

卡尔曼滤波

维基百科，自由的百科全书

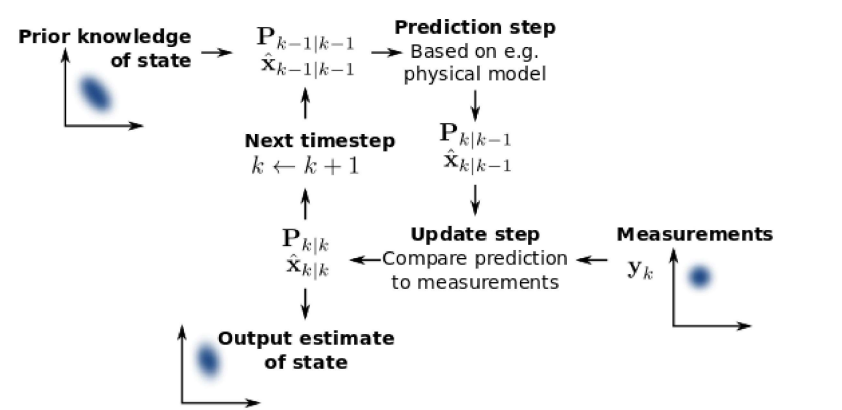
卡尔曼滤波（**Kalman filter**）是一种高效率的**递归滤波器**（自回归滤波器），它能够从一系列的不完全及包含**噪声**的**测量**中，估计**动态系统**的状态。卡尔曼滤波会根据各测量量在不同时间下的值，考虑各时间下的**联合分布**，再产生对未知变数的估计，因此会以只以单一测量量为基础的估计方式要准。卡尔曼滤波得名自主要贡献者之一的鲁道夫·卡尔曼。

卡尔曼滤波在技术领域有许多的应用。常见的有飞机及太空船的**导引**、**导航**及**控制**^[1]。卡尔曼滤波也广为使用在**时间序列**的分析中，例如**信号处理**及**计量经济学**中。卡尔曼滤波也是**机器人运动规划**及**控制**的重要主题之一，有时也包括在**轨迹最佳化**。卡尔曼滤波也用在**中枢神经系统运动控制**的建模中。因为从给与运动命令到收到感觉神经的回授之间有时间差，使用卡尔曼滤波有助于建立符合实际的系统，估计运动系统的目前状态，并且更新命令^[2]。

卡尔曼滤波的算法是二步骤的程序。在估计步骤中，卡尔曼滤波会产生有关目前状态的估计，其中也包括不确定性。只要观察到下一个量测（其中一定含有某种程度的误差，包括随机噪声）。会透过加权平均来更新估计值，而确定性越高的量测加权比重也越高。算法是迭代的，可以在**实时控制系统**中执行，只需要目前的输入量测、以往的计算值以及其不确定性矩阵，不需要其他以往的资讯。

使用卡尔曼滤波不用假设误差是**正态分布**^[3]，不过若所有的误差都是正态分布，卡尔曼滤波可以得到正确的条件机率估计。

也发展了一些扩展或是广义的卡尔曼滤波，例如运作在非线性系统的**扩展卡尔曼滤波**及**无损卡尔曼滤波**（**unscented Kalman filter**）。底层的模型类似**隐马尔可夫模型**，不过**潜在变量**的状态空间是连续的，而且所有潜在变量及可观测变数都是正态分布



卡尔曼滤波器会追踪系统的估计状态，以及估计的变异量或是不确定性。会透过状态转换模型以及其量测来更新估计值。 $\hat{x}_{k|k-1}$ 是指时间 k 时的估计，还没有考虑第 k 次量测 y_k 的资讯， $P_{k|k-1}$ 为对应的不确定性

目录

应用实例

命名

基本动态系统模型

卡尔曼滤波器

预测

更新

不变量 (Invariant)

实例

推导

推导后验协方差矩阵

最优卡尔曼增益的推导

后验误差协方差公式的化简

与递归贝叶斯估计之间的关系

信息滤波器

非线性滤波器

扩展卡尔曼滤波器

应用

参见

外部链接

参考文献

应用实例

卡尔曼滤波的一个典型实例是从一组有限的，包含噪声的，通过对物体位置的观察序列（可能有偏差）预测出物体的位置的坐标及速度。在很多工程应用（如雷达、电脑视觉）中都可以找到它的身影。同时，卡尔曼滤波也是控制理论以及控制系统工程中的一个重要课题。

