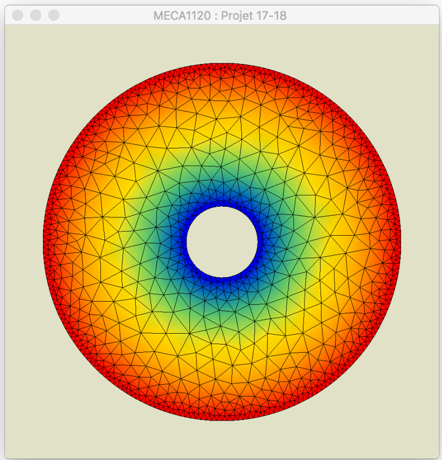
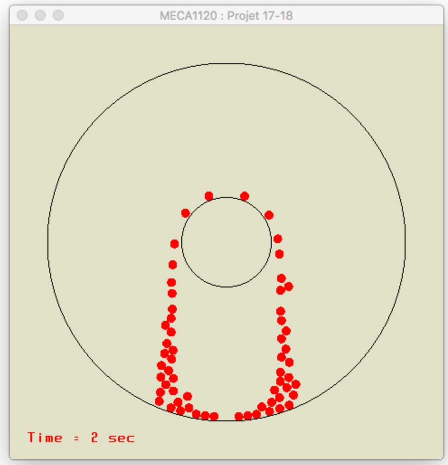
1 Simulation multi-échelle de milieux granulaires immergés.





L'objectif du projet est de vous initier aux difficultés de la mise au point et de la certification d'une application numérique. Rassurez-vous : il ne s'agit nullement de vous transformer en experts de l'architecture de grandes applications numériques ! Nous nous limiterons à l'écriture d'un tout petit programme C pour simuler l'interaction entre l'écoulement d'un fluide à l'échelle macroscopique et le mouvement de particules.

Le projet consistera en 3 parties distinctes :

1. Tout d'abord, il s'agira de rendre plus efficace le solveur de contact pour des éléments discrets. Il s'agissait de calculer des corrections de vitesses pour tenir compte des impulsions que vont ressentir des billes lorsqu'elles entrent en contact entre elles ou avec les deux frontières extérieures du domaine. On considère m billes qui sont soumises à la gravité et à une force de trainée linéaire.
2. Ensuite, il s'agira de résoudre les équations d'un écoulement quasi-statique incompressible d'un fluide newtonien sur le domaine de calcul.
3. Finalement, il faudra effectuer le couplage entre le fluide et les billes en calculant l'interaction entre le fluide et les billes, via la force de trainée.

1.1 Les équations à résoudre pour les billes...

A chaque pas de temps, on met à jour, la vitesse et la position de m billes :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_k^* &= (u_k^*, v_k^*)\\ \mathbf{x}_k^* &= (x_k^*, y_k^*)\end{aligned}$$

en utilisant les relations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} m_i \frac{\Delta u_k^*}{\Delta t} &= -\gamma\Big(u_k^* - u(x_k^*, y_k^*)\Big)\\ m_i \frac{\Delta v_k^*}{\Delta t} &= -m_i g - \gamma\Big(v_k^* - v(x_k^*, y_k^*)\Big)\\ \frac{\Delta x_k^*}{\Delta t} &= u_k^*\\ \frac{\Delta y_k^*}{\Delta t} &= v_k^* \end{aligned}\right.$$

où m_k est la masse de la bille, tandis que $\mathbf{v}(x_k^*, y_k^*) = (u(x_k^*, y_k^*), v(x_k^*, y_k^*))$ est la vitesse du fluide à la position occupée par la bille. On voit donc que le fluide va interagir avec les billes via le terme de trainée. L'accélération de la gravité est notée g.

Ici, on ne tient pas compte des collisions qui se sont effectuées entre les billes et avec les deux frontières. Afin d'éviter toute inter-pénétration, il faudra corriger les vitesses avant de mettre à jour les positions : c'est le rôle du solveur de contact que vous avez déjà réalisé et dont vous pourrez ici tirer profit !

