# Geometría Riemanniana

Nuestro objetivo principal en este trabajo es describir las curvas geodésicas en el disco de Poincaré. Hasta ahora hemos desarrollado conceptos básicos de la teoría de variedades suaves y hemos trasladado conceptos conocidos del cálculo usual a las variedades, esto se ha hecho con un fin, y es que, el disco de Poincaré se define como un tipo muy particular de variedad suave, y las herramientas que hemos ido construyendo son las que nos ayudaran a definir y encontrar las geodésicas.

En este capítulo dotaremos a cada espacio tangente a una variedad suave con un producto interno. Los espacios con producto interno, también llamados espacios pre-Hilbert, son bastante estudiados en diferentes áreas de las matemáticas ya que nos permiten dar definiciones para conceptos geométricos como la longitud de vectores, el ángulo entre dos vectores y la ortogonalidad.

Recordaremos brevemente la definición de producto interno:

**Definición 1.1** (Producto interno). Sea el campo de los números reales o el campo de los números complejos. Sea un espacio vectorial sobre un campo . Un *producto interno* es una forma bilineal , la cual cumple las siguientes propiedades:

Para cualesquiera vectores :

* .
* , con la igualdad únicamente cumpliéndose si .

## Variedades Riemannianas

La manera en que dotaremos a los espacios tangente a una variedad con un producto interno será a través de la *métrica de Riemann* o *métrica Riemanniana*.

**Definición 1.2** (Métrica de Riemann). Sea una variedad suave. Una *métrica Riemanniana* en es un campo suave tensorial covariante simétrico, el cual es definido positivo.

El par , donde es una variedad suave y una métrica Riemanniana es llamado una *variedad Riemanniana*.

Esta definición merece una explicación y una pequeña aclaración. Si bien cada producto interno induce una norma y a su vez cada norma induce una función distancia, a la cual se le suele llamar métrica, la métrica que acabamos de definir y la métrica que se estudia cuando se habla de espacios métricos no son lo mismo, aunque sí existe una relación. Cuando hablemos de métricas será en el sentido que acabamos de definir y no en el de espacios métricos.

También es importante mencionar que existen más métricas además de la de Riemann, sin embargo, en este trabajo únicamente hablaremos acerca de la métrica de Riemann por lo cual no debería haber ninguna confusión si nos referimos a la métrica Riemanniana únicamente como la métrica.

Ahora, sobre la definición. Estamos diciendo que la métrica Riemanniana es un campo tensorial covariante , esto quiere decir que en cada punto de una variedad suave, es una función:

donde es el campo sobre el cual está definido el espacio tangente , consideraremos a únicamente como el campo de los números reales.

Además, decimos que es un campo suave, el teorema [[Teorema: Criterios de suavidad para campos tensoriales]](#X389d14a76ce909b3a478dc70c67da260e6a91e9) nos da algunos criterios de suavidad equivalente para un campo tensorial, esencialmente tendremos que si es una carta suave en la cual contiene al punto y es la base para asociada a las coordenadas locales de la carta, entonces, las funciones:

son suaves, es importante no perder de vista que estas funciones dependen de las coordenadas locales definidas en la carta.

El que el campo tensorial sea simétrico nos está diciendo que, en cada espacio tangente, para cualesquiera vectores se cumple que:

Finalmente, el que sea definido positivo significa que para cada se tiene que , con la igualdad cumpliéndose si y solo si .

Por tanto, no es difícil ver que la métrica de Riemann nos define un producto interno en cada espacio vectorial, por lo cual se suele denotar a la métrica en un punto como:

En el anexo [[Sección: Campos Tensoriales]](#Sección: Campos Tensoriales) se menciona que un campo tensorial puede ser escrito como una combinación lineal, esto se haría de la siguiente manera para la métrica Riemanniana.

