Projet IGI-2102

Optimisations locales versus optimisations globales

Agathe BESANCENOT & Benjamin LAMBERT *(Groupe 10)*

Sommaire

I. Calcul du chemin du petit robot (CPR)

Consignes

Un petit robot est placé en case $(l,c) = (0,0)$ d'une grille à L lignes et C colonnes. Le robot doit atteindre la case $(l,c) = (L - 1, C - 1)$. Ses mouvements possibles sont Nord (N), Nord-Est (NE), Est (E).

- Le robot étant sur la case $(l - 1,c)$, le déplacement N le conduit en case (l,c) avec un coût $n(l - 1,c)$.
- Le robot étant sur la case $(l - 1,c - 1)$ le déplacement NE le conduit en case (l,c) avec un coût $ne(l - 1,c - 1)$.
- Le robot étant sur la case $(l,c - 1)$ le déplacement E le conduit en case (l,c) avec un coût $e(l,c - 1)$.

Stratégie "gloutonne"

Pour calculer le chemin de façon "gloutonne", il suffit de regarder les déplacements possibles dans un rayon d'une case. Le robot peut donc se déplacer vers l'est, vers le nord ou vers le nord-est, uniquement si le déplacement que le robot effectuera le fait rester au sein de la grille de déplacement. Ainsi, pour choisir le meilleur chemin, nous choisissons la direction dont la difficulté d'accès est la moins élevée. Par exemple, si cela coûte 5 points de mouvement au robot pour aller à l'est, 8 pour aller au nord et 2 pour aller au nord-est, le robot choisira la direction nord-est, même si le chemin à parcourir à partir de cette nouvelle case est bien plus coûteux qu'il aurait pû l'être en choisissant une autre direction.

Evaluation statistique

Définissons les constantes de notre évaluation statistique :

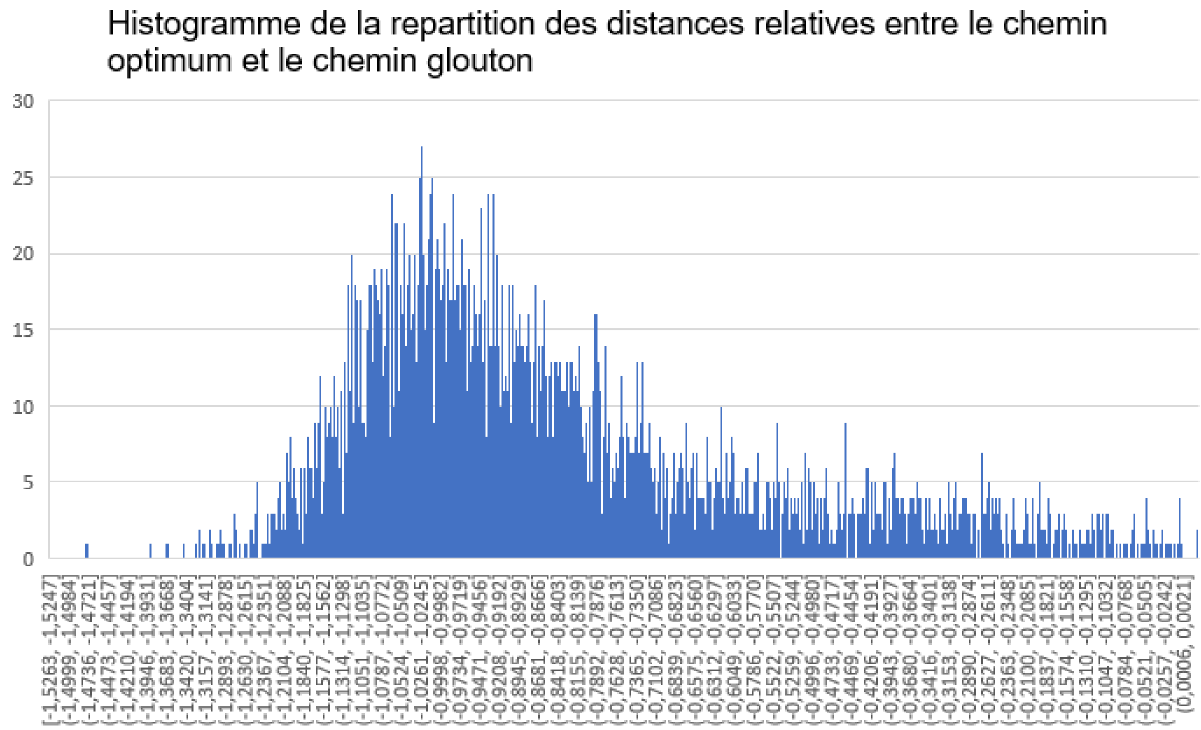
- soit *Lmax* le nombre de lignes maximum (*Lmax = 1000*)
- soit *Cmax* le nombre de colonnes maximum (*Cmax = 1000*)
- soit *Vmax* la valeur maximum des déplacements entre deux case (*Vmax = 100*)
- soit *Nruns* le nombre de runs de l'évaluation statistique (*Nruns = 5000*)