例如，对于雷达来说，人们感兴趣的是其能够跟踪目标。但目标的位置、速度、加速度的测量值往往在任何时候都有噪声。卡尔曼滤波利用目标的动态信息，设法去掉噪声的影响，得到一个关于目标位置的好的估计。这个估计可以是对当前目标位置的估计（滤波），也可以是对将来位置的估计（预测），也可以是对过去位置的估计（插值或平滑）。

命名

这种滤波方法以它的发明者鲁道夫.E.卡尔曼（Rudolph E. Kalman）命名，但是根据文献可知实际上Peter Swerling在更早之前就提出了一种类似的算法。

斯坦利·施密特（Stanley Schmidt）首次实现了卡尔曼滤波器。卡尔曼在NASA埃姆斯研究中心访问时，发现他的方法对于解决阿波罗计划的轨道预测很有用，后来阿波罗飞船的导航电脑便使用了这种滤波器。关于这种滤波器的论文由Swerling（1958）、Kalman (1960)与Kalman and Bucy（1961）发表。

目前，卡尔曼滤波已经有很多不同的实现。卡尔曼最初提出的形式现在一般称为简单卡尔曼滤波器。除此以外，还有施密特扩展滤波器、信息滤波器以及很多Bierman, Thornton开发的平方根滤波器的变种。也许最常见的卡尔曼滤波器是锁相环，它在收音机、计算机和几乎任何视频或通讯设备中广泛存在。

以下的讨论需要线性代数以及概率论的一般知识。

基本动态系统模型

卡尔曼滤波建立在线性代数和隐马尔可夫模型（hidden Markov model）上。其基本动态系统可以用一个马尔可夫链表示，该马尔可夫链建立在一个被高斯噪声（即正态分布的噪声）干扰的线性算子上的。系统的状态可以用一个元素为实数的向量表示。随着离散时间的每一个增加，这个线性算子就会作用在当前状态上，产生一个新的状态，并也会带入一些噪声，同时系统的一些已知的控制器的控制信息也会被加入。同时，另一个受噪声干扰的线性算子产生出这些隐含状态的可见输出。

为了从一系列有噪声的观察数据中用卡尔曼滤波器估计出被观察过程的内部状态，必须把这个过程在卡尔曼滤波的框架下建立模型。也就是说对于每一步 k ，定义矩阵 $\mathbf{F}_k, \mathbf{H}_k, \mathbf{Q}_k, \mathbf{R}_k$ ，有时也需要定义 \mathbf{B}_k ，如下。

卡尔曼滤波模型假设 k 时刻的真实状态是从 $(k-1)$ 时刻的状态演化而来，符合下式：

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k$$

其中

- \mathbf{F}_k 是作用在 \mathbf{x}_{k-1} 上的状态变换模型（/矩阵/矢量）。
- \mathbf{B}_k 是作用在控制器向量 \mathbf{u}_k 上的输入 - 控制模型。
- \mathbf{w}_k 是过程噪声，并假定其符合均值为零，协方差矩阵为 \mathbf{Q}_k 的多元正态分布。

$$\mathbf{w}_k \sim N(0, \mathbf{Q}_k)$$

时刻 k ，对真实状态 \mathbf{x}_k 的一个测量 \mathbf{z}_k 满足下式：

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

其中 \mathbf{H}_k 是观测模型，它把真实状态空间映射成观测空间， \mathbf{v}_k 是观测噪声，其均值为零，协方差矩阵为 \mathbf{R}_k ，且服从正态分布。

$$\mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k)$$

初始状态以及每一时刻的噪声 $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_1 ... \mathbf{v}_k\}$ 都认为是互相独立的。

实际上，很多真实世界的动态系统都不确切的符合这个模型；但是由于卡尔曼滤波器被设计在有噪声的情况下工作，一个近似的符合已经可以使这个滤波器非常有用了。更多其它更复杂的卡尔曼滤波器的变种，在下边讨论中有描述。

