Variedades y Mapas

1.1 Variedades Topológicas

Nuestro objeto de estudio fundamental serán las *variedades*, estos son espacios topológicos que localmente se asemejan a espacios euclidianos. En particular nos interesan las variedades que podamos dotar de una estructura suave, esto es, las variedades en las que podemos darle un significado a la derivada.

Definición 1.1.1 (Variedad Topológica)**.** Sea M un espacio topológico, diremos que M es una *variedad topológica n-dimensional* si:

1. M es un *espacio de Hausdorff*; esto es, para cualquier par de puntos distintos x_1, x_2 de M existen vecindades U_1 y U_2 de x_1 y x_2 respectivamente, que son disjuntas.

2. M es *segundo numerable*; esto es, la topología de M tiene una base numerable.

3. M es *localmente Euclidiano* de dimensión n; esto es, para cada punto x de M existe una vecindad abierta $U \subset M$ que contiene a x y una función $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ continua y con inversa continua, i.e., un *homeomorfismo*.

Para abreviar escribiremos «Sea M^n una variedad topológica», en lugar de escribir «Sea M una variedad topológica n-dimensional». Ocasionalmente, cuando no sea relevante, omitiremos escribir la dimensión de la variedad.

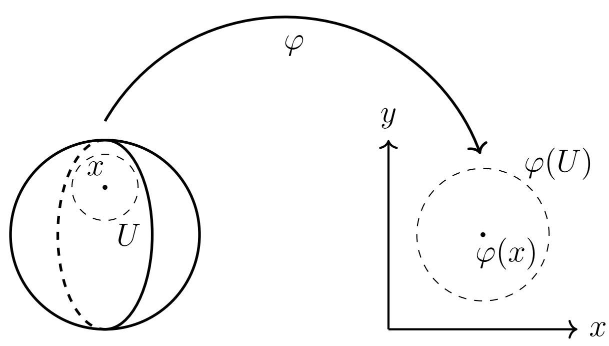


Figura 1.1: Representación de un homeomorfismo de una variedad a $\mathbb{R}^2$.

La definición que acabamos de dar no es única, en el sentido de que existen diferentes definiciones de lo que es una variedad, algunos autores debilitan algunas de las propiedades, por ejemplo, pidiendo que las variedades sean localmente Hausdorff, otros no piden que sean segundo numerables, y algunos otros piden que el homeomorfismo sea con una vecindad abierta de algún espacio de Banach.

Las propiedades que nosotros pedimos, como iremos viendo a lo largo de esta tesis, son bastante agradables para hacer cálculos, ya que, entre otras cosas, nos permitirán extender de manera sencilla funciones locales a toda la variedad y, eventualmente, definir esta propiedad nos permitirá definir lo que es una variedad Riemanniana.

Ejemplo 1.1.1 (Espacios Euclidianos)**.** El ejemplo más sencillo de una variedad topológica es $(\mathbb{R}^n, d)$ donde d es la función distancia usual.

1. Sabemos que es Hausdorff ya que para cualesquiera dos puntos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ podemos considerar vecindades $V_r(x_1), V_r(x_2)$ donde $r < \frac{d(x,y)}{2}$ de modo que $V_r(x_1) \cap V_r(x_2) = \varnothing$.

2. Es segundo numerable ya que las bolas abiertas con radios y centros racionales forman una base numerable para la topología.

3. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ podemos considerar a $\mathbb{R}^n$ como la vecindad abierta y tomar la función identidad $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que, trivialmente, es un homeomorfismo.

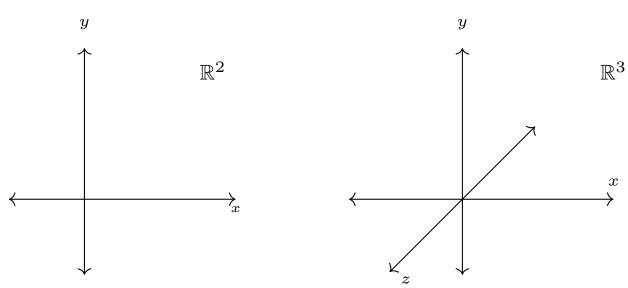


Figura 1.2: $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ son variedades topológicas.

Ejemplo 1.1.2 (Bolas Abiertas)**.** Otro ejemplo sencillo de variedad topológica son las bolas abiertas en $(\mathbb{R}^n, d)$, donde nuevamente d es la función distancia usual. La topología inducida en la bola hereda el ser Hausdorff y la segundo numerabilidad. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la bola está centrada en el origen y tomarla como la vecindad abierta, así podremos tomar la función $\varphi : B_r(0) \to \mathbb{R}^n$ definida por:

$$\varphi(x) = \frac{x}{r - \|x\|}.$$

Esta función tiene como inversa a la función $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to B_r(0)$ dada por:

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{ry}{1 + \|y\|}.$$

Dado que la función inversa existe, φ es necesariamente una biyección y como ambas funciones son diferenciables serán continuas, por lo que φ es un homeomorfismo de $B_r(0)$ sobre $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, cualquier bola abierta centrada en el origen será una variedad topológica. Existe un homeomorfismo natural entre una bola arbitraria en $\mathbb{R}^n$ y la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$, por lo cual cualquier bola abierta en $\mathbb{R}^n$ será una variedad topológica.

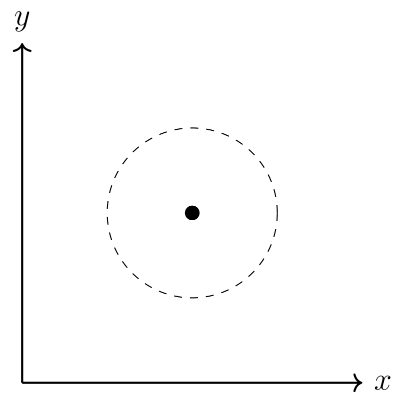


Figura 1.3: Una bola abierta en $\mathbb{R}^2$ es una variedad topológica.

Definición 1.1.2 (Cartas Coordenadas)**.** Sea M^n una variedad topológica. Una *carta coordenada* en M es un par (U, φ), donde U es un subconjunto abierto de M y $\varphi : U \to \tilde{U}$ es un homeomorfismo de U a un subconjunto abierto $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$.

Por definición de variedad topológica cada punto está contenido en el dominio de alguna carta. Dada una carta (U, φ) llamamos al conjunto U el *dominio coordenado*, además, si $\varphi(U)$ es una bola abierta en $\mathbb{R}^n$ llamaremos a U una *bola coordinada*. Al homeomorfismo φ se le llama el *mapa coordenado (local)*, y a sus funciones componentes $(x^1, \ldots, x^n)$, definidas por $\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$ se les conoce como las *coordenadas locales* en U.

Diremos que una carta (U, φ) está centrada en un punto $p \in M$ si se cumple que $\varphi^{-1}(0) = p$. Geométricamente esto significa que la preimagen del punto $\{0\} \in \mathbb{R}^n$ es el punto p. Siempre podemos encontrar una carta centrada en p ya que a la imagen de cualquier carta se le puede restar una constante.

A continuación, veremos algunos ejemplos más interesantes de variedades topológicas.

Ejemplo 1.1.3 ($n-$Esfera)**.** La $n-$esfera unitaria, denotada como $\mathbb{S}^n$, y definida como el conjunto:

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

es una variedad topológica.

En efecto, por ser un subespacio topológico de $\mathbb{R}^{n+1}$ la topología de subespacio de $\mathbb{S}^n$ heredará el ser Hausdorff y segundo numerable.

Para mostrar que $\mathbb{S}^n$ es localmente euclidiana utilizaremos su proyección sobre el hiperplano $\mathbb{R}^n$. Para cada índice $i = 1, \ldots, n+1$ definiremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{S}^n$:

$$U_i^+ = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x^i > 0\},$$
$$U_i^- = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x^i < 0\}.$$

Notemos que tendremos $2n+2$ de estos subconjuntos de $\mathbb{S}^n$ y que estos cubrirán a $\mathbb{S}^n$. Sean $\pi_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ las funciones proyección que omiten la $i-$ésima coordenada, esto es,

$$\pi_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1} \ldots, x_{n+1}).$$

La imagen de cualquier conjunto $U_i^{\pm}$ bajo π_i será un subconjunto de la bola unidad $\mathbb{B}^n$ en $\mathbb{R}^n$, esto dado que para cualquier $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in U_i^{\pm}$ se tiene que

$$\|\pi_i(x)\| = \sqrt{\sum_{j=1, j\neq i}^{n+1} x_j^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} x_j^2} = 1.$$

Ahora definamos funciones $\varphi_i^{\pm} : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ como sigue, para cada $y = (y_1, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbb{B}^n$, donde $\hat{y}_i$ significa que no estamos considerando el $i-$ésimo termino:

$$\varphi_i^{\pm}(y_1, \ldots, y_{n+1}) = (y_1, \ldots, y_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \|y\|^2}, y_{i+1}, \ldots, y_{n+1}).$$

Dado que $\|y\| < 1$ la función estará bien definida para cada $y \in \mathbb{B}^n$, además:

$$\begin{aligned}
\|\varphi_i^{\pm}(y)\| &= (1 + \|y\|^2) + \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n+1} y_j^2 \\
&= \left(1 - \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n+1} y_j^2\right) + \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n+1} y_j^2 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por lo que $\varphi_i^{\pm}(\mathbb{B}^n) \subset U_i^{\pm}$. Si ahora consideramos las restricciones $\tau_i^{\pm} = \pi_i|_{U_i^{\pm}} : U_i^{\pm} \to \mathbb{B}^n$ tendremos que $\tau_i^{\pm} \circ \varphi_i^{\pm} = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}^n}$ y $\varphi_i^{\pm} \circ \tau_i^{\pm} = \mathrm{Id}_{U_i^{\pm}}$. Esto demostraría que existe una biyección entre cada uno de los conjuntos $U_i^{\pm}$ y la bola unidad $\mathbb{B}^n$ en $\mathbb{R}^n$, además de esto, tanto $\tau_i^{\pm}$ como $\varphi_i^{\pm}$ son funciones continuas por lo que serán homeomorfismos, y, como cada $x \in S^n$ está contenido en algún $U_i^{\pm}$, concluimos que $\mathbb{S}^n$ es una variedad topológica de dimensión n.

