# Campos Vectoriales

## Fibrados Vectoriales

Siguiendo con la extensión y generalización que hemos estado realizando de conceptos conocidos de cálculo en espacios euclidianos, ahora extenderemos la idea de los campos vectoriales, estos objetos nos darán una forma de asignar a cada punto de una variedad un vector del espacio tangente.

Para poder definir lo que es un campo vectorial primero hablaremos de lo que son los fibrados vectoriales, lo cual responderá a las preguntas ¿Por qué hemos decido llamar fibrados a la colección de espacios tangentes a una variedad?, y ¿qué es una fibra?

**Definición 1** (Fibrado Vectorial). Sean y variedades suaves, un mapa suave y sobreyectivo, al cual llamaremos la *proyección fibrada*, diremos que es *localmente trivial de rango*  si:

* Para cada , su preimagen, , tiene estructura de espacio vectorial con dimensión , llamaremos a esta preimagen la *fibra en*  y usualmente se denotará como .
* Para cada existe una vecindad abierta que lo contiene y , donde es un difeomorfismo tal que para cada la restricción:
* es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Diremos que es un *conjunto abierto trivializante* en . La colección , donde es una cubierta abierta de es llamada la trivialización local de , y la cubierta abierta es llamada la cubierta abierta trivializante de para .

Un *fibrado vectorial suave de rango*  es una terna donde y son variedades suaves y es un mapa suave y sobreyectivo que es localmente trivial de rango . A la variedad la llamamos el *espacio total* del fibrado vectorial y a la variedad el *espacio base*. Por simplicidad se dice que  *es un fibrado vectorial sobre* .

**Ejemplo 1** (Fibrados Tangentes). Por los resultados mostrados en la sección anterior es evidente que si es una variedad suave, la terna , donde es el fibrado tangente y es la proyección natural de sobre , será un fibrado vectorial suave.

**Ejemplo 2** (Producto Fibrado). Dada una variedad , sea la proyección sobre el primer término. Entonces es un fibrado tangente de rango llamado el *producto fibrado* de rango sobre . La estructura de espacio vectorial en la fibra es:

Una trivialización local en esta dada por la identidad .

**Definición 2** (Sección de un Fibrado Vectorial). Una *sección* de un fibrado vectorial es un mapa tal que , esto quiere decir que para cada , pertenece a .

Diremos que el mapa es una *sección suave* si es suave de a . Denotaremos al conjunto de todas las secciones suaves de como .

Como se vio en la sección [[Sección: Mapas Suaves]](#Sección: Mapas Suaves), el conjunto de funciones suaves, , es un anillo conmutativo con identidad bajo las operaciones de suma y producto, una de las propiedad más importantes de los fibrados vectoriales es que estos son módulos sobre el anillo de funciones suaves.

**Teorema 1**. Sea un fibrado vectorial suave, y sea . Si definimos la suma de secciones suaves y el producto por una función como sigue:

Entonces es un módulo sobre el anillo .

*Proof.* Dado que tanto como son secciones tendremos que elegido un punto , y pertenecen a la fibra , y como tiene estructura de espacio vectorial se tiene que , por lo tanto, es una sección del fibrado. Para mostrar la suavidad tomamos un punto y un conjunto abierto trivializante en que contenga a con una trivialización local suave

Supongamos que para se tiene:

Como y son mapas suaves, y serán funciones suaves, y por definición es isomorfismo lineal, por lo que

Por lo tanto, es un mapa suave en cada punto de , en particular será suave en . Se concluye que es una sección suave.

De modo similar, será una sección del fibrado vectorial dado que al elegir un punto se tiene que por definición del producto que y como tiene estructura de espacio vectorial y es una simple constante pertenecerá a la fibra .

