

# 1 Paramètres influençant le conditionnement de $A$

## 1.1 Largeur de l'entrefer

Moins l'entrefer est large, plus le maillage doit être raffiné à cet endroit. Nous remarquons donc que pour des entrefers de petite taille, le conditionnement de la matrice augmente rapidement (figure 1a). Si nous appelons  $e$  la taille de l'entrefer, on peut écrire

$$\kappa(A) \sim \alpha + \frac{\beta}{e}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Le spectre reste distribué de façon semblable peu importe la taille de l'entrefer, mais plus celui-ci est grand, moins il y a de valeurs singulières, comme montré sur la figure 1b.

Lorsque nous commentons la ligne `lc3=D/2.*R` et la remplaçons par `lc3=E/2.*R`, nous augmentons en fait la taille de l'entrefer. L'effet sur le maillage est montré à la figure 2.

## 1.2 Perméabilité relative du noyau magnétique

Plus la perméabilité relative du noyau magnétique augmente, plus le conditionnement de  $A$  augmente aussi, selon une loi approximativement logarithmique (voir figure 1c). On écrit (en notant  $\mu_r$  la perméabilité)

$$\kappa(A) \sim \gamma + \delta \log(\mu_r + \varepsilon), \quad \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Le spectre change uniquement pour les valeurs singulières les plus petites, et celles-ci deviennent encore plus basses, comme montré sur la figure 1d.

## 1.3 Courant injecté dans la bobine

Le courant injecté dans la bobine ne change en rien le maillage, et n'a donc aucun effet ni sur le conditionnement de la matrice  $A$ , ni sur son spectre de valeurs singulières, comme montré aux figures 1e et 1f.

## 1.4 Raffinement du maillage

Afin de voir l'effet du raffinement du maillage sur le conditionnement de la matrice  $A$ , nous avons joué sur le paramètre `clscale` de `ccore.py`. Plus celui-ci est petit, plus le maillage est fin. Le conditionnement de  $A$  diminue de façon linéaire plus `clscale` augmente, mais augmente soudainement pour la valeur de 34 (voir figure 1g). Cela est dû à l'algorithme de maillage, qui calcule pour cette valeur de `clscale` des éléments très plats (mauvais pour le conditionnement). On écrit donc en général (en notant `clscale` par  $c$ )

$$\kappa(A) \sim \begin{cases} \zeta + \eta c & \text{si } c < 34, \\ \theta + \iota c & \text{sinon,} \end{cases} \quad \zeta, \eta, \theta, \iota \in \mathbb{R}.$$

Le spectre des valeurs singulières a toujours la même forme, mais est "compressé" lorsque le paramètre `clscale` augmente, comme montré sur la figure 1h.

# 2 Approximation de rang faible

Nous cherchons à approximer la matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de rang  $r$  par une somme de  $\nu$  matrices de rang 1 comme suit :  $A_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} \sigma_j u_j v_j^*$ . Par le Théorème 5.8 pp. 35–36 dans le livre de référence, il est possible de démontrer que cette somme partielle capture l'énergie maximale possible de  $A$ , et ce autant pour la 2-norme matricielle (avec laquelle nous travaillons) que pour la norme de Frobenius. On définit alors l'erreur  $e_\nu$  comme  $e_\nu = \frac{\|A - A_\nu\|_2}{\|A\|_2}$ .

## 2.1 Influence du premier terme

Plus le système devient grand, moins le premier terme représente une grande partie de l'énergie totale, comme montré sur la figure 3a. La relation est approximativement linéaire.

## 2.2 Nombre de termes requis pour obtenir une précision donnée

Autant pour une erreur inférieure à 10 % qu'à 1 %, on observe une relation inversement proportionnelle (voir figures 3c et 3b).

## 2.3 Influence du conditionnement

L'influence du conditionnement est donc difficile à définir, car en utilisant les données de la question 1, on voit que le conditionnement effectue un saut en fonction de `clscale` (figure 1g autour de la valeur 34), alors que ce n'est pas le cas pour le pourcentage d'énergie contenu dans le premier terme, ni pour le nombre de termes requis pour borner l'énergie.

