Matrizen im Allgemeinen und ihre Anwendung in der Informatik

- Handout -

Inhalt

Matrizen

Eine Allgemeine Matrix ($m \times n$ Matrix) besteht aus **Zahlen**, die in **Zeilen** und **Spalten** angeordnet sind. Sie hat m Zeilen und n Spalten. Wenn m und n gleich sind, ist die Matrix quadratisch:

$$B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,m} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,1} & B_{n,2} & \dots & B_{n,m} \end{pmatrix}$$

Matrixdarstellung: Die Zahlen des Schemas heißen Elemente der Matrix. Matrizen werden immer mit Großbuchstaben benannt. Die Elemente der Matrix werden immer mit einem Doppelindex gekennzeichnet, der die Nummer der Zeile und die der Spalte des Elementes angibt.

Quadratische Matrix	**Hauptdiagonale**
Bei der Quadratischen Matrix, sind die Anzahl der Zeilen gleich der Anzahl der Spalten (also $m = n$). Zum Beispiel eine 2×2 Matrix oder eine 3×3 Matrix. 2×2 Beispiel $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 3×3 Beispiel $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$	In jeder quadratischen Matrix sind die Elemente der Hauptdiagonalen die Zahlen, die von oben links nach unten rechts verlaufen. Zum Beispiel: 2×2 Beispiel (Hauptdiagonale: 1 und 1) $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 \\ 5 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ 3×3 Beispiel (Hauptdiagonale: 1, 1 und 1) $\mathrm{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 & 4 \\ 2 & \mathbf{1} & 6 \\ 7 & 8 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Diagonalmatrix	**Einheitsmatrix (Identitätsmatrix)**
In einer Diagonalmatrix sind alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen null. 2×2 Beispiel $$\mathrm{G} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$ 3×3 Beispiel $$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$	In der Einheitsmatrix sind alle Elemente auf der Hauptdiagonalen 1 und alle anderen Elemente 0. 2×2 Beispiel $$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 3×3 Beispiel $$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie den Typ von A und B.

b) Geben Sie die Elemente a_{12}, a_{23}, b_{21} und b_{32} an.

c) Welche Elemente von A und welche von B haben den Wert 1?

Addition und skalare Multiplikation

Addition	**Skalare Multiplikation**
Die Addition von Matrizen funktioniert, wenn sie gleich groß sind (gleich viele Zeilen und Spalten). Man addiert die Zahlen **an der gleichen Stelle**. **Beispiel**: Wir haben zwei Matrizen: $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$ Jetzt addieren wir sie, indem wir die Zahlen an den gleichen Positionen zusammenzählen: $$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$	Ein **Skalar** ist nur eine einzelne Zahl, zum Beispiel 2 oder 5. Wenn wir eine Matrix mit einem Skalar multiplizieren, multiplizieren wir **jede Zahl in der Matrix** mit dieser Zahl. **Beispiel**: Wir haben die Matrix: $$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$ Wenn wir diese Matrix mit 3 multiplizieren, sieht das so aus: $$3 \cdot C = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Aufgaben

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

a) Prüfen Sie, welche Matrizen Sie addieren können, und berechnen Sie die Summe.

b) Bestimmen Sie die Zahl k, für die gilt: $k * C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ 21 & 24 & 27 \end{pmatrix}$

Multiplikation von Matrizen

Matrix-Vektor-Multiplikation

Nehmen wir eine Matrix A der Größe $m \times n$ (also m Zeilen und n Spalten) und einen Vektor $\vec{z}$ der Größe $n \times 1$. Die Multiplikation $A \cdot \vec{z}$ ist nur möglich, wenn die Anzahl der **Spalten von A** gleich der Anzahl der **Zeilen von $\vec{z}$** ist.

