Cálculo de Geodésicas en el Espacio Hiperbólico de Dimensión 2

Ángel Emmanuel Peñaflor Zetina

Directores:
Dr. Francisco Gabriel Hernández Zamora
Dr. Evodio Muñoz Aguirre

Universidad Veracruzana
Facultad de Matemáticas

14 de diciembre de 2022

Objetivo

Encontrar las curvas geodésicas en el espacio hiperbólico de dimensión 2.

- ¿Qué es una curva geodésica?
- ¿Qué es el espacio hiperbólico de dimensión 2?

Introducción

Objetivo

Encontrar las curvas geodésicas en el espacio hiperbólico de dimensión 2.

- ¿Qué es una curva geodésica?
- ¿Qué es el espacio hiperbólico de dimensión 2?

Introducción

Objetivo

Encontrar las curvas geodésicas en el espacio hiperbólico de dimensión 2.

- ¿Qué es una curva geodésica?
- ¿Qué es el espacio hiperbólico de dimensión 2?

Contenido

Definición (Variedad Topológica)

Sea M un espacio topológico, diremos que M es una **variedad topológica de dimensión** n si:

- M es un *espacio de Hausdorff*.
- M es *segundo numerable*.
- M es *localmente euclidiano de dimensión n*, esto quiere decir que, para cada punto $x \in M$ existe una vecindad abierta U que contiene a x y un homeomorfismo $\varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Ejemplo de variedades topológicas

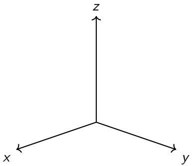


Figura: Los espacios euclidianos.

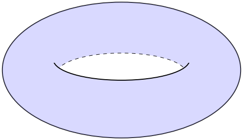


Figura: Los $n-$Toros.

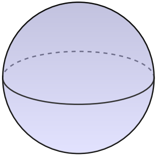


Figura: Las $n-$Esferas.

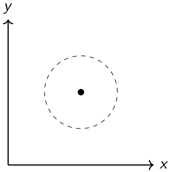


Figura: Los subconjuntos abiertos de las variedades.

Ejemplo: El espacio proyectivo

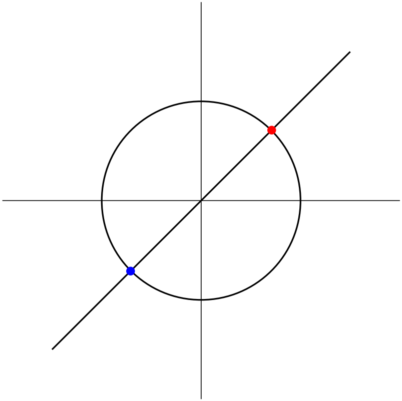


Figura: Representación del espacio proyectivo $\mathbb{RP}^1$.

.

Cartas

Definición (Carta)

Una **carta** en M es un par ordenado (U, φ) donde U es un subconjunto abierto de M y φ es un homeomorfismo de U a $\mathbb{R}^n$.

Definición (Cartas Suavemente Compatibles)

Si (U, φ) y (V, ψ) son dos cartas en M tales que $U \cap V \neq \varnothing$, llamaremos **mapa de transición** a la composición de funciones:

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

Diremos que las cartas (U, φ) y (V, ψ) son **suavemente compatibles** si $U \cap V = \varnothing$ o si el mapa de transición $\psi \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo.

Cartas

Definición (Carta)

Una **carta** en M es un par ordenado (U, φ) donde U es un subconjunto abierto de M y φ es un homeomorfismo de U a $\mathbb{R}^n$.

Definición (Cartas Suavemente Compatibles)

Si (U, φ) y (V, ψ) son dos cartas en M tales que $U \cap V \neq \varnothing$, llamaremos **mapa de transición** a la composición de funciones:

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

Diremos que las cartas (U, φ) y (V, ψ) son **suavemente compatibles** si $U \cap V = \varnothing$ o si el mapa de transición $\psi \circ \varphi^{-1}$ es un difeomorfismo.

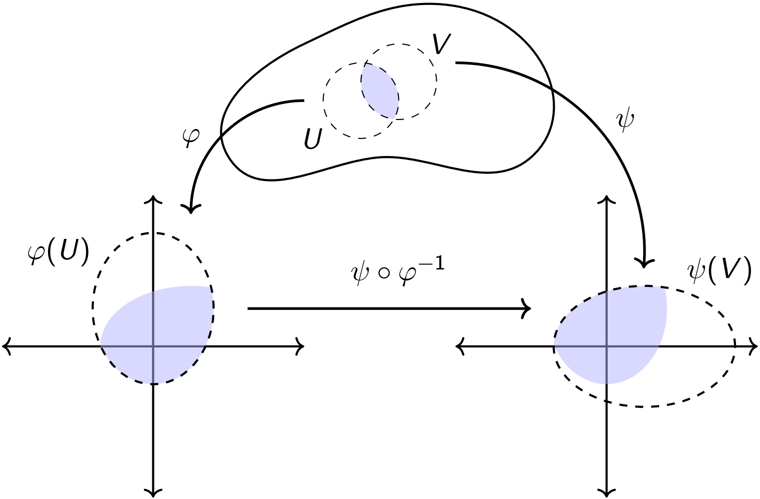


Figura: Mapa de transición

Atlas y la estructura suave

Definición (Atlas, Atlas Suave y Atlas Maximal)

- Una colección de cartas $(U, \varphi)_\alpha$ es un **atlas** $\mathcal{A}$, en M si dichas cartas forman una cubierta para M.
- Diremos que el atlas $\mathcal{A}$ es **suave** si cualesquiera dos cartas son suavemente compatibles, a las cartas de un atlas suave les llamaremos *cartas suaves*.
- Un atlas suave es llamado **maximal** si no está propiamente contenido en ningún atlas más grande.

Definición (Atlas, Atlas Suave y Atlas Maximal)

- Una colección de cartas $(U, \varphi)_\alpha$ es un **atlas** $\mathcal{A}$, en M si dichas cartas forman una cubierta para M.
- Diremos que el atlas $\mathcal{A}$ es **suave** si cualesquiera dos cartas son suavemente compatibles, a las cartas de un atlas suave les llamaremos *cartas suaves*.
- Un atlas suave es llamado **maximal** si no está propiamente contenido en ningún atlas más grande.