Ahora tomemos un punto y un conjunto trivializante en que contenga a con trivialización suave

Supongamos que para se tiene:

Como se ha mencionado anteriormente, al ser un mapa suave, cada será una función suave en . Por la linealidad de se tendrá que

Por lo tanto, cada una de las componentes es suave, así se garantiza que el producto definido de esta manera es una sección suave. Más aún, será tanto un espacio vectorial como un módulo sobre el anillo . ◻

Los módulos, al ser una generalización del concepto de espacio vectorial también nos permitirán generalizar varios otros conceptos relacionados, como lo son las combinaciones lineales, la dependencia (o independencia) lineal o las bases, sin embargo, es importante no perder de vista que no todos los resultados que aplican para espacios vectoriales aplicaran para los módulos.

## Campos Vectoriales

**Definición 3** (Campo Vectorial). Un *campo vectorial* en una variedad es una sección del fibrado tangente , esto es, es un mapa tal que para cada . Además, diremos que es un *campo vectorial suave* si es un mapa suave. Denotaremos al conjunto formado por todos los campos vectoriales suaves en como .

Por el lema [[Lemma: Espacio Tangente a Subvariedad]](#Lemma: Espacio Tangente a Subvariedad), para una variedad suave, si es abierto, será una subvariedad abierta, por lo que para cada podemos identificar al espacio tangente con el espacio tangente , por lo tanto, si es un campo suave en y es abierto, la restricción será un campo suave.

**Teorema 2** (Criterio de Suavidad Para Campos Vectoriales). Sea una variedad suave, y sea un campo vectorial. Si es una carta coordenada suave en la restricción de a es suave si y solo si las funciones componentes con respecto a son suaves.

*Proof.* Sean las coordenadas naturales en asociadas a la carta , construidas en el teorema [[Teorema: Estructura de Variedad del Fibrado Tangente]](#Xc98a6f279eb19fc485e5fa03c7e9cdbd4cc9047). Por construcción de las coordenadas naturales, la representación coordenada de campo en esta dada como:

donde son las funciones componentes de , recordemos que lo que la función está haciendo es tomar un punto en la variedad , identificarlo con un vector en el fibrado tangente y después bajarlo a ; de esta forma, la suavidad es evidente si cada una de las componentes es suave. ◻

Como se mencionaba al inicio de la sección, uno de nuestros principales intereses con los campos vectoriales es que nos permiten asociar a cada punto de la variedad un vector en el espacio tangente, y de modo similar, es posible extender a cualquier vector que pertenezca al espacio tangente a una variedad suave, a un campo vectorial suave.

**Ejemplo 3**. Sea una variedad suave y una carta suave sobre . La asignación:

nos da un campo vectorial en . A la -tupla ordenada le llamamos un *marco local*, como hemos visto el marco local forma una base de para , además, si es un campo vectorial suave definido en un conjunto que incluya a , entonces existirán funciones suaves definidas en tales que:

Llamaremos a las funciones *funciones componentes de*  en la carta .

**Lema 3**. Sean una variedad suave, un punto en y un vector en . Existe un campo vectorial con soporte compacto en una vecindad de para el cual .

*Proof.* Consideremos una carta suave en la cual contenga a . Por el lema [[Lemma: Existencia de Función Indicadora]](#Lemma: Existencia de Función Indicadora) sabemos que existe un subconjunto compacto de y una función indicador suave para la cual se cumple:

Por el teorema [[Teorema: Base para el espacio tangente]](#Teorema: Base para el espacio tangente) sabemos que podemos expresar a cada vector en los puntos como una combinación lineal utilizando la base del espacio tangente inducida por la carta elegida, obteniendo que:

de modo que podemos definir un campo vectorial simplemente como:

Ahora, multiplicando por obtenemos que es un campo vectorial suave en con soporte en y para el cual se tiene que . ◻

Este lema, junto con el ejemplo [3](#Ejemplo: Campo Vectorial en M) son muy importantes, ya que lo que nos están diciendo es que los campos vectoriales generan una base para el espacio tangente a cada punto de una variedad.