Sean una variedad suave, una carta suave y algún punto en . Si es la base para asociada a las coordenadas locales de y es la base dual, entonces el campo en se puede expresar como:

donde son las funciones definidas anteriormente.

Si decidimos omitir mencionar al punto , podemos decir simplemente que, en cada carta suave , la métrica se expresa como:

donde son las entradas de la matriz simétrica, definida positiva, formada por las funciones suaves ya mencionadas. Llamaremos a esta matriz la *matriz asociada a la métrica* y la denotaremos por .

Es posible expresar a la métrica sin utilizar el producto tensorial, aprovechando el hecho de que es simétrico y que son covectores, podemos utilizar el lema [[Lema: Descomposición de Tensores]](#Lema: Descomposición de Tensores).

**Lema 1.1**. Sean una variedad suave y una métrica Riemanniana en , podemos escribir a la métrica como:

*Proof.* Ya hemos visto cómo es que, en cada carta suave podemos escribir a la métrica como la combinación lineal:

Es evidente que podemos descomponer esta combinación lineal en dos sumas:

Luego, por la simetría del tensor podemos intercambiar los índices, sin pérdida de generalidad, esto se hará en la segunda suma:

Si intercambiamos los índices y en la segunda suma y aplicamos el lema [[Lema: Descomposición de Tensores]](#Lema: Descomposición de Tensores) obtendremos las siguientes igualdades:

 ◻

**Ejemplo 1.1** (La métrica euclidiana). Dado que la métrica de Riemann define un producto interno en cada espacio tangente y que es isomorfo al espacio tangente para cada punto , nos gustaría ser capaces de dar una métrica Riemanniana que coincida con el producto punto usual.

En , con las coordenadas estándar definiremos una métrica, a la cual llamaremos la *métrica euclidiana*, como:

Al aplicarle esta métrica a dos vectores cualesquiera y en obtendremos:

**Ejemplo 1.2**. Sean y variedades Riemannianas, con y las matrices asociadas a las respectivas métricas. Podemos definir una métrica en como la suma directa de las otras dos métricas, esto quiere decir que:

La definiremos será entonces simplemente , la cual está dada por:

para cualesquiera y en . La matriz asociada a la métrica es:

Una pregunta muy natural que podríamos haceros es, ¿A qué variedades es posible dotar de una métrica Riemanniana?, sorprendentemente la respuesta a esta pregunta es que, cualquier variedad suave puede ser equipada con una métrica, como veremos con el siguiente teorema.

**Teorema 1.2** (Existencia de una métrica Riemanniana). Toda variedad suave puede ser equipada con una métrica Riemanniana.

*Proof.* Sean una variedad suave y un atlas suave en . Tomemos alguna carta arbitraria en el atlas.

Sea un punto en , sabemos que cualesquiera vectores tangentes pueden ser expresados como una combinación lineal única utilizando la base asociada a las coordenadas locales de la carta, esto de la siguiente manera,

donde y son constantes. Utilizando estas representaciones definiremos una métrica en de la siguiente manera:

Es evidente que es una forma bilineal simétrica, y dado que las componentes en cada punto son constantes, el campo será suave. De esta manera obtenemos una colección de métricas definidas de manera local en cada carta del atlas. Para extender estas métricas a una única métrica global utilizaremos particiones de la unidad.

Sea una partición suave de la unidad subordinada al atlas . Definimos la métrica en como:

Dado que las particiones de la unidad son localmente finitas, convergerá en el subconjunto que contiene a y por definición será nulo fuera de este conjunto. Dado que es la suma del producto de funciones suaves con tensores covariantes simétricos los cuales son suaves en cada carta suave, define una métrica Riemanniana en . ◻

Existen diferentes maneras de dotar de una métrica a una variedad, la primer de ellas puede observarse en el ejemplo [1.3](#X0a27631ee1a5b9e910d12e67080f68ce08a79bd), daremos algunas definiciones que nos darán más alternativas para dotar a una variedad de una métrica.