Déroulement d'une run :

1. On génère aléatoirement la taille de la grille (l, c) grâce à *Lmax* et *Cmax*
2. On génère aléatoirement le coût de déplacement associé à chaque case de la grille grâce à l et c
3. On calcule les chemins optimaux grâce à la programmation dynamique
4. On récupère la valeur du chemin optimum allant de la case $(0, 0)$ à la case $(l - 1, c - 1)$, notée v
5. On calcule la valeur du chemin glouton allant de la case $(0, 0)$ à la case $(l - 1, c - 1)$, notée g
6. On calcule la distance relative $(v - g) / v$, que l'on stocke dans un tableau *D[0:Nruns]* à l'indice correspondant au numéro de la *run* actuelle

A la fin des *Nruns*, les résultats stockés dans *D* sont écrits dans un fichier .CSV pour pouvoir être traités et mis sous la forme d'histogramme. Ce fichier .CSV contiendra également la moyenne de ces valeurs, ainsi que leur médiane, leur variance et leur écart-type.

Histogramme et valeurs clés



Moyenne (*$m = \Sigma(x) / Nruns$*)	-0,6397
Médiane (*$M = (max - min) / 2$*)	0,5409
Variance (*$V = \Sigma(x - m)^2 / Nruns$*)	0,0343
Écart-type ($\sigma = \sqrt{V}$)	0,1851

A noter : la moyenne négative peut s'expliquer par le fait que le chemin "glouton" étant plus coûteux que le chemin optimal, la distance relative est négative car $v - g < 0$. On en déduit donc une amélioration moyenne de ~64% entre l'algorithme glouton et l'algorithme optimal. Cela explique aussi les valeurs en abscisse de l'histogramme

II. Sac de somme maximum (SSM)

Consignes

Nous disposons de deux sacs S_0 et S_1 de contenances C_0 et C_1. Il y a n objets, l'objet i est de valeur v_i et de taille t_i. Nous voulons deux sacs de valeur totale maximum construits sur cet ensemble d'objets.

Stratégie gloutonne

La stratégie "gloutonne" consiste à, dans un premier temps, trier les objet par ordre décroissant de leur ratio Valeur / Taille. Ensuite, on parcourt les objets triés et on les place dans le premier sac si la place restante est suffisante, sinon, si la place dans le second sac est suffisante, on l'ajoute au deuxième sac. A chaque ajout d'un objet dans l'un ou l'autre sac, on ajoute sa valeur à la valeur gloutonne.

Evaluation statistique

Définissons les constantes de notre évaluation statistique :

