Tema 8: Teorema lui Weierstrass de aproximare cu polinoame trigonometrice

Pelle Remus-Nicolae
SDI anul 1

1. Contribuţiile lui Weierstrass în matematică

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1897) a fost un matematician german, adesea numit "parintele analizei moderne". Contributia in matematica este imensa. El enunta riguros conceptele de limita, functie continua (aşsa cum se definesc in prezent). Cele mai celebre lucrări ale sale sunt cele din domeniul funcțiilor eliptice. Multe teoreme ii poarta numele.

Weierstrass era interesat de temeinicia calculului și, la vremea respectivă, existau definiții oarecum ambigue ale fundamentelor calculului, astfel încât teoremele importante să nu poată fi dovedite cu o rigoare suficientă. Deși Bolzano a dezvoltat o definiție destul de riguroasă a unei limite încă din 1817 (și posibil chiar mai devreme) munca sa a rămas necunoscută pentru majoritatea comunității matematice până ani mai târziu, iar mulți matematicieni aveau doar definiții vagi ale limitelor și continuității funcțiilor.

Ideea de bază din spatele dovezilor Delta-epsilon este, probabil, găsită pentru prima dată în lucrările lui Cauchy în anii 1820. Cauchy nu distinge clar între continuitate și continuitate uniformă pe un interval. În mod deosebit, în al sau "Cours d'analyse" din 1821, Cauchy a susținut că limita (punctuală) a funcțiilor continue (punctuale) a fost ea însăși (punctuală) continuă, o afirmație interpretată ca fiind incorectă de mulți cercetători. Afirmaţia corectă este mai degrabă că limita uniformă a funcțiilor continue este continuă (de asemenea, limita uniformă a funcțiilor uniform continue este uniform continuă). Acest lucru a necesitat conceptul de convergenţă uniformă, care a fost observat pentru prima dată de consilierul lui Weierstrass, Christoph Gudermann, într-o lucrare din 1838, unde Gudermann a remarcat fenomenul, dar nu l-a definit sau elaborat. Weierstrass a văzut importanța conceptului, l-a formalizat și l-a aplicat pe scară largă în toate bazele calculului.

Weierstrass a făcut, de asemenea, progrese în domeniul calculului variațiilor. Folosind aparatul de analiză, la dezvoltarea caruia el a contribuit, Weierstrass a reușit să ofere o reformulare completă a teoriei care a pregătit calea pentru studiul modern al calculului variațiilor. Printre mai multe axiome, Weierstrass a stabilit o condiție necesară pentru existența unor extreme puternice de probleme variaționale. De asemenea, el a ajutat la conceperea condiției Weierstrass – Erdmann, care oferă condiții suficiente pentru ca un extremal să aibă un colț de-a lungul unui extremum dat și să permită găsirea unei curbe de minimizare pentru o integrală dată.

2. Teorema lui Weierstrass de aproximare cu polinoame trigonometrice

Teorema de aproximare a lui Weierstrass arată că fuctiunile continue cu valoare reală pe un interval compact pot fi aproximate uniform prin polinomiale. Cu alte cuvinte, polinoamele sunt uniform dense în C ([a, b], R) respectând norma superioara. Demonstraţia originală a fost dată în 1885. Acum există mai multe demonstraţii care utilizează abordări foarte diferite. O demonstraţie binecunoscută a fost dată de rusul Sergei Bernstein în 1911. Demonstraţia sa folosește doar metode elementare și oferă un algoritm explicit pentru aproximarea unei funcții prin utilizarea unei clase de polinoame care poartă acum numele lui. Teorema de aproximare a lui Weierstrass este de fapt un caz special al teoremei Stone-Weierstrass mai generale, demonstrată de Stone în 1937, care a realizat că foarte puține dintre proprietățile polinoamelor sunt esențiale pentru teoremă. Deși această demonstraţie nu este constructivă și se bazează pe mai multe mecanisme decât cea a lui Bernstein, este mult mai eficientă și are beneficiul generalității.

Enunţ: Pentru orice $f \in C_{2\pi} = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f = 2\pi - periodic\breve{a}\ și\ continu\breve{a}\ pe\ \mathbb{R}\}$ are loc proprietatea: $\forall \varepsilon > 0, \exists T = T_{f,\varepsilon}, T(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n}(A_k cos\ kx + B_k sin\ kx)$ polinom trigonometric, asfel încât: $|f(x) - T(x)| < \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstrație: Fie $f \in C_{2\pi}$, fixată, oarecare. Notăm $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Evident că g este pară, 2π-periodică și h este impară, 2π-periodică. Deoarece $f(x) = g(x) + h(x), \forall x \in \mathbb{R}$ rezultă imediat că este suficient să demonstrăm teorema pentru funcțiile pare și pentru cele impare (Atunci ar rezulta: $\|g - T_1\| < \frac{\varepsilon}{2}\ și\ \|h - T_2\| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|f - (T_1 + T_2\|$ $= \|g + h - T_1 - T_2\| \leq \|g - T_1\| + \|h - T_2\| < \varepsilon$).