Matrix A	**Vektor $\vec{z}$**
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

Das Ergebnis der Multiplikation $A \cdot \vec{z}$ wird ein Vektor $\vec{y}$ der Größe $m \times 1$ sein. Dieser Vektor hat die Form:

$$\vec{y} = \mathrm{A} \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \cdots + a_{1n}z_n \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \cdots + a_{2n}z_n \\ \vdots \\ a_{m1}z_1 + a_{m2}z_2 + \cdots + a_{mn}z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Das bedeutet, dass Sie die ***m*-te Zeile** der Matrix A mit den **entsprechenden Einträgen** des Vektors $\vec{z}$ multiplizieren und die Ergebnisse addieren.

Beispiel

Nehmen wir die Matrix A der Größe 3×2 und den Vektor $\vec{z}$ der Größe 2×1:

Matrix A	**Vektor $\vec{z}$**
$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\vec{\mathrm{z}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jetzt berechnen wir das Produkt $A \cdot \vec{z}$:

Berechnung des ersten Eintrags $\boldsymbol{y_1}$	**Berechnung des zweiten Eintrags $\boldsymbol{y_2}$**	**Berechnung des zweiten Eintrags $\boldsymbol{y_3}$**
Die **erste Zeile** von A ist (a_{11}, a_{12}), und der Vektor $\vec{z}$ ist (z_1, z_2). $y_1 = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1$	Die **zweite Zeile** von A ist (a_{21}, a_{22}), und der Vektor $\vec{z}$ bleibt (z_1, z_2). $y_2 = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1$	Die **dritte Zeile** von A ist (a_{31}, a_{32}), und der Vektor $\vec{z}$ bleibt (z_1, z_2). $y_3 = 0 \cdot 4 + 3 \cdot 1$

Das Ergebnis der Matrix-Vektor-Multiplikation ist der Vektor $\vec{y}$:

$$\vec{y} = A \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot z_1 + a_{12} \cdot z_2 \\ a_{21} \cdot z_1 + a_{22} \cdot z_2 \\ a_{31} \cdot z_1 + a_{32} \cdot z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matrix-Matrix-Multiplikation

Wir multiplizieren eine r-zeilige Matrix B von links mit einer r-spaltigen Matrix A, indem wir jeden Spaltenvektor von links mit A multiplizieren. Die resultierende Matrix C nennt man das **Matrizenprodukt** von A und B und schreibt $C = A \cdot B$.

	$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & \dots & b_{rj} & \dots & b_{rm} \end{pmatrix}$
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{ir} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nr} \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & \dots & \dots & c_{1m} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & c_{ij} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & \dots & \dots & c_{nm} \end{pmatrix}$

Jeder Koeffizient c_{ij} ist das Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A mit dem j-ten Spaltenvektor von B.

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ir} \cdot b_{rj}$$

Beispiel

Nehmen wir eine Matrix A der Größe 2×3 und eine Matrix B der Größe 3×2.

Matrix A	**Matrix B**
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$

Berechnung von c_{12}, c_{12}, c_{21} und c_{22}:

$$c_{11} = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 = 7 + 18 + 33 = 58$$

$$c_{12} = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 = 8 + 20 + 36 = 64$$

$$c_{21} = 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 = 28 + 45 + 66 = 139$$

$$c_{22} = 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 = 32 + 50 + 72 = 154$$

Ergebnis-Matrix C:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix}$$

Aufgaben

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ und $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Welche Matrizenprodukte sind möglich? Geben Sie jeweils das Ergebnis an.

b) Bilden Sie A^3 und A^4 sowie B^3 und B^6.

Quellen

- Petra Michel, Amberg (2022). Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau). ISBN 978-3-735361-7.
- Ian Goodfellow, Yoshua Bengio, Aaron Courville (2016). Deep Learning. ISBN 978-0262035613
- https://medium.com/@ageitgey/machine-learning-is-fun-part-3-deep-learning-and-convolutional-neural-networks-f40359318721 (letzter Zugriff: 16.01.2025)