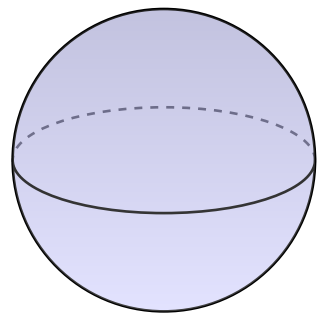


Figura 1.4: La esfera $\mathbb{S}^2$ es una variedad topológica.

Ejemplo 1.1.4 (Producto Finito de Variedades)**.** Si $M_1, \ldots, M_k$ son variedades topológicas de dimensiones $n_1, \ldots, n_k$ respectivamente, entonces $M = \Pi_{i=1}^{k} M_i$ es una variedad topológica de dimensión $\sum_{i=1}^{k} n_i$.

En efecto, comencemos considerando el caso del producto de dos variedades. Sean $M_1^{n_1}$ y $M_2^{n_2}$ variedades topológicas. Como el producto arbitrario de espacios de Hausdorff es Hausdorff, tendremos que $M_1 \times M_2$ es Hausdorff. Además, como el producto numerable de espacios segundo numerables es segundo numerable $M_1 \times M_2$ es segundo numerable. Para cada punto $(x, y) \in M_1 \times M_2$ existirá un conjunto abierto $U \times V$ donde U es el dominio de una carta (U, φ) en M_1 que contiene que a x y V es el dominio de una carta (V, ψ) que contiene a y, por definición de cartas coordenadas $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n_1}$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^{n_2}$ son homeomorfismo, por lo que podemos definir la función $F : U \times V \to \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ como:

$$F(x, y) = (\varphi(x), \psi(y)).$$

Dado que φ y ψ son homeomorfismo en particular serán funciones continuas, por lo que podemos garantizar que F es continua y, además, es invertible; en particular su inversa estará dada por $F^{-1}(a, b) = (\varphi^{-1}(a), \psi^{-1}(b))$ y como las inversas de φ y ψ también son continuas F^{-1} es un mapa continuo. Así, F es un homeomorfismo de $U \times V$ sobre $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$, como esto se cumple para cada punto $(x, y) \in M_1 \times M_2$ podemos concluir que el producto $M_1 \times M_2$ es una variedad topológica.

El caso para el producto finito de variedades topológicas se sigue por inducción.

Ejemplo 1.1.5 ($n-$Toro)**.** El toro n-dimensional, que se denota por $\mathbb{T}^n$, se define como:

$$\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \ldots \times \mathbb{S}^1}_{n-\text{veces}}.$$

Esto se puede ver a partir de los ejemplos 1.1.3 y 1.1.4, ya que son el producto finito de variedades topológicas.

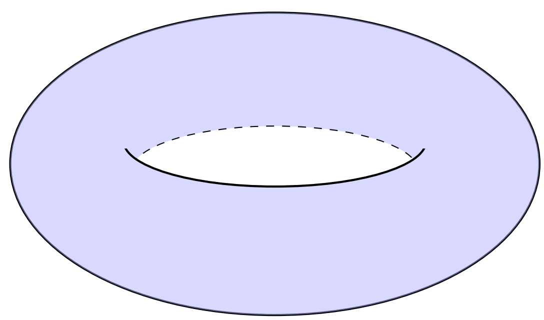


Figura 1.5: El toro $\mathbb{T}^2$ es una variedad topológica.

1.2 Variedades Suaves

Las variedades topológicas tienen propiedades muy interesantes en sí mismas, sin embargo, para nuestros fines lo que nos interesa es poder realizar cálculos en ellas, en particular darle sentido a la noción de diferenciabilidad. Esto no es posible en general, es con este fin que daremos algunas definiciones que nos permitirán construir una estructura adicional con la cual podremos dotar a algunas variedades topológicas; esta estructura será lo que nos permitirá dar sentido a la derivada.

Cuando decimos que una función f es diferenciable o suave lo que queremos decir es que: Si U y V son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente, entonces $f : U \to V$ tiene derivadas parciales de todos los órdenes. Al conjunto de funciones con esta propiedad usualmente se le denota como C^∞ y se dice que las funciones son de clase C^∞.

Definición 1.2.1 (Mapa de Transición)**.** Sea M^n una variedad topológica y (U, φ), (V, ψ) cartas en M. Si $U \cap V \neq \varnothing$, entonces a la composición $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es llamada el *mapa de transición de* φ *a* ψ

Definición 1.2.2 (Cartas Suavemente Compatibles)**.** Diremos que dos cartas (U, φ) y (V, ψ) son *suavemente compatibles* o $C^\infty-$compatibles si $U \cap V = \varnothing$ o si los mapas de transición

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V), \quad \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

son ambos suaves.

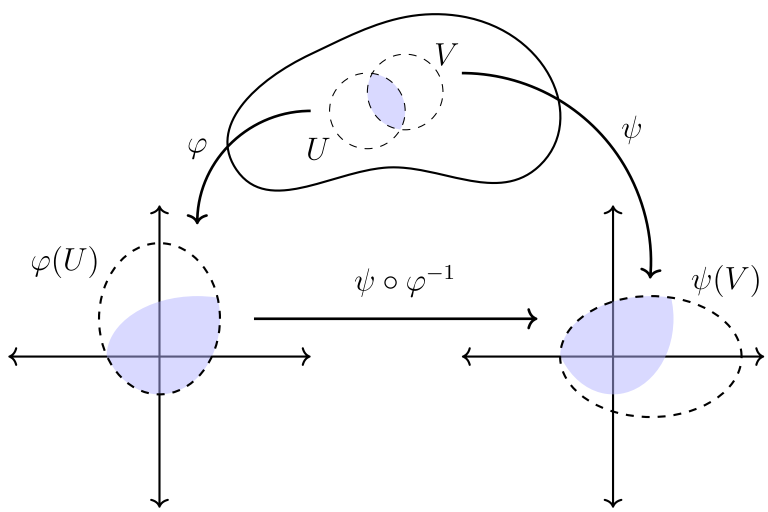


Figura 1.6: Mapa de Transición

Verificar que dos cartas son suavemente compatibles es relativamente sencillo, dado que el mapa de transición es una composición de homeomorfismos este será un homeomorfismo, así, únicamente habrá que verificar que la función y su inversa son diferenciables.

Definición 1.2.3 (Atlas, Atlas Suave y Atlas Maximal)**.** Sea M una variedad topológica. Un *atlas* en M, denotado como $\mathcal{A}$, es una colección indexada $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ de cartas en M que cubren a la variedad, esto es:

$$\bigcup_{i\in I} U_i = M.$$

Si cualesquiera dos cartas en un atlas son suavemente compatibles, entonces diremos que el atlas es un *atlas suave*. A las cartas que forman a un atlas suave se les llama *cartas suaves*.

Un atlas $\mathcal{A}$ estará contenido en otro atlas $\mathcal{B}$ si cada carta (U, φ) que pertenece a $\mathcal{A}$ también pertenece a $\mathcal{B}$. Diremos que un atlas suave $\mathcal{A}$ es *maximal* si no está propiamente contenido en ningún atlas más grande.

Definición 1.2.4 (Variedad Suave)**.** Sea M una variedad topológica. Una *variedad suave* será un par $(M, \mathcal{A})$, donde $\mathcal{A}$ es un atlas maximal en M. Usualmente a $\mathcal{A}$ se le llama la *estructura suave* en M.

Por conveniencia, en lugar de escribir «Sea $(M, \mathcal{A})$ una variedad suave» diremos simplemente «Sea M una variedad suave»; esto cuando la estructura suave se pueda entender a partir del contexto o no sea necesario referirnos a ella de forma explícita.

Si quisiéramos definir una función $f : M \to \mathbb{R}$ como suave, quizá pudiésemos haber estado inclinados a dar la siguiente definición: «Una función $f : M \to \mathbb{R}$ es diferenciable si y sólo si para cada carta (U, φ) se tiene que $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable», esta definición podría parecernos más natural, sin embargo, presenta un problema de ambigüedad ya que, para una misma variedad pueden existir muchos atlas diferentes y estos pueden generar la misma estructura o estructuras similares pero distintas, como veremos en los siguientes ejemplos.

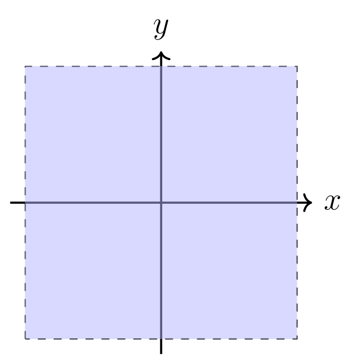


Figura 1.7: Representación de $\mathbb{R}^2$ siendo cubierta por una única carta.

Ejemplo 1.2.1 (Variedades Cubiertas Por Una Única Carta)**.** Si M^n es una variedad topológica y existe un atlas para M que contiene a una única carta entonces la carta define una estructura suave para la variedad, esto dado que trivialmente cumplirá el ser suavemente compatible con cualquier otra carta en el atlas.

Ejemplo 1.2.2 (Espacios Euclidianos)**.** Si tomamos cualquier espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$ podemos dar el atlas formado únicamente por la carta $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$, por el ejemplo anterior sabemos que esta carta define una estructura suave en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.2.3. Podemos considerar la función $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida del siguiente modo:

$$\psi(x) = x^3$$

Esta función es un homeomorfismo, y por los ejemplos anteriores sabemos que $(\mathbb{R}, \psi(x))$ es una variedad suave, con la estructura definida por ψ. Sin embargo, al considerar el mapa de transición tenemos que $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} \circ \psi^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}}$, y esta función no es diferenciable en el origen, por lo cual las cartas no son suavemente compatibles, y las estructuras determinadas por $(\mathbb{R}, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$ y $(\mathbb{R}, \psi)$ serán diferentes.