Atlas y la estructura suave

Definición (Atlas, Atlas Suave y Atlas Maximal)

- Una colección de cartas $(U, \varphi)_\alpha$ es un **atlas** $\mathcal{A}$, en M si dichas cartas forman una cubierta para M.
- Diremos que el atlas $\mathcal{A}$ es **suave** si cualesquiera dos cartas son suavemente compatibles, a las cartas de un atlas suave les llamaremos *cartas suaves*.
- Un atlas suave es llamado **maximal** si no está propiamente contenido en ningún atlas más grande.

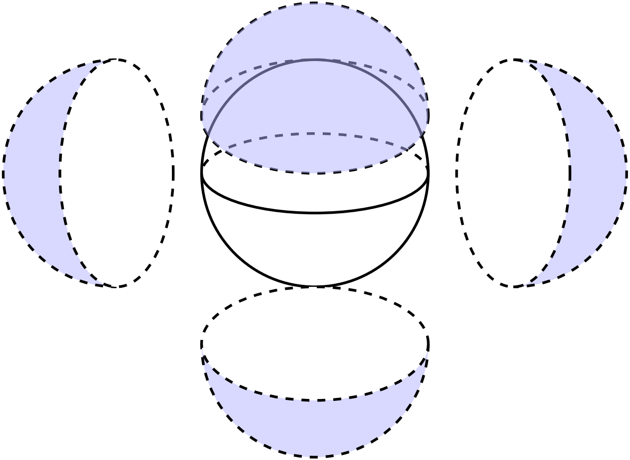


Figura: Cuatro cartas suavemente compatibles en una esfera.

Definición (Variedad Suave)

Si M es una variedad topológica y $\mathcal{A}$ es un atlas maximal en M, diremos que el par $(M, \mathcal{A})$ es una **variedad suave**, a dicho atlas maximal le llamaremos la **estructura suave** en M.

Ejemplo de variedades suaves

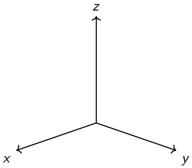


Figura: Los espacios euclidianos.

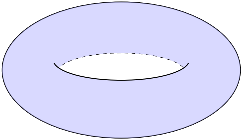


Figura: Los $n-$Toro.

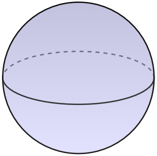


Figura: Las $n-$Esferas.

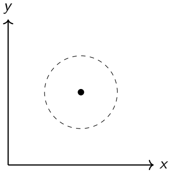


Figura: Los subconjuntos abiertos de las variedades suaves.

Definición (Función Suave)

Sean M una variedad suave $n-$dimensional, k un entero no negativo y $f : M \to \mathbb{R}^k$ una función. Diremos que f es **suave** si para cada punto $p \in M$ existe una carta suave (U, φ), cuyo dominio contiene a p, tal que la composición de funciones $f \circ \varphi^{-1}$ es suave en $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

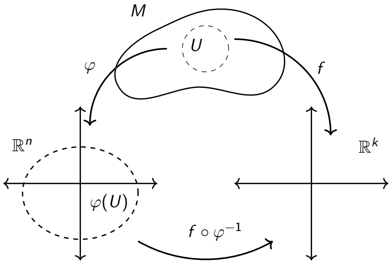


Figura: Representación de una función suave.

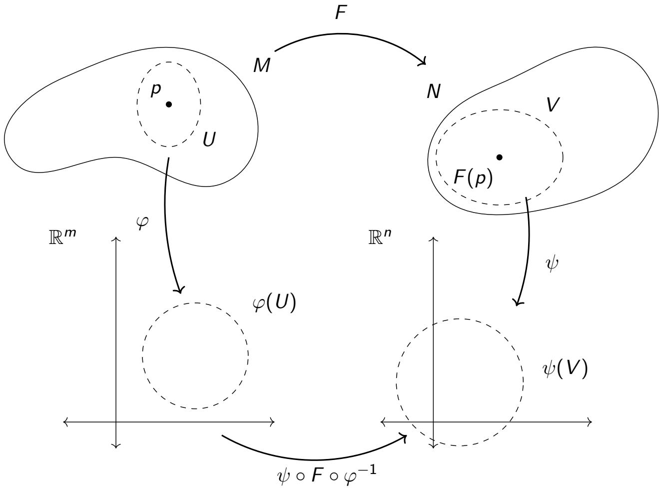


Figura: Representación de un mapa suave.

Ejemplo de funciones y mapas suaves

- El mapa identidad.
- El mapa de inclusión
- Los mapas constantes.
- Las proyecciones.
- La composición de funciones suaves.

Definición (Vectores y Espacios Tangentes en $\mathbb{R}^n$)

Sea a un punto en $\mathbb{R}^n$, definiremos el **espacio tangente a $\mathbb{R}^n$ en el punto** a como el conjunto:

$$T_a(\mathbb{R}^n) = \{a\} \times \mathbb{R}^n = \{(a, v) : v \in \mathbb{R}^n\}$$

Un **vector tangente** a $\mathbb{R}^n$ es un elemento de $T_a(\mathbb{R}^n)$ para algún $a \in \mathbb{R}^n$.

$T_a(\mathbb{R}^n)$ tiene estructura de espacio vectorial. Dados $a \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ y $v_a, w_a \in T_a(\mathbb{R}^n)$:

$$v_a + w_a = (v + w)_a$$
$$c(v_a) = (cv)_a$$

Definición (Vectores y Espacios Tangentes en $\mathbb{R}^n$)

Sea a un punto en $\mathbb{R}^n$, definiremos el **espacio tangente a $\mathbb{R}^n$ en el punto** a como el conjunto:

$$T_a(\mathbb{R}^n) = \{a\} \times \mathbb{R}^n = \{(a, v) : v \in \mathbb{R}^n\}$$

Un **vector tangente** a $\mathbb{R}^n$ es un elemento de $T_a(\mathbb{R}^n)$ para algún $a \in \mathbb{R}^n$.

$T_a(\mathbb{R}^n)$ tiene estructura de espacio vectorial. Dados $a \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ y $v_a, w_a \in T_a(\mathbb{R}^n)$:

$$v_a + w_a = (v + w)_a$$
$$c(v_a) = (cv)_a$$

Ejemplo de espacios tangentes

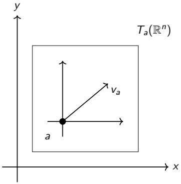


Figura: Espacio tangente a un punto en el plano.

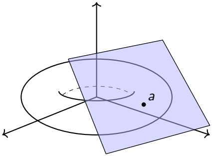


Figura: Espacio tangente a un punto del 2−toro.

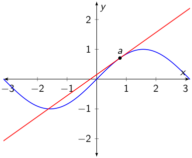


Figura: Espacio tangente a un punto de $\sin(x)$.

