}{3}$。