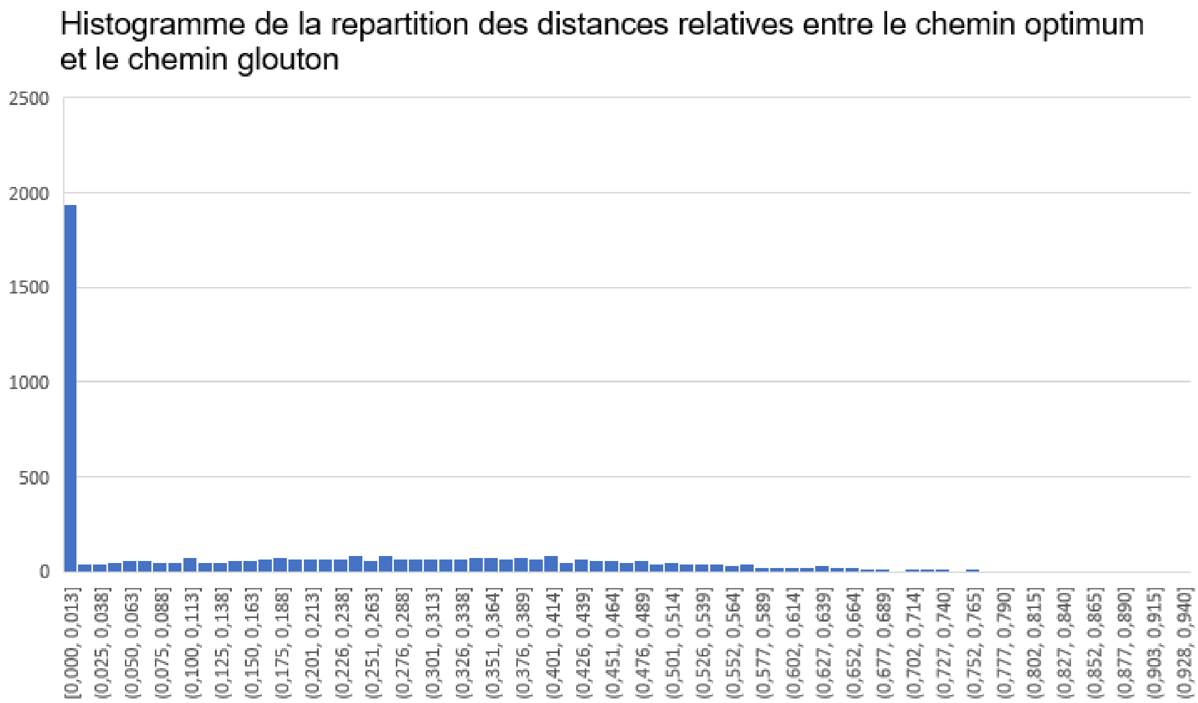
- soit n le nombre d'objets ($n = 100$)
- soit *Tmax* la taille maximum d'un objet (*Tmax = 50*)
- soit *Vmax* la valeur maximum d'un objet (*Vmax = 100*)
- soit *Cmax* la taille maximum d'un sac (*Cmax = 1000*)
- soit *Nruns* le nombre de runs de l'évaluation statistique (*Nruns = 5000*)

Déroulement d'une run :

1. On génère aléatoirement la taille et la valeur des n objets grâce à n, *Tmax* et *Vmax*
2. On génère aléatoirement la taille des deux sacs *C1* et *C2*
3. On calcule le chemin optimum grâce à la programmation dynamique
4. On récupère la valeur du chemin optimum pour deux sacs de contenance *C1* et *C2*, ainsi que pour n objets, notée v
5. On calcule la valeur du chemin glouton pour deux sacs de contenance *C1* et *C2*, ainsi que pour n objets, notée g
6. On calcule la distance relative $(v - g) / v$, que l'on stocke dans un tableau *D[0:Nruns]* à l'indice correspondant au numéro de la *run* actuelle

A la fin des *Nruns*, les résultats stockés dans *D* sont écrits dans un fichier .CSV pour pouvoir être traités et mis sous la forme d'histogramme. Ce fichier .CSV contiendra également la moyenne de ces valeurs, ainsi que leur médiane, leur variance et leur écart-type.

<u>Histogramme et valeurs clés</u>



Moyenne ($m = \Sigma(x) / Nruns$)	0,2028168
Médiane ($M = (max - min) / 2$)	0,47006243
Variance ($V = \Sigma(x - m)^2 / Nruns$)	0,0480393
Écart-type ($\sigma = \sqrt{V}$)	0,21917868

III. Répartition d’un stock sur un ensemble d’entrepôts (RSE)

Consignes

Un grossiste dispose d’un stock S à répartir sur n entrepôts. Pour tout entrepôt i, $i \in [0:n]$, et tout stock s, $s \in [0:S + 1]$, ce grossiste connaît le gain $g(i,s)$ obtenu en livrant le stock s a l’entrepôt i. On demande de calculer le gain $m(n,S)$ d’une répartition optimale du stock S sur les n entrepôts et d’afficher une répartition optimale.