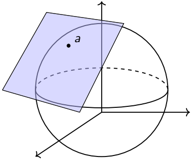


Figura: Espacio tangente a un punto de la 2−esfera.

Derivada direccional

Si tenemos un punto $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y un vector $v = \begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \end{bmatrix} \in T_a(\mathbb{R}^n)$ podemos parametrizar la recta que pasa por a con dirección v de la siguiente manera:

$$\gamma(t) = (a_1 + tv_1, \ldots, a_n + tv_n)$$

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función suave definida en una vecindad de a y v es un vector en $T_a(\mathbb{R}^n)$ podemos obtener la *derivada direccional* de f en a en la dirección de v como:

$$D_v f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^{n} v_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_a$$

Derivada direccional

Si tenemos un punto $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y un vector $v = \begin{bmatrix} v_1 \ldots v_n \end{bmatrix} \in T_a(\mathbb{R}^n)$ podemos parametrizar la recta que pasa por a con dirección v de la siguiente manera:

$$\gamma(t) = (a_1 + tv_1, \ldots, a_n + tv_n)$$

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función suave definida en una vecindad de a y v es un vector en $T_a(\mathbb{R}^n)$ podemos obtener la *derivada direccional* de f en a en la dirección de v como:

$$D_v f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^{n} v_i \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_a$$

Derivada direccional

La derivada direccional es lineal y cumple la regla del producto. Esto quiere decir que si f y g son funciones suaves definida en una vecindad de $a \in \mathbb{R}^n$, c es una constante y $v \in T_a(\mathbb{R}^n)$, entonces:

- $D_v(f+g) = D_v(f) + D_v(g)$
- $D_v(cf) = cD_v(f)$
- $D_v(fg) = f(a)D_v(g) + g(a)D_v(f)$

Definición (Derivación en un punto)

Si a es un punto en $\mathbb{R}^n$ y $\omega : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal, diremos que ω es una **derivación** en a si cumple la regla del producto.

Derivada direccional

La derivada direccional es lineal y cumple la regla del producto. Esto quiere decir que si f y g son funciones suaves definida en una vecindad de $a \in \mathbb{R}^n$, c es una constante y $v \in T_a(\mathbb{R}^n)$, entonces:

- $D_v(f+g) = D_v(f) + D_v(g)$
- $D_v(cf) = cD_v(f)$
- $D_v(fg) = f(a)D_v(g) + g(a)D_v(f)$

Definición (Derivación en un punto)

Si a es un punto en $\mathbb{R}^n$ y $\omega : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal, diremos que ω es una **derivación** en a si cumple la regla del producto.

Derivaciones

El conjunto de todas las derivaciones en a, al cual denotamos por $\mathcal{D}_a(\mathbb{R}^n)$, es un espacio vectorial bajo las operaciones:

$$(\omega_1 + \omega_2)(f) = \omega_1(f) + \omega_2(f)$$
$$(c\omega)(f) = c(\omega(f))$$

Teorema

Los espacios $T_a(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{D}_a(\mathbb{R}^n)$ son isomorfos y el isomorfismo está dado por:

$$\varphi : T_a(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}_a(\mathbb{R}^n)$$
$$v \mapsto D_v = \sum_{i=1}^{n} v_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_a$$

Derivaciones

El conjunto de todas las derivaciones en a, al cual denotamos por $\mathcal{D}_a(\mathbb{R}^n)$, es un espacio vectorial bajo las operaciones:

$$(\omega_1 + \omega_2)(f) = \omega_1(f) + \omega_2(f)$$
$$(c\omega)(f) = c(\omega(f))$$

Teorema

Los espacios $T_a(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{D}_a(\mathbb{R}^n)$ son isomorfos y el isomorfismo está dado por:

$$\varphi : T_a(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}_a(\mathbb{R}^n)$$
$$v \mapsto D_v = \sum_{i=1}^{n} v_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_a$$

Definición (Derivación en un punto de una variedad)

Sea M una variedad suave y sea $p \in M$ un punto. Diremos que un mapa $\omega : C^{\infty}(M) \to \mathbb{R}$ es una **derivación** en p si es lineal y además cumple la regla del producto.
Llamaremos al conjunto de todas las derivaciones en un punto de una variedad el **espacio tangente** a la variedad en ese punto, este se denota T_pM.

Si M es una variedad suave $n-$dimensional, p un punto en M y (U,φ) una carta suave que contiene a p, $f : M \to \mathbb{R}^n$ una función suave definida en una vecindad de p podemos definir:

$$\partial\varphi_i\Big|_p(f) = \frac{\partial}{\partial\varphi_i}\Big|_p f = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)} (f\circ\varphi^{-1})$$

Teorema (Base para el espacio tangente)

Sean M una variedad suave, $p \in M$ y (U,φ) una carta suave que contenga a p. El conjunto

$$\partial\varphi_1\Big|_p, \ldots, \partial\varphi_n\Big|_p$$

forma una base para el espacio tangente T_pM.

Base para el espacio tangente

Si M es una variedad suave $n-$dimensional, p un punto en M y (U, φ) una carta suave que contiene a p, $f : M \to \mathbb{R}^n$ una función suave definida en una vecindad de p podemos definir:

$$\partial\varphi_i\big|_p(f) = \frac{\partial}{\partial\varphi_i}\bigg|_p f = \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1})$$

Teorema (Base para el espacio tangente)

Sean M una variedad suave, $p \in M$ y (U, φ) una carta suave que contenga a p. El conjunto

$$\partial\varphi_1\big|_p, \ldots, \partial\varphi_n\big|_p$$

forma una base para el espacio tangente T_pM.

Definición (Métrica Riemanniana)

Sea M una variedad suave. Una **Métrica Riemanniana** g en M es un campo suave 2-tensorial covariante simétrico, el cual es definido positivo en cada punto.