1.2 Les équations à résoudre pour l'écoulement du fluide...

A chaque pas de temps et pour tout point du domaine considéré Ω, on met à jour les vitesses $\mathbf{v} = (u, v)$ et la pression p du fluide

$$u(x,y) \quad v(x,y) \quad p(x,y)$$

en utilisant les équations qui décrivent l'écoulement quasi-statique incompressible d'un fluide newtonien :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 0 &=& -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \displaystyle\sum_k \gamma(u - u_k^*)\delta|_{(x_k^*, y_k^*)} & \forall (x,y) \in \Omega\\[3ex] 0 &=& -\dfrac{\partial p}{\partial y} - \rho g + \mu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \displaystyle\sum_k \gamma(v - v_k^*)\delta|_{(x_k^*, y_k^*)} & \forall (x,y) \in \Omega\\[3ex] 0 &=& -\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) & \forall (x,y) \in \Omega \end{array}\right.$$

où g représente toujours l'accélération de la gravité, tandis que ρ et μ sont la masse volumique et la viscosité du fluide respectivement. Pour compléter le modèle mathématique du fluide, on imposera que la vitesse du cercle intérieur est nulle, tandis que le cylindre extérieur est en rotation : la norme de la vitesse sur le cylindre extérieur sera fixée par la paramètre v_{ext}. Finalement, on imposera une valeur nodale nulle de pression pour que le problème soit bien posé.

En l'absence de grains, on peut montrer que la pression correspond à la pression hydrostatique et que le profil de vitesse est linéaire entre les deux cylindres. Pour encore davantage simplifier le problème, nous allons supposer que l'influence des grains est relativement modeste et que la pression ne sera pas modifiée par leur présence : en d'autres mots, nous allons supposer que la pression restera toujours hydrostatique et ne fera que s'opposer à la gravité. Nous allons donc simplifier notre modèle comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} 0 & = & \mu \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \displaystyle\sum_k \gamma (u - u_k^*) \delta|_{(x_k^*, y_k^*)} & \forall (x,y) \in \Omega \\ 0 & = & \mu \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \displaystyle\sum_k \gamma (v - v_k^*) \delta|_{(x_k^*, y_k^*)} & \forall (x,y) \in \Omega \end{array} \right.$$

Il s'agit donc de résoudre les équations ci-dessus en utilisant la méthode des éléments finis linéaires uniquement avec des éléments triangulaires et des fonctions de forme de degré un.

$$\begin{array}{lcl} u(x,y) & \approx & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} U_i \; \tau_i(x,y) \\ v(x,y) & \approx & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} V_i \; \tau_i(x,y) \end{array}$$

Les $2n$ équations discrètes associées respectivement à (U_i, V_i) sont :

$$\begin{array}{lcl} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu < \frac{\partial \tau_i}{\partial x}\frac{\partial \tau_j}{\partial x} + \frac{\partial \tau_i}{\partial y}\frac{\partial \tau_j}{\partial y} > U_j + \gamma \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \tau_i^* \tau_j^* U_j & = & \gamma \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \tau_i^* u_k^* \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mu < \frac{\partial \tau_i}{\partial x}\frac{\partial \tau_j}{\partial x} + \frac{\partial \tau_i}{\partial y}\frac{\partial \tau_j}{\partial y} > V_j + \gamma \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \tau_i^* \tau_j^* V_j & = & \gamma \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \tau_i^* v_k^* \end{array}$$

où n correspond au nombre global de fonctions de forme. On a défini $\tau_i^* = \tau_i(x_k^*, y_k^*)$: c'est, en effet, le résultat obtenu en intégrant la distribution de Dirac par la fonction test.

1.3 Ce que vous devez réaliser !

L'objet du projet est de réaliser un petit code d'éléments finis permettant de prédire l'évolution de milieux granulaires immergés. Il y a deux étapes distinctes à programmer pour chaque pas de temps, le calcul des nouvelles vitesses et positions de billes et le calcul de nouvelles vitesses et pression du fluide. Le couplage entre les billes et le fluide est assuré via la force de trainée. La conception et les structures de données pour le programme final peuvent être réalisées de la manière que vous le désirez, mais le code doit être un programme écrit en langage C. Deux maillages sont fournis pour effectuer vos simulations : il est fortement conseillé de travailler principalement sur le maillage de petite taille.