Es posible extender este resultado, de modo que podamos extender un campo vectorial suave definido en un subconjunto de la variedad a toda la variedad, con este fin damos la siguiente definición y el siguiente lema.

**Definición 4** (Campo Vectorial a lo Largo de un Conjunto). Si es una variedad suave y es un subconjunto de , no necesariamente abierto. Diremos que es un *campo vectorial a lo largo de*  si es continuo y satisface . Diremos que es un *campo vectorial suave a lo largo de*  si para cada existe una vecindad y un campo vectorial en que coincide con en .

**Lema 4** (Lema de Extensión para Campos Vectoriales). Sea una variedad suave y sea un subconjunto cerrado. Supongamos que es un campo vectorial suave a lo largo de . Dado un subconjunto abierto que contenga a , existirá un campo vectorial global en tal que y .

*Proof.* Sea un atlas suave en formado por bolas precompactas. es una cubierta abierta en por lo que cada estará contenida en algún , y . Definiremos las funciones como:

Luego, por el teorema [[Teorema: Existencia de Particiones Suave de la Unidad]](#X72caeaf7f4e954a6fc5949b886053cbbdc2c481) podemos garantizar que existirán particiones suaves de la unidad subordinada al atlas . Definimos el mapa como:

Esta suma convergerá dado que será diferente de cero solo en un número finito de puntos por ser la partición de la unidad localmente finita, además el lema [[Lemma: Lema de Extensión para Funciones Suaves]](#Xcad90a4f2bb47faa7eca14fb4fbb842de8c5463) garantiza que para cada conjunto abierto que contengan a existirán funciones tales que coincide con en y . ◻

Al haber definido a los campos vectoriales como secciones de los fibrados vectoriales se tendrá como un corolario del teorema [1](#X551de848dd3410b919b441306637abf15985d0c) que los campos vectoriales también son módulos sobre el anillo de funciones suaves , con las operaciones definidas de manera idéntica.

**Corolario 5**. Sean una variedad suave y un punto en , e campos vectoriales suaves sobre , y sea . Si definimos la suma y el producto de campos vectoriales como:

Entonces, bajo estas operaciones el conjunto de campos suaves de , , es un módulo sobre el anillo de funciones suaves .

Como se mencionaba en la sección anterior, los módulos son una generalización del concepto de espacio vectorial, en este sentido lo que el corolario nos permite hacer es, que de modo similar a como sucede con los elementos de espacios vectoriales, podemos expresar a los elementos del módulo, en este caso, a los campos vectoriales suaves sobre como una combinación lineal, como se vio en el ejemplo [3](#Ejemplo: Campo Vectorial en M):

donde es la ésima componente del mapa , componente que depende de las coordenadas que se elijan.

**Definición 5** (Independencia Lineal y Generador del Fibrado Tangente). Sea una variedad suave -dimensional, y sea una tupla ordenada de campos vectoriales definidos en un subconjunto (no necesariamente abierto) de , diremos que la tupla es *linealmente independiente* si la tupla es linealmente independiente en para cada .

Además, diremos que la tupla *genera al fibrado tangente* si la tupla es un conjunto generador para el espacio para cada .

**Definición 6** (Marco Local). Si es una variedad suave dimensional, un *marco local para*  es una tupla de campos vectoriales definidos en un subconjunto abierto , la cual es linealmente independiente y que además genera al fibrado tangente en . Diremos que el marco es un *marco global* si y que es un *marco suave* si cada uno de los campos vectoriales es suave.

**Teorema 6**. Sea una variedad suave dimensional. Si es una -tupla linealmente independiente de campos vectoriales suaves definidos en un subconjunto abierto de , con , entonces para cada existen campos vectoriales suaves definidos en una vecindad de tal que es un marco local suave para en .

*Proof.* Por definición de independencia lineal, el conjunto es linealmente independiente en para cada en , por lo que podemos elegir vectores en tales que sean linealmente independientes y, por ende, formen una base para .