Stratégie “gloutonne”

Pour calculer la répartition “gloutonne” des stocks de plusieurs entrepôts, il suffit de livrer à l’entrepôt actuel un stock s, inférieur ou égal au stock restant, pour lequel le gain est maximum sur cet entrepôt. Ensuite nous tranchons ce stock s au stock restant, s’il n’y a plus de stock disponible, nous ajoutons la valeur du gain sans livraison des entrepôts restants.

Evaluation statistique

Définissons les constantes de notre évaluation statistique :

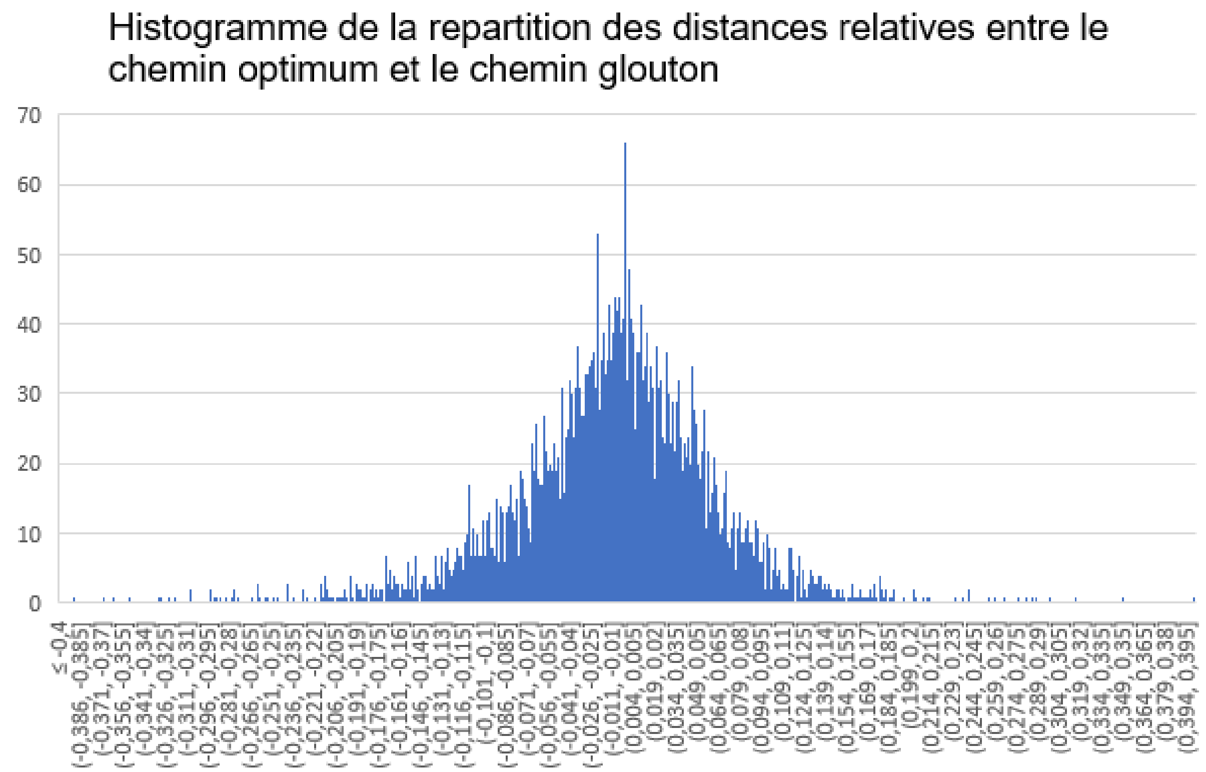
- soit *Emax* le nombre d’entrepôt maximum (*Emax = 1000*)
- soit *Smax* le stock maximum des entrepôts (*Smax = 1000*)
- soit *Nruns* le nombre de runs de l’évaluation statistique (*Nruns = 5000*)

Déroulement d’une run :

1. On génère aléatoirement le nombre d’entrepôts e et le stock maximum s grâce à *Emax* et *Smax*
2. On génère aléatoirement le gain de chaque entrepôt pour un stock allant de 0 à s, de la manière suivante :
    a) Le gain pour aucun stock est choisi aléatoirement entre -3 et 6
    b) Le gain pour un stock s est égal au gain pour un stock $s-1$ ajouté à un nombre aléatoire compris entre -3 et 6
3. On calcule le chemin optimum grâce à la programmation dynamique
4. On récupère la valeur du chemin optimum pour e entrepôts et s stocks, notée v
5. On calcule la valeur du chemin glouton pour e entrepôts et s stocks, notée g
6. On calcule la distance relative $(v - g) / v$, que l’on stocke dans un tableau $D[0:Nruns]$ à l’indice correspondant au numéro de la *run* actuelle