Para resolver este problema de ambigüedad es que hemos introducido el concepto atlas maximal. Lo que el atlas maximal nos garantiza es que cada carta que sea suavemente compatible con cualquier otra carta en el atlas estará ya incluida en el mismo.

Teorema 1.2.1. Si M es una variedad topológica, entonces cada atlas suave $\mathcal{A}$ de M está contenido en un atlas suave maximal único, llamado la *estructura suave determinada por* $\mathcal{A}$.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un atlas suave para M y sea $\bar{\mathcal{A}}$ el conjunto de todas las cartas que son suavemente compatibles con todas las cartas de $\mathcal{A}$.

1. $\bar{\mathcal{A}}$ es un atlas suave. Consideremos dos cartas arbitrarias (U, φ) y (V, ψ) en $\bar{\mathcal{A}}$, además consideremos un punto arbitrario $\varphi(p) \in \varphi(U \cap V)$. Por definición el atlas $\mathcal{A}$ cubre a M, por lo que existirá una carta (W, ϑ) en $\bar{A}$ tal que $p \in W$, por construcción de $\bar{A}$ sabemos que $\psi \circ \vartheta^{-1}$ y $\vartheta \circ \varphi^{-1}$ son suaves. Y, dado que $p \in U \cap V \cap W$, se sigue que $\psi \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ \vartheta^{-1}) \circ \vartheta \circ \varphi^{-1}$, al ser una composición de funciones suaves será suave en $\varphi(U \cap V)$, dado que hemos elegido las cartas (U, φ) y (V, ψ) de manera arbitraria podemos concluir que $\bar{\mathcal{A}}$ es un atlas suave.

2. $\bar{\mathcal{A}}$ es un atlas maximal. Si consideramos una carta que sea suavemente compatible con cualquier otra carta en $\bar{\mathcal{A}}$ por construcción esta carta deberá ser suavemente compatible con cualquier otra carta en $\mathcal{A}$, pero esto implica que la carta pertenece a $\bar{\mathcal{A}}$, por lo tanto $\bar{\mathcal{A}}$ es maximal.

3. $\bar{\mathcal{A}}$ es único. Tomando algún otro atlas suave maximal $\mathcal{B}$ que contenga a $\mathcal{A}$ tendremos que cada una de sus cartas es suavemente compatible con cada carta en $\mathcal{A}$ por lo que $\mathcal{B} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$, pero al ser $\mathcal{B}$ maximal se tendrá que $\mathcal{B} = \bar{A}$

■

Teorema 1.2.2. Dos atlas suaves para una variedad M determinan la misma estructura suave si y sólo si su unión es un atlas suave.

Demostración. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos atlas suaves en M y que ambos determinan la misma estructura suave. Por el teorema anterior sabemos que esto significa que existe un atlas suave maximal $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ y $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$.

Si consideramos una carta $(U, \varphi) \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ esta deberá estar contenida en $\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que está contenida en $\mathcal{A}$, también estará contenida en $\mathcal{C}$ y por construcción cada carta en $\mathcal{C}$ debe ser suavemente compatible con cada carta en $\mathcal{B}$, análogamente para el caso en que la carta está contenida en $\mathcal{B}$. Por lo tanto, podemos concluir que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un atlas suave.

Supongamos ahora que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un atlas suave. Dado que las estructuras suaves determinadas por $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ ambas contendrán a $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, y que por el teorema anterior hay una única estructura suave que contiene a $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ podemos concluir que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ determinan la misma estructura suave. ■

Lo que estos dos teoremas nos permiten hacer es definir de manera más sencilla la estructura suave para una variedad, ya que, en lugar de tener que describir un atlas maximal podemos simplemente escoger algún atlas suave y sabemos que la estructura determinada será única.

Hay muchos ejemplos de variedad suaves y, como veremos a continuación, a cada una de las variedades topológicas que dimos como ejemplo anteriormente se le puede dar una estructura suave, sin embargo, esto no es cierto en general, hay ejemplos de variedades topológicas a las cuales no se les puede dar una estructura suave. Un resultado interesante que no veremos aquí es que, si M^n es una variedad topológica con $n = 1, 2, 3$, entonces a esta se le puede dar una estructura suave, esto fue probado por James Munkres en 1960, la demostración puede ser consultada en «Munkres (1960)».

Ejemplo 1.2.4 (Espacios Vectoriales Finito-Dimensionales)**.** Sea V un espacio vectorial finito dimensional. Sabemos que todo espacio vectorial tiene una base, esto como consecuencia del axioma de elección. Además, es posible hacer de cada espacio vectorial un espacio normado, y en el caso finito dimensional todas las normas en el espacio son equivalentes.

Digamos que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una base para V y que $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ es una norma en V, cada norma determina una topología en V, y para cada base podemos definir un isomorfismo lineal canónico $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$, este isomorfismo esta dado como:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = (a_1, \ldots, a_n)$$

Con respecto a la topología inducida por la norma y por la linealidad de φ podemos garantizar que φ es continua, y por el mismo argumento, que su inversa φ^{-1} también lo es. Podemos concluir que φ es un homeomorfismo entre V y $\mathbb{R}^n$, por lo cual, V con la topología inducida por la norma será una variedad topológica.

La estructura suave está determinada por la carta única (V, φ) que cubre a todo el espacio vectorial, por lo tanto, todo espacio vectorial finito dimensional es una variedad suave.

Ejemplo 1.2.5 (Subconjuntos Abiertos De Variedades Suaves)**.** Sea M^n una variedad suave y U un subconjunto abierto de M, entonces U es una variedad suave.

De modo similar al ejemplo 1.1.2 podemos mostrar que en general los subconjuntos abiertos de las variedades topológicas son, en sí mismos, variedades topológicas.

Si M es una variedad topológica y $U \subset M$ es abierto, entonces la topología inducida en U heredará el ser Hausdorff y segundo numerable. Cada punto en U está contenido en una carta de la variedad; dicha carta restringida a U y el mapa coordenado nos da un homeomorfismo entre U y algún conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$, por lo que U es una variedad topológica. Usualmente cuando hablamos de un subconjunto abierto de una variedad para enfatizar nos referiremos a él como una *subvariedad abierta*.

Dado que M es una variedad suave, existirá un atlas maximal $\mathcal{A} = \{(V_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ en M, para cualquier conjunto abierto U de M podemos considerar el atlas:

$$\mathcal{A}_U = \{(V_i \cap U, \varphi_i|_{V_i \cap U})\}_{i \in I}$$

Como cada una de las cartas en $\mathcal{A}$ es suavemente compatible con cualquier otra carta en $\mathcal{A}$, sus restricciones a $V_i \cap U$ también serán suavemente compatible con cualquier otra carta en $\mathcal{A}$, en particular con aquellas restringidas a $V_i \cap U$. Por lo tanto $(U, \mathcal{A}_U)$ será una variedad suave.

Ejemplo 1.2.6 ($n-$Esfera)**.** La n-esfera $\mathbb{S}^n$ es una variedad suave.

Si consideramos los conjuntos de cartas que $\{(U_i^{\pm}, \varphi_i^{\pm})\}_{i=1}^{n}$ y las inversas de estas funciones se definen en el ejemplo 1.1.3. Para cualesquiera dos cartas se tendrán dos casos, los índices i, j son

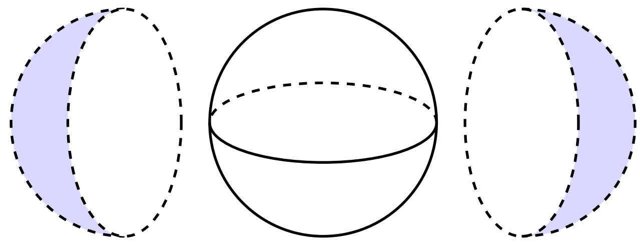


Figura 1.8: Representación de dos de las seis cartas suaves con las que cubrimos a la $2-$esfera.

iguales o son diferentes. En el caso en que los índices son iguales se tiene que el mapa de transición es:

$$\varphi_i^+ \circ \left(\varphi_i^-\right)^{-1} = \varphi_i^- \circ \left(\varphi_i^+\right)^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{B}^n}$$

En el caso en el que los índices son diferentes tendremos que el mapa de transición está dado como:

$$\varphi_i^+ \circ \left(\varphi_j^-\right)^{-1}(u_1, \dots, u_n) = \left(u_1, \dots, \underbrace{\pm\sqrt{1 - \|u\|^2}}_{j-\text{ésimo término}}, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n \right)$$

En ambos casos las composiciones son diferenciables y en ningún punto cero, podemos concluir entonces que ambas son difeomorfismos. Por lo tanto, determinan una estructura suave en $\mathbb{S}^n$.

Ejemplo 1.2.7 (Producto Finito de Variedades Suaves)**.** Si $M_1^{n_1}, \dots, M_k^{n_k}$ son variedades suaves entonces $M_1 \times \cdots \times M_k$ es una variedad suave. Como se hizo en el ejemplo 1.1.4 procederemos considerando el producto de únicamente dos variedades suaves, el caso para el producto de un número arbitrario pero finito se seguirá por inducción. En el ejemplo 1.1.4 probamos que si M_1 y M_2 son variedades topológicas con cartas de (U, φ) y (V, ψ) respectivamente entonces $M_1 \times M_2$ es una variedad topológica y tiene cartas de la forma $(U \times V, \varphi \times \psi)$. Si M_1 y M_2 son variedades suaves y consideramos dos cartas cualesquiera $(U_1 \times V_1, \varphi_1 \times \psi_1)$, $(U_2 \times V_2, \varphi_2 \times \psi_2)$ de $M_1 \times M_2$ entonces tendremos que el mapa de transición será:

$$(\varphi_2 \times \psi_2) \circ (\varphi_1 \times \psi_1)^{-1} = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \times (\psi_2 \circ \psi_1^{-1})$$

Como M_1 y M_2 son variedades suaves las cartas (U_1, φ_1), (U_2, φ_2), (V_1, ψ_1), (V_2, ψ_2) serán suavemente compatibles. Por lo tanto $M_1 \times M_2$ es una variedad suave.