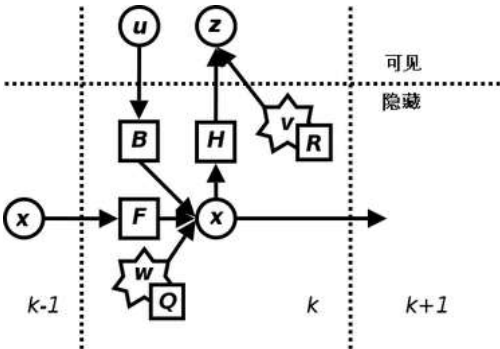
卡尔曼滤波器

卡尔曼滤波是一种递归的估计，即只要获知上一时刻状态的估计值以及当前状态的观测值就可以计算出当前状态的估计值，因此不需要记录观测或者估计的历史信息。卡尔曼滤波器与大多数滤波器不同之处，在于它是一种纯粹的时域滤波器，它不需要像低通滤波器等频域滤波器那样，需要在频域设计再转换到时域实现。

卡尔曼滤波器的状态由以下两个变量表示：

- $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ ，在时刻 k 的状态的估计；
- $\mathbf{P}_{k|k}$ ，后验估计误差协方差矩阵，度量估计值的精确程度。

卡尔曼滤波器的操作包括两个阶段：预测与更新。在预测阶段，滤波器使用上一状态的估计，做出对当前状态的估计。在更新阶段，滤波器利用对当前状态的观测值优化在预测阶段获得的预测值，以获得一个更精确的新估计值。



卡尔曼滤波器的模型。圆圈代表向量，方块代表矩阵，星号代表高斯噪声，其协方差矩阵在右下方标出。

预测

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \text{ (预测状态)}$$
$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k \text{ (预测估计协方差矩阵)}$$

可参考：http://www.cs.unc.edu/~welch/media/pdf/kalman_intro.pdf

可参考：<http://web.mit.edu/kirtley/kirtley/binlustuff/literature/control/Kalman%20filter.pdf>

更新

首先要算出以下三个量：

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \text{ (测量余量, measurement residual)}$$
$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \text{ (测量余量协方差)}$$
$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \text{ (最优卡尔曼增益)}$$

然后用它们来更新滤波器变量 \mathbf{x} 与 \mathbf{P} ：

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k \text{ (更新的状态估计)}$$
$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} \text{ (更新的协方差估计)}$$

使用上述公式计算 $\mathbf{P}_{k|k}$ 仅在最优卡尔曼增益的时候有效。使用其他增益的话，公式要复杂一些，请参见[推导](#)。

不变量 (Invariant)

如果模型准确，而且 $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ 与 $\mathbf{P}_{0|0}$ 的值准确的反映了最初状态的分布，那么以下不变量就保持不变：所有估计的误差均值 为零

- $\mathbf{E}[\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}] = \mathbf{E}[\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}] = \mathbf{0}$
- $\mathbf{E}[\tilde{\mathbf{y}}_k] = \mathbf{0}$

且[协方差矩阵](#)准确的反映了估计的协方差：

- $\mathbf{P}_{k|k} = \text{cov}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})$
- $\mathbf{P}_{k|k-1} = \text{cov}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})$
- $\mathbf{S}_k = \text{cov}(\tilde{\mathbf{y}}_k)$

请注意，其中 $\mathbf{E}[\mathbf{a}]$ 表示 \mathbf{a} 的期望值， $\text{cov}(\mathbf{a}) = \mathbf{E}[\mathbf{a}\mathbf{a}^T]$ 。

实例

考虑在无摩擦的、无限长的直轨道上的一辆车。该车最初停在位置 \mathbf{o} 处，但时不时受到随机的冲击。每隔 Δt 秒即测量车的位置，但是这个测量是非精确的；想建立一个关于其位置以及[速度](#)的模型。来看如何推导出这个模型以及如何从这个模型得到卡尔曼滤波器。

因为车上无动力，所以可以忽略掉 \mathbf{B}_k 和 \mathbf{u}_k 。由于 \mathbf{F} 、 \mathbf{H} 、 \mathbf{R} 和 \mathbf{Q} 是常数，所以时间下标可以去掉。