A la fin des *Nruns*, les résultats stockés dans D sont écrits dans un fichier .CSV pour pouvoir être traités et mis sous la forme d’histogramme. Ce fichier .CSV contiendra également la moyenne de ces valeurs, ainsi que leur médiane, leur variance et leur écart-type.

Histogramme et valeurs clés



Moyenne ($m = \Sigma(x) / Nruns$)	-0,00684958
Médiane ($M = (max - min) / 2$)	4,920561
Variance ($V = \Sigma(x - m)^2 / Nruns$)	0,02141393
Écart-type ($\sigma = \sqrt{V}$)	0,146335

IV. Répartition optimale d'un temps de travail sur un ensemble d'unités (RTT)

Stratégie "gloutonne"

Pour calculer la répartition "gloutonne" du temps de travail, il suffit de prendre, pour chaque matière, le nombre *h* d'heures travaillées, inférieur au nombre d'heures disponibles restantes, pour lequel la note est maximum. Ensuite, il ne reste plus qu'à retrancher ce nombre d'heure *h* au nombre d'heure restante.

Evaluation statistique

Définissons les constantes de notre évaluation statistique :

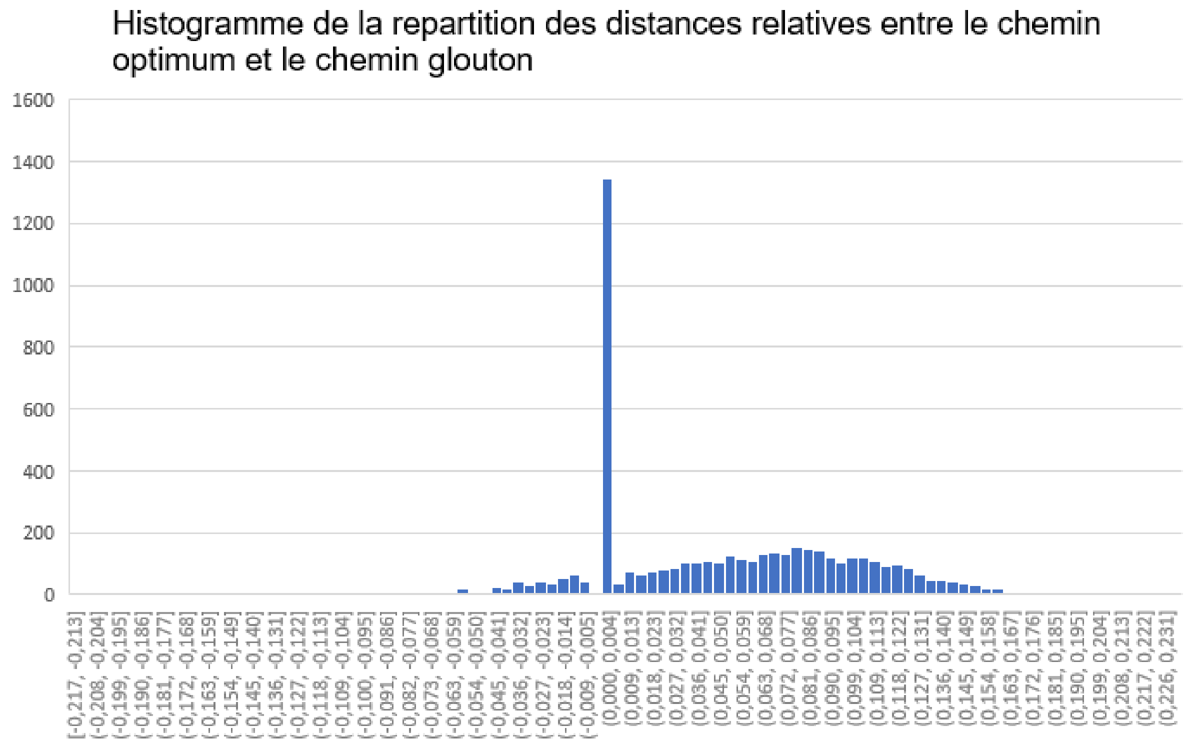
- soit *Lmax* le nombre de matières maximum (*Lmax = 15*)
- soit *Hmax* le nombre d'heure maximum de travails (*Hmax = 30*)
- soit *Nruns* le nombre de runs de l'évaluation statistique (*Nruns = 5000*)