Es importante no perder de vista que una variedad topológica no es suave en sí misma, la suavidad es una estructura adicional que se le agrega a la variedad a través de la estructura suave. Como se mencionaba anteriormente para una misma variedad pueden existir muchos atlas y muchos de ellos pueden ser atlas suaves o atlas maximales.

Para los ejemplos anteriores se ha mostrado que estas son variedades suaves comenzando con un espacio topológico y luego mostrando que este cumple con la definición de variedad topológica y finalmente ser dotado de una estructura suave. El siguiente lema nos da una alternativa, dándonos una manera de dotar a un conjunto de una estructura topológica y una estructura suave.

Lema 1.2.3. Sea M un conjunto, $\{U_\alpha\}$ una colección de subconjuntos de M y $\{\varphi_\alpha\}$ una colección de mapas donde $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ tales que las siguientes propiedades se cumplen:

1. Para cada α, φ_α es una biyección entre U_α y un subconjunto abierto $\varphi_\alpha(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

2. Para cualesquiera α, β, los conjuntos $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son ambos abiertos en $\mathbb{R}^n$.

3. Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, el mapa $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es suave.

4. Existe una cubierta numerable para M formada por elementos de $\{U_\alpha\}$.

5. Si $p, q \in M$ y $p \neq q$, entonces existe un subconjunto U_α que contiene a p y q, o existen subconjuntos disjuntos U_α y U_β tales que $p \in U_\alpha$ y $q \in U_\beta$.

Entonces M tiene una estructura suave única tal que cada $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es una carta suave.

Demostración. Comenzaremos definiendo un conjunto el cual probaremos será una base para una topología en M. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto formado por todos los $\varphi_\alpha^{-1}(V) \in M$ tales que $V \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto. Por la propiedad 4 se garantiza que una subcolección numerable de $\mathcal{B}$ cubre a M, tomemos dos elementos de $\mathcal{B}$, $\varphi_\alpha^{-1}(V)$ y $\varphi_\beta^{-1}(W)$ y notemos que las siguientes igualdades se cumplen:

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta^{-1}(W) &= \varphi_\alpha^{-1}(V) \cap (\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(W) \\
&= \varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\alpha^{-1}((\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(W)) \\
&= \varphi_\alpha^{-1}(V \cap (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1}(W))
\end{aligned}$$

Por la propiedad 3 sabemos que $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es suave, por lo que en particular será un mapa continuo, luego $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha)^{-1}(W)$ será abierto en $\mathbb{R}^n$, dado que será un subconjunto abierto de $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y este es, en sí mismo, un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ por la propiedad 2. Por lo propiedad 1 se garantiza que $\varphi_\alpha^{-1}(V) \cap \varphi_\beta(W) \in \mathcal{B}$, esto es suficiente para mostrar que $\mathcal{B}$ es una base para M.

Ahora mostraremos que M con la topología dada por la base $\mathcal{B}$ es, en efecto, una variedad topológica.

Por definición de $\mathcal{B}$ cada φ_α es un homeomorfismo sobre un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, por lo tanto, para cada $p \in M$ existirá una vecindad que lo contenga y un homeomorfismo de dicha vecindad sobre todo $\mathbb{R}^n$, esto prueba que M con la topología dada es localmente euclidiano.

Para mostrar que M es Hausdorff con la topología consideremos $p, q \in M$ tales que $p \neq q$. Por la propiedad 5 solo existirán dos posibilidades, si existen subconjuntos U_α, U_β tales que $p \in U_\alpha$, $q \in U_\beta$ y $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ habremos terminado. La segunda posibilidad es que exista U_α tal que $p, q \in U_\alpha$, dado que $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto abierto existirán subconjuntos $V, W \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$ disjuntos tales que $\varphi_\alpha(p) \in V$ y $\varphi_\alpha(q) \in W$, por lo que $\varphi_\alpha^{-1}(V)$ y φ_α^{-1} serán vecindades disjuntas de p y q. Por lo tanto M con la topología dada es Hausdorff.

La segundo numerabilidad de M se tiene del hecho de que $\mathbb{R}^n$ es segundo numerable por lo que cada $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ será segundo numerable, por ser φ_α un homeomorfismo U_α será segundo numerable, y ocupando la propiedad 4 podemos concluir que M es segundo numerable.

Con esto hemos probado que M es una variedad topológica. Y por la propiedad 3 podemos concluir que cada carta $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ es una carta suave, por el teorema 1.2.2 se concluye que la estructura suave determinada por la colección de cartas es única. ■

1.3 Mapas Suaves

Habiendo definido las variedades topológicas y las variedades suaves ahora nos interesará estudiar lo que son los mapas suaves, estos son difeomorfismos entre variedades, los difeomorfismos son funciones o mapas bajo los cuales la estructura suave se preserva.

Haremos la siguiente distinción entre los términos *función* y *mapa*. Un mapa es una regla que a cada elemento de su dominio le asigna un elemento del contradominio, donde, el dominio y contradominio pueden ser variedades arbitrarias, mientras que una función será un tipo particular de mapa donde el contradominio es $\mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.3.1 (Funciones Suaves)**.** Sea M^n una variedad suave, k un entero no negativo, y $f : M \to \mathbb{R}^k$ una función cualquiera. Diremos que f es una *función suave* si para cada punto $p \in M$ existe una carta suave (U, φ) para M, cuyo dominio contiene a p y tal que la composición de las funciones $f \circ \varphi^{-1}$ es suave en el conjunto abierto $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

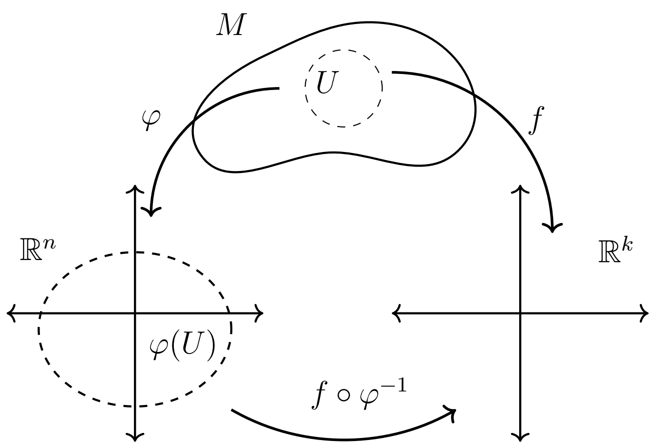


Figura 1.9: Representación de una función suave.

Notemos que en el caso en que la variedad que consideramos es $M = \mathbb{R}^n$ o algún subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, la definición anterior coincide con la definición de cálculo multivariable ya que, como se vio en el ejemplo 1.2.2, $\mathbb{R}^n$ es una variedad suave con la estructura suave dada por $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ y al componer cualquier función con la identidad obtendremos la misma función.

Uno de los casos más importantes de las funciones suaves son aquellas que van de la variedad a los números reales, esto es, funciones suaves $f : M \to \mathbb{R}$. Al conjunto formado por estas funciones se le denota por $C^\infty(M)$, este es un espacio vectorial dado que la suma de funciones suaves y el producto de un escalar por una función suave son funciones suaves.

Podemos generalizar todavía más la noción de función suave si en lugar de restringirnos a $\mathbb{R}^k$ como el contradominio de las funciones dejamos que el contradominio sea cualquier variedad, esto se logra de la siguiente manera.

Definición 1.3.2 (Mapa Suave)**.** Sean M^{k_1} y N^{k_2} variedades suaves, y sea $f : M \to N$ un mapa cualquiera. Diremos que f es un *mapa suave* si para cada $p \in M$ existen cartas (U, φ) para M cuyo dominio contiene a p y (V, ψ) para N cuyo dominio contiene a $f(p)$ y $f(U) \subseteq V$, y tal que la composición $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ es una función suave. A la composición $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ se le llama la *representación coordenada de f* con respecto a las coordenadas dadas.

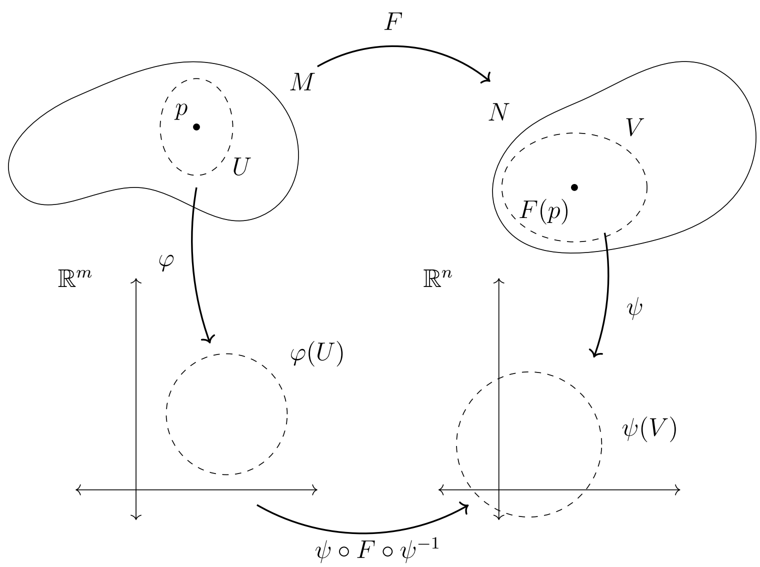


Figura 1.10: Representación de un mapa suave.

Nuevamente lo que estamos haciendo es trasladar el problema, de modo que podamos determinar si un mapa es suave utilizando los conocimientos que ya tenemos de cálculo en varias variables.

A continuación, mostraremos algunos resultados básicos sobre mapas suaves entre variedades, estos serán análogos a resultados de cálculo diferencial.

Teorema 1.3.1. Todo mapa suave es continuo.