车的位置以及速度（或者更加一般的，一个粒子的运动状态）可以被线性状态空间描述如下：

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

其中 $\dot{\mathbf{x}}$ 是速度，也就是位置对于时间的导数。

假设在 $(k-1)$ 时刻与 k 时刻之间，车受到 a_k 的加速度，其符合均值为 $\mathbf{0}$ ，标准差为 σ_a 的正态分布。根据牛顿运动定律，可以推出

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}a_k$$

其中

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

且

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t \end{bmatrix}$$

可以发现

$$\mathbf{Q} = \text{cov}(\mathbf{G}a) = \mathbf{E}[(\mathbf{G}a)(\mathbf{G}a)^T] = \mathbf{G}\mathbf{E}[a^2]\mathbf{G}^T = \mathbf{G}[\sigma_a^2]\mathbf{G}^T = \sigma_a^2\mathbf{G}\mathbf{G}^T \text{ (因为}\sigma_a\text{是一个标量)}。$$

在每一时刻，对其位置进行测量，测量受到噪声干扰。假设噪声服从正态分布，均值为 $\mathbf{0}$ ，标准差为 σ_z 。

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k$$

其中

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

且

$$\mathbf{R} = \mathbf{E}[\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^T] = \begin{bmatrix} \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

如果知道足够精确的车最初的位置，那么可以初始化

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

并且，若让滤波器知道确切的初始位置，可给出一个协方差矩阵：

$$\mathbf{P}_{0|0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

如果不确切的知道最初的位置与速度，那么协方差矩阵可以初始化为一个对角线元素是 B 的矩阵， B 取一个合适的比较大的数。

$$\mathbf{P}_{0|0} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

此时，与使用模型中已有信息相比，滤波器更倾向于使用初次测量值的信息。

推导

推导后验协方差矩阵

按照上边的定义，从误差协方差 $\mathbf{P}_{k|k}$ 开始推导如下：

$$\mathbf{P}_{k|k} = \text{cov}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k})$$

代入 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \text{cov}(\mathbf{x}_k - (\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k))$$

再代入 $\tilde{\mathbf{y}}_k$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \text{cov}(\mathbf{x}_k - (\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})))$$

与 \mathbf{z}_k

$$\mathbf{P}_{k|k} = \text{cov}(\mathbf{x}_k - (\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})))$$

整理误差向量，得

$$\mathbf{P}_{k|k} = \text{cov}((\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) - \mathbf{K}_k \mathbf{v}_k)$$

因为测量误差 \mathbf{v}_k 与其他项是非相关的，因此有

$$\mathbf{P}_{k|k} = \text{cov}((\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})) + \text{cov}(\mathbf{K}_k \mathbf{v}_k)$$

利用协方差矩阵的性质，此式可以写作

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \text{cov}(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \text{cov}(\mathbf{v}_k) \mathbf{K}_k^T$$

使用不变量 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 以及 \mathbf{R}_k 的定义这一项可以写作：

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k)^T + \mathbf{K}_k \mathbf{R}_k \mathbf{K}_k^T$$

这一公式对于任何卡尔曼增益 \mathbf{K}_k 都成立。如果 \mathbf{K}_k 是最优卡尔曼增益，则可以进一步简化，请见下文。

最优卡尔曼增益的推导

卡尔曼滤波器是一个最小均方误差估计器，后验状态误差估计（英文：*a posteriori* state estimate）是

$$\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$$

最小化这个矢量幅度平方的期望值， $\mathbf{E}[|\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k|k}|^2]$ ，这等同于最小化后验估计协方差矩阵 $\mathbf{P}_{k|k}$ 的迹（trace）。将上面方程中的项展开、抵消，得到：

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k} &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k) \mathbf{K}_k^T \\ &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^T \end{aligned}$$

当矩阵导数是0的时候得到 $\mathbf{P}_{k|k}$ 的迹（trace）的最小值：

$$\frac{d \text{tr}(\mathbf{P}_{k|k})}{d \mathbf{K}_k} = -2(\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1})^T + 2\mathbf{K}_k \mathbf{S}_k = 0$$