Ahora, por el lema [3](#Xa9eb3ea4a0fb0cade4979b0c8a374ca6e0b969d) sabemos que podemos extender cada vector en a un campo suave constante, para esto, tomamos una carta suave que contenga a y definimos a cada uno de los campos vectoriales , con , en como sigue:

Cada uno de estos campos es suave; para esto se tiene por hipótesis, para esto se tiene dado que los campos son suaves.

Por último, si consideramos el determinante , por construcción de los campos , el determinante será no nulo en , y además es suave en , por lo tanto, será no nulo en una vecindad de . Así, podemos concluir que la -tupla, , de campos vectoriales que hemos construido es linealmente independiente en para cada , por tanto, es un marco local suave para en . ◻

Un corolario de este resultado que de igual modo utiliza el lema [3](#Xa9eb3ea4a0fb0cade4979b0c8a374ca6e0b969d) es que si tenemos una colección de vectores linealmente independientes en el espacio tangente es posible extenderlos de tal manera que los campos vectoriales que resultantes sean suaves y coincidan con los vectores tangentes en una vecindad.

**Corolario 7**. Sea una variedad suave y un punto de . Si es una tupla de vectores linealmente independientes en , con , entonces existe un marco suave local tal que para cada .

## Campos Vectoriales Como Derivaciones

El tratamiento que hemos dado hasta ahora a sido bastante abstracto. En esta subsección estudiaremos a los campos vectoriales como objetos ya conocidos, operadores lineales, más en especifico, como derivaciones. Esto nos dará otra manera en la que podemos entender a los campos vectoriales y nos permitirá utilizar algunos de los resultados vistos en las secciones anteriores, lo cual será de gran útilidad más adelante.

En la subsección de espacios tangentes a variedades ([[Subsección: Espacios Tangentes en Variedades]](#Xaa28e1d9a0e1478b3e428e5f53046b571980965)), un vector tangente a un punto de una variedad suave se definió como una derivación en el punto , esto es, si es un mapa lineal que cumple la regla de Leibniz:

Es importante recordar esta definición ya que, es posible escribir tanto a los vectores tangentes como a los campos vectoriales como una combinación lineal en términos de las derivadas parciales . Además, es posible dar una definición para los campos vectoriales de tal forma que estos sean derivaciones.

Para ver que esto es posible notemos lo siguiente, si es un campo vectorial en y es una función suave definida en un subconjunto abierto de , podemos definir la función como:

y al construir a la función de este modo obtendremos el siguiente lema, que nos da un criterio alternativo de suavidad para un campo vectorial.

**Lema 8**. Sea una variedad suave y sea un campo vectorial. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. X es un campo vectorial suave.
2. Para cada función suave , la función es suave en .
3. Para cada subconjunto abierto y cada función suave , la función es suave en .

*Proof.* Comenzaremos suponiendo que es un campo vectorial suave. Sea un punto en y una carta suave que contenga a , utilizando la relación anterior y expresando al campo vectorial como una combinación lineal tendremos que para cada podemos expresar el campo vectorial como:

y por el teorema [2](#Xaf32773555935f73d5c461dbc5deabff4b88070) sabemos que cada es suave en , por lo tanto será suave en una vecindad de cada punto de la variedad, esto significa que es suave en .

Ahora supongamos que para cada función suave se tiene que la función es suave en . Tomemos alguna función suave y una carta suave en , por resultados ya vistos sabemos que para cada punto es posible construir una función indicadora suave con soporte en para la cual se tenga que y que sea nula en ; de este modo construiremos la función , esta función es suave en todo , en particular lo será en cada punto de , y como se tiene que en , podemos concluir que es suave en .

Finalmente supongamos que si es cualquier subconjunto abierto de y es una función suave entonces es suave. Al considerar las coordenadas locales de tendremos que cada es una función suave en y al aplicarle el campo suave podemos expresarla como una combinación lineal en términos de las componentes de esta,

Por lo tanto, cada una de las funciones componentes de es suave, así concluimos que es un campo suave. ◻

Lo que este lema está haciendo, además de darnos más condiciones para poder comprobar la suavidad de un campo vectorial, es decirnos que cada campo vectorial nos está definiendo un mapa lineal y que por la forma que tiene este mapa, cumplirá la regla de Leibniz, por lo tanto, podemos verlo como una derivación.