Demostración. Supongamos que M y N son variedades suaves y $f : M \to N$ es un mapa suave. Consideremos un punto arbitrario $p \in M$. Dado que f es suave existirá un par de cartas (U, φ) y (V, ψ) de M y N respectivamente, tales que:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

es una función suave en el sentido usual, esto es, sus componentes tienen derivadas parciales de todos los órdenes, lo que implica que la composición $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es continua. Por definición de carta φ y ψ son homeomorfismos, por lo que al considerar la restricción:

$$f|_U : \psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi : U \to V$$

esta será la composición de mapas continuos por lo que f es continua en una vecindad de cada punto de M, por lo tanto, f es continua. ■

Teorema 1.3.2. Sean M y N variedades suaves, y sea $f : M \to N$ un mapa suave.

a) Si para cada $p \in M$ existe una vecindad U tal que la restricción $f|_U$ es suave, entonces f es suave.

b) Si f es suave, entonces su restricción a cada subconjunto abierto es suave.

Demostración. a) Supongamos que para cada punto $p \in M$ existe una vecindad U tal que $f|_U$ es un mapa suave. Por el ejemplo 1.2.5 sabemos que al ser U un subconjunto abierto de M también será una variedad suave, por lo que, por definición existirán cartas suaves $(\hat{U}, \hat{\varphi})$ de U que contiene a p y (V, ψ) de N que contiene a $f(p)$ y $f(\hat{U}) \subseteq N$ y tal que $\psi \circ f \circ \hat{\varphi}^{-1}$ es un mapa suave. Dado que $\hat{U}$ es un abierto en U con la topología de subespacio, $\hat{U}$ será abierto en M, por lo tanto $(\hat{U}, \hat{\varphi})$ es una carta en M y f es suave.

b) Supongamos ahora que f es suave. Sea $p \in M$ un punto arbitrario y U es una vecindad abierta que lo contiene. Por definición de mapa suave existirán cartas $(\hat{U}, \varphi)$ y (V, ψ) cuyos dominios contienen a p y $f(p)$ tales que $f(\hat{U}) \subset V$ y tal que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es un mapa suave. Tomando la carta $(U \cap \hat{U}, \varphi|_{U \cap \hat{U}} = \hat{\varphi})$, esta es una carta de U y cumple que $p \in U \cap \hat{U}$, $f(U \cap \hat{U}) \subseteq V$ y la composición $\psi \circ f \circ \hat{\varphi}^{-1}$ es suave, podemos cubrir a U con este tipo de cartas. Por lo tanto, la restricción de f a cualquier subconjunto abierto es suave.

■

Este teorema lo que nos está diciendo es que la suavidad es una propiedad local, también da pie al siguiente lema que nos permite construir mapas suaves.

Corolario 1.3.3 (Lema de pegado para mapas suaves)**.** Sean M y N variedades suaves, y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta abierta de M. Supongamos que para cada $\alpha \in A$ tenemos un mapa suave $f_\alpha : U_\alpha \to N$ tal que el mapa coincide en intersecciones, i.e., $f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ para cualesquiera α y β. Entonces existirá un mapa único $f : M \to N$ tal que $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$ para cada $\alpha \in A$.

Teorema 1.3.4. Sean M y N variedades suaves y $f : M \to N$ un mapa suave. Entonces la representación coordenada de f con respecto a cualquier par de cartas suaves de M y N es suave.

Demostración. Consideremos dos cartas cualesquiera (U, φ) y (V, ψ) de M y N respectivamente. Tenemos dos posibles casos:

- $U \cap f^{-1}(V) = \varnothing$, en este caso la proposición se cumple por vacuidad.

- $U \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$, en cuyo caso consideremos $p \in U \cap f^{-1}(V)$, de modo que $f(p) \in f(V)$. Dado que f es suave existirán cartas $(\hat{U}, \hat{\varphi})$ y $(\hat{V}, \hat{\psi})$ tal que $p \in \hat{U}$, $f(\hat{U}) \subseteq \hat{V}$ y tales que $\hat{\psi} \circ f \circ \hat{\varphi}^{-1}$. Como M y N son variedades suaves sus cartas serán suavemente compatibles por lo que $\hat{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \hat{U}) \to \hat{\varphi}(U \cap \hat{U})$ y $\psi \circ \hat{\psi}^{-1} : \hat{\psi}(V \cap \hat{V}) \to \psi(V \cap \hat{V})$ son suaves. Por lo tanto

  $$(\psi \circ \hat{\psi}^{-1}) \circ (\hat{\psi} \circ f \circ \hat{\varphi}^{-1}) \circ (\hat{\varphi} \circ \varphi^{-1}) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \hat{U} \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V).$$

  Como el punto $p \in M$ era arbitrario se concluye que la representación coordenada de f es suave en $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$

■

Teorema 1.3.5 (Mapas Constantes)**.** Sean M^{n_1} y N^{n_2} variedades suaves, cualquier mapa constante $c : M \to N$ es suave.

Demostración. En efecto, consideremos un punto arbitrario $p \in M$ y cartas (U, φ) y (V, ψ) de M y N respectivamente que contengan a p y $c(p)$. Claramente se tendrá que $c(p) = c(U) \subset V$ y, además $\psi \circ c \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(c(p))$, por lo que la representación coordenada de c es una función constante de $\mathbb{R}^{n_1}$ a $\mathbb{R}^{n_2}$, por lo tanto, será suave, lo cual implica que c es suave. ■

Teorema 1.3.6 (El Mapa Identidad)**.** Sea M^n una variedad suave, el mapa $\text{Id} : M \to M$ es suave.

Demostración. Sea $p \in M$ un punto arbitrario, podemos considerar una única carta (U, φ) que lo contenga, trivialmente tenemos que $\text{Id}(U) \subseteq U$, la representación coordenada de Id está dada por $\varphi \text{Id} \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \varphi(U)$, esta composición es suave dado que la función identidad es suave en $\mathbb{R}^n$, así, el mapa identidad es suave. ■

Teorema 1.3.7 (El Mapa De Inclusión)**.** Sea M una variedad suave. Si $U \subseteq M$ es una subvariedad abierta, entonces el mapa de inclusión $\iota : U \to M$ es suave.

Demostración. Sea $p \in M$ y sea $(\hat{U}, \varphi)$ una carta de U que contenga a p. $(\hat{U}, \varphi)$ será una carta también en M y $\varphi \circ \iota \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \varphi(U)$ es la función identidad, que es suave, por lo tanto ι es un mapa suave. ■

Teorema 1.3.8 (Composición de Mapas Suaves)**.** Sean M, N y P variedades suaves. Si $f : M \to N$ y $g : N \to P$ son mapas suaves, entonces $g \circ f : M \to P$ es suave.

Demostración. Sea $p \in M$ un punto arbitrario. Por definición de suavidad existirán cartas (V, ψ) y (W, ω) tales que $f(p) \in V$, $g(f(p)) \in W$ y $g(V) \subseteq W$, y tales que $\omega \circ g \circ \psi^{-1} : \psi(V) \to \omega(W)$.

Dado que f es suave, en particular será continua por lo que $f^{-1}(V)$ será un subconjunto abierto de M que contiene a p, por lo que existirá una carta suave (U, φ) de M tal que $p \in M$ y $U \subseteq f^{-1}(V)$, por el teorema 1.3.4 sabemos que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ es suave. Entonces $(g \circ f)(V) \subseteq g(V) \subseteq W$ y $\omega \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$ es suave por ser la composición de mapas suaves entre espacios euclidianos. ∎

Teorema 1.3.9. Sean $M_1, \ldots, M_k$ y N variedades suaves. Para cada i sea $\pi_i : \prod_{i=1}^{k} M_i \to M_i$ la proyección sobre el factor M_i. Un mapa $f : N \to \prod_{i=1}^{k} M_i$ es suave si y sólo si cada uno de sus mapas componentes $f_i = \pi_i \circ f : N \to M_i$ es suave.

Demostración. Probaremos el caso para el producto de dos variedades, el caso general se sigue por inducción. Sean M_1, M_2, N variedades suaves. Sean $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ y $\pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ las proyecciones. Procederemos por partes:

- Las proyecciones son suaves. Sin pérdida de generalidad consideremos la proyección sobre la primera coordenada. Sean $p \in M_1^{n_1} \times M_2^{n_2}$ un punto arbitrario, $(U \times V, \varphi \times \psi)$ una carta de $M_1 \times M_2$ que contiene a p, (U, ω) una carta de M_1 que contiene a $\pi_1(p)$, tenemos que $\pi(U \times V) \subseteq U$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\omega \circ \pi_1 \circ (\varphi \times \psi)^{-1}(x, y) &= \omega(\pi_1(\varphi^{-1}(x), \psi^{-1}(y))) \\ &= \omega(\varphi^{-1}(x)) \\ &= \omega \circ \varphi^{-1}(x)\end{aligned}$$

  Esto es una proyección de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ a $\mathbb{R}^{n_1}$ que sabemos es suave. Por lo tanto, la proyección del producto de variedades suaves será suave en cada punto, esto implica que la proyección sobre una de las coordenadas es suave en todo el dominio.

- Sea $f : N \to M_1 \times M_2$ un mapa suave, por el teorema 1.3.8 sabemos que las composiciones $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ son suave.

- Sean $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ mapas suaves. Sean $p \in N$, (U, φ) una carta de N que contiene a p y (V, ψ), (W, ω) cartas de M_1 y M_2 respectivamente tales que $\pi_1 \circ f(U) \subseteq V$ y $\pi_2 \circ f(U) \subseteq W$ y tales que:

$$\psi \circ (\pi_1 \circ f) \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

$$\omega \circ (\pi_2 \circ f) \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \omega(W)$$

Son cartas suaves. Tendremos que $(V \times W, \psi \times \omega)$ es una carta para $M_1 \times M_2$ tal que $f(U) \subseteq V \times W$, y su representación coordenada será:

$$(\psi \times \omega) \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V) \times \omega(W)$$

Esta composición es suave dado que sus proyecciones de $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ a cada una de sus componentes son suaves.

■

Un hecho importante sobre el conjunto de funciones suaves, $C^\infty(M)$, es que este es un anillo bajo la suma y el producto, por lo cual bajo dichas operaciones el conjunto tiene propiedades algebraicas muy agradables, similares a las de un campo.

