基于分段加加速度的qp优化问题构造

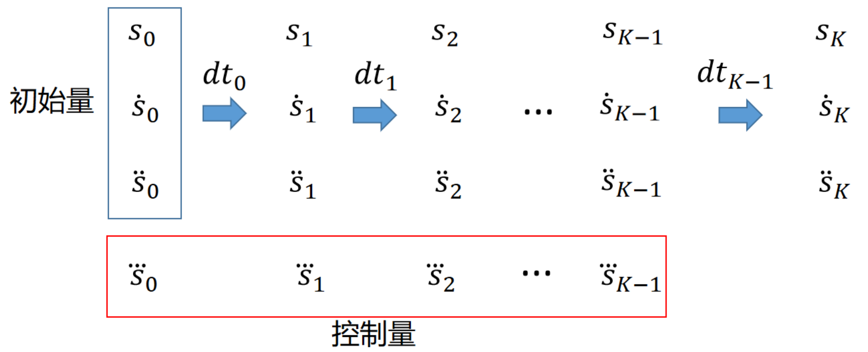
变量定义

- 离散时刻点：$t_i \in [0, K]$，其中，$K \in Z^+$，t_0代表当前时刻，$t_1 \dots t_K$代表未来时刻。
- 相邻时刻的时间间隔：$dt_i = t_{i+1} - t_i, i \in [0, K-1]$.
- t_i时刻的车辆状态：位置$s_i \in R$，速度$\dot{s}_i \in R$，加速度$\ddot{s}_i \in R$，$i \in [0, K]$.
- t_0到t_{K-1}时刻对应的车辆分段加加速度：$\dddot{s}_i \in R, i \in [0, K-1]$.

备注：分段加加速度的含义是在每段dt_i内，运动的加加速度$\dddot{s}_i$不变。

状态量计算

分段加加速度运动中的加加速度有三重含义：分段积分过程中作为常量；控制问题中作为控制量；优化问题中作为优化变量。具体的$s_i, \dot{s}_i, \ddot{s}_i, \dddot{s}_i$和$dt_i$关系如下图



> 参考《Optimal Trajectory Generation for Autonomous Vehicles Under Centripetal Acceleration Constraints for In-lane Driving Scenarios》

图片中t_i和t_{i+1}时刻的状态转移关系如下

$$\ddot{s}_{i+1} = \ddot{s}_i + \dddot{s}_i * dt_i \tag{1}$$

$$\dot{s}_{i+1} = \dot{s}_i + \ddot{s}_i dt_i + \frac{1}{2}\dddot{s}_i dt_i^2 \tag{2}$$

$$s_{i+1} = s_i + \dot{s}_i dt_i + \frac{1}{2}\ddot{s}_i dt_i^2 + \frac{1}{6}\dddot{s}_i dt_i^3 \tag{3}$$

为了更方便地代入到二次优化问题中，公式(1) − (3)需要转换成矩阵形式如下

$$\ddot{S} = \ddot{S}_0 + A * T * \dddot{S} \tag{4}$$

$$\dot{S} = \dot{S}_0 + AT\ddot{S}_0 + (ATBT + \frac{1}{2}ATT)\dddot{S} \tag{5}$$

$$S = S_0 + AT\dot{S}_0 + (ATBT + \frac{1}{2}ATT)\ddot{S}_0 + (ATBTBT + \frac{1}{2}ATBTT + \frac{1}{2}ATTBT + \frac{1}{6}$$