此处须用到一个常用的式子，如下：

$$\frac{d \operatorname{tr}(\mathbf{BAC})}{d \mathbf{A}} = \mathbf{B}^T \mathbf{C}^T$$

从这个方程解出卡尔曼增益 \mathbf{K}_k :

$$\mathbf{K}_k \mathbf{S}_k = (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1})^T = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T$$
$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1}$$

这个增益称为*最优卡尔曼增益*，在使用时得到*最小均方误差*。

后验误差协方差公式的化简

在卡尔曼增益等于上面导出的最优值时，计算后验协方差的公式可以进行简化。在卡尔曼增益公式两侧的右边都乘以 $\mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^T$ 得到

$$\mathbf{K}_k \mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^T = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_k^T$$

根据上面后验误差协方差展开公式，

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k \mathbf{S}_k \mathbf{K}_k^T$$

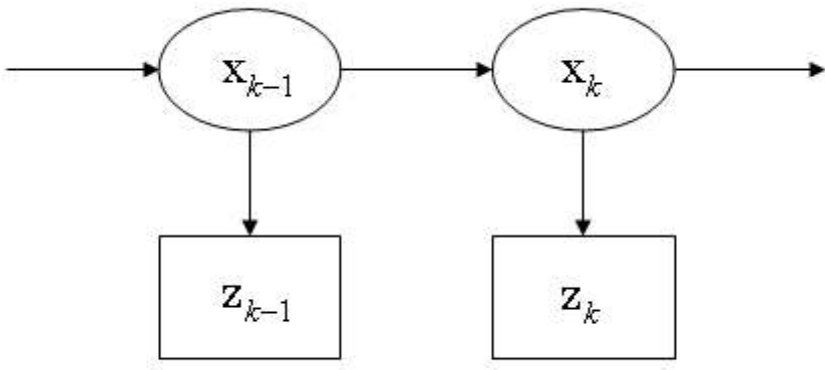
最后两项可以抵消，得到

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}.$$

这个公式的计算比较简单，所以实际中总是使用这个公式，但是需注意这公式仅在使用最优卡尔曼增益的时候它才成立。如果算术精度总是很低而导致*数值稳定性*出现问题，或者特意使用非最优卡尔曼增益，那么就不能使用这个简化；必须使用上面导出的后验误差协方差公式。

与递归贝叶斯估计之间的关系

假设真正的状态是无法观察的*马尔可夫过程*，测量结果是从隐性马尔可夫模型观察到的状态。



根据马尔可夫假设，真正的状态仅受最近一个状态影响而与其它以前状态无关。

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$$

与此类似，在时刻 k 测量只与当前状态有关而与其它状态无关。

$$p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_0,\dots,\mathbf{x}_k) = p(\mathbf{z}_k|\mathbf{x}_k)$$

根据这些假设，隐性马尔可夫模型所有状态的概率分布可以简化为：

$$p(\mathbf{x}_0,\dots,\mathbf{x}_k,\mathbf{z}_1,\dots,\mathbf{z}_k) = p(\mathbf{x}_0)\prod_{i=1}^k p(\mathbf{z}_i|\mathbf{x}_i)p(\mathbf{x}_i|\mathbf{x}_{i-1})$$

然而，当卡尔曼滤波器用来估计状态 \mathbf{x} 时，感兴趣的机率分布，是基于目前为止所有个测量值来得到的当前状态之机率分布

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Z}_{k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{Z}_{k-1})\,d\mathbf{x}_{k-1}$$

信息滤波器

非线性滤波器

基本卡尔曼滤波器（The basic Kalman filter）是限制在线性的假设之下。然而，大部分非平凡的（non-trivial）的系统都是非线性系统。其中的“非线性性质”（non-linearity）可能是伴随存在过程模型（process model）中或观测模型（observation model）中，或者两者兼有之。

扩展卡尔曼滤波器

在扩展卡尔曼滤波器（Extended Kalman Filter，简称EKF）中状态转换和观测模型不需要是状态的线性函数，可替换为（可微的）函数。

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k) \\ \mathbf{z}_k &= h(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)\end{aligned}$$