Déroulement d'une run :

1. On génère aléatoirement le nombre de matières *l* et le nombre maximum d'heures travaillées *h* grâce à *Lmax* et *Hmax*
2. On génère aléatoirement la note de chaque matière pour un nombre d'heure travaillées allant de 0 à *h*, la note générée est croissante en fonction de *h*
3. On calcule le chemin optimum grâce à la programmation dynamique
4. On récupère la valeur du chemin optimum pour *l* matières et *h* heure de travail, que l'on note *v*
5. On calcule la valeur du chemin glouton pour *l* matières et *h* heures de travail, notée *g*
6. On calcule la distance relative *(v - g) / v*, que l'on stocke dans un tableau *D[0:Nruns]* à l'indice correspondant au numéro de la *run* actuelle

A la fin des *Nruns*, les résultats stockés dans *D* sont écrits dans un fichier .CSV pour pouvoir être traités et mis sous la forme d'histogramme. Ce fichier .CSV contiendra également la moyenne de ces valeurs, ainsi que leur médiane, leur variance et leur écart-type.

<u>Histogramme et valeurs clés</u>



Moyenne (*m = Σ(x) / Nruns*)	0,04704649
Médiane (*M = (max - min) / 2*)	0,22634271
Variance (*V = Σ(x - m)*^{2} */ Nruns*)	0,00289821
Écart-type (*σ = √V*)	0,05383503

V. Chemin de somme maximum dans un triangle de valeurs (CSM)

Consignes

Soit *T[0:n]* un tableau d'entiers tel que *n = (m * (m + 1)) / 2*.
Écrire une fonction *calculerM(int[] T)* qui prend en entrée le triangle *T[0:n]* et retourne un tableau *M[0:n]* de terme général *M[i] = m(i)* = la valeur d'un chemin de somme maximum qui commence à l'indice i. La valeur *M[0] = m(0)* est la valeur d'un chemin de somme maximum du triangle *T*.

Stratégie "gloutonne"

Pour calculer le chemin de valeur maximum de manière "gloutonne", on part du haut du triangle, et pour chaque "étage" du triangle, on choisit la valeur maximale entre la valeur située à l'étage inférieur à gauche ou à droite. On répète ensuite ce processus jusqu'à arriver en bas du triangle.

Stratégie optimale

Pour calculer le chemin de valeur maximal dans un triangle de manière optimale, on part du bas du triangle. Pour chaque élément du triangle, on regarde si le chemin le plus court est celui de gauche ou de droite. Cela est rendu possible car nous avons commencé en bas du triangle, contrairement à la méthode "gloutonne".

Cas particulier : au début, étant situé en bas du triangle, il n'y a aucun chemin à gauche et à droite de l'indice actuel, la valeur du chemin est donc la valeur du triangle associé à cet indice.

Traduction mathématique

Notons *M[i] = m(i)*, la valeur du chemin de somme maximum partant de *i*, *l* le nombre d'étages du triangle et *T[0:l * (l + 1) / 2]* le triangle étudié.
Ainsi, en supposant le problème résolu, on obtient l'expression de *m(0)* suivante :

$$m(0) = \max\{ m(1), m(2) \} + T[0]$$

De cette expression de m(0), on en déduit une expression générale :

$m(i) = \max\{ m(g(i)), m(g(i) + 1) \} + T[i]$ avec $g(i)$ l'indice du descendant gauche de *i*

On définit que dans le cas d'un indice *i* appartenant au dernier étage du triangle (celui le plus bas possible), *m(i) = T[i]*.

