Jednodimenzione numeričke metode

Anja Buljević
Aleksandra Mitrović
Smilja Stokanović

28. oktobar 2022.

U jednodimenzione numeričke metode ubrajamo *metode direktnog pretraživanja*, *metode aproksimacije polinomom* i *gradijentne metode*.

1 Metode direktnog pretraživanja

Osnovna ideja ovih metoda je da bez traženja izvoda pronađu optimalno rešenje i to rade na principu skraćivanja intervala. Glavni uslov koji mora biti zadovoljen kako bi se metode direktnog pretraživanja mogle korisiti jeste da je funkcija ***unimodalna***.

Fibonačijev metod

Primer. Korišćenjem Fibonačijevog metoda naći minimum funkcije $f(x) = 2x^4 - 3x$ sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-5}$ nad intervalom $[0, 1]$.

Podsećanje sa predavanja:

$$F_n > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}$$

$$\begin{aligned} F_n > & \frac{1-0}{10^{-5}} > F_{n-1} \\ F_n > & 100000 > F_{n-1} \end{aligned}$$

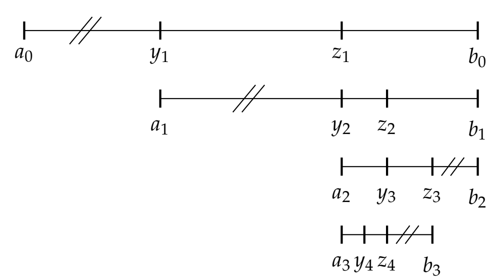
Rešavanjem ove nejednakosti[1] dobijamo da je traženi broj iteracija n = 26, dok su Fibonačijevi brojevi $F_{26} = 121393$, $F_{25} = 75025$ i $F_{24} = 46368$.

[1] Ovo se najlakše rešava tako što se napravi funkcija za Fibonačijev niz i iskoristimo datu nejednakost.

Postupak je sledeći:

1.

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b_0 - a_0) = 0 + \frac{46368}{121393}(1-0) = 0.38197 \\ f(y_1) &= 2(0.38197)^4 - 3 \cdot 0.38197 = -1.103 \\ z_1 &= a_0 + b_0 - y_1 = 0.61803 \\ f(z_1) &= -1.562 \\ f(z_1) &< f(y_1) \implies a_1 = y_1, b_1 = b_0, y_2 = z_1 \end{aligned}$$



2.

$$
\begin{aligned}
z_2 &= a_1 + b_1 - y_2 = 0.7639 \\
f(z_2) &= -1.611 \\
f(y_2) &= f(z_1) = -1.562 \\
f(z_2) &< f(y_2) \implies a_2 = y_2, b_2 = b_1, y_3 = z_2
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
z_3 &= a_2 + b_2 - y_3 = 0.854 \\
f(z_3) &= -1.498 \\
f(y_3) &= f(z_2) = -1.611 \\
f(y_3) &< f(z_3) \implies b_3 = z_3, a_3 = a_2, z_4 = y_3
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
y_4 &= a_3 + b_3 - z_4 = 0.708 \\
f(y_4) &= -1.621 \\
f(z_4) &= -1.611 \\
f(y_4) &< f(z_4) \implies b_4 = z_4, a_4 = a_3, z_5 = y_4 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Postupak se ponavlja dok se ne odrade 24 iteracije. Nakon 4 iteracije dobili smo sledeće vrednosti: $x_{opt} = 0.708$, $f_{min} = -1.621$.

Metod zlatnog preseka

Primer. Metodom zlatnog preseka naći minimum funkcije $y = 8x^3 - 2x^2 - 7x + 3$ nad intervalom $[0, 1]$ u 4 iteracije.

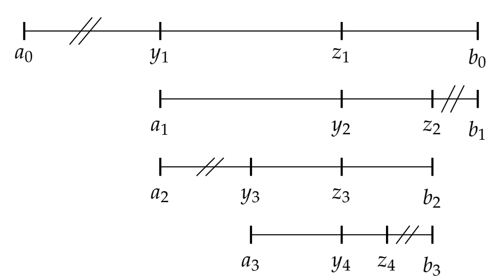
Postupak je sledeći:

1.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_0 + c(b_0 - a_0) = 0.382 \\
f(y_1) &= 0.48 \\
z_1 &= a_0 + b_0 - y_1 = 0.618 \\
f(z_1) &= -0.202 \\
f(z_1) &< f(y_1) \implies a_1 = y_1, b_1 = b_0, y_2 = z_1
\end{aligned}
$$

Podsećanje sa predavanja:

$$c = \frac{F_n}{F_{n+2}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0.381966$$



2.

$$\begin{aligned} z_2 &= a_1 + b_1 - y_2 = 0.764 \\ f(z_2) &= 0.052 \\ f(y_2) &= f(z_1) = -0.202 \\ f(y_2) < f(z_2) &\implies a_2 = a_1, b_2 = z_2, z_3 = y_2 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} y_3 &= a_2 + b_2 - z_3 = 0.528 \\ f(y_3) &= -0.076 \\ f(z_3) &= f(y_2) = -0.202 \\ f(z_3) < f(y_3) &\implies b_3 = b_2, a_3 = y_3, y_4 = z_3 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} z_4 &= a_3 + b_3 - y_4 = 0.674 \\ f(z_4) &= -0.177 \\ f(y_4) &= f(z_3) = -0.202 \\ f(y_4) < f(z_4) &\implies b_4 = z_4, a_4 = a_3, z_5 = y_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nakon 4 iteracije dobili smo sledeće vrednosti: $x_{opt} = 0.618$, $f_{min} = -0.202$.