其中，

$$\dddot{S} = [\dddot{s}_0, \dddot{s}_1, \dots, \dddot{s}_{K-2}, \dddot{s}_{K-1}]^T \tag{7}$$

$$\ddot{S} = [\ddot{s}_1, \ddot{s}_2, \dots, \ddot{s}_{K-1}, \ddot{s}_K]^T \tag{8}$$

$$\dot{S} = [\dot{s}_1, \dot{s}_2, \dots, \dot{s}_{K-1}, \dot{s}_K]^T \tag{9}$$

$$S = [s_1, s_2, \dots, s_{K-1}, s_K]^T \tag{10}$$

$$\ddot{S}_0 = [\ddot{s}_0, \dots, \ddot{s}_0]^T \in R^K \tag{11}$$

$$\dot{S}_0 = [\dot{s}_0, \dots, \dot{s}_0]^T \in R^K \tag{12}$$

$$S_0 = [s_0, \dots, s_0]^T \in R^K \tag{13}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{K \times K} \tag{14}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{K \times K} \tag{15}$$

$$T = \begin{bmatrix} dt_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & dt_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & dt_{K-1} \end{bmatrix}_{K \times K} \tag{16}$$

代价函数和边界计算

为了运动的安全、舒适和匹配（完成任务），需要构造代价函数，如下

$$f(\dddot{S}) = f_1(S, S_{ref}) + f_2(\dot{S}, \dot{S}_{ref}) + f_3(\ddot{S}, \ddot{S}_{ref}) + f_4(\dddot{S}, \dddot{S}_{ref}) \tag{17}$$

其中，

$$f_1(S, S_{ref}) = (S - S_{ref})^T W_1 (S - S_{ref}) \tag{18}$$

$$f_2(\dot{S}, \dot{S}_{ref}) = (\dot{S} - \dot{S}_{ref})^T W_2 (\dot{S} - \dot{S}_{ref}) \tag{19}$$

$$f_3(\ddot{S}, \ddot{S}_{ref}) = (\ddot{S} - \ddot{S}_{ref})^T W_3 (\ddot{S} - \ddot{S}_{ref}) \tag{20}$$

$$f_4(\dddot{S}, \dddot{S}_{ref}) = (\dddot{S} - \dddot{S}_{ref})^T W_4 (\dddot{S} - \dddot{S}_{ref}) \tag{21}$$

前两项f_1和f_2对应匹配和安全，后两项f_3和f_4对应舒适。向量$S_{ref}, \dot{S}_{ref}, \ddot{S}_{ref}, \dddot{S}_{ref} \in R^{K \times 1}$代表参考项，表示期望的位置、速度、加速度和加加速度。矩阵$W_1, W_2, W_3, W_4 \in R^{K \times K}$代表权重，权重值越大，状态量越接近参考值。

函数$f_1(S, S_{ref})$展开合并如下

$$f_1(S, S_{ref}) = \dddot{S}^T C^T W_1 C \dddot{S} + 2D^T W_1 C \dddot{S} + D^T W_1 D \tag{22}$$

函数$f_2(\dot{S}, \dot{S}_{ref})$展开合并如下

$$f_2(\dot{S}, \dot{S}_{ref}) = \dddot{S}^T E^T W_2 E \dddot{S} + 2F^T W_2 E \dddot{S} + F^T W_2 F \tag{23}$$

函数$f_3(\ddot{S}, \ddot{S}_{ref})$展开合并如下

$$f_3(\ddot{S}, \ddot{S}_{ref}) = \dddot{S}^T M^T W_3 M \dddot{S} + 2N^T W_3 M \dddot{S} + N^T W_3 N \tag{24}$$

函数$f_4(\dddot{S}, \dddot{S}_{ref})$展开合并如下

$$f_4(\dddot{S}, \dddot{S}_{ref}) = \dddot{S}^T P^T W_4 P \dddot{S} + 2Q^T W_4 P \dddot{S} + Q^T W_4 Q \tag{25}$$