**Definición 7** (Campo Vectorial). Un *campo vectorial* en una variedad suave es un mapa lineal que cumple la regla del producto

Esto tiene una forma similar a una derivación en un punto, sin embargo, hay una diferencia fundamental, y es que no la estamos evaluado en un punto, como sería el caso de un vector tangente, es por esto que, a este tipo de mapas, que son lineales y cumplen la regla del producto les llamamos simplemente *derivaciones*.

## Pushforward de un Campo Vectorial

El diferencial de un mapa suave en un punto nos da la mejor aproximación lineal en el espacio tangente para una vecindad de dicho punto, es posible extender esta idea a los campos vectoriales.

**Definición 8** (Pushforward). Sean y variedades suaves, un mapa suave, un punto en y un diferencial de en el punto . Si es un vector tangente en , llamaremos a el *pushforward de en* .

En general no podemos extender el pushforward a un campo vectorial, con esto queremos decir que si es un campo vectorial en para el cual se tenga que , en general, no es un campo vectorial en . Esto dado que si es un campo vectorial en y no es inyectiva, entonces existirán puntos de para los cuales podemos obtener diferentes campos vectoriales al aplicar el pushforward en diferentes puntos, y, si no es sobreyectiva entonces no es posible asignar un vector del espacio tangente a ningún punto en que pertenezca a .

Para que el resultado de nuestro pushforward sea siempre un campo vectorial es necesario imponer una condición, que sea un difeomorfismo, para demostrar esto primero daremos la siguiente definición:

**Definición 9** (Campos Vectoriales Relacionados). Sea un mapa suave entre variedades y un campo vectorial en . Diremos que el campo vectorial está *relacionado por el mapa*  a un campo vectorial en si para cada punto de se tiene que

**Lema 9**. Supongamos que es un mapa suave entre variedades, es un campo vectorial suave en y es un campo vectorial suave en . Entonces e están relacionados por si y solo si para cada función suave real valuada que esté definida en una vecindad de ; se tiene que:

*Proof.* Sea un punto de y sea una función suave, donde es una vecindad de . Por un lado:

Por el otro lado tendremos que:

De estas dos igualdades tendremos que si y solo si para cada , lo cual ocurre por definición si y solo si e son campos relacionados por el mapa . ◻

**Teorema 10**. Sean y variedades suaves y sea un difeomorfismo. Para cada campo vectorial existe un único campo vectorial suave para el cual e están relacionados por .

*Proof.* Por el resultado anterior sabemos que dos campos vectoriales e están relacionados si para cada punto en . Sabiendo esto podemos definir el campo que queremos para cada como:

Dado que es un difeomorfismo es único lo cual garantiza la unicidad de este campo, además, por estar definido como la composición de mapas suaves es un campo suave. ◻

**Definición 10** (Pushforward De Un Campo). Diremos que es el *pushforward del campo por*  si es un difeomorfismo, en cuyo caso es el campo suave definido de manera única visto en el teorema anterior.

Podemos interpretar al pushforward de un campo vectorial no solo como una generalización de la derivada total, del mismo modo que como se vio en la sección [[Subsección: Espacios Tangentes en Coordenadas]](#X68521e59539ae118ecaf4274bd5f84065ad7df3), también podemos imaginarlo como una función que está empujando (*pushing*) a los vectores de una sección del fibrado tangente de una variedad a una sección del fibrado de otra variedad ; bajo esta interpretación y como se estudiará más adelante, es posible moverlos hacía adelante (*pushing*) y hacía atrás (*pulling*), esto con ayuda del , objeto que estudiaremos en la siguiente sección.