2. 若左边第一位为 0 或 1，满足条件的序列共有$f(n-1)$个；

若左边第一位为 2，则剩下$n-1$位只能为 0 或 2，满足条件的序列有2^{n-1}个。且$f(1)=3$，故

$$\begin{cases} f(n)=2f(n-1)+2^{n-1} \quad (n\geq 2), \\ f(1)=3. \end{cases}$$

3. 对$f(n)$，若首位不为 0，则满足条件的序列有$3f(n-1)$；

若首位为 0，则在剩下的$n-1$位中任取一位为 0，剩下的$n-2$位中有偶数个 0 的序列有$f(n-2)$，共有$(n-1)f(n-2)$。则

$$\begin{cases} f(n)=3f(n-1)+(n-1)f(n-2) \quad (n\geq 3), \\ f(1)=3, \quad f(2)=10. \end{cases}$$

同理，对$g(n)$，若首位为 0 或 1，则满足条件的序列有$(n-1)g(n-2)$；

若首位为 2 或 3，则满足条件的序列有$g(n-1)$。则

$$\begin{cases} g(n)=2f(n-1)+2(n-1)f(n-2) \quad (n\geq 3), \\ g(1)=2, \quad g(2)=4. \end{cases}$$

5. 最后三位是“010”的 n 位 0，1 序列共有2^{n-3}个，包含以下情况：

$f(n)$，表示在第 n 位第一次出现“010”的序列数；

$f(n-2)$，表示在第$n-4$位到第$n-2$位第一次出现“010”的序列数；

$f(n-3)$，表示在第$n-5$位到第$n-3$位第一次出现“010”的序列数；

$2f(n-4)$，表示在第$n-6$位到第$n-4$位第一次出现“010”的序列数，因为第$n-3$位可取 0 或 1；

当$3\leq i\leq n-3$时，$2^{i-3}f(n-i)$，表示在第$n-i-2$位到第$n-i$位第一次出现“010”的序列数，因为中间第$i-3$位都可取 0 或 1。所以

$$\begin{cases} f(n)=2^{n-3}-f(n-2)-f(n-3)-2f(n-4)-\cdots-2^{n-6}f(3) \quad (n\geq 6), \\ f(3)=1, \quad f(4)=2 \quad f(5)=3. \end{cases}$$

6. (1)特征方程为$x^3-x^2-9x+9=0$，特征根为$x_1=1, x_2=3, x_3=-3$。所以，通解为

$$f(n)=c_1 1^n+c_2 3^n+c_3(-3)^n.$$

代入初值，得

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=0, \\ c_1+9c_2-9c_3=1, \\ c_1+9c_2+9c_3=2. \end{cases}$$

解得

$$c_1=-\frac{1}{4}, c_2=\frac{1}{3}, c_3=-\frac{1}{12}.$$

所以

$$f(n)=3^{n-1}-\frac{1}{12}(-3)^n-\frac{1}{4}.$$

(2)特征方程为$x^3-3x^2+2=0$，特征根为$x_1=x_2=1, x_3=-2$。所以，通解为

$$f(n)=(c_1+c_2n)1^n+c_3(-2)^n.$$

代入初值，得

$$\begin{cases}c_1+c_3=1,\\ c_1+c_2-2c_3=0,\\ c_1+2c_2+4c_3=0.\end{cases}$$

解得

$$c_1=\frac{8}{9}, c_2=-\frac{2}{3}, c_3=\frac{1}{9}.$$

所以

$$f(n)=\frac{8}{9}-\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}(-2)^n.$$

(3)特征方程为$x^2-4x+3=0$，特征根为$x_1=1, x_2=3$。因为 3 是特征方程的一重根，所以该递推关系的非齐次特解为$an3^n$。代入递推关系得

$$a=\frac{3}{2}.$$

而相应齐次递推关系的通解为$c_1 1^n+c_2 3^n$。所以非齐次递推关系的通解为

$$f(n)=c_1 1^n+c_2 3^n+\frac{3}{2}n3^n.$$

代入初值解得

$$c_1=\frac{11}{4}, c_2=-\frac{7}{4}.$$

所以

$$f(n)=\frac{11}{4}-\frac{7}{4}3^n+\frac{3}{2}n3^n.$$

7. 令

$$f(n)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot h(n)=\frac{h(n)}{n}\ \ (n\geq 1).$$

则$h(n)$的递推关系为

$$h(n)+h(n-1)=2^n \quad (n\geq 1).$$

因为 2 不是特征方程的根，所以该递推关系的非齐次特解为$a2^n$。代入递推关系得

$$a=\frac{2}{3}.$$

相应齐次递推关系的通解为$b(-1)^n$，所以非齐次递推关系的通解为

$$h(n)=b(-1)^n+\frac{2}{3}2^n.$$

由题意可得$f(1)=2$，则$h(1)=2$，代入上式得

$$b=-\frac{2}{3}.$$

所以

$$h(n)=-\frac{2}{3}(-1)^n+\frac{2}{3}2^n.$$

所以

$$\begin{cases} f(n)=-\dfrac{2}{3n}(-1)^n+\dfrac{2}{3n}2^n \quad (n\geq 1),\\ f(0)=0. \end{cases}$$

