1. 求 50!的尾部有多少个零，即求 50!中有 2×5 的因子个数。由于 2 的因子个数比 5 多，所以问题转换为求 5 的因子个数。其中 5，10，15，20，30，35，40，45 各含有 1 个 5 的因子，共 8 个；25，50 各含有 2 个 5 的因子，共 4 个。所以共有 12 个 5 的因子，即 50!的尾部有 12 个零。

（注：50! = 30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000）

2. (1)千位数字为 5，

(i)百位数字为 4，满足要求的整数有$6\times5=30$个；

(ii)百位数字大于 4，满足要求的整数有$3\times6\times5=90$个；

(2)千位数字大于 5，满足要求的整数有$3\times7\times6\times5=630$个；

综上所述，满足要求的整数有$30+90+630=750$个。

3. 将不相邻的两人其中一人与其他十个人先进行圆排列，有$11!/11=10!$种安排方法。然后将剩下的那个人插入到十一个人之间，其中有 2 个位置不能安排，所以有 9 个位置，共有$9\times10!$种安排方法。

4. (1)有$P(4,4)=24$种信号。

(2)使用一盏灯，有 4 种信号；使用两盏灯，有$P(4,2)=12$种信号；使用三盏灯，有$P(4,4)=24$种信号；使用四盏灯，有$P(4,4)=24$种信号；共有$4+12+24+24=64$种信号。

(3)使用一、二、三、四盏灯，各有$\binom{4}{1}$、$\binom{4}{2}$、$\binom{4}{3}$、$\binom{4}{4}$种信号，共有 15 种信号。

5. (1) $\binom{100}{3}$. (2) $1-\binom{98}{3}/\binom{100}{3}$. (3) $\binom{2}{1}\binom{98}{2}/\binom{100}{3}$.

7. 选取 8 行，每行放一个，有$\binom{8}{8}$种取法；每行取一列放棋子，有 $P(8,8)$种取法；把 5 个红和 3 个蓝棋子放在这 8 个位置上，有$\frac{8!}{5!\cdot3!}$种放法。

综上所述，有$\binom{8}{8}\cdot P(8,8)\cdot\frac{8!}{5!\cdot3!}$种放法。

放在 12×12 的棋盘上，有$\binom{12}{8}\cdot P(12,8)\cdot\frac{8!}{5!\cdot3!}$种放法。

8. $\binom{10}{4}$(或$\binom{10}{6}$).

10. 记$y_i=x_i-i$，则原问题转化为求方程$y_1+y_2+\cdots+y_8=4$的非负整数解

的个数，共$\binom{4+8-1}{4}=330$个。

13. 将向右走记为 1，向上走记为 0，则$(0,0)$到(n,n)的非降路径数为一个 01 序列，将满足条件的序列分为两类：

(1)任何时刻，1 的数量 ≥ 0 的数量（一直在对角线的下方走）；

(2)任何时刻，0 的数量 ≥ 1 的数量（一直在对角线的上方走）。

两类序列的数量相等，下面仅求第一类序列的数量。

定义三个集合：

(1)集合 A：n 个 0，n 个 1 组成的序列，集合大小为$\binom{2n}{n}$；

(2)集合 B：n 个 0，n 个 1 组成的序列，且在某个时刻，0 的数量大于 1 的数量，$|A|-|B|$即为第一类序列的数量；

(3)集合 C：$n+1$个 0，$n-1$个 1 组成的序列，集合大小为$\binom{2n}{n-1}$。

下面证明集合 B 和集合 C 大小相等。

任取 B 中的一个元素，将第一次出现 0 的数量大于 1 的数量的位置及以前的序列保持不变，后面的序列 0 和 1 进行反转。例如 B 中的元素$b=1010001\cdots011$，第五位及以前的序列保持不变，后面的序列 0 和 1 反转，变为序列$c=1010010\cdots100$。可以证明变换后的序列中有$n+1$个 0，$n-1$个 1，所以 B 中元素都可以唯一的映射到 C 中。反过来，C 中元素必然存在某一时刻 0 的数量大于 1 的数量，将第一次出现 0 的数量大于 1 的数量的位置之后的 0 和 1 进行反转，得到的序列必然属于 B，所以 C 中元素都可以唯一映射到 B 中。所以集合 B 和集合 C 的大小相等。

所以第一类路径的数量为$|A|-|B|=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\binom{2n}{n}/(n+1)$，总的路径数量为

$$2\cdot(|A|-|B|)=2\cdot\binom{2n}{n}/(n+1).$$

物理含义：第一次出现 0 的数量 >1 的数量，表示从对角线下方走的时候第一次穿过对角线，将后面的 0 和 1 反转，表示将第一次穿过对角线后面的路径沿着对角线对折，集合 C 表示从$(0,0)$到$(n-1,n+1)$的非降路径数。

14. 设第一组数有 a 个，第二组数有 b 个，要求第一组里的最小数大于第二组里的最大数，即只要取出$m(m=a+b,m\leq n)$个数，按从大到小的顺序排列，把前 a 个作为第一组，剩下 b 个作为第二组。对于给定的 m，第一组的取法有$m-1$种，所以总的方案数为

$$\sum_{m=2}^{n}(m-1)\binom{n}{m}=\sum_{m=2}^{n}m\binom{n}{m}-\sum_{m=2}^{n}\binom{n}{m}=n2^{n-1}-2^n+1.$$

16. 每四个顶点构成一个凸四边形，一个凸四边形的一组对角线有一个交点，且任意 3 条对角线不共点，所以该凸 10 边形的对角线交于$\binom{10}{4} = 210$个点。

每组对角线交点关联的段数为 4，每个顶点关联的段数为 7，这样每段重复计算了一次，故把所有的对角线分成$\frac{1}{2}(210 \times 4 + 10 \times 7) = 455$段。

20. (1)因为最大元素是j，所以其他元素是从比j小的$j-1$个元素中选取，这$j-1$个元素每个都有被选取和不被选取两种情况，故最大元素恰好是j的子集数为2^{j-1}。

(2)等式左边表示最大元素$1,2,\cdots,n+1$的子集数之和，等式右边表示集合$1,2,\cdots,n+1$的非空子集数，显然两边相等。

23. 确定 5 封信的传送顺序有$5! = 120$种，将 15 个空格插入到 4 个间隔中，即方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \quad (x_i \geq 3，i = 1,2,3,4)$$

的非负整数解的个数$\binom{3+4-1}{3} = 20$，综上所述，共有 2400 种方法。

25. 因为 x 与 y 的乘积不能被 3 整除，则 x 和 y 均不能被 3 整除。1 到 100 之间不能被 3 整除的数有 67 个，故所求有序对的数量为$P(67,2)$。

28. (2)

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \frac{(n+2)!}{(k+2)!\,(n-k)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k+2} \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(2^{n+2} - \binom{n+2}{0} - \binom{n+2}{1} \right) = \frac{2^{n+2} - n - 3}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$