LABORATOR nr. 1
METODE NUMERICE PENTRU ECUATII OPERATORIALE
(titular de curs: prof. univ. dr. Bica Alexandru Mihai)

METODA TANGENTEI. CALCULUL RADICALILOR

**Metoda tangentei**

Pentru aproximarea solutiei ecuatiei $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$, prin metoda tangentei se construieste sirul iterativ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

alegandu-se iteratia initiala

$$x_0 = \begin{cases} a, & \text{dacă } f(a) \cdot f''(a) > 0 \\ b, & \text{dacă } f(b) \cdot f''(b) > 0. \end{cases}$$

**Algoritmul metodei tangentei (a lui Newton)**

Algoritmul calculează o aproximaţie a soluţiei izolate $x^* \in (a, b)$ a ecuaţiei $f(x) = 0$, $f \in C[a, b]$, prin metoda lui Newton.

I. Date de intrare:

$a, b$-capetele intervalului (date de tip *double*)

expresia funcţiei $f$ (de argument real, declarata ca data de tip *double*)

*df*- expresia derivatei funcţiei $f$

*eps*- precizia dorită (data de tip *double*)

*dda* - valoarea derivatei a doua $f''$ în $a$ (data de tip *double*)

II. Date de iesire: $n$, $x[n]$

III. Pasii algoritmului

1: Daca $f(a) \cdot dda > 0$ atunci $x[0] := a$
altfel $x[0] := b$

2: Calculeaza

$$x[1] = x[0] - \frac{f(x[0])}{df(x[0])}$$

3: Pornind cu $n \geq 1$, cat timp : $|x[n] - x[n-1]| \geq eps$
Calculeaza

$$x[n+1] = x[n] - \frac{f(x[n])}{df(x[n])}$$

4. Tipareste $n$. Tipareste $x[n]$. Stop.

**Exemple numerice**:

1. Folosind metoda tangentei sa se aproximeze radacina reala a ecuatiei

$$x^3 - x - 1 = 0$$

luand succesiv $\varepsilon = 10^{-4}$, $\varepsilon = 10^{-8}$, $\varepsilon = 10^{-12}$, pentru a vedea numarul de iteratii necesare in fiecare caz, si sa se compare rezultatele cu cele furnizate de metoda aproximatiilor succesive.

2. Folosind metoda tangentei sa se aproximeze radacina reala a ecuatiei

$$x^5 - 5x + 1 = 0$$

situata in intervalul $(-1, 1)$. Se va lua $\varepsilon = 10^{-4}$. Sa se compare rezultatele cu cele furnizate de metoda aproximatiilor succesive.

3. Folosind metoda tangentei sa se aproximeze radacina reala a ecuatiei lui Kepler (ce apare in astronomie):

$$x = \sin x + 0.25$$

situata in intervalul $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, luand ca iteratie initiala $x_0 = \frac{3\pi}{8} \simeq 1.1781$, $\varphi(x) = \sin x + 0.25$, si $\varepsilon = 10^{-4}$. Sa se compare rezultatele cu cele furnizate de metoda aproximatiilor succesive.

**Calculul radicalilor cu metoda tangentei**

Pentru a aproxima $\sqrt[k]{c}$ se poate adapta metoda tangentei folosind functia $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ definita prin $f(x) = x^k - c$, unde $b = \max\{1, c\}$. Se obtine sirul recurent

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^k - c}{k x_{n-1}^{k-1}} = \frac{1}{k}\left[(k-1)\, x_{n-1} + \frac{c}{x_{n-1}^{k-1}}\right], \quad n \in \mathbb{N}^*$$

luand $x_0 = b$.

La implementarea algoritmului se va lua $f(x) = x^k - c$ si $df(x) = kx^{k-1}$, iar pasul 1 se va modifica astfel:

"*Daca* $c > 1$ *atunci* $x[0] := c$
*altfel* $x[0] := 1$"

*Exemple numerice*:

Sa se aproximeze valorile radicalilor $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, cu metoda tangentei si sa se compare rezulttele obtinute cu cele furnizate de metoda aproximatiilor succesive. Sa se aproximeze $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, si $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ prin metoda tangentei.