**Definición 1.3** (Inmersión y Encaje). Sean y variedades suaves y sea un mapa suave. Diremos que

* es una *inmersión* si para cada punto el diferencial es un mapa inyectivo.
* es un *encaje (suave)* si es una inmersión inyectiva en cada punto.

El estudio de las inmersiones y los encajes y no profundizaremos en él, simplemente enunciaremos algunos teoremas que nos serán de utilidad.

Hasta ahora hemos trabajado definiendo a las variedades suave únicamente de manera intrínseca, como un espacio topológico que cumple las propiedades de la definición [[Definición: Variedad Topologica]](#Definición: Variedad Topologica) al cual dotamos de una estructura suave, esto nos ha permitido trabajar sin la necesidad de referirnos a algún otro espacio que contenga a la variedad. Los encajes nos dan una alternativa, estos nos permiten definir a las variedades de manera extrínseca, vistas como subconjuntos de alguna variedad más grande, usualmente . Este segundo enfoque es, de hecho, el que utilizan libros de geometría diferencial clásicos.

El siguiente teorema, demostrado por Hassler Whitney en su paper “*Differentiable Manifolds*” (), nos da condiciones suficientes bajo las cuales se garantiza que los dos enfoques mencionados anteriormente son equivalentes.

**Teorema 1.3** (Teorema de Encaje de Whitney). Sea una variedad suave dimensional. Existe un encaje suave

Una aclaración sobre este teorema es que, es la dimensión mínima para la cual existe un encaje para cualquier variedad de dimensión . Existen ejemplos sencillos de que es posible encontrar encajes de una variedad suave dimensional a , con , por ejemplo, la esfera es una variedad suave para la cual existe un encaje en .

**Definición 1.4** (Isometría). Sean y variedades Riemannianas. Si es un difeomorfismo, diremos que y son *variedades isométricas* si:

para todo punto y cualesquiera vectores , llamaremos al difeomorfismo una isometría. Además, diremos que las variedades son *localmente isométricas* si para cada exista una vecindad que lo contiene para la cual es una isometría.

**Definición 1.5** (Métrica Inducida). Sean una variedad suave, una variedad Riemanniana y una inmersión. Definimos una métrica en como:

para cada punto y cualesquiera vectores . Llamaremos a esta métrica la *métrica inducida*, y si, además es una isometría, diremos que es una *inmersión isométrica*.

Los *teoremas de encaje de Nash* garantizan que, bajo ciertas condiciones, siempre existen encajes (y por lo tanto inmersiones) isométricas de las variedades a , el teorema general nos dice lo siguiente.

**Teorema 1.4** (Teorema de encaje de Nash). Si es una variedad Riemanniana dimensional, entonces existe un número , con , y un encaje isométrico .

A continuación, daremos algunos ejemplos donde dotaremos a distintas variedades suaves con métrica.

**Ejemplo 1.3** (Gráfica de funciones suaves).  Sea un subconjunto abierto y sea una función suave, definimos a la gráfica de la función como el conjunto:

Si a esto conjunto se le dota con la topología inducia por , entonces será una subvariedad topológica de , además, puede ser dotado de una estructura suave ya que puede ser cubierto por una única carta, a saber, , donde es el mapa proyección dado por:

Si es la base estándar para , entonces una base para el espacio tangente será el conjunto formado por las derivadas parciales:

Al considerar la inmersión de en dada por el mapa inclusión, podemos definir una métrica en , la cuál será inducida por la métrica estándar en y los coeficientes de la cuál son:

esta última igualdad se puede seguir a partir del ejemplo .

**Ejemplo 1.4** (Superficies de Revolución). Sen un intervalo y una curva suave tal y como se definió en [[Definición: Curva en Variedades]](#Definición: Curva en Variedades). Podemos suponer que la curva está parametrizada como:

donde y son funciones suaves reales. Si es estrictamente positiva definimos la función dada por:

Si dotamos a la imagen de con la topología de subespacio de este conjunto será una variedad topológica, además, podemos dar una carta que cubra a todo el espacio, a saber, , por lo cual la imagen es una variedad suave dimensional. A esta variedad usualmente le llamamos la *superficie de revolución generada por* , denotaremos a la variedad como .

