Tarea Propagación de errores

Pegueros Pérez Luis Fernando

23 de febrero de 2024

This problem studies error propagation for cases that are more involved than what we encountered in the main text. Specifically, find the:

(a) Absolute error in $y = \ln x$.

(b) Relative error in $y = \sqrt{x}$.

a) Aplicando la formula de error absoluto para una función:

$$\triangle y \approx \left| \frac{df(x)}{dx} \right| \triangle x$$

Tomamos $f(x) = \ln x$ con $x > 0$:

$$\Rightarrow \triangle y \approx \left| \frac{d}{dx} \ln x \right| \triangle x$$

$$\Rightarrow \triangle y \approx \left| \frac{1}{x} \right| \triangle x$$

$$\Rightarrow \triangle y \approx \frac{\triangle x}{x}$$

b) Aplicando la formula de error relativo para una función:

$$\frac{\triangle y}{y} \approx \left| \frac{df(x)}{dx} \right| \frac{\triangle x}{x}$$

Tomamos $f(x) = \sqrt{x}$ con $x > 0$:

$$\Rightarrow \frac{\triangle y}{y} \approx \left| \frac{d}{dx} \sqrt{x} \right| \frac{\triangle x}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\triangle y}{y} \approx \left| -\frac{1}{2\sqrt{x}} \right| \frac{\triangle x}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\triangle y}{y} \approx \frac{\sqrt{x}}{2x^2} \triangle x$$

We will study the following function:

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \tag{2.96}$$

(a) Start by plotting the function, using a grid of the form $x = 0.1 \times i$ for $i = 1, 2, \ldots, 100$. This should give you some idea of the values you should expect for $f(x)$ at small x.

(b) Verify your previous hunch by taking the limit $x \to 0$ and using L'Hôpital's rule.

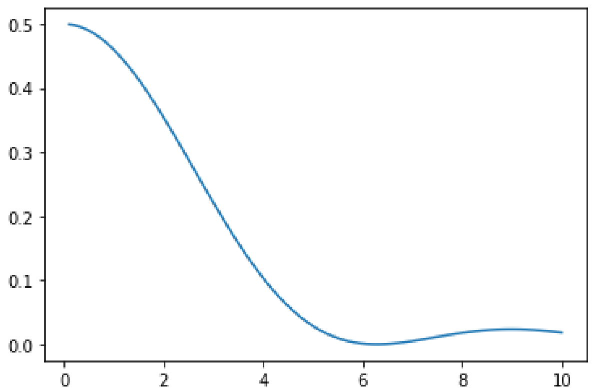
(c) Now, see what value you find for $f(x)$ when $x = 1.2 \times 10^{-8}$. Does this make sense, even qualitatively?

(d) Use a trigonometric identity that enables you to avoid the cancellation. Evaluate the new function at $x = 1.2 \times 10^{-8}$ and compare with your analytical answer for $x \to 0$.

a) Utilizando el siguiente código en Python:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return (1-np.cos(x))/x**2

x=np.linspace(0.1, 10, 100)
y=f(x)

plt.plot(x, y)
plt.show()

```

Se puede observar la siguiente gráfica:



b) Ahora calculemos por L'Hôpital el limite cuando $x \to 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = 0{,}5 \end{aligned}$$

c) Añadiendo las siguientes lineas a nuestro código:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return (1-np.cos(x))/x**2

x=np.linspace(0.1, 10, 100)
y=f(x)

plt.plot(x, y)
plt.show()

x0=1.2e-8
print(f(x0))
```

El código nos arroja el valor de $f(x) = 0{,}7709882115452477$, que se puede notar que es un error muy alejado a algo esperado, pues esta por arriba de 0,5, donde podemos ver de nuestra gráfica que en ningún momento nuestra función toma valores por arriba de 0,5.

d) Para esto utilizare la siguiente identidad trigonométrica:

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

obteniendo una nueva funcion $g(x)$ tal que:

$$\boxed{g(x) = \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2}}$$

Cambiando nuestro codigo con esta nueva funcion $g(x)$:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return (1-np.cos(x))/x**2

def g(x):
    return 2*(np.sin(x/2))**2/x**2

x=np.linspace(0.1, 10, 100)
y=f(x)

plt.plot(x, y)
plt.show()

z=g(x)
plt.plot(x, z)
plt.show()

x0=1.2e-8
print(f(x0))
print(g(x0))
```

Obtenemos un resultado de 0,5 tal y como es de esperarse