1. Campo suave
2. 2−tensor covariante
3. Simétrico.
4. Definido positivo.

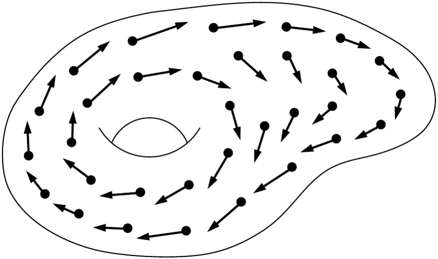


Figura: Campo vectorial suave

1. Campo suave
2. 2−tensor covariante
3. Simétrico.
4. Definido positivo.

$$g_p(-,-) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

$$g_p(\lambda x + y, z) = \lambda g_p(x, z) + g_p(y, z)$$
$$g_p(x, \lambda y + z) = \lambda g_p(x, y) + g_p(x, z)$$

Variedades Riemannianas

1. Campo suave
2. 2−tensor covariante
3. Simétrico.
4. Definido positivo.

$$g_p(x, y) = g_p(y, x)$$

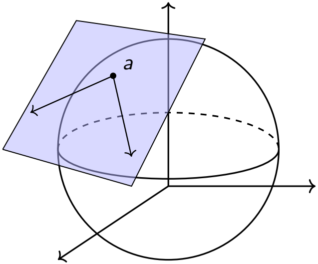
Variedades Riemannianas

1. Campo suave
2. $2-$tensor covariante
3. Simétrico.
4. Definido positivo.

$$
\begin{aligned}
g_p(x,x) &> 0, \quad && \text{si } x \neq 0 \\
g_p(0,0) &= 0, \quad && \text{si } x = 0
\end{aligned}
$$

Variedades Riemannianas

1. Campo suave
2. $2-$tensor covariante
3. Simétrico.
4. Definido positivo.



En pocas palabras, una métrica Riemanniana define un producto interno en el espacio tangente a cada punto de una variedad suave.

Variedades Riemannianas

1. Campo suave
2. $2-$tensor covariante
3. Simétrico.
4. Definido positivo.

Definición (Variedad Riemanniana)

El par (M, g), donde M es una variedad suave y g es una métrica Riemanniana, es llamado un **Variedad Riemanniana**.

Lema (Expresión local de la métrica)

Sean (M, g) una variedad Riemanniana, $p \in M$ y (U, φ) una carta suave que contiene a p. La métrica puede expresarse de manera local en U como:

$$g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} d\varphi_i d\varphi_j,$$

donde $\{d\varphi_1, \ldots, d\varphi_n\}$ es la base del espacio dual a T_pM, asociada a la base $\{\partial\varphi_1, \ldots, \partial\varphi_n\}$, y g_{ij} son funciones suaves dadas por:

$$g_{ij}(p) = g_p \left(\partial\varphi_i\big|_p, \partial\varphi_j\big|_p \right)$$

Dada una métrica g es posible asociar a esta una matriz G, la cual depende de las coordenadas locales de la carta sobre la cual esté definida. Las entradas de G son las funciones g_{ij} definidas anteriormente.

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

La matriz G es simétrica y definida positiva.

Dada una métrica g es posible asociar a esta una matriz G, la cual depende de las coordenadas locales de la carta sobre la cual esté definida. Las entradas de G son las funciones g_{ij} definidas anteriormente.

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

La matriz G es simétrica y definida positiva.

Variedades Riemannianas

Dada una métrica g es posible asociar a esta una matriz G, la cual depende de las coordenadas locales de la carta sobre la cual esté definida. Las entradas de G son las funciones g_{ij} definidas anteriormente.

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

La matriz G es simétrica y definida positiva.

Métrica Euclidiana

Ejemplo

En $\mathbb{R}^n$ con la base estándar $\{x_1, \ldots, x_n\}$ definimos la métrica:

$$g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} dx_i dx_j = \sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2$$

Aplicando esta métrica a dos vectores tangentes arbitrarios $v = \left[v_1 \cdots v_n\right]$ y $w = \left[w_1 \cdots w_n\right]$ se obtiene:

$$\begin{aligned} g(v, w) &= \sum_{i=1}^{n} dx_i(v) dx_i(w) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v \cdot w \end{aligned}$$

Métrica Euclidiana

Ejemplo

En $\mathbb{R}^n$ con la base estándar $\{x_1, \ldots, x_n\}$ definimos la métrica:

$$g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} dx_i dx_j = \sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2$$

Aplicando esta métrica a dos vectores tangentes arbitrarios $v = \begin{bmatrix} v_1 \cdots v_n \end{bmatrix}$ y $w = \begin{bmatrix} w_1 \cdots w_n \end{bmatrix}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} g(v, w) &= \sum_{i=1}^{n} dx_i(v) dx_i(w) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v \cdot w \end{aligned}$$

Métrica Euclidiana

Ejemplo

En $\mathbb{R}^n$ con la base estándar $\{x_1, \ldots, x_n\}$ definimos la métrica:

$$g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} dx_i dx_j = \sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2 , \quad G = I_{n \times n}$$

Aplicando esta métrica a dos vectores tangentes arbitrarios $v = \begin{bmatrix} v_1 \cdots v_n \end{bmatrix}$ y $w = \begin{bmatrix} w_1 \cdots w_n \end{bmatrix}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} g(v, w) &= \sum_{i=1}^{n} dx_i(v) dx_i(w) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v \cdot w \end{aligned}$$

Métrica Euclidiana

Ejemplo

En $\mathbb{R}^n$ con la base estándar $\{x_1, \ldots, x_n\}$ definimos la métrica:

$$g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} dx_i dx_j = \sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2$$

Aplicando esta métrica a dos vectores tangentes arbitrarios $v = \begin{bmatrix} v_1 \cdots v_n \end{bmatrix}$ y $w = \begin{bmatrix} w_1 \cdots w_n \end{bmatrix}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} g(v, w) &= \sum_{i=1}^{n} dx_i(v) dx_i(w) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v \cdot w \end{aligned}$$

Variedades Riemannianas

Teorema (Existencia de la métrica)

Toda variedad suave puede ser equipada con una métrica Riemanniana.

Demostración.

1. Sea M una variedad suave y $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ cualquier carta suave en M.
2. Dado un punto p en la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y dos vectores tangentes v, w en T_pM como, podemos expresar a estos como una combinación lineal:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial\varphi_i, \quad w = \sum_{j=1}^{n} w_j \partial\varphi_j,$$

□

Teorema (Existencia de la métrica)

Toda variedad suave puede ser equipada con una métrica Riemanniana.

Demostración.

1. Sea M una variedad suave y $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ cualquier carta suave en M.
2. Dado un punto p en la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y dos vectores tangentes v, w en T_pM como, podemos expresar a estos como una combinación lineal:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial\varphi_i, \quad w = \sum_{j=1}^{n} w_j \partial\varphi_j,$$

□

Variedades Riemannianas

Teorema (Existencia de la métrica)

Toda variedad suave puede ser equipada con una métrica Riemanniana.

Demostración.