Il vous est donc demandé :

1. De concevoir les structures de données et l'implémentation d'un programme permettant d'effectuer la simulation de milieux granulaires immergés.
2. De reprendre le solveur de contact que vous avez développé lors des devoirs : vous pouvez utiliser la solution fournie par nos soins.
3. D'obtenir la solution de l'écoulement de Couette : vous pouvez repartir aussi de la solution de l'équation de Poisson que nous avons résolu avec des solveurs creux.
4. D'effectuer le couplage entre les grains et les fluides avec la force de trainée.
5. De choisir des paramètres afin d'obtenir une simulation intéressante, de discuter ce choix de paramètres et d'effectuer quelques simulations...
6. (bonus) De résoudre le problème de l'écoulement avec le solveur linéaire le plus efficace possible : utiliser les gradients conjugés serait évidemment vachement apprécié.
7. (bonus) D'optimiser le solveur de contact pour qu'il soit plus rapide lorsque le nombre de grains est élevé.
8. (bonus) D'étudier comme on peut améliorer d'un point de vue théorique l'algorithme de détection des contact avec le cylindre extérieur : la version proposée est basée sur une linéarisation de la frontière : ce qui introduit une erreur pour la prédiction de la position de contact d'un bille avec la frontière extérieure.
9. (bonus) De modifier l'interface graphique afin de rendre la visualisation des résultats la plus jolie possible afin d'impressionner favorablement l'équipe didactique.
10. De rédiger une note de synthèse d'au maximum 6 pages pour le Service de Certification des Programmes d'Elements Finis Mal Foutus. Produire quelques illustrations pertinentes pour l'analyse de la solution. Expliquer comment vous avez optimisé votre programme afin qu'il soit le plus rapide possible. Ne pas recopier les développements théoriques du syllabus, ne pas recopier l'énoncé du problème, ne pas fournir des diagrammes incompréhensibles, ne pas donner des tableaux de chiffres indigestes. L'orthographe, le soin et la présentation seront conformes à celles d'une note fournie par un bureau d'études professionnel.

Il n'est pas nécessaire, ni conseillé, ni intelligent de faire tous les bonus.... Choisir ce qui vous intéresse le plus et essayer de produire quelque chose de correct, d'intelligent et d'original. Le projet est délibérément plus ouvert et moins directif que les années précédentes : cela doit vous permettre de proposer une implémentation originale et différente des autres groupes. Il n'y a pas de solution unique de référence à obtenir : il faut juste nous convaincre que vous avez compris ce que vous avez réalisé.

L'entièreté de votre code sera inclus dans un unique fichier `project.c` Votre programme doit être écrit en pur C et devra pouvoir être compilé par nos soins avec la librairie graphique fournie avec les devoirs.

Toutes les soumissions seront soumises à un logiciel anti-plagiat. En cas de fraude flagrante, les cas de plagiat seront soumis au Jury des examens. Vous êtes invités à consulter la page web de l'Université pour avoir une petite idée des sanctions possibles dans ce cas !

L'évaluation du projet se fera sur base d'une interview où vous serez invité à faire une démonstration de votre programme sur votre ordinateur. Les interviews se feront pendant la dernière semaine, les mercredi 16 mai, jeudi 17 mai et vendredi 18 mai 2018.

1.4 Evaluation du projet

L'évaluation du projet se fera sur la base suivante pour un total de 50 points :

Programme qui fonctionne	10
Précision des résultats	5
Rapidité du code de calcul	5
Style et esthétique du code source	5
Rapport	10
Interview	10
Bonus éventuels	5

Une version imprimée du rapport sera déposée dans le bâtiment Euler où il vous sera également possible de vous inscrire pour un slot horaire pour l'interview du projet. Une version électronique du rapport et du programme devra également être soumise via le serveur web.

La deadline pour la remise électronique et physique du rapport et du programme est fixée au mardi 15 mai 2018 à 23h59. Aucun délai supplémentaire ne sera accordé.

Bon courage à tous !
Bonne chance pour vos autres examens et la fin du quadrimestre...