Podemos restringir el dominio de a intervalos de longitud , sin pérdida de generalidad podemos restringa a de tal modo que para cada punto una base para el espacio tangente en ese punto sean las derivadas parciales:

So dotamos a de la métrica inducida por obtendremos que los coeficientes de la misma son:

Los dos ejemplos nos servirán para ilustrar un hecho importante, podemos definir distintas métricas en una misma variedad, las cuales dependen de las cartas con las que decidamos cubrir a la variedad.

**Ejemplo 1.5** (Esfera). Podemos describir a la esfera unitaria como el conjunto:

Despejando a obtendremos dos ecuaciones, cada una de las cuales define a un hemisferio de la esfera. Sin pérdida de generalidad consideraremos el hemisferio superior, viendo a como una función de e de la siguiente manera:

Siguiendo lo visto en el ejemplo [[Ejemplo: Métrica - Gráfica de funciones suaves]](#X89a9d4d11ac9e1e2a2ee1e05fdcf68aa9992bad), calcularemos las derivadas parciales de con respecto a e para obtener bases para los espacios tangentes.

Los coeficientes para la métrica que se obtiene al considerar esta carta son los siguientes:

Por otra parte, podemos considerar a la esfera como la superficie de revolución generada por la curva dada por:

La ecuación para la superficie es:

Siguiendo lo visto en el ejemplo [1.4](#Xdeb9ccd90a11f10c289c367dde0b8eed5ce8216) podemos simplemente calcular los coeficientes y para esta métrica, estos coeficientes serán simplemente:

## Conexiones

Cuando trabajamos en espacios euclidianos, el cálculo usual nos permite estudiar cómo es que una función cambia en la dirección de un vector, dado un punto; esto con ayuda de la derivada direccional. No siempre es posible hacer esto cuando trabajamos con variedades suaves.

Supongamos que es un campo vectorial suave en alguna variedad suave . Si quisiéramos tomar la derivada direccional de en la dirección de algún vector tangente , inmediatamente nos encontraríamos con un problema, y es que, necesitaríamos comparar los valores que toma en una vecindad de , sin embargo, esto no siempre es posible. En general, si es algún punto en una vecindad de , e pertenecen a espacios tangentes diferentes.

Para solucionar este problema daremos una generalización del concepto de derivada direccional para variedades suaves, las *conexiones afines*.

### Conexiones Afines

**Definición 1.6** (Conexión Afín). Sean una variedad suave y el conjunto de campos vectoriales suaves en . Una *conexión afín en*  es un mapa bilineal

el cual cumple las siguientes propiedades: Para cualesquiera campos suaves y en y para cualesquiera funciones suaves y en :

1. es lineal en su primera coordenada con respecto al anillo de funciones suaves, esto quiere decir que:
2. cumple la siguiente regla del producto en su segunda coordenada:

Para abreviar denotaremos la conexión afín por , y llamaremos a este mapa la *derivada covariante de en la dirección de* .

La notación para describir a las conexiones para volverse extremadamente tediosa. Es por este motivo que nos vemos en la necesidad de realizar la siguiente abreviación: Si damos una variedad suave y una carta suave en el atlas, denotaremos a la base para los espacios tangentes asociada a las coordenadas locales de la carta como:

**Lema 1.5**. Sea una variedad suave equipada con una conexión afín. Si e son campos suaves en y expresamos a e en coordenadas como:

entonces, podemos expresar a la derivada covariante como:

*Proof.* Por definición la conexión afín es bilineal, en particular será lineal en su segunda coordenada, por lo cual:

Utilizando la propiedad del producto de la conexión afín obtenemos:

Expresando a en coordenadas y utilizando la linealidad de la conexión con respecto al anillo de funciones en la primera coordenada se obtienen las siguientes igualdades:

Reordenando los términos obtenemos la igualdad deseada.