Fie deci g 2π-periodică și pară. Fie $x \in [0, \pi]$. Prin schimbarea de variabilă t=cos x, obținem că funcția g*(t)=g(arccos t), $t \in [-1,1]$ este continuă pe [-1,1]. Din Teorema I a lui Weierstrass, $\forall \varepsilon > 0, \exists P\ polinom\ algebric\ P = P_{\varepsilon,g*} a.\hat{\imath}. |g * (x) - P(t)| < \frac{\varepsilon}{4}, \forall t \in [-1,1]$.

Punând t=cos x, P(cos x)=T(x) devine un polinom trigonometric par (în cos x) iar $g * (t) = g(x) \Rightarrow |g(x) - T(x)| < \varepsilon, \forall x \in [0, \pi]$.

Deoarece g și T sunt pare $\Rightarrow g(x) = g(-x)\ și\ T(x) = T(-x) \Rightarrow |g(-x) - T(-x)| < \varepsilon, \forall x \in [0, \pi] \Leftrightarrow |g(u) - T(u)| < \varepsilon, \forall u \in [-\pi, 0]$.

În concluzie, $|g(x) - T(x)| < \varepsilon, \forall x \in [-\pi, \pi]$ și deoarece g și T sunt 2π-periodice $\Rightarrow$ $|g(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$, unde T depinde doar de cos x. (1)

Fie acum funcția impară h(x). Redefinim $h_1(x) = h(x) \sin x$. Funcția h_1 este acum pară. Conform celor anterioare, $\forall \varepsilon > 0, \exists T_1$ polinom trigonometric ce depinde doar de cos x aî

$|h(x) - T_1(x)| < \frac{\varepsilon}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$. (2)

Avem: $f(x) \sin x = g(x) \sin x + h(x) \sin x$, de unde ținând cont de (1) și (2) rezultă:

$$|f(x)\sin x - \sin x\, T(x) - T_1(x)| = \left|\sin x\left(g(x) - T(x)\right) + h(x)\sin x - T_1(x)\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4}|\sin x| + |h(x)\sin x - T_1(x)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Notăm: $\bar{T}(x) = \sin x\, T(x) + T_1(x)$. Evident $\bar{T}(x)$ este polinom trigonometric (unde T(x) și T_1(x) depind doar de cos x) a.î.

$$|f(x)\sin x - \bar{T}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Întrucât (3) este valabilă pentru orice $f \in C_{2\pi}$, notând $F(y) = f\left(\frac{\pi}{2} - y\right), y \in \mathbb{R} \Rightarrow F \in C_{2\pi}$ și scriind (3) pentru F, obținem:

$$\exists \bar{\bar{T}}\ a.î. \left|f\left(y - \frac{\pi}{2}\right)\sin y - \bar{\bar{T}}(y)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall y \in \mathbb{R}. \qquad (4)$$

Facem în (4) schimbarea de variabilă $y = \frac{\pi}{2} - x$, și rezultă

$$\left|f(x)\cos x - \bar{\bar{T}}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (5)$$

Notăm $T_0(x) = \bar{T}(x)\sin x + \bar{\bar{T}}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x$.

Avem: $f(x) - T_0(x) = \sin x\,[f(x)\sin x - \bar{T}(x)] + \left[f(x)\cos x - \bar{\bar{T}}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]\cos x$, de unde, trecând la valoarea absolută, obținem

$$|f(x) - T_0(x)| \leq |\sin x| \cdot |f(x)\sin x - \bar{T}(x)| + |\cos x| \cdot \left|f(x)\cos x - \bar{\bar{T}}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad q.e.d.$$

Există multe generalizări ale acestei teoreme. De exemplu, am putea lăsa f să aiba valori complexe, sau să ia valori dintr-un spațiu vectorial real sau complex de dimensiune finită. Am putea lăsa ca f să fie o funcție a mai multor variabile reale. În aceste cazuri este ușor de formulat rezultatul. Am putea lăsa ca f să fie o funcție a mai multor variabile complexe. Acest lucru ar necesita un studiu mai profund, cu adaptări atât a ipotezei cât și a concluzie. Şi desigur, putem să lăsăm funcțiile să îşi ia valorile dintr-un spațiu infinit.