Curs 4

Metode numerice pentru ecuații operatoriale

Metode iterative de ordinul 3

Metoda aproximațiilor succesive și metoda coardei au ordinul de convergență 1, metoda secantei are ordinul de convergență $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,62$, iar metoda tangentei și metoda lui Steffensen au ordinul de convergență 2. Există și metode iterative de aproximare a soluției ecuației $f(x)=0$ cu ordin de convergență mai ridicat, iar dintre cele care au ordinul 3 putem menționa următoarele:

1) Metoda tangentei combinate

Se construiesc șirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prin relațiile de recurență:

$$\begin{cases} y_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} = y_n - \dfrac{f(y_n)}{f'(x_n)} \end{cases}, n\in\mathbb{N}$$

cu iterația inițială $x_0 \in (a,b)$ a.î. $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$.
Aceste relații se pot transforma într-un singur șir astfel:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}{f'(x_n)}, n\in\mathbb{N},$$

ultimul termen fiind cel suplimentar care realizează corecția metodei tangentei. Ordinul de convergență este $p=3$.

2) Metoda lui Halley

Se obține aplicând metoda tangentei funcției

$g(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{|f'(x)|}}$. Astfel,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

și deoarece

$$g'(x_n)=\frac{2\cdot[f'(x_n)]^2-f(x_n)\cdot f''(x_n)}{2f'(x_n)\cdot\sqrt{|f'(x_n)|}}$$, se obține,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{\sqrt{|f'(x_n)|}}\cdot\frac{2f'(x_n)\cdot\sqrt{|f'(x_n)|}}{2[f'(x_n)]^2-f(x_n)\cdot f''(x_n)}$$

adică,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{2f(x_n)\cdot f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2-f(x_n)\cdot f''(x_n)}, \quad n\in\mathbb{N}$$

cu termenul inițial $x_0\in(a,b)$ ales astfel încât $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$. Asupra ordinului de convergență are loc următorul rezultat:

<u>Teoremă</u>: Dacă $x^*\in(a,b)$ este rădăcina ec. $f(x)=0$ și $f'(x^*)\neq 0$, iar $f\in C^3[a,b]$, atunci $(\exists)K>0$ a.î.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x^*-x_{n+1}|}{|x^*-x_n|^3}=K.$$

<u>Demonstrație</u>: Utilizând formula lui Taylor pe intervalul (x_n,x^*) în punctul x_n obținem,

$$0=f(x^*)=f(x_n)+f'(x_n)(x^*-x_n)+\frac{f''(x_n)}{2}\cdot(x^*-x_n)^2+$$
$$+\frac{f'''(\xi)}{6}(x^*-x_n)^3, \quad \xi\in(x_n,x^*)$$

și pe de altă parte, rezultă,

$$0=f(x^*)=f(x_n)+f'(x_n)(x^*-x_n)+\frac{f''(\eta)}{2}(x^*-x_n)^2$$

cu $\eta\in(x_n,x^*)$, $\eta\neq\xi$.

Înmulțim prima relație cu $2f'(x_n)$, înmulțim a doua relație cu $f''(x_n)\cdot(x^*-x_n)$, și apoi din prima relație astfel obținută o scădem pe a doua. Rezultă,

$$0 = 2f(x_n)\cdot f'(x_n) + 2[f'(x_n)]^2\cdot(x^*-x_n) + f'(x_n)\cdot f''(x_n)\cdot(x^*-x_n)^2 + \frac{f'(x_n)f'''(\xi)}{3}\cdot(x^*-x_n)^3 -$$

$$- f(x_n)\cdot f''(x_n)(x^*-x_n) - f'(x_n)f''(x_n)(x^*-x_n)^2 - \frac{f''(x_n)\cdot f''(\eta)}{2}\cdot(x^*-x_n)^3$$

și observând că termenul $f'(x_n)f''(x_n)(x^*-x_n)^2$ se reduce, deducem după reorganizarea termenilor,

$$0 = 2f(x_n)\cdot f'(x_n) + \left[2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)\right](x^*-x_n) + \left[\frac{f'(x_n)f'''(\xi)}{3} - \frac{f''(x_n)\cdot f''(\eta)}{2}\right]\cdot(x^*-x_n)^3.$$

Trecând în membrul stâng primul și al treilea termen și împărțind apoi cu $2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)\cdot f''(x_n)$ se obține,

$$x^*-x_n = \frac{-2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)\cdot f''(x_n)} -$$

$$- \frac{2f'(x_n)f'''(\xi) - 3f''(x_n)\cdot f''(\eta)}{6[2(f'(x_n))^2 - f(x_n)\cdot f''(x_n)]}\cdot(x^*-x_n)^3.$$

Trecând primul termen în membrul stâng se vede că în partea stângă se obține x^*-x_{n+1}, adică,

$$x^*-x_{n+1} = -\frac{2f'(x_n)f'''(\xi) - 3f''(x_n)\cdot f''(\eta)}{12[f'(x_n)]^2 - 6f(x_n)\cdot f''(x_n)}\cdot(x^*-x_n)^3$$

iar după împărțire cu $(x^*-x_n)^3$ și trecând la limită pentru $n\to\infty$, vom obține:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x^*-x_{n+1}|}{|x^*-x_n|^3}=\frac{|12f'(x^*)\cdot f'''(x^*)-3[f''(x^*)]^2|}{12[f'(x^*)]^2}>0,$$

deoarece $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0$, $\lim_{n\to\infty} f'(x_n)=f'(x^*)$, şi $\lim_{n\to\infty} f''(x_n)=f''(x^*)$.

3) <u>Metoda lui Cebîşev de ordin 3</u>

Se obţine prin interpolare inversă aplicând formula lui Taylor pentru $f\in C^3[a,b]$, rezultând şirul iterativ dat prin:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\frac{[f(x_n)]^2\cdot f''(x_n)}{2[f'(x_n)]^3},\ n\in\mathbb{N}$$

în care primul termen $x_0\in(a,b)$ se alege astfel încât $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$. Ordinul de convergenţă este $p=3$.

4) <u>Aproximarea radicalilor pătratici</u>

Pentru $a>0$ se poate construi un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pentru care $\lim_{n\to\infty} x_n=a$, iar ordinul de convergenţă a acestui şir este $p=3$. Exprimarea prin recurenţă a şirului este:

$$x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a},\ n\in\mathbb{N}$$

în care termenul iniţial x_0 se poate lua $x_0=a$, în cazul $a>1$.

<u>Obs.</u>: Pentru verificare, dacă $\lim_{n\to\infty} x_n=z$, trecând la limită pentru $n\to\infty$ în relaţia de recurenţă se obţine,

$$z=\frac{z(z^2+3a)}{3z^2+a}\iff 3z^3+az=z^3+3az$$

$$\iff 2z^3=2az\ \big|:2z\implies z^2=a\implies z=\sqrt{a}.$$