其中，$C = ATBTBT + \frac{1}{2}ATBTT + \frac{1}{2}ATTBT + \frac{1}{6}ATTT$,

$D = S_0 + AT\dot{S}_0 + (ATBT + \frac{1}{2}ATT)\ddot{S}_0 - S_{ref}$,

$E = ATBT + \frac{1}{2}ATT$,

$F = \dot{S}_0 + AT\ddot{S}_0 - \dot{S}_{ref}$,

$M = AT$,

$N = \ddot{S}_0 - \ddot{S}_{ref}$,

$P = I$,

$Q = O - \dddot{S}_{ref}$,

$I \in R^{K\times K}$代表单位矩阵,

$O \in R^{K\times K}$ 代表零向量。

除了代价函数，还需要对$S, \dot{S}, \ddot{S}, \dddot{S}$的边界进行约束，如下

$$S_{low} \leq S \leq S_{upp} \tag{26}$$

$$\dot{S}_{low} \leq \dot{S} \leq \dot{S}_{upp} \tag{27}$$

$$\ddot{S}_{low} \leq \ddot{S} \leq \ddot{S}_{upp} \tag{28}$$

$$\dddot{S}_{low} \leq \dddot{S} \leq \dddot{S}_{upp} \tag{29}$$

其中，(26)对应纵向避障，(27)对应纵向速度约束（弯道限速、交通指示牌限速、横向加速度约束限速），(28)和(29)对应纵向加速度和加加速度约束（舒适和能力上下限）。

QP二次型构造

基于代价函数和边界约束，构造二次型问题，如下

$$minimize\ f(\dddot{S}) = \frac{1}{2}\dddot{S}^T H \dddot{S} + U^T \dddot{S} \tag{30}$$

$$subject\ to\ \ g(\dddot{S}) = G\dddot{S} \leq L \tag{31}$$

具体推导如下

首先，将$(22) - (25)$代入(17)，合并同类项可得

$$\begin{aligned} f(\dddot{S}) =& \dddot{S}^T C^T W_1 C \dddot{S} + 2D^T W_1 C \dddot{S} D^T W_1 D + \\ & \dddot{S}^T E^T W_2 E \dddot{S} + 2F^T W_2 E \dddot{S} + F^T W_2 F + \\ & \dddot{S}^T M^T W_3 M \dddot{S} + 2N^T W_3 M \dddot{S} + N^T W_3 N + \\ & \dddot{S}^T P^T W_4 P \dddot{S} + 2Q^T W_4 PQ + Q^T W_4 Q \\ =& \dddot{S}^T (C^T W_1 C + E^T W_2 E + M^T W_3 M + P^T W_4 P) \dddot{S} + \\ & 2(D^T W_1 C + E^T W_2 E + N^T W_3 M + Q^T W_4 P) \dddot{S} + \end{aligned} \tag{32}$$

$$2(D^TW_1C+F^TW_2E+N^TW_3M+Q^TW_4P)S+$$
$$D^TW_1D+F^TW_2F+N^TW_3N+Q^TW_4Q$$

对于二次型问题，代价函数的常数项对优化结果没有影响，所以可以舍去常数项，则H和U分别如下

$$H=2(C^TW_1C+E^TW_2E+M^TW_3M+P^TW_4P) \tag{33}$$

$$U=2(D^TW_1C+F^TW_2E+N^TW_3M+Q^TW_4P)^T \tag{34}$$

然后，将$(4)-(6)$代入$(26)-(29)$，合并同类项可得

$$\begin{bmatrix} -C \\ C \\ -E \\ E \\ -M \\ M \\ -P \\ P \end{bmatrix} \dddot{S} \le \begin{bmatrix} -S_{low}+D+S_{ref} \\ S_{upp}-D-S_{ref} \\ -\dot{S}_{low}+F+\dot{S}_{ref} \\ \dot{S}_{upp}-F-\dot{S}_{ref} \\ -\ddot{S}_{low}+N+\ddot{S}_{ref} \\ \ddot{S}_{upp}-N-\ddot{S}_{ref} \\ -\dddot{S}_{low}+Q+\dddot{S}_{ref} \\ \dddot{S}_{upp}-Q-\dddot{S}_{ref} \end{bmatrix} \tag{35}$$