 ◻

Por definición de la conexión afín sabemos que la derivada covariante es, en sí misma, un campo suave. Expresando a este campo con respecto a algunas coordenadas locales se tiene:

Substituyendo está representación de la derivada covariante en la igualdad obtenida anteriormente obtendremos que la derivada covariante puede ser expresada por la siguiente igualdad:

Las funciones son funciones suaves a las cuales llamamos *coeficientes de la conexión* o *símbolos de Christoffel*. Más adelante veremos cómo es que podemos calcular estos coeficientes y como es que, en algunos casos es posible reducir el número de coeficientes a calcular, utilizando ciertas simetrías.

**Teorema 1.6**. Sea una variedad suave, siempre es posible definir al menos una conexión afín en .

*Proof.* Sean una variedad suave dimensional y una cubierta abierta para . Si consideramos funciones suaves cualesquiera, definidas en alguno de los subconjuntos . Dados dos campos suaves podemos definir una conexión afín en como:

Es posible extender las conexiones a una conexión global utilizando particiones suaves de la unidad. Sea una partición de la unidad subordinada a , definimos la conexión afín global en por:

Para mostrar que es, en efecto una conexión bastará con verificar la regla del producto, ya que la bilinealidad del operar y la linealidad con respecto a las funciones suaves se siguen del hecho que es una conexión y cumple dichas propiedades. Sea , tenemos que:

 ◻

### Conexiones, Campos y Curvas

Ahora que tenemos esta nueva derivada nos gustaría poder utilizarla para estudiar el comportamiento de curvas suaves en variedades.

**Definición 1.7**. Sean una variedad suave, un intervalo y una curva suave en . Diremos que es un *campo vectorial a lo largo de*  si para cada .

Notemos que para cualquier curva suave siempre es posible encontrar un campo vectorial a lo largo de ella, ya que cualquier campo suave nos induce un campo a lo largo de , esto simplemente definiendo:

Si es un campo vectorial a lo largo de una curva , entonces, para cada es posible expresar a en una vecindad de como:

**Lema 1.7**. Sea una variedad suave equipada con una conexión . Existe una única correspondencia que asocia al campo vectorial a lo largo de una curva , otro campo vectorial suave a lo largo de , tal que:

1. ,

donde y son campos vectoriales suaves a lo largo de y es una función suave en .

1. Si es inducido por un campo vectorial , entonces:

A este campo vectorial lo llamamos la *derivada covariante de a lo largo de* .

*Proof.* Supongamos que existe una asignación que cumple todas las propiedades del lema. Sea un campo vectorial suave a lo largo de una curva , como hemos mencionado anteriormente, dado un punto podemos expresar a en una vecindad de como:

luego, por la primera y segunda propiedad de la asignación se tendrá la siguiente cadena de igualdades:

Gracias al lema [1.5](#Lema: Conexión Afín en Coordenadas) sabemos que el valor de la conexión afín depende únicamente de los valores del vector tangente y el campo a lo largo de una curva que satisfaga que y , por lo cual podemos interpretar la tercera propiedad del lema como:

donde es cualquier campo suave en que satisface . Por lo cual, utilizando la tercera propiedad del lema y la primera propiedad de la definición de conexión afín se obtiene las igualdades:

Por lo tanto, podemos expresar al campo de manera local como:

Esto basta para probar la unicidad, dado que si existiera otra asignación que cumpliera las tres propiedades de lema esta debería tener exactamente la misma forma. Más aún, por cómo se ha construido es fácil verificar que es un campo vectorial que cumple las propiedades del lema, con:

 ◻

**Definición 1.8** (Campo Vectorial Paralelo). Sea una variedad suave equipado con una conexión afín . Diremos que un campo vectorial a lo largo de una curva es un *campo paralelo* si:

**Teorema 1.8**. Sea una variedad suave equipado con una conexión afín . Sea una curva suave y sea un vector tangente a en , con . Entonces, existe un único campo vectorial paralelo a lo largo de , para el cual .

