WS
20/21

Medizinrobotik - Praktikum

KALMAN FILTER

PELCZ, PHILIPP

Einleitung

Der Kalman-Filter ist ein iteratives Verfahren, um Messfehler in einem verrauschten Datensatz zu minimieren. Er wurde 1960 von Rudolf E. Kálmán entwickelt. Der erste bedeutende Einsatz des Kalman-Filters war im Apollo-Programm der NASA. Der Kalman-Filter basiert darauf, das System mit einem Satz von linearen Gleichungen zu beschreiben und mit Hilfe dieser wird eine Schätzung für den nächsten Messwert gegeben. Diese Schätzung wird mit dem aktuellen Messwert verrechnet und ergibt damit genauere Daten.

Erklärung der Systemgleichungen

Um den Kalman-Filter optimal zu nutzen ist es hilfreich die Systemgleichungen zu verstehen. Deshalb werden im Folgenden die Systemgleichung für die Nutzung der Kalman-Filter Library erläutert. Es wird nicht vollständig auf die Funktionsweise des Kalman-Filters eingegangen, sondern nur auf die, zur Nutzung der Library notwendigen Komponenten. Dafür wurde die ausführlichere Erklärung von Wikipedia[1] angepasst.

Der Kalman-Filter besteht aus 3 Schritten: **Initialisierung, Prädiktion und Korrektur** Zuerst wird die Initialisierung ausgeführt. Dabei werden die Startwerte des Filters gegeben. Die folgenden Gleichungen stellen dies dar:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_0 &= 0\\ \mathbf{P}_0 &= \sigma^2 \cdot \mathbf{I}\end{aligned}$$

Dann folgt der Wechsel zwischen Prädiktion und der Korrektur. Dabei wird in der Prädiktion der nächste Zustand mit Hilfe der (vom KF-Library Nutzer) aufgestellten Systemgleichungen bestimmt.

Im Korrekturschritt werden die Systemgleichungen angepasst, um den Fehler zwischen Prädiktion und Messung zu minimieren.

Im Prädiktionsschritt werden diese Gleichungen genutzt:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k|k-1} &= \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}\\ \mathbf{P}_{k|k-1} &= \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}_{k-1}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Q}_{k-1}\end{aligned}$$

In der Korrektur sind es die folgenden:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{C}_k^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{C}_k\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{C}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_k\right)^{-1}\\ \mathbf{x}_k &= \mathbf{x}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{C}_k\mathbf{x}_{k|k-1})\\ \mathbf{P}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{C}_k)\mathbf{P}_{k|k-1}\end{aligned}$$

Variablen und Dimensionen

$\mathbf{z}_k(m)$ Neue Beobachtungen, die zum Zeitpunkt t_k vorliegen.

$\mathbf{C}_k(m \times n)$ Beobachtungsmatrix, welche die n Werte des Systemzustands auf die m Beobachtungen abbildet, so dass $\mathbf{z}_k = \mathbf{C}_k\mathbf{x}_k +$ Rauschen.

$\mathbf{A}_{k-1}(n \times n)$ Übergangsmatrix, die den Systemzustand vom Zeitpunkt t_{k-1} gemäß $\mathbf{x}_{k|k-1} = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}$ auf den Zeitpunkt t_k propagiert, z. B. mithilfe von Bewegungsgleichungen.

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Kalman-Filter (Stand: 11.02.21)

$\mathbf{Q}_{k-1}(n \times n)$ Prozessrauschen, beschreibt zusätzliche Unsicherheiten aufgrund von Modellierungsfehlern oder sich ändernden Bedingungen, meist als Diagonalmatrix.

$\mathbf{R}_k(m \times m)$ Kovarianzmatrix des Messrauschens. Die Matrix kann auch nicht-diagonal sein, wenn korreliertes Rauschen vorliegt. Das Rauschen darf jedoch nicht zeitkorreliert sein, da sonst zu kleine Varianzen geschätzt werden, was zu ungenauen Vorhersagen oder gar zur numerischen Destabilisierung führen kann. In solchen Fällen sollte die Störgröße dem Systemzustand als zusätzlich zu schätzender Anteil hinzugefügt werden oder die Kovarianzen müssen
um geeignete Terme erweitert werden.

$\mathbf{K}_k(n \times m)$ Kalman-Gain-Matrix zur Projektion der Residuen auf die Korrektur des Systemzustandes.

$\mathbf{x}_{k|k-1}(n)$ Systemzustand zur Zeit t_k, der vom Zustand des vorherigen Zeitpunkts t_{k-1} abgeleitet wurde, vor Anwendung der neuen Beobachtungen $\mathbf{z}_k$ (a-priori).

$\mathbf{P}_{\mathrm{k|k-1}}(n \times n)$ Kovarianzmatrix der Fehler von $\mathbf{x}_{k|k-1}$, vor Anwendung der neuen Beobachtungen $\mathbf{z}_k$ (a-priori).

$\mathbf{P}_{k|k-1}$ Systemzustand nach Anwendung der neuen Beobachtungen $\mathbf{z}_k$ (a-posteriori).

$\mathbf{x}_k$ Systemzustand nach Anwendung der neuen Beobachtungen $\boldsymbol{z}_k$ (a-posteriori).

$\mathbf{P}_k(n \times n)$ Kovarianzmatrix der Fehler von $\mathbf{x}_k$ nach Anwendung der neuen Beobachtungen $\mathbf{z}_k$ (a-posteriori)

Anwendung der Library

Für die genaue Nutzungsweise der Library wird auf das beigelegte Beispiele verwiesen. Außerdem wird eine *.html* Webseite mit der Dokumentation der Funktionen beigelegt.

Im Beispiel werden die Systemgleichungen für einen Kreis mit x,y-Koordinate und einem Radius in einer *.json* Konfigurationsdatei modelliert. Dabei bewegen sich sowohl die Koordinaten als auch der Radius mit einer konstanten Geschwindigkeit. Gemessen wird aber nur die Positionen und der Radius.

Die Konfigurationsdatei implementiert die unten gezeigten Parameter:

$$m = 3, n = 6, \Delta T_k = 1$$

$$x_k = \left[p_x, p_y, \mathrm{r}, \dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{r}_z\right]^T$$

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta T_k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta T_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta T_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = \sigma^2 \begin{pmatrix} \Delta T_k^4/4 & 0 & 0 & \Delta T_k^3/2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta T_k^4/4 & 0 & 0 & \Delta T_k^3/2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta T_k^4/4 & 0 & 0 & \Delta T_k^3/2 \\ \Delta T_k^3/2 & 0 & 0 & \Delta T_k^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta T_k^3/2 & 0 & 0 & \Delta T_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta T_k^3/2 & 0 & 0 & \Delta T_k^2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^2 = 0.25$$

$$R = \begin{pmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{pmatrix}$$

Außerdem wird in einem Minimalbeispiel der Aufruf der Library gezeigt. Hierbei werden die wichtigsten Funktionen (Konfigurieren des KF und die Update-Funktion). Alle weiteren Funktionen können aus der beigelegten *.html* Datei entnommen werden