## A Appendice : figures

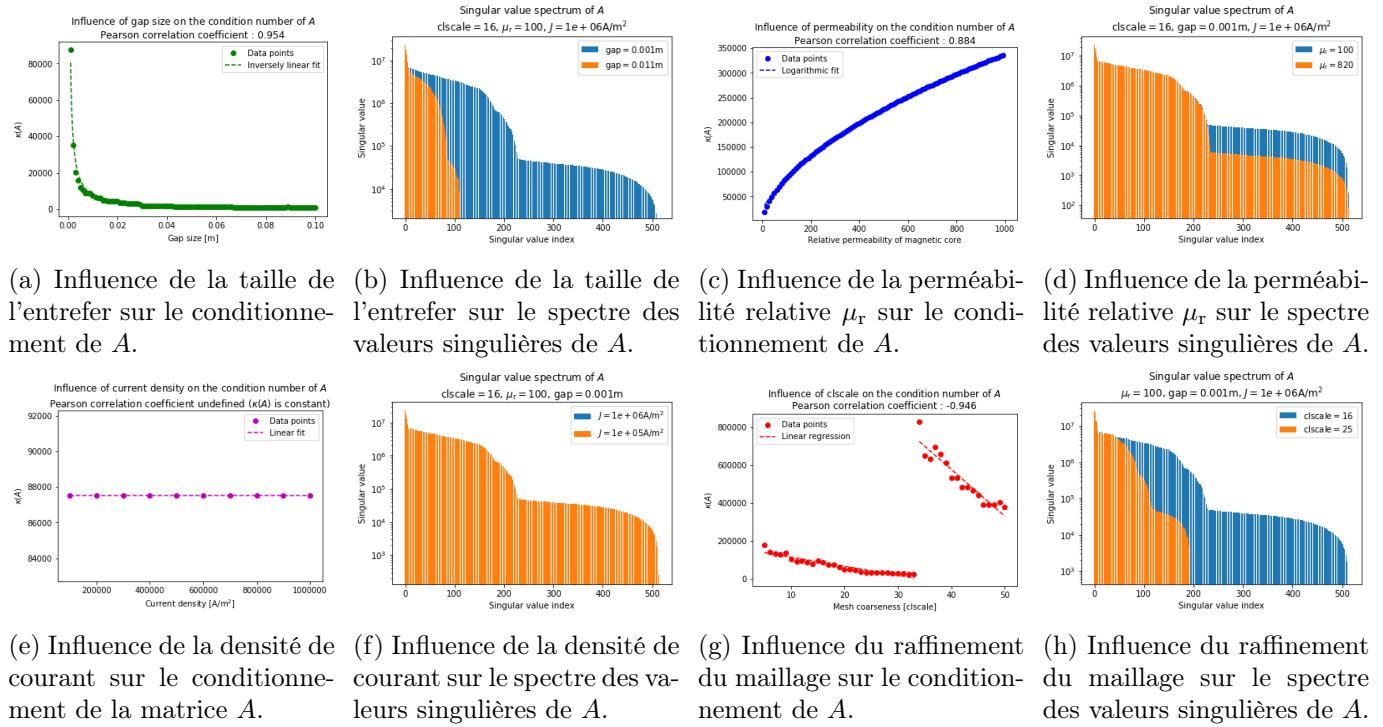


FIGURE 1 – Différents graphes pertinents pour l'analyse de la section 1. Les coefficients de corrélation sont toujours calculés par rapport au *curve fit* proposé.

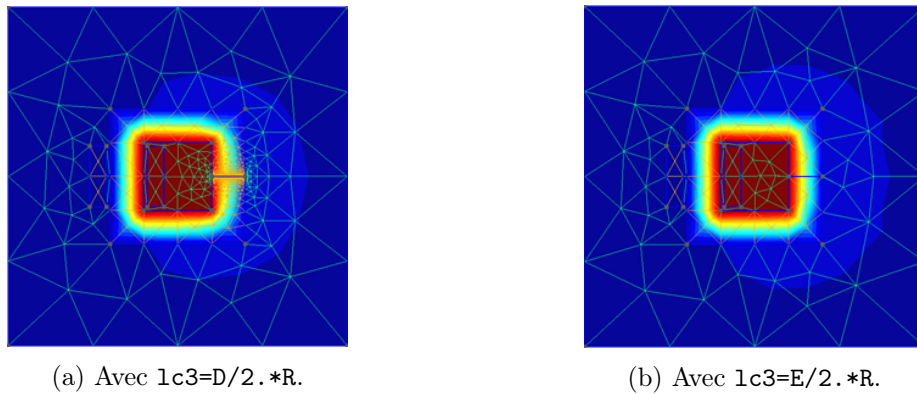


FIGURE 2 – Comparaison des maillages en changeant une ligne de code.

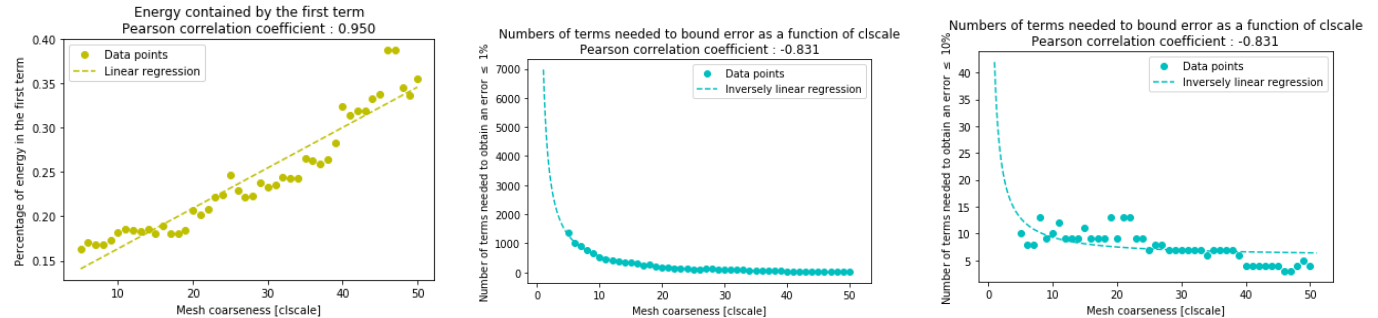


FIGURE 3 – Différents graphes pertinents pour l'analyse de la section 2. Les coefficients de corrélation sont toujours calculés par rapport au *curve fit* proposé.