*Proof.* Comencemos suponiendo que la imagen de , , está contenido en alguna carta coordenada. Si este fuera el caso, como se mostró en el lema anterior, podemos representar al campo en las coordenadas locales de la carta como:

por lo cual, la igualdad se obtendrá si y solo si:

para cada , con condiciones iniciales .

El teorema de Picard-Lindelöf nos permite garantizar que este sistema de ecuaciones diferenciales tiene solución y que dicha solución es única. Si, ocurre que no está contenido en una carta coordenada entonces debe ocurrir que sea un conjunto compacto, por lo cual podrá ser cubierto por una cantidad de cartas coordenadas, en cada una de las cuales podemos aplicar el argumento anterior para garantizar la existencia y unicidad de las soluciones para los sistemas de ecuaciones. ◻

### Conexión de Levi-Civita

Antes de poder comenzar a estudiar geodésicas debemos estudiar un último concepto, la conexión de Levi-Civita. Esta es una conexión que se definen en variedades Riemannianas y es canónica para dicha variedad, en el sentido de que es una conexión que cumple propiedades únicas. De hecho, esta conexión es tan importante que el teorema que nos garantiza su existencia y su unicidad es conocido como el *Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana*.

**Definición 1.9** (Conexión Compatible). Sea una variedad Riemanniana equipada con una conexión afín . Diremos que la conexión es *compatible con la métrica* si, para cualesquiera campos vectoriales suaves ,

**Lema 1.9**. Sea una variedad Riemanniana. Una conexión en es compatible con la métrica si y solo si para cualesquiera campos vectoriales y a lo largo de una curva suave se tiene:

*Proof.* Comencemos suponiendo que es una conexión compatible con la métrica. Sea un punto en y sean y campos vectoriales a lo largo de una curva suave , supongamos que y que para y algún campo suave en . Entonces,

Ahora supongamos que para cualesquiera campos vectoriales a lo largo de una curva se tiene:

Sean y una curva suave, con y para y algún campo suave en . Entonces, para cualesquiera campos vectoriales suaves en se tiene,

 ◻

**Lema 1.10**. Sea una variedad Riemanniana equipada con una conexión afín. La conexión es compatible con la métrica si y solo si para cualesquiera campos paralelos a lo largo de una curva se tiene

donde es una constante.

*Proof.* Por el lema anterior sabemos que la conexión es compatible con la métrica si y solo si para cualesquiera campos suaves y se tiene

si suponemos que tanto como son campos paralelos a lo largo de una curva suave y que la conexión es compatible con la métrica, entonces

por lo cual debe ser constante.

Ahora supongamos que la conexión es compatible con la métrica. Sean , una curva suave, con , donde , supongamos que es una base ortonormal para . Por el teorema [1.8](#X0c33f617244a5301cfda80dfe18e769355b8909) sabemos que podemos extender los vectores a campos vectoriales a lo largo de .

Dado que es una compatible con la métrica, será una base ortonormal para para cada , por lo tanto, dados campos y a lo largo de podemos expresarlos como:

donde y son funciones suaves, se sigue que:

De aquí se seguirá la siguiente cadena de igualdades:

 ◻

**Definición 1.10** (Conexión Simétrica). Sea una variedad equipada con una conexión afín. Diremos que la conexión es *simétrica* si para cualesquiera campos suaves se tiene:

donde es el corchete de Lie. En el Anexo [[Anexo: Corchetes de Lie]](#Anexo: Corchetes de Lie) se define y se demuestran algunas de las propiedades que cumple este operador.