1. Sea M una variedad suave y $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ cualquier carta suave en M.
2. Dado un punto p en la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y dos vectores tangentes v, w en T_pM como, podemos expresar a estos como una combinación lineal:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial\varphi_i, \quad w = \sum_{j=1}^{n} w_j \partial\varphi_j,$$

$\square$

Variedades Riemannianas

Teorema (Existencia de la métrica)

Toda variedad suave puede ser equipada con una métrica Riemanniana.

Demostración.

1. Sea M una variedad suave y $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ cualquier carta suave en M.
2. Dado un punto p en la carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y dos vectores tangentes v, w en T_pM como, podemos expresar a estos como una combinación lineal:

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial\varphi_i, \quad w = \sum_{j=1}^{n} w_j \partial\varphi_j,$$

□

Demostración.

3. Definimos en U_α la métrica g^α como:

$$g_p^\alpha(v,w) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}v_iw_j = \sum_{i=1}^{n}v_iw_i$$

4. Utilizando una partición de la unidad $\{f_\alpha\}$ subordinada a la estructura suave de M se construye una métrica global g, de tal modo que:

$$g_p = \sum_{\alpha} f_\alpha g_p^\alpha$$

Demostración.

3. Definimos en U_α la métrica g^α como:

$$g_p^\alpha(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} v_i w_j = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

4. Utilizando una partición de la unidad $\{f_\alpha\}$ subordinada a la estructura suave de M se construye una métrica global g, de tal modo que:

$$g_p = \sum_{\alpha} f_\alpha g_p^\alpha$$

□

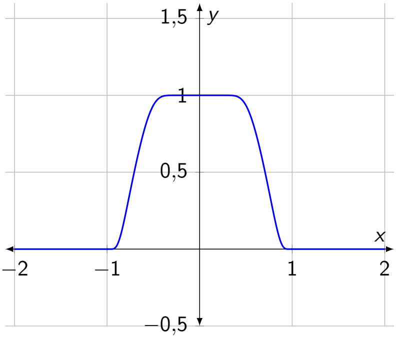


Figura: Gráfica de una función indicadora suave.

Curvas en Variedades

Definición (Curva en variedades)

Sea M una variedad suave, diremos que γ es **una curva suave** sobre M si $\gamma : [a, b] \to M$ es un mapa suave.

Definición (Velocidad de una curva)

Sean $\gamma : [a, b] \to M$ una curva suave, $t_0 \in [a, b]$ y (U, φ) una carta suave que contiene a $\gamma(t_0)$. Definimos la **velocidad de** γ **en** t_0 como el vector tangente:

$$\gamma'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\gamma_i(t_0)}{dt} \partial\varphi_i\Big|_{\gamma(t_0)}$$

Definición (Curva en variedades)

Sea M una variedad suave, diremos que γ es **una curva suave** sobre M si $\gamma : [a, b] \to M$ es un mapa suave.

Definición (Velocidad de una curva)

Sean $\gamma : [a, b] \to M$ una curva suave, $t_0 \in [a, b]$ y (U, φ) una carta suave que contiene a $\gamma(t_0)$. Definimos la **velocidad de** γ **en** t_0 como el vector tangente:

$$\gamma'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\gamma_i(t_0)}{dt} \partial\varphi_i\Big|_{\gamma(t_0)}$$

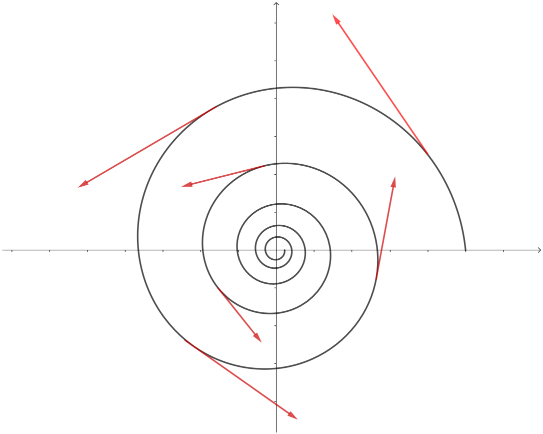


Figura: Ejemplo de una curva en el plano con algunos vectores tangentes.

Definición (Conexión afín)

Una **conexión afín** en M es un mapa bilineal:

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

el cual cumple las siguientes dos propiedades:

- ∇ es lineal en su primera coordenada con respecto al anillo de funciones suaves.

$$\nabla(fX + Y, Z) = f\nabla(X, Z) + \nabla(Y, Z)$$

- ∇ cumple la siguiente regla del producto:

$$\nabla(X, fY) = X(f)Y + f\nabla(X, Y)$$

Conexión Afín

Definición (Conexión afín)

Una **conexión afín** en M es un mapa bilineal:

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

el cual cumple las siguientes dos propiedades:

- ∇ es lineal en su primera coordenada con respecto al anillo de funciones suaves.

$$\nabla(fX + Y, Z) = f\nabla(X, Z) + \nabla(Y, Z)$$

- ∇ cumple la siguiente regla del producto:

$$\nabla(X, fY) = X(f)Y + f\nabla(X, Y)$$

Conexión Afín

Definición (Conexión afín)

Una **conexión afín** en M es un mapa bilineal:

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M),$$

el cual cumple las siguientes dos propiedades:

- ∇ es lineal en su primera coordenada con respecto al anillo de funciones suaves.

$$\nabla(fX + Y, Z) = f\nabla(X, Z) + \nabla(Y, Z)$$

- ∇ cumple la siguiente regla del producto:

$$\nabla(X, fY) = X(f)Y + f\nabla(X, Y)$$

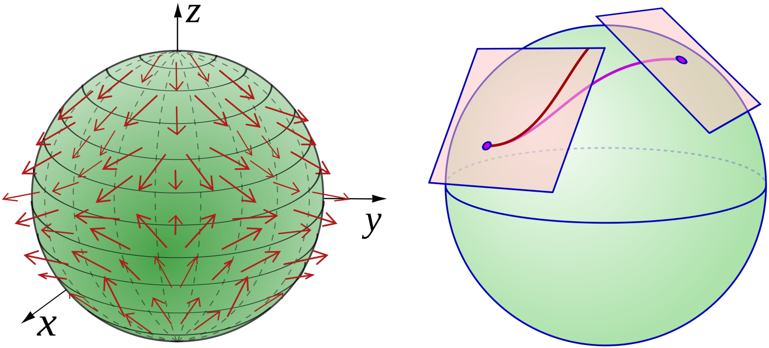


Figura: Representación de una conexión afín en la esfera

Conexión Afín

Usualmente se denota a la conexión afín $\nabla(X, Y)$ como $\nabla_X Y$ y se le llama *la derivada covariante de* Y *en la dirección de* X.

