4. 设不同的配对方法数为$f(n)$，将这 $2n$ 个点分别用$1,2,\cdots,2n$标记。取点 1，再任取一偶数点 $2k$，连接点 1 与点 $2k$，则该弦将圆分成两部分K_1和K_2。对K_1，有$k-1$对点，故不同的配对方法数为$f(k-1)$；对K_2，有$n-k$对点，故不同的配对方法数为$f(n-k)$。则

$$\begin{cases} f(n)=\sum_{k=1}^{n} f(k-1)f(n-k)\ (n \geq 1), \\ f(0)=1. \end{cases}$$

令$g(n)=f(n-1)$，则

$$g(n+1)=f(n)=\sum_{k=1}^{n} g(k)g(n-k+1)=h(n+1)=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

即不同的配对方法数为第$n+1$个 Catalan 数$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。

5. 设不同的出栈方式有$f(n)$种，这 n 个字符分别为$a_1,a_2,\cdots,a_n$，从栈顶到栈底的位置分别为$1,2,\cdots,n$。

(1)若a_1在位置 1，则不同的出栈方式为$f(n-1)$；

(2)若a_1在位置 2，则不同的出栈方式为$f(1)f(n-2)$；

⋮

(n) 若a_1在位置 n，则不同的出栈方式为$f(n-1)$。

则

$$f(n)=f(n-1)+f(1)f(n-2)+\cdots+f(n-1).$$

令$f(0)=1$，则

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n} f(k-1)f(n-k)\ (n \geq 1).$$

由习题 4 知

$$f(n)=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

即不同的出栈方式为第$n+1$个 Catalan 数$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。

10. 对于每个球都有m种放法，故共有m^n种方法，为等式右边。若有$k(k=1,2,\cdots,m)$个非空盒，将 n 个球先分成 k 类，有$S(n,k)$种分法，再将 n 个球放入盒子，有$\binom{m}{k}S(n,k)k!$种放法，故共有$\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}S(n,k)k!$种放法，为等式左边。所以原等式成立。

15. 5 人坐前排，有$P(8,5)$种坐法；4 人坐后排，有$P(8,4)$种坐法；剩下的 5 个人坐剩下的 7 个座位，有$P(7,5)$种坐法，故共有$P(8,5)\cdot P(8,4)\cdot P(7,5)$种坐法。

17. 设这种数串的个数为$f(n)$，则$f(1)=2, f(2)=4$。

当$n\geq 3$时，将满足条件的数串分为两类：

(1)最后两位数字相同，这种长度为 n 的数串可以由长度为$n-1$的数串重复最后一位得到，有$f(n-1)$个；

(2)最后两位数字不同，这种长度为 n 的数串可以由长度为$n-2$的数串重复最后一位（设该位为 a），再加上一个与 a 不同的数字得到，有$f(n-2)$个。

可以得到递推关系

$$\begin{cases} f(n)=f(n-1)+f(n-2) \quad (n\geq 2), \\ f(1)=2, f(2)=4. \end{cases}$$

通解为

$$f(n)=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

代入初值得

$$c_1=\frac{5+\sqrt{5}}{2}, c_2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

所以满足条件长度为 n 的数串的个数为

$$f(n)=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$