**Lema 1.11**. Sea una variedad Riemanniana equipada con una conexión simétrica . Entonces,

*Proof.* Por definición del corchete de Lie tendremos que, para cualquier función suave ,

gracias a que las derivadas parciales conmutan podemos concluir que . Además, por la simetría de la conexión se tendrá que:

se concluye que , además, la última igualdad nos está diciendo que los subíndices y conmutan cuando la conexión es simétrica. Esto es importante ya que nos garantiza que, si la conexión es simétrica, entonces a lo más símbolos de Christoffel son únicos. ◻

**Definición 1.11** (Conexión de Levi-Civita). Sea una variedad Riemanniana. Una conexión afín en será llamada *conexión de Levi-Civita* o *conexión Riemanniana* si:

* es compatible con la métrica.
* es una conexión afín simétrica.

**Teorema 1.12** (Teorema fundamental de la geometría Riemanniana). Dada una variedad Riemanniana existe una única conexión afín simétrica y compatible con la métrica.

*Proof.* Supongamos que es una variedad Riemanniana y que está equipada con una conexión afín , la cual es simétrica y compatible con la métrica.

Sean y campos suaves en . Por la simetría de la conexión tendremos que:

y de la compatibilidad con la métrica se obtienen las siguientes tres igualdades.

Utilizando la igualdad dada por la simetría podemos reescribir a de la siguiente forma:

De aquí podemos sumar y restar los campos , y para obtener una expresión para ,

Despejando obtenemos que, si dicha conexión existe, entonces la conexión estará determinada de forma única por:

La existencia de dicha conexión simplemente comprobando que la conexión , definida de esta manera, es simétrica y es compatible con la métrica. A esta última ecuación le llamamos la *fórmula de Koszul*. ◻

Gracias a la conexión de Levi-Civita podemos dar una representación en coordenadas de los símbolos de Christoffel. Hemos definido a los símbolos de Christoffel a través de la ecuación

Utilizando la formula de Koszul en la ecuación anterior tendremos que:

esto dado que los corchetes de Lie se anulan. Podemos simplificar está expresión recordando que, por definición , estos coeficientes forman una matriz, , la cual es definida positiva, por lo cual su matriz inversa existirá, denotaremos a la inversa y a sus elementos por . Al simplificar la expresión reemplazar por la representación en coordenadas de la conexión se obtiene:

como los símbolos de Christoffel son funciones escalares entonces, por la linealidad de la métrica, estos pueden salir de la evaluación, quedando:

Es evidente que , esto por definición de la matriz inversa, por lo cual podemos concluir que:

## Geodésicas

En este punto tenemos las herramientas para poder hablar de propiedades geométricas en las variedades, en particular discutiremos a las curvas geodésicas. Si bien las geodésicas pueden ser definidas sobre variedades suaves en general, ya que dependen únicamente de la conexión afín con la cual dotemos a la variedad, nosotros consideraremos variedades Riemannianas, y por lo tanto, consideraremos su conexión canónica, la conexión de Levi-Civita.

Entender lo que son y como calcular las curvas geodésicas es de gran útilidad en muchos problemas tanto de las matemáticas como la física y la ingeniería, ya que, su característica más importante es que, al menos de manera local, estas curvas minimizan distancias; en este sentido es que las geodésicas generalizan el concepto de línea recta a las variedades suaves.

Es evidente que si queremos ser capaces de hablar un curva que minimice distancias, primero debemos definir como es que mediremos distancias. Para hacer esto aprovecharemos el hecho de que la métrica define un producto interno en el espacio tangente a cada punto de una variedad, esto nos permite dotar a cada espacio tangente con una norma.

**Definición 1.12** (Longitud de un vector tangente). Sean una variedad Riemannian y un punto arbitrario. Sea , definiremos la *longitud de v* como:

Inmediatamente podemos notar que la longitud de los vectores tangentes esta bien definida dado que la métrica es definida positiva; además, cuando consideramos la métrica euclidiana, está definición usual de longitud de un vector. De modo similar, tomando inspiración de como medimos la longitud de una curva en podemos definir la longitud de una curva suave en una variedad Riemanniana.