De manera local la derivada covariante puede ser expresada como:

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{n} \left(X(Y_k) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} X_i Y_j \right) \partial_k,$$

En la ecuación anterior Γ_{ij}^{k} son n^3 funciones suaves, a las cuales se les llama los *símbolos de Christoffel*. En una variedad Riemanniana los símbolos pueden ser obtenidos por la ecuación:

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ji} - \partial_k g_{ij}) g^{km}$$

Conexión Afín

Usualmente se denota a la conexión afín $\nabla(X, Y)$ como $\nabla_X Y$ y se le llama *la derivada covariante de Y en la dirección de X*.

De manera local la derivada covariante puede ser expresada como:

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{n} \left(X(Y_k) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} X_i Y_j \right) \partial_k,$$

En la ecuación anterior Γ_{ij}^{k} son n^3 funciones suaves, a las cuales se les llama los *símbolos de Christoffel*. En una variedad Riemanniana los símbolos pueden ser obtenidos por la ecuación:

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ji} - \partial_k g_{ij}) g^{km}$$

Conexión Afín

Usualmente se denota a la conexión afín $\nabla(X, Y)$ como $\nabla_X Y$ y se le llama *la derivada covariante de Y en la dirección de X*.

De manera local la derivada covariante puede ser expresada como:

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{n} \left(X(Y_k) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} X_i Y_j \right) \partial_k,$$

En la ecuación anterior Γ_{ij}^{k} son n^3 funciones suaves, a las cuales se les llama los *símbolos de Christoffel*. En una variedad Riemanniana los símbolos pueden ser obtenidos por la ecuación:

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ji} - \partial_k g_{ij}) g^{km}$$

Conexión Afín

Usualmente se denota a la conexión afín $\nabla(X, Y)$ como $\nabla_X Y$ y se le llama *la derivada covariante de Y en la dirección de X*.

De manera local la derivada covariante puede ser expresada como:

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{n} \left(X(Y_k) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} X_i Y_j \right) \partial_k,$$

En la ecuación anterior Γ_{ij}^{k} son n^3 funciones suaves, a las cuales se les llama los *símbolos de Christoffel*. En una variedad Riemanniana los símbolos pueden ser obtenidos por la ecuación:

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ji} - \partial_k g_{ij}) g^{km}$$

Geodésicas

Definición

Sea M una variedad suave equipada con una conexión afín ∇. Diremos que una curva $\gamma : [a, b] \to M$ es una **curva geodésica** si:

$$\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$$

Teorema

Sea M una variedad suave equipada con una conexión afín. Para cada punto $p \in M$, cada vector tangente $v \in T_pM$ y cada real t_0 existe un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ que contiene a t_0 y una geodésica $\gamma(t) : I \to M$ que satisface $\gamma(t_0) = p$ y $\gamma'(t_0) = v$. Cualesquiera dos geodésicas que satisfagan las mismas condiciones coincidirán en la intersección de sus dominios.

Existencia y unicidad de geodésicas

Teorema

Sea M una variedad suave equipada con una conexión afín. Para cada punto $p \in M$, cada vector tangente $v \in T_pM$ y cada real t_0 existe un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ que contiene a t_0 y una geodésica $\gamma(t) : I \to M$ que satisface $\gamma(t_0) = p$ y $\gamma'(t_0) = v$. Cualesquiera dos geodésicas que satisfagan las mismas condiciones coincidirán en la intersección de sus dominios.

Demostración.

1. Como se mencionó anteriormente, dada una carta (U, φ) se puede expresar a la conexión en términos de las coordenadas locales como:

$$\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d\gamma_k'(t)}{dt} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{d\gamma_i(t)}{dt}\Gamma_{ij}^{k}\gamma_j'(t)\right)\partial_k$$

2. Por definición de geodésica, $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$, esto ocurre si y solo si:

$$\gamma_k''(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\gamma_i'(t)\gamma_j'(t) = 0$$

Existencia y unicidad de geodésicas

Demostración.

1. Como se mencionó anteriormente, dada una carta (U, φ) se puede expresar a la conexión en términos de las coordenadas locales como:

$$\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d\gamma_k'(t)}{dt} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{d\gamma_i(t)}{dt}\Gamma_{ij}^{k}\gamma_j'(t)\right)\partial_k$$

2. Por definición de geodésica, $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$, esto ocurre si y solo si:

$$\gamma_k''(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\gamma_i'(t)\gamma_j'(t) = 0$$

□

Demostración.

3. Esta ecuación, a la cual se le llama la **ecuación geodésica**, puede ser reducida realizando la sustitución $\gamma''(t) = x'(t)$, de modo que obtenemos:
$$x_k'(t) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} x_i(t) x_j(t) = 0.$$

4. El teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias garantiza que este sistema tendrá solución y dicha solución será única.

Existencia y unicidad de geodésicas

Demostración.

3. Esta ecuación, a la cual se le llama la **ecuación geodésica**, puede ser reducida realizando la sustitución $\gamma''(t) = x'(t)$, de modo que obtenemos:
$$x_k'(t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} x_i(t) x_j(t) = 0.$$

4. El teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias garantiza que este sistema tendrá solución y dicha solución será única.

$\square$

Geodésicas en $\mathbb{H}^2$

Definición (Espacio hiperbólico de dimensión 2)

Consideremos al subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\},$$

este subconjunto es un abierto en $\mathbb{R}^2$, por lo cual es una variedad topológica, este subconjunto puede ser cubierto por una única carta, por lo cual está determina una estructura suave. Hacemos de $\mathbb{H}^2$ una variedad Riemanniana dotándolo de la métrica cuyos coeficientes son:

$$g_{ij} = \frac{R\delta_{ij}}{y^2}, \quad R \in \mathbb{R}$$

a esta variedad Riemanniana se le conoce como **espacio hiperbólico de dimensión 2** o **modelo de Poincaré del semiplano superior**.

Definición (Espacio hiperbólico de dimensión 2)

Consideremos al subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\},$$

este subconjunto es un abierto en $\mathbb{R}^2$, por lo cual es una variedad topológica, este subconjunto puede ser cubierto por una única carta, por lo cual está determina una estructura suave. Hacemos de $\mathbb{H}^2$ una variedad Riemanniana dotándolo de la métrica cuyos coeficientes son:

$$g_{ij} = \frac{R\delta_{ij}}{y^2}, \quad R \in \mathbb{R}$$

a esta variedad Riemanniana se le conoce como **espacio hiperbólico de dimensión 2** o **modelo de Poincaré del semiplano superior**.