进而得到G和L如下

$$G=\begin{bmatrix} -C \\ C \\ -E \\ E \\ -M \\ M \\ -P \\ P \end{bmatrix} \tag{36}$$

$$L=\begin{bmatrix} -S_{low}+D+S_{ref} \\ S_{upp}-D-S_{ref} \\ -\dot{S}_{low}+F+\dot{S}_{ref} \\ \dot{S}_{upp}-F-\dot{S}_{ref} \\ -\ddot{S}_{low}+N+\ddot{S}_{ref} \\ \ddot{S}_{upp}-N-\ddot{S}_{ref} \\ -\dddot{S}_{low}+Q+\dddot{S}_{ref} \\ \dddot{S}_{upp}-Q-\dddot{S}_{ref} \end{bmatrix} \tag{37}$$

至此，关于速度规划的QP问题$(30)-(31)$已构造完成，将其填入数值优化工具包matlab，即可获得最有速度序列。

附录

公式$(4)-(6)$的推导过程

公式(4)的推导

由公式(1)显然可得公式(4)，公式(4)中每项展开后如下

$$\begin{bmatrix}\ddot{s}_1\\ \ddot{s}_2\\ \vdots\\ \ddot{s}_K\end{bmatrix}_{K\times 1}=\begin{bmatrix}\ddot{s}_0\\ \ddot{s}_0\\ \vdots\\ \ddot{s}_0\end{bmatrix}_{K\times 1}+\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}_{K\times K}\begin{bmatrix}dt_0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & dt_1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & dt_{K-1}\end{bmatrix}_{K\times K}\begin{bmatrix}\dddot{s}_0\\ \dddot{s}_1\\ \vdots\\ \dddot{s}_{K-1}\end{bmatrix}_{K}$$

公式(5)的推导

根据公式(2)，可得

$$\begin{bmatrix}\dot{s}_1\\ \dot{s}_2\\ \vdots\\ \dot{s}_K\end{bmatrix}_{K\times 1}=\begin{bmatrix}\dot{s}_0\\ \dot{s}_0\\ \vdots\\ \dot{s}_0\end{bmatrix}_{K\times 1}+\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}_{K\times K}\begin{bmatrix}dt_0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & dt_1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & dt_{K-1}\end{bmatrix}_{K\times K}\begin{bmatrix}\ddot{s}_0\\ \ddot{s}_1\\ \vdots\\ \ddot{s}_{K-1}\end{bmatrix}_{K}$$

上式中的每一行表示从0时刻开始用公式(2)做积分所得到的速度值。借助公式(38)，公式(39)中的向量$[\ddot{s}_0,\ddot{s}_1,\dots,\ddot{s}_{K-1}]^T$可表示为

$$\begin{bmatrix}\ddot{s}_0\\ \ddot{s}_1\\ \ddot{s}_2\\ \vdots\\ \ddot{s}_{K-1}\end{bmatrix}_{K\times 1}=\begin{bmatrix}\ddot{s}_0\\ \ddot{s}_0\\ \vdots\\ \ddot{s}_0\end{bmatrix}_{K\times 1}+\begin{bmatrix}0 & \dots & \dots & 0\\ 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 1 & \dots & 1 & 0\end{bmatrix}_{K\times K}\begin{bmatrix}dt_0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & dt_1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & dt_{K-1}\end{bmatrix}_{K\times K}\begin{bmatrix}\dddot{s}_0\\ \dddot{s}_1\\ \vdots\\ \dddot{s}_{K-}\end{bmatrix}$$

> 向量$[\ddot{s}_0,\ddot{s}_1,\dots,\ddot{s}_{K-1}]^T$的第2~K-1行算式用公式$(38)$的第1~K-1表示，向量$[\ddot{s}_0,\ddot{s}_1,\dots,\ddot{s}_{K-1}]^T$的第1行用$\ddot{s}_0+0$表示。