Lema 1.3.10. Si M es una variedad suave y $f : M \to \mathbb{R}^k$ es una función suave, entonces para cada carta suave (U, φ) se tiene que la composición $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^k$ es una función suave.

Demostración. Tomemos un punto $p \in M$ arbitrario y una carta (U, φ) que lo contenga. Por definición de función suave existirá una carta (V, ψ) tal que la composición $f \circ \psi^{-1} : \psi(V) \to \mathbb{R}^k$ es suave.

Al ser (U, φ) y (V, ψ) cartas suaves, el mapa de transición $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap v) \to \psi(U \cap V)$ es suave, por lo que $(f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1}) = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \mathbb{R}^k$ es un mapa suave. Como p es un punto arbitrario podemos concluir que esto cumplirá para cada punto de U, por lo cual $f \circ \varphi^{-1}$ es suave en $\varphi(U)$, para cada carta suave(U, φ). ■

Teorema 1.3.11. El conjunto de funciones suaves, $C^\infty(M)$, es un anillo conmutativo con identidad bajo las operaciones:

$$\begin{aligned} (f+g)(p) &= f(p) + g(p), & p &\in M \\ (fg)(p) &= f(p)g(p), & f, g &\in C^\infty(M) \end{aligned}$$

Demostración. Consideremos dos funciones $f, g \in C^\infty(M)$, mostraremos que tanto la suma como el producto de estas funciones son suaves.

Por el lema anterior sabemos que para cualquier carta suave (U, φ), las composiciones $f \circ \varphi^{-1}$ y $g \circ \varphi^{-1}$ son suaves y, por como definimos la suma tenemos que $(f+g) \circ \varphi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) + (g \circ \varphi^{-1})$, esta es una suma de funciones suaves en el sentido usual, la cual sabemos es suave.

De modo similar para el producto se tendrá por definición que, $(fg) \circ \varphi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1})(g \circ \varphi^{-1})$ y por el mismo motivo, por ser el producto de funciones suaves en el sentido usual, el producto fg es suave.

La conmutatividad, la asociatividad y la distributividad se tienen dado que la suma y el producto cumplen poseen estas propiedades, la unidad será mapa identidad. ∎

1.3.1 Difeomorfismos

Ahora estudiaremos un tipo particular de mapa suave, los difeomorfismos. De modo similar a como los homeomorfismos preservan ciertas propiedades de los espacios topológicos, los difeomorfismos entre variedades suaves preservarán ciertas propiedades de la estructura suave.

Definición 1.3.3 (Difeomorfismo)**.** Sean M y N variedades suaves y $f : M \to N$ un mapa cualquiera. Diremos que f es un *difeomorfismo* si:

- f es un homeomorfismo.
- $f : M \to N$ es un mapa suave.
- $f^{-1} : N \to M$ es un mapa suave.

Teorema 1.3.12. Sean M, N y P variedades suaves, $f : M \to N$ y $g : N \to P$ difeomorfismos. La composición $g \circ f : M \to P$ es un difeomorfismo.

Demostración.

- La composición $g \circ f$ es un homeomorfismo por ser la composición de homeomorfismos.
- Dado que f y g son mapas suaves, por el teorema 1.3.8 sabemos que la composición $g \circ f$ es un mapa suave.
- Por ser f y g difeomorfismos, f^{-1} y g^{-1} también son mapas suaves, nuevamente tenemos que por el teorema 1.3.8 el mapa $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ es suave.

∎

Teorema 1.3.13. Sean $M_1, \dots, M_k$ y $N_1, \dots N_k$ variedades suaves, y sean $f_i : M_i \to N_i$ difeomorfismos, el producto cartesiano de mapas $f_1 \times \cdots \times f_k : M_1 \times \cdots \times M_k \to N_1 \times \cdots \times N_k$ definido como:

$$(f_1 \times \cdots \times f_k)(x_1, \dots, x_k) = (f_1(x_1), \dots, f(x_k)),$$

es un difeomorfismo.

Demostración. Probaremos el caso para el producto cartesiano de dos mapas. Sean M_1, M_2 y N_1, N_2 variedades suaves, y sean $f : M_1 \to N_1$ y $g : M_2 \to N_2$ difeomorfismos.

Dado que el producto cartesiano de mapas continuos es continuo, $f \times g$ es un mapa continuo de $M_1 \times M_2$ a $N_1 \times N_2$, además, $f \times g$ es un mapa invertible, y su inversa está dada como el producto cartesiano de los mapas inversos a f y g, esto es,

$$(f \times g)^{-1} = f^{-1} \times g^{-1}$$

Y dado que f y g son difeomorfismos, en particular serán homeomorfismos, por lo cual sus inversas serán continuas, así podemos garantizar que $(f \times g)^{-1}$ es un mapa continuo y $f \times g$ es un homeomorfismo.

Por el teorema 1.3.9 sabemos que el producto $f \times g$ es un mapa suave si y solo si cada una de sus componentes es suave, pero esto se tiene por hipótesis, dado que tanto f como g son suaves, y al tomar las proyecciones del producto cartesiano sobre sus mapas componentes obtenemos:

$$\pi_1 \circ (f \times g) = f$$
$$\pi_2 \circ (f \times g) = g$$

Del mismo modo podemos tomar las proyecciones del mapa $(f \times g)^{-1}$ y ver que estas proyecciones son suaves. Por lo tanto, el producto cartesiano de dos difeomorfismos es un difeomorfismo. El caso general se tiene por inducción. ■

Teorema 1.3.14. Sean M y N variedades suaves, $U \subseteq M$ una subvariedad abierta y $f : M \to N$ un difeomorfismo. La restricción $f|_U : U \to f(U) \subseteq N$ es un difeomorfismo.

Demostración. La restricción de un homeomorfismo a un subconjunto abierto es nuevamente un homeomorfismo. Además, podemos expresar la restricción de una función a un conjunto como $f|_U = f \circ \iota$, donde $\iota : U \to M$ es el mapa de inclusión, como se demostró en el teorema 1.3.7 este es suave, por lo tanto, la composición será suave, lo que implica que $f|_U$ es suave.

Dado que f es un homeomorfismo y U es abierto se garantiza que $f(U)$ es un subconjunto abierto, y por el argumento anterior podemos concluir que $(f|_U)^{-1}$ es un mapa suave. ■

Estas son algunas propiedades básicas de los difeomorfismos, a continuación, veremos dos resultados que nos dicen que si tenemos un difeomorfismo entre dos variedades suaves estas son esencialmente la misma.

Teorema 1.3.15. El conjunto de todas las variedades difeomorfas forma una clase de equivalencias.

Demostración. Sean M, N y P variedades suaves, y sean $f : M \to N$ y $g : N \to P$ difeomorfismo, entonces:

- $M \sim M$. La identidad $\text{Id} : M \to M$ es un difeomorfismo de una variedad consigo misma, esto se tiene trivialmente.

- $M \sim N$ implica $N \sim M$. Si $f : M \to N$ es un difeomorfismo entonces su inversa, $f^{-1} : N \to M$ también es un difeomorfismo.

- Si $M \sim N$ y $N \sim P$, entonces $M \sim P$. Por el teorema 1.3.12 sabemos que la composición de difeomorfismos es un difeomorfismo.

■

Teorema 1.3.16 (Invariancia de la Dimensión)**.** Si M^m y N^n son variedades suaves no vacías no puede existir un difeomorfismo de M a N, a menos que $m = n$

Demostración. Para probar este teorema primero probaremos un resultado similar en espacios euclidianos. Sean $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ espacios euclidianos y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo, entonces $m = n$.

Por ser un $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ difeomorfismo su función inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ existirá. Por definición de función invertible tenemos que $f^{-1} \circ f(x) = x$ y $f \circ f^{-1}(y) = y$, por la regla de la cadena tenemos que:

$$D(f^{-1} \circ f)(x) = Df^{-1}(f(x))Df(x) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$$
$$D(f \circ f^{-1})(y) = Df(f^{-1}(y))Df^{-1}(x) = \text{Id}_{\mathbb{R}^m}$$

Donde D representa la derivada total. De aquí podemos concluir que la matriz de la derivada total es invertible, y por un resultado básico de álgebra lineal tenemos que la matriz debe ser cuadrada, por lo tanto, $m = n$.

Ahora, si $p \in M$ es un punto arbitrario, (U, φ) y (V, ψ) son cartas suaves que contienen a p y $f(p)$ respectivamente, entonces la representación coordenada $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo. ■

1.3.2 Funciones Características Suaves y Particiones de la Unidad

En está subsección estudiaremos un conjunto de herramientas que nos serán de utilidad más adelantes, estás son las relativas a la partición de la unidad. La partición de la unidad nos permite extender funciones que estén definidas de manera local en una variedad suave de modo que estas sean suavemente cero fuera de sus dominios y de tal manera que podamos sumarlas obteniendo una función que esté definida globalmente.

Definición 1.3.4 (Soporte De Una Función)**.** Sean M una variedad suave y $f : M \to \mathbb{R}^n$ una función suave. Definimos el *soporte de* f como la cerradura del conjunto donde f no sea anula, i.e.,

$$\text{sup} f = \overline{\{p \in M : f(p) \neq 0\}}$$

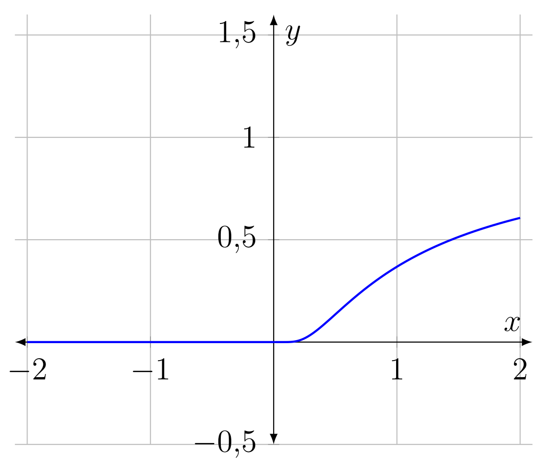
Si $U \subseteq M$ y sup$f \subseteq U$ diremos que f *está soportada* o *tiene soporte en* U, y, si sup$f$ es un conjunto compacto diremos que f tiene *soporte compacto*.