函数 f 可以用来从过去的估计值中计算预测的状态，相似的，函数 h 可以用来以预测的状态计算预测的测量值。然而 f 和 h 不能直接的应用在协方差中，取而代之的是计算偏导矩阵（**Jacobian**）。

在每一步中使用当前的估计状态计算**Jacobian**矩阵，这几个矩阵可以用在卡尔曼滤波器的方程中。这个过程，实质上将非线性的函数在当前估计值处线性化了。

这样一来，卡尔曼滤波器的等式为：

预测

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} &= f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k, 0) \\ \mathbf{P}_{k|k-1} &= \mathbf{F}_k\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k\end{aligned}$$

使用**Jacobians**矩阵更新模型

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_k &= \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{u}_k} \\ \mathbf{H}_k &= \left.\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}\end{aligned}$$

更新

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{z}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, 0)$$

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}$$

预测

如同扩展卡尔曼滤波器（EKF）一样, UKF的预测过程可以独立于UKF的更新过程之外，与一个线性的（或者确实是扩展卡尔曼滤波器的）更新过程合并来使用；或者，UKF的预测过程与更新过程在上述中地位互换亦可。

应用

- 自动驾驶仪
- 动态定位系统
- 经济学，特别是宏观经济学，时间序列模型，以及计量经济学
- 惯性导航系统
- 雷达跟踪器
- 卫星导航系统

参见

- 即时定位与地图构建
- 快速卡尔曼滤波
- 比较：维纳滤波及粒子滤波器
- 施密特-卡尔曼滤波器
- 滤波问题

外部链接

- An Introduction to the Kalman Filter (http://www.cs.unc.edu/~tracker/media/pdf/SIGGRAPH2001_CoursePack_08.pdf), SIGGRAPH 2001 Course, Greg Welch and Gary Bishop
- Kalman filtering chapter (https://web.archive.org/web/20060420154727/http://www.cs.unc.edu/%7Ewelch/media/pdf/maybeck_ch1.pdf) from *Stochastic Models, Estimation*, by Peter Maybeck
- Kalman Filter (<http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/>) webpage, with lots of links
- Kalman Filtering (<https://web.archive.org/web/20130623214223/http://www.innovatia.com/software/papers/kalman.htm>)
- The unscented Kalman filter for nonlinear estimation (http://ieeexplore.ieee.org/xpl/abs_free.jsp?arNumber=882463)
- Kalman Filters*, thorough introduction to several types, together with applications to *Robot Localization* (http://www.negenborn.net/kal_loc/)

参考文献

- Gelb A., editor. Applied optimal estimation. MIT Press, 1974.

- Kalman, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering* Vol. 82: pp. 35-45 (1960)
 - Kalman, R. E., Bucy R. S., New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering* Vol. 83: pp. 95-107 (1961)
 - [JU97] Julier, Simon J. and Jeffery K. Uhlmann. A New Extension of the Kalman Filter to nonlinear Systems. In The Proceedings of AeroSense: The 11th International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls, Multi Sensor Fusion, Tracking and Resource Management II, SPIE, 1997.
 - Harvey, A.C. Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
1. Paul Zarchan; Howard Musoff. Fundamentals of Kalman Filtering: A Practical Approach. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Incorporated. 2000. ISBN 978-1-56347-455-2.
 2. Wolpert, Daniel; Ghahramani, Zoubin. Computational principles of movement neuroscience. *Nature Neuroscience*. 2000, **3**: 1212–7. PMID 11127840. doi:10.1038/81497.
 3. Kalman, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*. 1960, **82**: 35. doi:10.1115/1.3662552.

取自 “<https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=卡尔曼滤波&oldid=51997663>”

本页面最后修订于2018年11月12日 (星期一) 15:46。

本站的全部文字在知识共享 署名-相同方式共享 3.0协议之条款下提供，附加条款亦可能应用。（请参阅[使用条款](#)）
Wikipedia®和维基百科标志是维基媒体基金会的注册商标；维基™是维基媒体基金会的商标。
维基媒体基金会是按美国国内税收法501(c)(3)登记的非营利慈善机构。