将公式(40)代入(39)可得下式

$$\begin{bmatrix}\dot{s}_1\\ \dot{s}_2\\ \vdots\\ \dot{s}_K\end{bmatrix}_{K\times 1}=\begin{bmatrix}\dot{s}_0\\ \dot{s}_0\\ \vdots\\ \dot{s}_0\end{bmatrix}_{K\times 1}+\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}_{K\times K}\begin{bmatrix}dt_0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & dt_1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & dt_{K-1}\end{bmatrix}_{K\times K}\left(\begin{bmatrix}\ddot{s}_0\\ \ddot{s}_0\\ \vdots\\ \ddot{s}_0\end{bmatrix}_{K}\right.$$

对上式合并同类项，可得

$$\begin{bmatrix}\dot{s}_1\\ \dot{s}_2\\ \vdots\\ \dot{s}_K\end{bmatrix}_{K\times 1}=\begin{bmatrix}\dot{s}_0\\ \dot{s}_0\\ \vdots\\ \dot{s}_0\end{bmatrix}_{K\times 1}+\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}_{K\times K}\begin{bmatrix}dt_0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & dt_1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & dt_{K-1}\end{bmatrix}_{K\times K}\begin{bmatrix}\ddot{s}_0\\ \ddot{s}_0\\ \vdots\\ \ddot{s}_0\end{bmatrix}_{K\times 1}$$

用$(7)-(16)$中的符号替代上式中对应的矩阵，即是公式(5).

公式(6)的推导

根据公式(3)，可得

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_K \end{bmatrix}_{K\times 1} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_0 \\ \vdots \\ s_0 \end{bmatrix}_{K\times 1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{K\times K} \begin{bmatrix} dt_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & dt_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & dt_{K-1} \end{bmatrix}_{K\times K} \begin{bmatrix} \dot{s}_0 \\ \dot{s}_1 \\ \vdots \\ \dot{s}_{K-1} \end{bmatrix}_{K}$$

上式中的每一行表示从0时刻开始用公式(3)做积分所得到的位置值。借助公式(41)，公式(43)中的向量$[\dot{s}_0, \dot{s}_1, \dots, \dot{s}_{K-1}]^T$可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_0 \\ \dot{s}_1 \\ \vdots \\ \dot{s}_{K-1} \end{bmatrix}_{K\times 1} = \begin{bmatrix} \dot{s}_0 \\ \dot{s}_0 \\ \vdots \\ \dot{s}_0 \end{bmatrix}_{K\times 1} + \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{K\times K} \begin{bmatrix} dt_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & dt_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & dt_{K-1} \end{bmatrix}_{K\times K} \begin{bmatrix} \ddot{s}_0 \\ \ddot{s}_0 \\ \vdots \\ \ddot{s}_0 \end{bmatrix}$$

> 向量$[\dot{s}_0, \dot{s}_1, \dots, \dot{s}_{K-1}]^T$的第2~K-1行算式用公式$(???)$的第1~K-1表示，向量$[\dot{s}_0, \dot{s}_1, \dots, \dot{s}_{K-1}]^T$的第1行用$\dot{s}_0 + 0$表示。

将公式(40)和(44)代入(43)可得下式

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_K \end{bmatrix}_{K\times 1} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_0 \\ \vdots \\ s_0 \end{bmatrix}_{K\times 1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{K\times K} \begin{bmatrix} dt_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & dt_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & dt_{K-1} \end{bmatrix}_{K\times K} \left(\begin{bmatrix} \dot{s}_0 \\ \dot{s}_0 \\ \vdots \\ \dot{s}_0 \end{bmatrix}_{K}\right.$$

对上式合并同类项，可得

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_K \end{bmatrix}_{K\times 1} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_0 \\ \vdots \\ s_0 \end{bmatrix}_{K\times 1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{K\times K} \begin{bmatrix} dt_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & dt_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & dt_{K-1} \end{bmatrix}_{K\times K} \begin{bmatrix} \dot{s}_0 \\ \dot{s}_0 \\ \vdots \\ \dot{s}_0 \end{bmatrix}_{K\times 1}$$

用$(7)-(16)$中的符号替代上式中对应的矩阵，即是公式(6).

至此公式$(4)-(6)$的推导过程描述完毕。