
Pour ce devoir, nous utiliserons la décomposition SVD de la matrice A du système linéaire généré par le modèle éléments finis `ccore.py` pour analyser le concept de **conditionnement**, qui sera central dans la suite du cours, ainsi que pour observer la convergence des **approximations de rang faible** de matrices.

Il s'agit là d'une application un peu académique de la SVD. Cette dernière est en effet utile en pratique pour des systèmes linéaires ou des matrices plus difficiles et moins riches en propriétés que la matrice symétrique définie positive que l'on étudie ici (systèmes sur- ou sous-déterminés, matrice de rang déficient, etc...). Parmi les techniques numériques utilisant la décomposition SVD, on peut citer la Principal Component Analysis (PCA) où la SVD permet d'extraire les corrélations dominantes dans un échantillon statistique, et la Proper Orthogonal Decomposition (POD) où la SVD permet d'extraire les modes dominants de réponse d'un système dynamique. Ces méthodes, qui font partie de la famille des méthodes de réduction d'ordre, sortent cependant du cadre de ce cours et seraient plus à leur place dans un cours d'Analyse Numérique II.

Pour ce second devoir, l'implémentation (qui est essentiellement du traitement de données) importe moins que l'analyse que vous ferez des résultats obtenus et la façon dont vous interpréterez et communiquerez ces résultats dans le rapport.

Paramètres influençant le conditionnement de A

Vous travaillez toujours au niveau du fichier `mysolver.py`. La première étape consiste à calculer la SVD de la matrice A au moyen de la fonction appropriée de `scipy`.

La première partie du devoir consiste ensuite à étudier l'effet des paramètres suivants du modèle

- largeur de l'entrefer,
- perméabilité relative du noyau magnétique,
- courant injecté dans la bobine,
- raffinement du maillage,

sur le nombre de conditionnement de la matrice, ainsi que, de façon plus générale, sur le spectre des valeurs singulières.

Si vous commentarisez la ligne `lc3=D/2.*R` dans la description de la géométrie et la remplacez par `lc3=E/2.*R`, quel est l'effet sur le maillage (nombre et forme des éléments, surtout dans le cas de petits entrefers), ainsi que sur le conditionnement.

Limitez-vous à des tailles de système raisonnables pour l'étude et interprétez qualitativement ce que vous observez.

Approximation de rang faible

Utilisez la décomposition SVD de A (pas celle de A^{-1}) pour établir une expression de la solution x du système $Ax = b$ en une somme de termes d'énergie décroissante.

Quel est le pourcentage de l'énergie totale de la solution exacte contenue dans le premier terme de cette somme. Calculez le nombre de termes nécessaires (par rapport à la taille du système) pour obtenir la solution exacte avec une erreur (précisez comment vous définissez cette erreur) de 10% et 1%. Quel est l'effet du conditionnement sur ces nombres ?

Consignes

Ce devoir est un travail **personnel**.

Les implémentations sont à réaliser en PYTHON 3. Les bibliothèques admises sont :

- NUMPY
- SCIPY (exceptionnellement pour ce second devoir)
- MATPLOTLIB
- TIME

Toute autre bibliothèque n'est pas acceptée.

Un rapport papier est à remettre pour le lundi 12 novembre 2018 à 16h au plus tard à l'Euler A.108 (Astrid Leduc). Le rapport ne doit pas contenir de page de garde, seulement une entête reprenant au moins le nom de l'auteur. Le rapport ne doit pas spécialement contenir de code source mais décrire en une page (càd un recto) votre démarche pour l'implémentation des expériences numériques ainsi que vos interprétations et conclusions en texte suivi. Le verso pourra reprendre un certain nombre de diagrammes et figures référencés à partir du texte.

Privilégiez les diagrammes comparatifs avec des axes et des courbes dûment et clairement labellés. Cela demande un certain investissement de faire des figures avec un véritable contenu scientifique, sans être toutefois surchargées. Une partie de l'évaluation du devoir portera sur la clarté et la pertinence des diagrammes.

La langue de rédaction est le français. Le rapport doit être réalisé avec L^AT_EX, avec la `documentclass article [11pt]`. Le .PDF et le source .TEX de ce rapport sont à remettre sur Moodle sous forme d'un dossier (.zip) compressé.

Les implémentations MYSOLVE.PY et CCORE.PY (si modifié) sont également à remettre sur le Moodle du cours d'Analyse Numérique.

Les rapports et fonctions Python seront soumis à un logiciel anti-plagiat.

FAQ

- Références théoriques principales pour le devoir 2 : Lecture 12 et p. 35-36 du livre de référence.
- Il n'est pas demandé d'implémenter une boucle externe pour réaliser les études paramétriques, qui peuvent être faites à la main.
- Justifiez le choix des intervalles de variation des paramètres.
- On ne demande pas d'interprétation physique de l'effet des paramètres p du modèle sur le conditionnement K mais plutôt des observations qualitatives du type : K augmente avec p selon une loi presque quadratique, ou, c'est le paramètre p qui a le moins d'influence sur K , etc. . .
- On s'attend à une influence de la qualité des éléments sur le conditionnement. Un élément de mauvaise qualité est un élément plat.
- Vous avez facilement accès au nombre d'éléments finis avec la fonction Tools/Statistics dans le menu de la fenêtre Gmsh.
- Vous pouvez utiliser la solution exacte (obtenue avec la matrice de rang plein) pour définir les erreurs dans la partie 2.