LABORATOR nr. 14
CALCUL NUMERIC
(titular de curs: prof. univ. dr. Bica Alexandru Mihai)

FORMULE DE CUADRATURA DE TIP SIMPSON SI NEWTON-COTES

Algoritmul formulei de cuadratura a lui Simpson

I. Date de intrare:
a,b   capetele intervalului de integrare
n,   numarul nodurilor
f functia ce se integreaza

II. Date de iesire : S, valoarea aproximativa a integralei $\int_a^b f(x)dx$

III. Pasii algoritmului

1. Se citesc datele: a,b,n
2. Se creaza procedura de introducere a functiei f
3. Se construiesc nodurile diviziunii:
   Pentru $i = \overline{0,n}$ calculeaza

$$x[i] = a + \frac{i \cdot (b-a)}{n}$$

4. Calculul sumei integrale:
   $T := 0$, $M := 0$
   Pentru $i = \overline{1,n}$ calculeaza

$$T := T + (f(x[i]) + f(x[i-1]))$$

$$M := M + f\left(\frac{x[i-1] + x[i]}{2}\right)$$

5. Calculul aproximatiei integralei:

$$S := \left(\frac{(b-a)}{6 \cdot n}\right) \cdot (T + 4 \cdot M)$$

6. Afisarea rezultatului: Tipareste S; STOP.

Exemple numerice:

1. Se considera functia $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Sa se calculeze valoarea aproximativa a integralei $\int_0^1 f(x)\,dx$, cu n=4 si n=16, folosind formula generalizata a lui Simpson cu $a = 0$, $b = 1$, si $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

2. Sa se utilizeze formula de cuadratura clasica a lui Simpson pentru n=20 la calculul integralei

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\epsilon^2 \sin^2 x} dx$$

cu $\epsilon = 0,016729$ si apoi sa se calculeze o aproximatie pentru lungimea orbitei Pamantului in jurul Soarelui

$$L\left(P\right) = 4c\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\epsilon^2 \sin^2 x} dx,$$

unde $c = 149,6 \times 10^6$ km. Se considera datele de intrare $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$,

$$f\left(x\right) = 4c \cdot \sqrt{1-\epsilon^2 \sin^2 x}.$$

Sa se compare rezultatele obtinute folosind cuadratura trapezului, cuadratura perturbata a trapezului si cuadratura lui Simpson.

Algoritmul formulei corectate de cuadratura a lui Simpson

I. Date de intrare:

a,b capetele intervalului de integrare

dfa, dfb : valorile derivatei pe capetele intervalului

n, numarul nodurilor

f functia care se integreaza

II. Date de iesire : S, valoarea aproximativa a integralei $\int_{a}^{b} f(x)dx$

III. Pasii algoritmului

1. Se citesc datele: a, b, dfa, dfb, n
2. Se creaza procedura de introducere a functiei f
3. Se construiesc nodurile diviziunii:

   Pentru $i = \overline{0,n}$ calculeaza

$$x[i] = a + \frac{i \cdot (b-a)}{n}$$

4. Calculul sumei integrale:

   $T := 0$, $M := 0$

   Pentru $i = \overline{1,n}$ calculeaza

$$T := T + \left(f\left(x[i]\right) + f\left(x[i-1]\right)\right)$$

$$M := M + f\left(\frac{x[i-1]+x[i]}{2}\right)$$

5. Calculul aproximatiei integralei:

$$S := \left(\frac{(b-a)}{30 \cdot n}\right) \cdot (7 \cdot T + 16 \cdot M) - \left(\frac{(b-a)^2}{60 \cdot n^2}\right) \cdot (dfb - dfa)$$

6. Afisarea rezultatului: Tipareste S; STOP.

Exemple numerice:

1. Se considera functia $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Sa se calculeze valoarea aproximativa a integralei $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$, cu $a = 0$, $b = 1$, $n = 10$ si $dfa = -1$, $dfb = -\frac{1}{4}$ folosind formula corectata de cuadratura a lui Simpson.

2. Sa se utilizeze formula corectata de cuadratura a lui Simpson pentru n=10 si $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $dfa = 0$, $dfb = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = -0.24197$, la calculul integralei lui Laplace

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Sa se compare rezultatul cu cel furnizat de formula de cuadratura a lui Simpson.

Algoritmul formulei de cuadratura a lui Newton:

I. Date de intrare:

a,b capetele intervalului de integrare

n, numarul nodurilor

f functia ce se integreaza

II. Date de iesire : S, valoarea aproximativa a integralei $\int\limits_a^b f(x)dx$

III. Pasii algoritmului

1. Se citesc datele: a,b,n
2. Se creaza procedura de introducere a functiei f
3. Se construiesc nodurile diviziunii:

   Pentru $i = \overline{0, n}$ calculeaza

$$x[i] = a + \frac{i \cdot (b-a)}{n}$$

4. Se construiesc nodurile din interiorul subintervalelor

   Pentru $i = \overline{1, n}$ calculeaza

$$y[i] := x[i-1] + \frac{1}{3} \cdot (x[i] - x[i-1])$$

$$z[i] := x[i-1] + \frac{2}{3} \cdot (x[i] - x[i-1])$$

5. Calculul sumelor integrale

   Fie $T := 0$, $U := 0$, $V := 0$

   Pentru $i = \overline{1, n}$ calculeaza

$$T := T + (f(x[i]) + f(x[i-1]))$$

$$U := U + f(y[i])$$

$$V := V + f(z[i])$$

6. Calculul aproximatiei integralei:

$$S = \left(\frac{(b-a)}{8 \cdot n}\right) \cdot (T + 3 \cdot U + 3 \cdot V)$$

7. Afisarea rezultatului: Tipareste S; STOP.

Exemple numerice:

1. Se considera functia $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Sa se calculeze valoarea aproximativa a integralei $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$, cu $n = 10$, folosind formula lui Newton, considerand $a = 0$, $b = 1$, si $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

2. Sa se utilizeze formula de cuadratura a lui Newton pentru n=20 la calculul integralei

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 x} dx$$

cu $\epsilon = 0,016729$ si apoi sa se calculeze o aproximatie pentru lungimea orbitei Pamantului in jurul Soarelui

$$L(P) = 4c \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 x} dx,$$

unde $c = 149,6 \times 10^6$ km. Se considera datele de intrare $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$,

$$f(x) = 4c \cdot \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 x}.$$

Sa se compare rezultatele obtinute folosind cuadratura trapezului, cuadratura perturbata a trapezului si cuadratura lui Simpson.