《數學分析I》18-19-1試卷A解答

武國寧

January 3, 2019

1 填空題(每題3分，共30分)

(1) . 函數$y = x^x$的導函數為：$\underline{y = e^{x\ln x}, y' = x^x(\ln x + 1)}$.

(2) . 設函數$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 在$x_0 = 0$點連續，則$\underline{\alpha > 0}$.

(3) . $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_\alpha x}{x^\alpha}(\alpha > 0, \neq 1) = \underline{0.}$

(4) . $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right] = \underline{1.}$

(5) . $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2-n^2}}\right] = \underline{\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}.}$

(6) . 函數$\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$的漸近線為：$\underline{x - 2.}$

(7) . $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x = \underline{-x\cos x + \sin x + C.}$

(8) . $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x = \underline{\ln\left|\frac{x}{1+x}\right| + C.}$

(9) . 函數$y = \ln(1+x)$在$x_0 = 0$點帶有拉格朗日型余項的n 階泰勒展開式為：$\underline{\ln x = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + \dfrac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}(0 < \theta < 1).}$

(10) . 設$y = x\cosh x$,則$(x\cosh x)^{(100)} = \underline{(x\cosh x)^{(100)} = x\cosh x + 100\sinh x.}$

2 證明題(本題10分)

利用單調有界原理證明數列

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}, \cdots, (x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}, n=1,2,\cdots,x_1=\sqrt{2}.)$$

收斂，並求其極限。

Proof. a).首先證明數列的單調性：
因為數列$x_n > 0$,

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-\sqrt{2+x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{2+x_n}+\sqrt{2+x_{n-1}}}$$

所以$x_{n+1}-x_n$與x_n-x_{n-1}同正負，因為$x_2-x_1>0$，所以$x_{n+1}-x_n>0$,故數列$\{x_n\}$單調遞增。

———4分.

b).下面證明數列的有界性：
因為$x_1=\sqrt{2}<2$,假設$x_n<2$,則有：$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+2}=2$

———4分.

綜上所述數列收斂。
c).求極限值：
假設極限為A,則有$A=\sqrt{2+A}$得到$A=2$.

———2分.

□

3 解答題(每小題5分，共20分)

(1) 指出函數$f(x)=\dfrac{1}{x}-\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$的間斷點及其類型。

解：討論函數在$x_0=0$處的情況。$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\lfloor\dfrac{1}{x}\rfloor\right)$極限不存在，因為取$x'_n=\dfrac{1}{n}$有

$$\lim_{n\to+\infty} f(x'_n)=0$$

取$x''_n=\dfrac{1}{n+1/2}$,有

$$\lim_{n\to+\infty} f(x''_n)=\frac{1}{2}$$

所以$x_0=0$為函數的第二類間斷點。

———3分.

在$x=\dfrac{1}{n}, n\in\mathbb{Z}\setminus 0$ 函數的間斷點類型為跳躍性間斷點。

———2分.

(2) 求極限$\lim\limits_{x\to 0+}\left[\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\right]$

解：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0+}\left[\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right]\\
&=\lim_{x\to 0+}\frac{2\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}}
\end{aligned}
$$

———3分.

$$=1$$

———2分.

(3) 設$\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t\end{cases}$,求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$

解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{e^t(\cos t-\sin t)}{e^t(\sin t+\cos t)}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}$$

———3分.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)*\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)\\
&=\frac{-2}{(\sin t+\cos t)^2}*\frac{1}{e^t(\sin t+\cos t)}\\
&=-\frac{2}{e^t(\sin t+\cos t)^3}
\end{aligned}
$$

———2分.

(4) 求積分$\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cos 3x \, \mathrm{d}x$

解：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cos 3x \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left(\sin 5x - \sin x\right) \, \mathrm{d}x$$

———3分.

$$= 0 - 0 = 0$$

———2分.

4 證明題(本題10分)

證明$\sin x$在$(-\infty, +\infty)$上一致連續。

Proof. $f(x)$在I上一致連續$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \delta$ such that:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

$\forall \epsilon > 0$, 因為

$$|\sin x_1 - \sin x_2| < |x_1 - x_2|$$

———5分.

所以取$\delta = \epsilon$, 對於任意的$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 只要$|x_1 - x_2| < \delta$, 就有：

$$|\sin x_1 - \sin x_2| < |x_1 - x_2| < \epsilon.$$

所以，$\sin x$在$\mathbb{R}$上一致連續。

———5分.

□

5　解答題(每小題5分，共20分)

(1) 利用Lagrange Mean-Value Theorem證明:$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}(0 < a < b)$

Proof. 因為

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} = \frac{1}{\xi}(\xi \in (a,b))$$

———3分.

所以有

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{\xi} = \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a}$$

———2分.

□

(2) 利用函數的單調性證明：$\tan x > x - \frac{x^3}{3}, x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

Proof. 令

$$f(x) = \tan x - x + \frac{x^3}{3}$$

$f(0) = 0, f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 + x^2 > 0(x \in (0, \frac{\pi}{3}))$ 所以函數$f(x)$在$(0, \frac{\pi}{3})$單調遞增。

———3分.

因為$f(0) = 0$,所以有：

$$\tan x > x - \frac{x^3}{3}, x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$$

———2分.

□

(3) 利用函數的Taylor級數展開求極限$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}$

Proof.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$
$$e^{\frac{-x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^5)$$

———3分.

所以有：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{24}-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^5)}{x^4}$$
$$= -\frac{1}{12}$$

———2分.

□

(4) 利用凹凸函數的定義證明：$2\arctan\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \arctan a + \arctan b, \forall a, b \in \mathbb{R}^+$.

Proof. 令

$$f(x) = \arctan x,$$

有

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

所以$f(x) = \arctan x$為$\mathbb{R}^+$上的上凸函數。

———3分.

根據上凸函數的性質，有：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

所以有:

$$2\arctan\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \arctan a + \arctan b, \forall a, b \in \mathbb{R}^+.$$

———2分.

□

6　解答題(每小題5分，共10分)

(1) 計算定積分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

解：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\sin x}{1+\sin^2 x}$$

———3分.

$$= \arctan(\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

———2分.

(2) 計算極限$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2\,\mathrm{d}t}\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t}$

解：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2\,\mathrm{d}t}\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\,\mathrm{d}t} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2} 2\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{e^{2x^2}}$$

———3分.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = 0$$

———2分.