8. (1)$f(n)=(n+2)f(n-1)$

$$\begin{aligned}&=(n+2)(n+1)f(n-2)\\&=\cdots\\&=(n+2)(n+1)\cdots(1+2)f(0)\\&=\frac{(n+2)!}{2}.\end{aligned}$$

而$f(0)=1$也满足上式，所以

$$f(n)=\frac{(n+2)!}{2}.$$

(2) $f(n)=f(n-1)+\frac{1}{n(n+1)}$

$$\begin{aligned}&=f(n-1)+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\&=f(n-2)+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\\&=\cdots\\&=f(0)+\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\\&=2-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

而$f(0)=1$也满足上式，所以

$$f(n)=2-\frac{1}{n+1}.$$

11. 若第一格着红色，则第二格只能着白色或蓝色，剩下$n-2$格着色方案数为$f(n-2)$；若第一格着白色或蓝色，剩下$n-1$格着色方案数为$f(n-1)$。则

$$\begin{cases} f(n)=f(n-1)+2f(n-2) \quad (n\geq 3),\\ f(1)=3,\quad f(2)=10. \end{cases}$$

特征方程为$x^2-2x-2=0$，特征根为$x_1=1+\sqrt{3}, x_2=1-\sqrt{3}$。解得

$$f(n)=\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\left(1+\sqrt{3}\right)^n+\frac{3-2\sqrt{3}}{6}\left(1-\sqrt{3}\right)^n.$$

13. (1)若 n 在这 k 个数中，则其余$k-1$个数从 1，2，⋯，$n-2$中选，方案数为$f(n-2,k-1)$；若 n 不在这 k 个数中，则其余$k-1$个数从 1，2，⋯，$n-1$中选，方案数为$f(n-1,k)$。综上所述，$f(n,k)$满足的递推关系为

$$f(n)=f(n-1,k)+f(n-2,k-1).$$

(2)对$n\geq 1$，$f(n,1)=n=\binom{n+1-1}{1}$；

对$n\geq 2$，$f(n,n)=n=\binom{n+1-n}{n}$。

假设对于$i\leq j\leq n$，$f(j,i)=\binom{j+1-i}{i}$成立，则

$$\begin{aligned}f(n+1,k)&=f(n,k)+f(n-1,k-1)\\&=\binom{n+1-k}{k}+\binom{n-1+1-(k-1)}{k-1}\\&=\binom{(n+1)+1-k}{k}.\end{aligned}$$

所以

$$f(n,k)=\binom{n+1-k}{k}.$$

(3) 若 n 在这 k 个数中，则其余$k-1$个数从 2，3，⋯，$n-2$中选，方案数为$f(n-3,k-1)$；若 n 不在这 k 个数中，则其余$k-1$个数从 1，2，⋯，$n-1$中选，方案数为$f(n-1,k)$。则

$$\begin{aligned}g(n)&=f(n-1,k)+f(n-3,k-1)\\&=\binom{n-k}{k}+\binom{n-k-1}{k-1}.\end{aligned}$$

14. (2)令

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^n.$$

则

$$A(x)-f(0)-f(1)x-f(2)x^2=\sum_{n=3}^{\infty}f(n)x^n$$

$$=\sum_{n=3}^{\infty}\big(f(n-1)+9f(n-2)-9f(n-3)\big)x^n$$

$$= x\sum_{n=2}^{\infty} f(n)x^n + 9x^2\sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^n - 9x^3\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$$

$$= x(A(x) - f(0) - f(1)x) + 9x^2\big(A(x) - f(0)\big) - 9x^3A(x).$$

代入初值得

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{x + x^2}{1 - x - 9x^2 + 9x^3} \\ &= \frac{1}{3(1-3x)} - \frac{1}{12(1+3x)} - \frac{1}{4(1-x)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot 3^n - \frac{1}{12}\cdot(-3)^n - \frac{1}{4}\right)x^n. \end{aligned}$$

所以

$$f(n) = 3^{n-1} + \frac{1}{4}(-3)^{n-1} - \frac{1}{4}.$$

15. 用归纳法证明，表达式$\sum_{j=1}^{k} d_j\binom{n+j-1}{j-1}$可唯一地表示成一个$k-1$次多项式。

当$k=1$时，$\sum_{j=1}^{k} d_j\binom{n+j-1}{j-1} = d_1 = d_1n^0$，满足条件。

当$k>1$时，假设结论成立，即存在唯一的一组常数$b_0, b_1, \cdots, b_{k-1}$，使得

$$\sum_{j=1}^{k} d_j\binom{n+j-1}{j-1} = \sum_{j=0}^{k-1} b_jn^j.$$

则

$$\sum_{j=1}^{k+1} d_j\binom{n+j-1}{j-1} = \sum_{j=0}^{k-1} b_jn^j + d_{k+1}\binom{n+k}{k}.$$

而

$$\binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)}{k!}.$$

可唯一地表示成$\sum_{j=0}^{k} c_jn^j$，所以

$$\sum_{j=1}^{k+1} d_j\binom{n+j-1}{j-1} = \sum_{j=0}^{k-1} b_jn^j + d_{k+1}\sum_{j=0}^{k} c_jn^j = \sum_{j=0}^{k} a_jn^j.$$

其中$a_j = b_j + d_{k+1}c_j$，得证。