Definición (Espacio hiperbólico de dimensión 2)

Consideremos al subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\},$$

este subconjunto es un abierto en $\mathbb{R}^2$, por lo cual es una variedad topológica, este subconjunto puede ser cubierto por una única carta, por lo cual está determina una estructura suave. Hacemos de $\mathbb{H}^2$ una variedad Riemanniana dotándolo de la métrica cuyos coeficientes son:

$$g_{ij} = \frac{R\delta_{ij}}{y^2}, \quad R \in \mathbb{R}$$

a esta variedad Riemanniana se le conoce como **espacio hiperbólico de dimensión 2** o **modelo de Poincaré del semiplano superior**.

Definición (Espacio hiperbólico de dimensión 2)

Consideremos al subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\},$$

este subconjunto es un abierto en $\mathbb{R}^2$, por lo cual es una variedad topológica, este subconjunto puede ser cubierto por una única carta, por lo cual está determina una estructura suave. Hacemos de $\mathbb{H}^2$ una variedad Riemanniana dotándolo de la métrica cuyos coeficientes son:

$$g_{ij} = \frac{R\delta_{ij}}{y^2}, \quad R \in \mathbb{R}$$

a esta variedad Riemanniana se le conoce como **espacio hiperbólico de dimensión 2** o **modelo de Poincaré del semiplano superior**.

Geodésicas en $\mathbb{H}^2$

Para calcular las geodésicas en el $\mathbb{H}^2$ comenzamos calculando los símbolos de Christoffel.

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij})g^{km}$$

$$\Gamma_{11}^{1} = 0 \qquad \Gamma_{12}^{1} = -\frac{1}{y} \qquad \Gamma_{12}^{2} = 0 \qquad \Gamma_{22}^{1} = 0$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{y} \qquad \Gamma_{21}^{1} = -\frac{1}{y} \qquad \Gamma_{21}^{2} = 0 \qquad \Gamma_{22}^{2} = -\frac{1}{y}$$

Geodésicas en $\mathbb{H}^2$

Para calcular las geodésicas en el $\mathbb{H}^2$ comenzamos calculando los símbolos de Christoffel.

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij})g^{km}$$

$$\Gamma_{11}^{1} = 0 \qquad \Gamma_{12}^{1} = -\frac{1}{y} \qquad \Gamma_{12}^{2} = 0 \qquad \Gamma_{22}^{1} = 0$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{y} \qquad \Gamma_{21}^{1} = -\frac{1}{y} \qquad \Gamma_{21}^{2} = 0 \qquad \Gamma_{22}^{2} = -\frac{1}{y}$$

Para calcular las geodésicas en el $\mathbb{H}^2$ comenzamos calculando los símbolos de Christoffel.

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij})g^{km}$$

$$\Gamma_{11}^{1} = 0 \qquad \Gamma_{12}^{1} = -\frac{1}{y} \qquad \Gamma_{12}^{2} = 0 \qquad \Gamma_{22}^{1} = 0$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{y} \qquad \Gamma_{21}^{1} = -\frac{1}{y} \qquad \Gamma_{21}^{2} = 0 \qquad \Gamma_{22}^{2} = -\frac{1}{y}$$

Geodésicas en $\mathbb{H}^2$

Si γ es una curva podemos suponer que está parametrizada como $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, si $\gamma(t)$ es una curva geodésica al sustituir estas parametrizaciones y los símbolos de Christoffel en la ecuación geodésica obtendremos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'' - \frac{2}{y}x'y' & = 0 \\ y'' + \frac{1}{y}(x')^2 - \frac{1}{y}(y')^2 & = 0 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones son las siguientes:

Si $x'(t) = 0$,

$$y = y_0 e^{kt}$$

Si $x'(t) \neq 0$,

$$(x - C)^2 + y^2 = \frac{k_0}{K_1^2}$$

Geodésicas en $\mathbb{H}^2$

Si γ es una curva podemos suponer que está parametrizada como $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, si $\gamma(t)$ es una curva geodésica al sustituir estas parametrizaciones y los símbolos de Christoffel en la ecuación geodésica obtendremos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'' - \frac{2}{y}x'y' & = 0 \\ y'' + \frac{1}{y}(x')^2 - \frac{1}{y}(y')^2 & = 0 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones son las siguientes:

Si $x'(t) = 0$,

$$y = y_0 e^{kt}$$

Si $x'(t) \neq 0$,

$$(x - C)^2 + y^2 = \frac{k_0}{K_1^2}$$

Si γ es una curva podemos suponer que está parametrizada como $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, si $\gamma(t)$ es una curva geodésica al sustituir estas parametrizaciones y los símbolos de Christoffel en la ecuación geodésica obtendremos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'' - \frac{2}{y}x'y' & = 0 \\ \\ y'' + \frac{1}{y}(x')^2 - \frac{1}{y}(y')^2 & = 0 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones son las siguientes:

Si $x'(t) = 0$,

$$y = y_0 e^{kt}$$

Si $x'(t) \neq 0$,

$$(x - C)^2 + y^2 = \frac{k_0}{K_1^2}$$

Geodésicas en $\mathbb{H}^2$

Si γ es una curva podemos suponer que está parametrizada como $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, si $\gamma(t)$ es una curva geodésica al sustituir estas parametrizaciones y los símbolos de Christoffel en la ecuación geodésica obtendremos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x'' - \frac{2}{y}x'y' & = 0 \\ \\ y'' + \frac{1}{y}(x')^2 - \frac{1}{y}(y')^2 & = 0 \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones son las siguientes:

Si $x'(t) = 0$,

$$y = y_0 e^{kt}$$

Si $x'(t) \neq 0$,

$$(x - C)^2 + y^2 = \frac{k_0}{K_1^2}$$

Geodésicas en $\mathbb{H}^2$

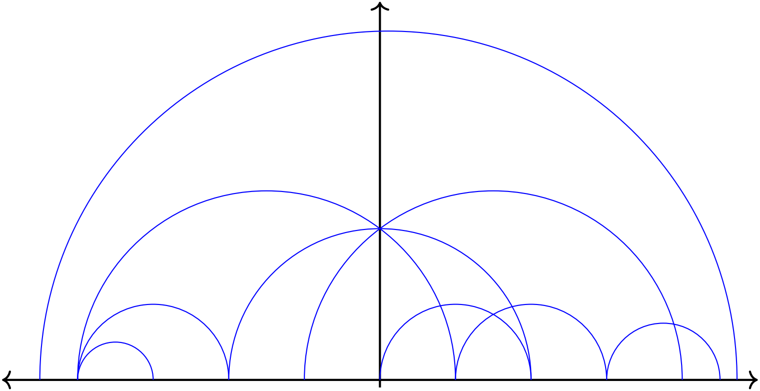


Figura: Representación de algunas geodésicas en $\mathbb{H}^2$

Conclusiones

1. En este trabajo se desarrollaron herramientas de la teoría de variedades suaves. Se estudiaron las propiedades de las variedades topológicas y las variedades suaves.
2. Se trasladaron conceptos del cálculo en espacios euclidianos a las variedades suaves.
3. Se trabajaron conceptos de geometría Riemanniana.
   - Se definieron conceptos como las métricas Riemannianas, las conexiones y las curvas geodésicas.
   - Se demostró la existencia de las métricas en variedades suaves, así como la existencia y unicidad de las conexiones y las geodésicas.
4. Se definió el espacio hiperbólico de dimensión 2 y se encontraron las curvas geodésicas.

Conclusiones

1. En este trabajo se desarrollaron herramientas de la teoría de variedades suaves. Se estudiaron las propiedades de las variedades topológicas y las variedades suaves.
2. Se trasladaron conceptos del cálculo en espacios euclidianos a las variedades suaves.
3. Se trabajaron conceptos de geometría Riemanniana.
   - Se definieron conceptos como las métricas Riemannianas, las conexiones y las curvas geodésicas.
   - Se demostró la existencia de las métricas en variedades suaves, así como la existencia y unicidad de las conexiones y las geodésicas.
4. Se definió el espacio hiperbólico de dimensión 2 y se encontraron las curvas geodésicas.

Conclusiones

1. En este trabajo se desarrollaron herramientas de la teoría de variedades suaves. Se estudiaron las propiedades de las variedades topológicas y las variedades suaves.
2. Se trasladaron conceptos del cálculo en espacios euclidianos a las variedades suaves.
3. Se trabajaron conceptos de geometría Riemanniana.
   - Se definieron conceptos como las métricas Riemannianas, las conexiones y las curvas geodésicas.
   - Se demostró la existencia de las métricas en variedades suaves, así como la existencia y unicidad de las conexiones y las geodésicas.
4. Se definió el espacio hiperbólico de dimensión 2 y se encontraron las curvas geodésicas.

Conclusiones

1. En este trabajo se desarrollaron herramientas de la teoría de variedades suaves. Se estudiaron las propiedades de las variedades topológicas y las variedades suaves.
2. Se trasladaron conceptos del cálculo en espacios euclidianos a las variedades suaves.
3. Se trabajaron conceptos de geometría Riemanniana.
   - Se definieron conceptos como las métricas Riemannianas, las conexiones y las curvas geodésicas.
   - Se demostró la existencia de las métricas en variedades suaves, así como la existencia y unicidad de las conexiones y las geodésicas.
4. Se definió el espacio hiperbólico de dimensión 2 y se encontraron las curvas geodésicas.

Conclusiones

1. En este trabajo se desarrollaron herramientas de la teoría de variedades suaves. Se estudiaron las propiedades de las variedades topológicas y las variedades suaves.
2. Se trasladaron conceptos del cálculo en espacios euclidianos a las variedades suaves.
3. Se trabajaron conceptos de geometría Riemanniana.
   - Se definieron conceptos como las métricas Riemannianas, las conexiones y las curvas geodésicas.
   - Se demostró la existencia de las métricas en variedades suaves, así como la existencia y unicidad de las conexiones y las geodésicas.
4. Se definió el espacio hiperbólico de dimensión 2 y se encontraron las curvas geodésicas.

Conclusiones

1. En este trabajo se desarrollaron herramientas de la teoría de variedades suaves. Se estudiaron las propiedades de las variedades topológicas y las variedades suaves.
2. Se trasladaron conceptos del cálculo en espacios euclidianos a las variedades suaves.
3. Se trabajaron conceptos de geometría Riemanniana.
   - Se definieron conceptos como las métricas Riemannianas, las conexiones y las curvas geodésicas.
   - Se demostró la existencia de las métricas en variedades suaves, así como la existencia y unicidad de las conexiones y las geodésicas.
4. Se definió el espacio hiperbólico de dimensión 2 y se encontraron las curvas geodésicas.

Referencias I

[1] R. J. Biezuner. *Notas de Aula: Geometria Riemanniana*. Universidad Federal de Minas Gerais, 2017.

[2] D. J. Campos López. "Geodesía Diferencial". Tesis de licenciatura. Universidad Veracruzana, 2011.

[3] M.P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser Boston, 1992. ISBN: 9780817634902.

[4] J.J. Duistermaat, J.A.C. Kolk y J.P. van Braam Houckgeest. *Multidimensional Real Analysis I: Differentiation*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2004. ISBN: 9781139451192.

[5] N.S. Gopalakrishnan. *Commutative Algebra*. Oxonian Press, 1984.

[6] W. Greub. *Multilinear Algebra*. Universitext. Springer New York, 2012. ISBN: 9781461394259.

Referencias II

[7] K. Hoffman y R.A. Kunze. *Linear Algebra*. Pearson India Education Services, 2015. ISBN: 9789332550070.

[8] J. Lee. *Manifolds and Differential Geometry*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2009. ISBN: 9780821848159.

[9] J.M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2019. ISBN: 9783319917559.

[10] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013. ISBN: 9780387217529.

[11] J.R. Munkres. *Topology*. Featured Titles for Topology. Prentice Hall, Incorporated, 2000. ISBN: 9780131816299.

[12] S. Roman. *Advanced Linear Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2007. ISBN: 9780387274744.

Referencias III

[13] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1976. ISBN: 9780070856134.

[14] M. Spivak. *Calculus On Manifolds: A Modern Approach To Classical Theorems Of Advanced Calculus*. Avalon Publishing, 1971. ISBN: 9780813346120.

[15] T. Tao. *Notes on the Nash embedding theorem*. Mayo de 2016. URL: https://terrytao.wordpress.com/tag/whitney-embedding-theorem/.

[16] L.W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Universitext. Springer New York, 2010. ISBN: 9781441973993.

[17] L.W. Tu. *Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2017. ISBN: 9783319550848.

Referencias IV

[18] F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013. ISBN: 9781475717990.

[19] H. Whitney. "Differentiable manifolds". En: *Annals of Mathematics* (1936), págs. 645-680.