2 Gradijentne metode

Osnovna ideja ovih metoda je da se pronađu **stacionarne tačke**.

Njutn - Rapsonov metod

Primer. Njutn - Rapsonovom metodom naći minimum funkcije $f(x) = 2x^4 - 3x$ nad intervalom $[0, 1]$ sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-2}$.

Napomena:
Početno pogađanje: $x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$
Iterativni postupak: $x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$

Najpre treba da odredimo tačku od koje krećemo i to radimo tako što izračunamo vrednost funkcije u graničnim tačkama intervala. Za polaznu tačku uzimamo onu tačku koja ima manju vrednost funkcije (tražimo minimum).
Postupak je sledeći:

$$\begin{aligned} &f(0) = 0 \\ &f(1) = -1 \\ &f(1) < f(0) \implies x_0 = 1 \end{aligned}$$

Trebamo da izračunamo prva dva izvoda date funkcije:

$$f'(x) = 8x^3 - 3$$
$$f''(x) = 24x^2$$

1.

$$x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = 1 - \frac{8-3}{24} \approx 0.8$$
$$|x_1 - x_0| = |1 - 0.8| = 0.2 > \varepsilon$$

2.

$$x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)} = 0.7429$$
$$|x_2 - x_1| = 0.0571 > \varepsilon$$

3.

$$x_3 = x_2 - \frac{f'(x_2)}{f''(x_2)} = 0.7272$$
$$|x_3 - x_2| = 0.015 > \varepsilon$$

4.

$$x_4 = x_3 - \frac{f'(x_3)}{f''(x_3)} = 0.7228$$
$$|x_4 - x_3| = 0.0044 < \varepsilon$$

Došli smo do kraja algoritma nakon 4 iteracije i dobili smo sledeće vrednosti: $x_{opt} = 0.7228$, $f_min = -1.6225$.

Metod secice

Primer. Metodom sečice naći minimum funkcije $f(x) = 2x^4 - 3x$ nad intervalom $[0, 1]$ sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-2}$.

Napomena:
Početno pogađanje: $x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)(x_1 - x_0)}{f'(x_1) - f'(x_0)}$
Iterativni postupak: $x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f'(x_n) - f'(x_{n-1})}$

Sečica ima 2 početne tačke koje određujemo na sledeći način:

$$f(0) = 0$$
$$f(1) = -1$$
$$f(1) < f(0) \implies x_0 = 0, x_1 = 1$$

Trebamo da izračunamo prva dva izvoda date funkcije:

$$f'(x) = 8x^3 - 3$$
$$f''(x) = 24x^2$$

Postupak je sledeći:

1.

$$x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)(x_1 - x_0)}{f'(x_1) - f'(x_0)} = 0.375$$
$$|x_2 - x_1| = |0.375 - 1| = 0.625 > \varepsilon$$

2.

$$x_3 = x_2 - \frac{f'(x_2)(x_2 - x_1)}{f'(x_2) - f'(x_1)} = 0.5876$$
$$|x_2 - x_1| = 0.213 > \varepsilon$$

3.

$$x_4 = x_3 - \frac{f'(x_3)(x_3 - x_2)}{f'(x_3) - f'(x_2)} = 0.813$$
$$|x_4 - x_3| = 0.2437 > \varepsilon$$

4.

$$x_5 = x_4 - \frac{f'(x_4)(x_4 - x_3)}{f'(x_4) - f'(x_3)} = 0.7005$$
$$|x_4 - x_3| = 0.1318 > \varepsilon$$

5.

$$x_6 = x_5 - \frac{f'(x_5)(x_5 - x_4)}{f'(x_5) - f'(x_4)} = 0.7245$$
$$|x_6 - x_5| = 0.024 > \varepsilon$$

6.

$$x_7 = 0.721$$
$$|x_7 - x_6| = 0.0035 < \varepsilon$$

Došli smo do kraja algoritma nakon 6 iteracija i dobili smo sledeće vrednosti: $x_{opt} = 0.721$, $f_m in = -1.6225$.

Primećujemo da je Njutn-Rapsonov metod brži od metoda sečice.

3 Metode aproksimacije polinomom

Osnovna ideja ovih metoda je da se funkcija aproksimira polinomom $y(x)$ na intervalu I koji sadrži optimum.

Metod parabole

Primer. Metodom parabole naći minimum funkcije $f(x) = 2x^4 - 3x$ na intervalu $[0, 2]$ u 3 iteracije.