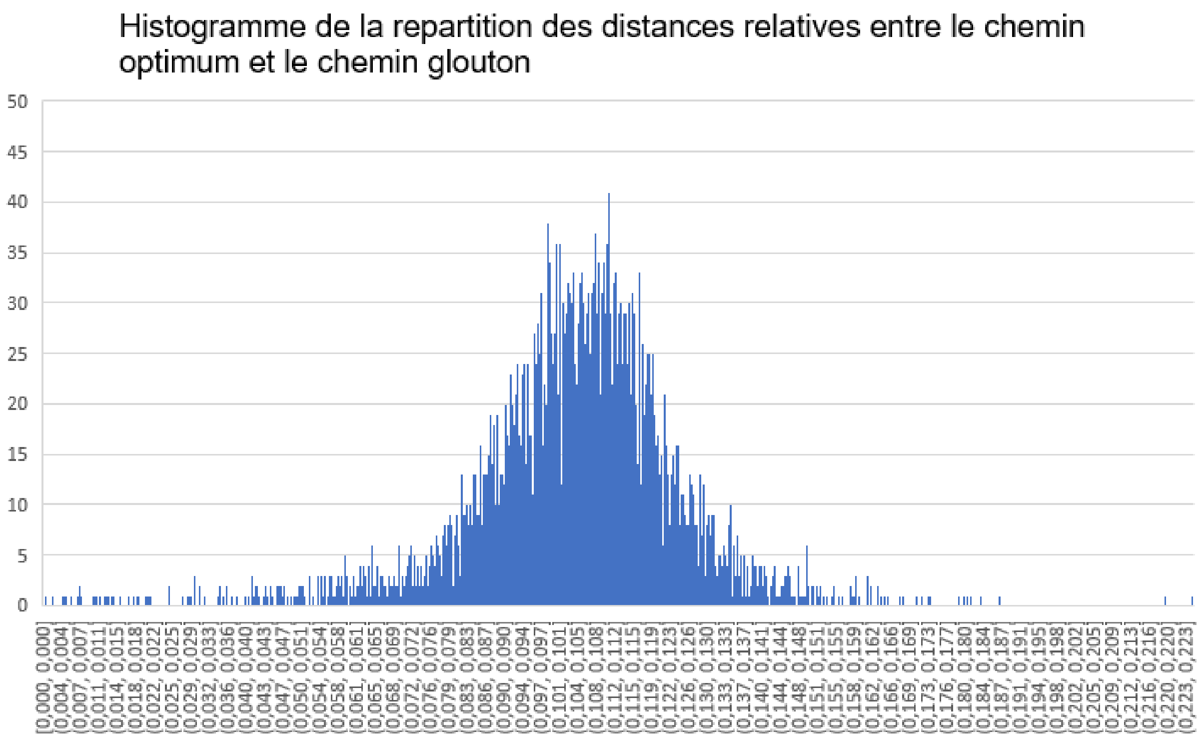
Evaluation statistique

Définissons les constantes de notre évaluation statistique :
- soit *Lmax* le nombre d'étages du triangle (*Lmax = 1000*)
- soit *Vmax* la valeur maximale de chaque élément du triangle (*Vmax = 100*)
- soit *Nruns* le nombre de runs de l'évaluation statistique (*Nruns = 5000*)

Déroulement d'une run :
1. On génère aléatoirement le nombre d'étages *l*
2. On génère aléatoirement la valeur de chaque case du tableau, allant de 0 à *Vmax*
3. On calcule les chemins optimaux grâce à la programmation dynamique
4. On récupère la valeur du chemin optimum pour *l* étages, que l'on note *v*
5. On calcule la valeur du chemin glouton pour *l* étages, notée *g*
6. On calcule la distance relative *(v - g) / v*, que l'on stocke dans un tableau *D[0:Nruns]* à l'indice correspondant au numéro de la *run* actuelle

A la fin des *Nruns*, les résultats stockés dans *D* sont écrits dans un fichier .CSV pour pouvoir être traités et mis sous la forme d'histogramme. Ce fichier .CSV contiendra également la moyenne de ces valeurs, ainsi que leur médiane, leur variance et leur écart-type.

Histogramme et valeurs clés



Moyenne (*m = Σ(x) / Nruns*)	0,10330
Médiane (*M = (max - min) / 2*)	0,11248

Agathe BESANCENOT & Benjamin LAMBERT

Variance ($V = \Sigma(x - m)^2 / Nruns$)	0,00050
Écart-type ($\sigma = \sqrt{V}$)	0,02234