2. x^5y^{13}的系数是$\binom{18}{13}\cdot 3^5\cdot(-2)^{13}=-\binom{18}{13}\cdot 3^5\cdot 2^{13}$.

x^8y^{10}的系数是$\binom{18}{10}\cdot 3^8\cdot(-2)^{10}=\binom{18}{10}\cdot 3^8\cdot 2^{10}$.

3. (2)等式左边

$$=\frac{1}{n+1}\left[(n+1)\binom{n}{0}+\frac{n+1}{2}\binom{n}{1}+\frac{n+1}{3}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{n+1}{n+1}\binom{n}{n}\right]$$
$$=\frac{1}{n+1}\left[\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}+\cdots+\binom{n+1}{n+1}\right]$$
$$=\tfrac{1}{n+1}(2^{n+1}-1).$$

4. 等式右边相当于从$(0,0)$到$(m,n-m+r+1)$点的非降路径数，可以将这些路径分为如下$m+1$类：第$i(i=1,2,\cdots,m)$类路径是从$(0,0)$点到$(m-i,n-m)$点，然后到$(m-i,n-m+1)$点，最后到$(m,n-m+r+1)$点，路径数为$\binom{n-i}{m-i}\binom{r+i}{i}$。由加法原则，得等式成立。

8. $a\binom{m}{3}+b\binom{m}{2}+c\binom{m}{1}$

$$=\frac{a}{6}m(m-1)(m-2)+\frac{b}{2}m(m-1)+cm$$
$$=\frac{a}{6}m^3+\frac{b-a}{2}m^2+\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+c\right)m$$
$$\therefore \frac{a}{6}=1，\frac{b-a}{2}=0，\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+c\right)=0.$$
$$\therefore a=6，b=6，c=1.$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3$$
$$=6\left(\binom{1}{3}+\cdots+\binom{n}{3}\right)+6\left(\binom{1}{2}+\cdots+\binom{n}{2}\right)+\left(\binom{1}{1}+\cdots+\binom{n}{1}\right)$$
$$=6\binom{n+1}{4}+6\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}$$
$$=6\binom{n+2}{4}+\binom{n+1}{2}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

9. $\binom{m_1+m_2}{n}$表示m_1+m_2元集合 A 的 n 组合数。将集合 A 分成两个集合 A_1 和 A_2，使得$|A_1|=m_1,|A_2|=m_2$。则 A 的 n 元子集可以分成如下$n+1$类：从 A_1 中选取$k(k=0,1,\cdots,n)$个元素，从 A_2 选取$n-k$个元素合并到一起构成 A 的第 k

类 n 元子集，而第 k 类子集的个数为$\binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k}$。由加法原则，原等式得证。

10. (1)设 0 出现偶数次的字符串有$f(n)$个，出现奇数次的字符串有$g(n)$个，则$f(1)=2$，对$f(n)$，可以分成以下两种情况：

(i)最后一位为 0，则$f(n)=g(n-1)$；

(ii)最后一位为 1 或 2，则$f(n)=f(n-1)$；

所以$f(n)=g(n-1)+2f(n-1)$，而$g(n)=3^n-f(n)$，则

$$f(n)=3^{n-1}-f(n-1)+2f(n-1)=3^{n-1}+f(n-1).$$

所以

$$f(n)=3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+3^1+f(1)=\frac{3}{2}(3^{n-1}-1)+2=\frac{3^n+1}{2}.$$

(2)等式左边可以理解为长度为 n 字符串中，0 出现偶数次的字符串总和，由(1)知，该等式成立。

11. 等式右边$=\binom{2n}{n+1}$表示 $2n$ 元集合 A 的$n+1$组合数。将集合 A 分成两个集合 A_1 和 A_2，使得$|A_1|=n,|A_2|=n$。则 A 的$n+1$元子集可以分成如下 n 类：从 A_1 中选取$k(k=1,2,\cdots,n)$个元素，从 A_2 选取$n+1-k$个元素合并到一起构成 A 的第 k 类$n+1$元子集，而第 k 类子集的个数为$\binom{n}{k}\binom{n}{n+1-k}=\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}$。由加法原则，原等式得证。

15. $\binom{n}{k}-\binom{n-3}{k}$

$$\begin{aligned}
&=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}-\binom{n-3}{k}\\
&=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k}-\binom{n-3}{k}\\
&=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-1}+\binom{n-3}{k}-\binom{n-3}{k}\\
&=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-1}
\end{aligned}$$

16.

$$\sum_{\substack{r,s,t\geq 0\\ r+s+t=n}}\binom{m_1}{r}\binom{m_2}{s}\binom{m_3}{t}=\sum_{\substack{r,s,t\geq 0\\ r+s+t=n}}\binom{m_1}{n-s-t}\binom{m_2}{s}\binom{m_3}{t}$$

$$=\sum_{\substack{r,s,t\geq 0\\ r+s+t=n}}\binom{m_1+m_2}{n-t}\binom{m_3}{t}=\binom{m_1+m_2+m_1}{n}$$