Algoritam je sledeći:

Kao krajnje tačke (x_1 i x_3) možemo uzeti granice intervala, dok srednju tačku (x_2) možemo postaviti na aritmetičkoj sredini ove dve tačke. Dakle, tačke trebaju da budu raspoređene na sledeći način: $x_1 < x_2 < x_3$.
Napomena: Moramo proveriti da li je zadovoljena relacija: $f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3)$.

1. Najpre trebamo da odredimo 3 tačke na datom intervalu.

$$x_1 = 0$$
$$x_3 = 2$$
$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2} = 1$$

Sada trebamo da izračunamo vrednost funkcije u odabranim tačkama:

$$f(x_1) = 0$$
$$f(x_2) = -1$$
$$f(x_3) = 26$$

Provera:

- $0 < 1 < 2 \implies$ *uslov* $x_1 < x_2 < x_3$ je zadovoljen,
- $0 \geq -1 \leq 26 \implies$ *uslov* $f(x_1) \geq f(x_2) \leq f(x_3)$ je zadovoljen.

Odavde možemo zaključiti da je odabir tačaka dobar, pa možemo nastaviti sa algoritmom. Sledeći korak je da rešimo sistem jednačina $y = f(x_i) = a + bx_i + cx_i^2$.

$$x_1 = 0 \implies a + bx_1 + cx_1^2 = f(x_1)$$
$$x_2 = 0 \implies a + bx_2 + cx_2^2 = f(x_2)$$
$$x_3 = 0 \implies a + bx_3 + cx_3^2 = f(x_3)$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo sledeće vrednosti za koeficjente a, b i c i oni iznose: $a = 0$, $b = -15$ i $c = 14$. Konačno, funkcija koju koristimo za aproksimaciju ima oblik

$$y(x) = -15x + 14x^2.$$

Sada trebamo da pronađemo stacionarnu tačku[2] funkcije $y(x)$.

[2] Napomena: Stacionarne tačke su tačke u kojima je prvi izvod jednak nuli.

$$y'(x) = -15 + 28x = 0 \implies x^* = \frac{15}{28} = 0.5357, f(x^*) = -1.4424$$

Primećujemo da je $f(x_1) > f(x^*) < f(x_2)$.

2. Nove tri tačke su:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0.5357$$
$$x_3 = 1$$

Sada trebamo da izračunamo vrednost funkcije u odabranim tačkama:

$$f(x_1) = 0$$
$$f(x_2) = -1.4424$$
$$f(x_3) = -1$$

Sledeći korak je da rešimo sistem jednačina $y = f(x_i) = a + bx_i + cx_i^2$.

$$x_1 = 0 \implies a + bx_1 + cx_1^2 = f(x_1)$$
$$x_2 = 0 \implies a + bx_2 + cx_2^2 = f(x_2)$$
$$x_3 = 0 \implies a + bx_3 + cx_3^2 = f(x_3)$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo sledeće vrednosti za koeficjente a, b i c i oni iznose: $a = 0$, $b = -4.6454$ i $c = 3.6454$. Konačno, funkcija koju koristimo za aproksimaciju ima oblik

$$y(x) = -4.6454x + 3.6454x^2.$$

Sada trebamo da pronađemo stacionarnu tačku funkcije $y(x)$.

$$y'(x) = -4.6454 + 7.2908x = 0 \implies x^* = 0.6371, f(x^*) = -1.5818$$

Primećujemo sledeće: $x_2 < x^* < x_3$, $f(x_2) > f(x^*) < f(x_3)$.

3. Nove tri tačke su:

$$x_1 = 0.5357$$
$$x_2 = x^* = 0.6371$$
$$x_3 = 1$$

Sada trebamo da izračunamo vrednost funkcije u odabranim tačkama:

$$f(x_1) = -1.4424$$
$$f(x_2) = -1.5818$$
$$f(x_3) = -1$$

Sledeći korak je da rešimo sistem jednačina $y = f(x_i) = a + bx_i + cx_i^2$.

$$\begin{aligned} x_1 = 0 &\implies a + bx_1 + cx_1^2 = f(x_1) \\ x_2 = 0 &\implies a + bx_2 + cx_2^2 = f(x_2) \\ x_3 = 0 &\implies a + bx_3 + cx_3^2 = f(x_3) \end{aligned}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo sledeće vrednosti za koeficjente a, b i c i oni iznose: $a = 1.4835$, $b = -8.8981$ i $c = 6.4146$. Konačno, funkcija koju koristimo za aproksimaciju ima oblik

$$y(x) = 1.4835 - 8.8981x + 6.4146x^2.$$

Sada trebamo da pronađemo stacionarnu tačku funkcije $y(x)$.

$$x^* = -\frac{b}{2c} = 0.6936, f(x^*) = -1.6179$$

Primećujemo da je $f(x_2) > f(x^*) < f(x_3)$.

Nakon tri iteracije dobili smo da je minimum $x^* = 0.6936$, a vrednost funkcije u toj tački je $f_{min} = -1.6179$.