Definición 1.3.5 (Función Indicadora Suave)**.** Sea M una variedad suave, $p \in M$ un punto arbitrario y U una vecindad de p. Diremos que f es una *función indicadora suave en* p *con soporte en* U si f es una función suave con soporte en U y f es igual a 1 en una vecindad de p.

En el siguiente ejemplo construiremos una función indicadora suave.

Ejemplo 1.3.1. Consideremos la función por partes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$



Comenzaremos mostrando que esta función es suave, procederemos en dos pasos:

1. La función es continua. Esto se tiene trivialmente calculando los límites laterales del cociente de Newton:
$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t} &= \lim_{t\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t}=0\\ \lim_{t\to 0^-}\frac{f(t)-f(0)}{t} &= 0\end{aligned}$$

2. Si $t>0$, entonces la derivada $f^{(k)}$ tiene la forma $f^{(k)}(t)=p_k(t)\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2k}}$ para algún polinomio p_k con grado a lo más k.

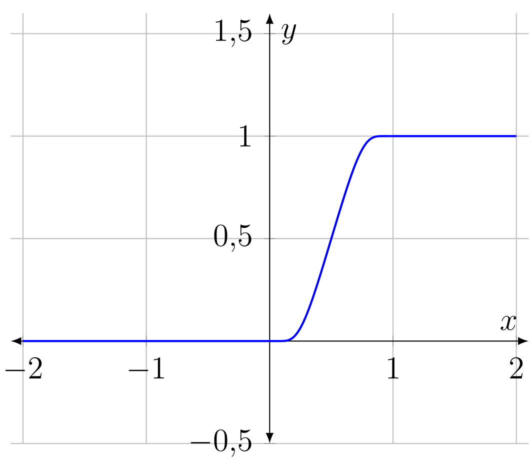
   Para $k=0$ esto se cumplirá por definición de f. Supongamos que la propiedad se cumple para algún $k\geq 0$. Mostraremos que se cumple también para $f^{(k+1)}$:
$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(t)=\frac{d}{dt}f^{(k)}(t)&=\frac{d}{dt}p_k(t)\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2k}}\\ &=p_k'(t)\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2k}}+p_k(t)\frac{t^{-2}e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2k}}-2kp_k(t)\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2(k+1)}}\\ &=\left(t^2p_k'(t)+p_k(t)-2ktp_k(t)\right)\frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^{2(k+1)}}\end{aligned}$$

3. Claramente cuando tomamos los límites $\lim_{t\to 0^+} f^{(k)}(t)$ y $\lim_{t\to 0^-} f^{(k)}(t)$ ambos son cero.

Por lo tanto f es una función suave en todo $\mathbb{R}$

Ahora, lo que queremos es utilizar la función f para definir una función indicadora suave, el primer paso para poder lograr esto es definir la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ del siguiente modo:

$$g(t)=\frac{f(t)}{f(t)+f(1-t)}$$



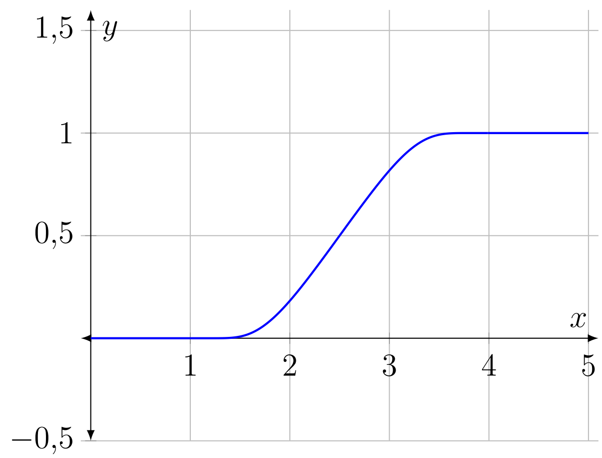
Al ser g el cociente de dos funciones suaves, y dado que el denominador no se anula en ningún punto, g estará bien definida en todo $\mathbb{R}$, además será suave. Lo que esta función g nos da es una transición suave del 0 al 1, por lo cual, será sencillo construir una función indicadora suave a partir de esta, esto se logrará aplicando transformaciones sencillas.

Si tomamos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, podemos hacer un cambio de variables del conjunto compacto $[a^2, b^2]$ al conjunto $[0, 1]$ del siguiente modo:

$$x \mapsto \frac{x - a^2}{b^2 - a^2}$$

Esta transformación nos permite cambiar la escala de g y trasladarla en el eje horizontal; es por esta razón que se define $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del siguiente modo,

$$h(x) = g\left(\frac{x - a^2}{b^2 - a^2}\right)$$

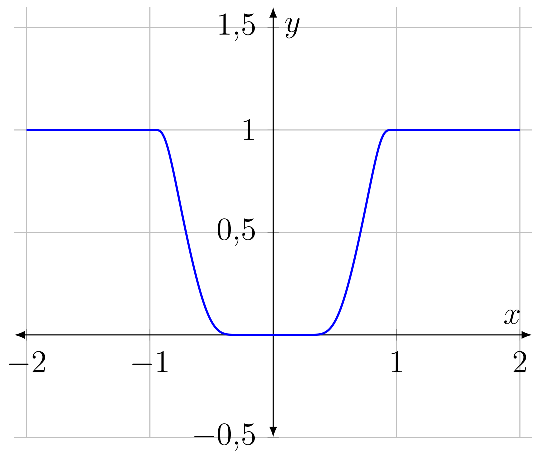


Y de este modo al tomar $a, b \in \mathbb{R}$ cómo se acaba de hacer se tendrá que para h se cumple lo siguiente

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x > b^2 \\ 0, & x \leq a^2 \end{cases}$$

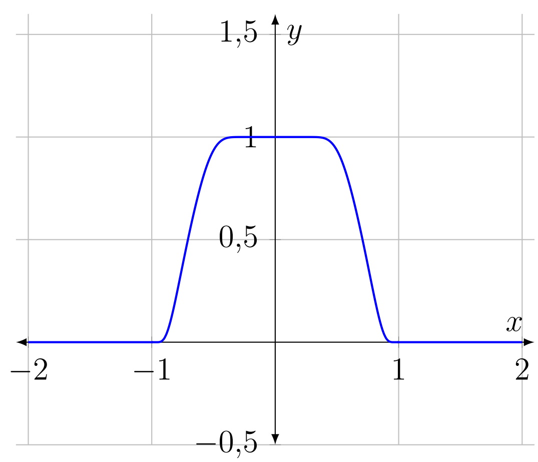
Ahora, podemos tomar $k(x) = h(x^2)$ para hacer que nuestra función sea simétrica alrededor del origen.

$$k(x) = h(x^2) = g\left(\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right)$$



Y finalmente, definimos la función suave r de modo que su valor sea 1 en el intervalo y 0 fuera de este haciendo un pequeño ajuste del siguiente modo.

$$r(t) = 1 - k(x) = 1 - g\left(\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right)$$



$r(t)$ es una función indicadora suave en 0 y para cualquier $q \in \mathbb{R}$ tenemos que $r(x-q)$ es una función indicadora en q. Esta idea puede ser extendida a $\mathbb{R}^n$ como una función indicadora suave en $0 \in \mathbb{R}^n$ cuyo valor es 1 en la bola (cerrada) $B_a(0)$ y 0 fuera de la bola $B_b(0)$ si tomamos la función $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cómo:

$$\sigma(x) = r(\|x\|) = 1 - g\left(\frac{\|x\| - a^2}{b^2 - a^2}\right)$$

Lo que haremos a continuación será extender estas ideas, mostraremos que para un cualquier punto en una variedad y cualquier vecindad que contenga a ese punto podemos encontrar una función indicadora suave en el punto con soporte en la vecindad.

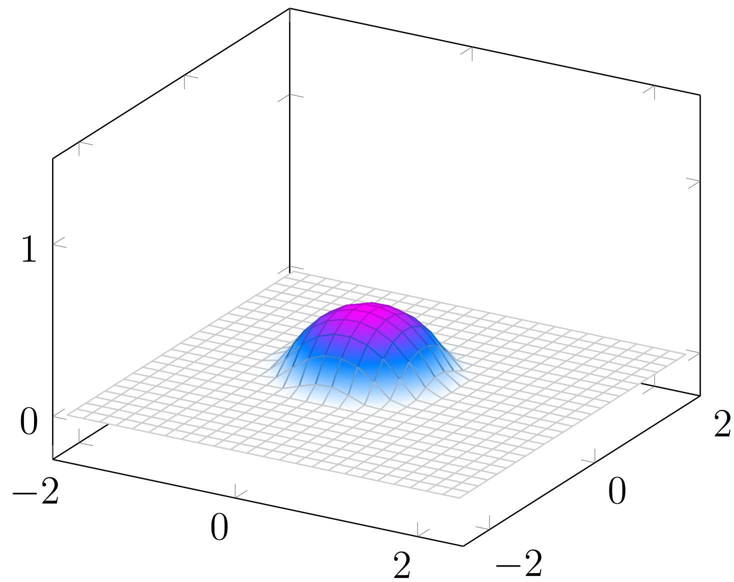


Figura 1.11: Representación de una función indicadora suave en $\mathbb{R}^2$

Lema 1.3.17. Sea M^n una variedad suave, $p \in M$ un punto arbitrario y $U \subseteq M$ una vecindad de p. Entonces existe una función indicadora suave en p con soporte en U.

Demostración. Sea a un punto arbitrario en M y U una vecindad de q. Por ser M una variedad suave existirá una carta suave (V, ψ) que contiene a q y tal que $V \subset U$.

Consideremos la función $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida anteriormente. σ es una función indicadora suave en $\psi(q)$ con soporte en una bola compacta $B_r(\psi(q)) \subset V$. Definimos la función

$$f(p) = \begin{cases} \sigma(\psi(p)), & p \in V \\ 0, & p \notin V \end{cases}$$

Mostraremos que, en efecto, esta función es una función indicadora en q con soporte en U.

