ML HW2.3　A102548 蔡佩璇

- Prove Beta-Binomial conjugation

likelihood $P(x|N,\theta)$ 是 binomial 的形式 $\Rightarrow P(x|N,\theta) = C^N_m \theta^m (1-\theta)^{N-m}$

prior $P(\theta|a,b)$ 是 beta 的形式 $\Rightarrow P(\theta|a,b) = \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\frac{1}{\beta(a,b)}$

則由 Baye's theorem 可證：

$$\text{posterior } P(\theta|x) = \frac{\text{likelihood } P(x|N,\theta)\cdot \text{prior } P(\theta|a,b)}{\text{margin } P(x)}$$

$$= \frac{\cancel{C^N_m}\,\theta^m(1-\theta)^{N-m}\cdot\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\cancel{\frac{1}{\beta(a,b)}}}{\int_0^1 \cancel{C^N_m}\,p^m(1-p)^{N-m}\cdot p^{a-1}(1-p)^{b-1}\cancel{\frac{1}{\beta(a,b)}}\,dp} \Rightarrow \text{常數消去}$$

$$= \frac{\theta^{m+a-1}(1-\theta)^{N-m+b-1}}{\int_0^1 p^{m+a-1}(1-p)^{N-m+b-1}\,dp}$$

從 beta function 的定義可知：$\beta(a,b) = \int_0^1 p^{a-1}(1-p)^{b-1}\,dp$

$$\therefore = \frac{\theta^{m+a-1}(1-\theta)^{N-m+b-1}}{\beta(m+a,\,N-m+b)}$$

又知道 beta distribution 的形式為：$Beta(p|a,b) = p^{a-1}(1-p)^{b-1}\frac{1}{\beta(a,b)}$

因此可以發現推導出來的 posterior 也是 beta 的形式

$$\text{posterior}: \theta^{m+a-1}(1-\theta)^{N-m+b-1}\frac{1}{\beta(m+a,\,N-m+b)} = P(\theta|m+a,\,N-m+b)$$

由此可證 Beta-Binomial conjugation　※