Por como hemos construido σ esta tiene soporte compacto, esto es, supσ es un conjunto compacto, luego $\psi^{-1}(\text{sup}\sigma)$ será la imagen continua de un conjunto compacto, i.e., $\psi^{-1}(\text{sup}\sigma)$ es un compacto en M. Dado que M es Hausdorff podemos garantizar que $\psi^{-1}(\text{sup}\sigma)$ es cerrado. Por lo tanto, tendremos que

$$\text{sup} f \subset \varphi^{-1}(\text{sup}\sigma) \subset V$$

Es claro que si $p \in V$, f es suave en p dado que $f(p)$ será la imagen de la composición de dos funciones suave. En el caso contrario, si $p \notin V$, entonces podremos elegir una carta (W, ω) que contengan a p y tal que $W \cap \psi^{-1}(\text{sup}\sigma) = \varnothing$. Esta carta será también disjunta de sup$f$, por lo que

$f(W) \equiv 0$, así f es una función suave, la cual es idénticamente 1 en una vecindad de $V \subset U$ de p y sup$f \subset U$. Por lo tanto, f es una función indicadora suave en q con soporte en U. ■

Lema 1.3.18. Sea M una variedad suave, q un punto arbitrario, $U \subset M$ una vecindad de q y f una función indicadora suave en q con soporte en U. Existe una función suave $\hat{f}$ en M que coincide con f en alguna vecindad, posiblemente más pequeña, que contiene a q.

Demostración. Si tomamos una función indicadora suave $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cómo se construyó en el ejemplo 1.3.1 de tal modo que r tenga soporte en U y esté definida en una vecindad V de q, podemos definir la función:

$$\hat{f} = \begin{cases} r(x)f(x), & x \in U \\ 0, & x \notin U \end{cases}$$

Dado que $\hat{f}$ es el producto de funciones suaves en U, $\hat{f}$ es suave en U. Si $x \notin U$, entonces $x \notin$ sup$r$, por lo que existirá una vecindad que contiene a x en la cual $\hat{f}$ se anula dado que, como se vio en el lema anterior, podemos tomar sup$r$ cerrada. Por lo tanto $\hat{f}$ es suave en cada punto $x \notin U$. Y, dado que $r \equiv 1$ en V, la función $\hat{f}$ coincide con f en V. ■

Ahora utilizaremos algunos de los resultados que pueden ser encontrados en el Anexo **??** para poder dar las siguientes definiciones.

Definición 1.3.6 (Partición de la Unidad Subordinada)**.** Sea M una variedad suave, y sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta abierta de M. Una *partición de la unidad suave y subordinada a* $\mathcal{U}$ es una familia $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ formada por funciones suaves y no negativas $\varphi_\alpha : M \to \mathbb{R}$ tales que

1. sup$\varphi_\alpha \subseteq U_\alpha$, para cada $\alpha \in A$.

2. La colección $\{\text{sup}\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es localmente finita.

3. $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(p) = 1$ para cada $p \in M$.

Notemos que en el tercer punto de nuestra definición no tendremos problemas de convergencia dado que, por la segunda condición, al pedir que la colección de soportes de las funciones sea localmente finita, cada punto tendrá una vecindad V que interceptará a $\{\text{sup}\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ en un subconjunto finito de A, por lo que la suma será finita.

Teorema 1.3.19 (Existencia de Particiones Suave de la Unidad)**.** Sea M una variedad suave y sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta abierta de M. Existe una partición suave de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$.

Demostración. Por el resultado mostrado en el ejemplo 1.2.5, U_α es en sí misma una subvariedad suave de M, y por los lemas **??** y **??**, cada U_α tendrá una base $\mathcal{B}_\alpha$ formada por bolas coordinadas regulares y precompactas. Evidentemente $\mathcal{B} = \cup_{\alpha \in A} \mathcal{B}_\alpha$ formará una base para la topología de M.

Por el teorema **??** y el corolario **??** podemos garantizar que $\mathcal{U}$ tendrá un refinamiento $\{B_i\}$ numerable y localmente finito que consta de elementos de $\mathcal{B}$.

No es difícil ver que si $\{B_i\}$ es una colección localmente finita, entonces la colección formada por la cerradura de estos conjuntos $\{\overline{B}_i\}$ también será localmente finita.

Dado que cada B_i es una bola regular coordinada en algún U_α, por definición existirá una bola coordinada suave $B'_i \subseteq U_\alpha$ tal que $\overline{B}_i \subseteq B'_i$, y un mapa suave $\varphi_i : B_i \to \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi_i(\overline{B}_i) = \overline{B}_{r_i}(0)$ y $\varphi_i(B'_i) = B_{r'_i}(0)$ para algunos $r_i, r'_i \in \mathbb{R}$ tales que $r_i < r'_i$. Para cada i definiremos la función $f_i : M \to R$ como:

$$f_i(q) = \begin{cases} \rho_i \circ \varphi_i, & p \in B'_i \\ 0, & p \notin B'_i \end{cases}$$

Como se mostró en el lema 1.3.17 estas funciones son suaves, más aún, son funciones indicadoras suaves, además $\sup f_i = \overline{B}_i$.

Con estas funciones podemos definir la función $f : M \to \mathbb{R}$ como $f(p) = \sum_i f_i(x)$. Dado que los $\{B_i\}$ y $\{\overline{B}_i\}$ son localmente finitos, la suma será finita y por lo tanto convergerá. Cómo cada f_i es no negativa en cada punto en B_i, y cada punto de M está en algún B_i por ser la colección una cubierta de M, se sigue que $f(p) > 0$ para cada $p \in M$. Y por cómo hemos definido ρ cada f_i estará normalizada por lo que $0 \leq f_i \leq 1$ y $\sum_i f_i \equiv 1$.

Por último, hacemos un cambio de índices para nuestras funciones para que coincidan con los de la cubierta abierta $\mathcal{U}$. Dado que $\{B'_i\}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$, para cada i podemos elegir algún índice $a(i) \in A$ tal que $B'_i \subseteq U_{a(i)}$. Para cada $\alpha \in A$ definimos la función $\psi_\alpha : M \to \mathbb{R}$ como:

$$\psi_\alpha = \sum_{i : a(i) = \alpha} f_i$$

Por estar cada ψ_α soportada en $\overline{B}_i$ tendremos que:

$$\sup \psi_\alpha = \bigcup_{i : a(i) = \alpha} \subseteq U_\alpha$$

Así, tendremos que la colección $\{\psi_\alpha\}$ es una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$. ■

Los siguientes dos lemas nos darán maneras de extender funciones suaves utilizando particiones de la unidad, que, en nuestro caso, es nuestro principal interés.

Lema 1.3.20. Sea M una variedad suave, $p \in M$, $A \subset M$ un subconjunto arbitrario que contiene a p y $f : A \to \mathbb{R}^k$ una función suave. Existe una extensión suave a un conjunto abierto que contiene a A, esto es, existe un conjunto abierto $U \subset M$ tal que $A \subset U$ y una función $\hat{f} : U \to \mathbb{R}^k$ tal que $\hat{f}|_{A \cap U} = f$.

Demostración. Consideremos una vecindad V_p y una función suave $f_p : V_p \to \mathbb{R}^n$ para cada $p \in A$ tal que $f_p|_{V_p \cap A} = f|_{V_p \cap A}$. Por el teorema anterior podemos garantizar que existe una partición suave de la unidad $\{\psi_p\}_{p \in A}$ subordinada a $U = \cup_{p \in A} V_p$

Definiremos el conjunto $B = \{p \in A : p \in \text{sup}\psi_p\}$ y la función $\hat{f} : \cup_{p \in A} V_p \to \mathbb{R}^n$ como:

$$\hat{f}(x) = \sum_{x \in B} \psi_p(x) f_p(x)$$

$\hat{f}$ será una función suave que coincide con f en el conjunto $U \cap A$, y por cómo se ha definido U, es claro que $A \subseteq U$. ■

Notemos sin embargo que no siempre es posible extender una función suave a un conjunto más grande, en particular esto no siempre es posible si la función está definida en un conjunto abierto dado que el comportamiento de la función puede ser arbitrario. Como un ejemplo sencillo en $\mathbb{R}$ podemos tomar la función trigonométrica $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, para esta función no existe una extensión suave a un subconjunto abierto más grande.

Es por esto que damos el siguiente lema, el cual es un resultado más fuerte que el anterior, y nos garantiza que si imponemos la condición de que A es cerrado, entonces podremos extender cualquier función suave definida en A a cualquier subconjunto abierto que lo contenga a A.

Lema 1.3.21 (Lema de Extensión para Funciones Suaves)**.** Sea M una variedad suave, $A \subset M$ un subconjunto cerrado y $f : A \to \mathbb{R}^k$ una función suave. Para cada conjunto abierto U que contiene a A existe una función suave $\hat{f} : M \to \mathbb{R}^k$ tal que $\hat{f}|_A = f$ y $\text{sup}(\hat{f}) = U$.

Demostración. Procederemos de modo similar a la demostración anterior. Para cada $p \in A$ tomemos una vecindad V_p y una función suave $\hat{f}_p : V_p \to \mathbb{R}^k$ tal que $\hat{f}_p|_{V_p \cap A} = f$. Dado un conjunto abierto U podemos reemplazar V_p por $V_p \cap U$ y suponer que $V_p \subset U$.

La colección de conjuntos $B = \{V_p : p \in A\} \cup (M - A)$ será una cubierta abierta para M, por el teorema 1.3.19 podemos garantizar que existirá una partición suave de la unidad subordinada a la cubierta. Digamos que $\{\psi_p : p \in A\} \cup \{\psi_0\}$ es dicha partición de tal modo que sup$\psi_p \subseteq V_p$ y sup$\psi_0 \subseteq M - A$.

Definimos la función $\hat{f} : M \to \mathbb{R}^k$ como:

$$\sum_{p \in A} \psi_p(x) \hat{f}_p(x)$$

Esta suma es convergente y está formada por el producto de funciones suaves por lo que será suave, además coincide con f en $U \cap A$ y tiene soporte en U dado que será idénticamente cero fuera de A. ■