**Definición 1.13** (Longitud de una curva). Sea una curva suave en una variedad Riemanniana. Definimos la *longitud de*  en un subintervalo como:

**Definición 1.14** (Reparametrización de una curva). Sea una curva suave, diremos que la curva es una *reparametrización de*  si es de la forma , donde es un intervalo y es un difeomorfismo.

**Definición 1.15** (Curva regular y curva admisible). Sea una variedad suave y una curva suave, diremos que:

* es una *curva regular* si para cada .
* es una curva regular por partes si existe una partición de tal que es una curva regular, para .
* es una *curva admisible* si para cualquier partición de y cada subintervalo de la partición, la restricción de a dicho subintervalo es una curva regular

**Lema 1.13** (Propiedades de la longitud de una curva). Supongamos que es una variedad Riemanniana y una curva admisible en . La longitud de cumple las siguientes propiedades:

1. Si , entonces:
2. Si es una reparametrización de , entonces:
3. Si y son variedades Riemannianas y es una isometría local, entonces:

*Proof.*

1. Esta primera propiedad es una consecuencia de las propiedades elementales de la integral.
2. Esta segunda propiedad es una consecuencia de la regla de la cadena y del teorema fundamental del cálculo, tendremos:
3. Aplicando directamente la definición de isometría tendremos que, si y son variedades localmente isométricas, entonces, para cada y cada

* se sigue que:

 ◻

**Definición 1.16** (Curvas por longitud de arco). Sea una curva admisible. Definiremos la *función de longitud de arco* de la curva como la función dada por:

Del teorema fundamental del cálculo se puede deducir que . Como se vio en la subsección [[Subsección: Curvas En Variedades]](#Subsección: Curvas En Variedades), podemos interpreta a como la velocidad de la curva en cada punto, siguiendo con esta idea podemos llamarle al escalar dado por la *rapidez* de en .

Diremos que la curva tiene *rapidez unitaria* si para cada . Es evidente que si la curva tiene rapidez unitaria la función de longitud de arco quedaría como:

Si es una curva con rapidez unitaria en un intervalo de la forma , entonces, la función de longitud de arco tendrá una forma aún más simple,

decimos que una curva con rapidez unitaria en un intervalo de la forma es una *curva parametrizada por longitud de arco*.

**Lema 1.14**. Sea una variedad Riemanniana. Cada cura regular en tiene una reparametrización con rapidez unitaria.

*Proof.* Sea una curva regular. Eligiendo algún punto arbitrario definimos la función como:

tendremos que es una función estrictamente creciente, por el teorema de la función inversa podemos garantizar que es un difeomorfismo local de a un intervalo . Definiremos la curva , esta será una reparametrización estrictamente creciente de , además, tiene rapidez unitaria, esto se sigue, nuevamente, del teorema de la función inversa, y del hecho que

 ◻

**Lema 1.15**. Sea una variedad Riemannian. Cada curva admisible en tiene una única reparametrización por longitud de arco con rapidez unitaria.

*Proof.* Sea una curva admisible. Procederemos por inducción sobre el número de segmentos de las particiones admisibles. Si tiene un único segmente, entonces por definición será una curva regular; por el lema anterior, existe una reparametrización tal que tiene rapidez unitaria y, tomando como el intervalo la curva estará parametrizada por longitud de arco.

Supongamos ahora que si el intervalo tiene una partición con segmentos admisibles, también existe una reparametrización por longitud de arco en con velocidad unitaria.

Supongamos que tiene una partición admisible con segmentos. Por la hipótesis de inducción existirán homeomorfismos y tales que y son reparametrización por longitud de arco con velocidad unitaria para y respectivamente, sabiendo esto podemos definir la función como:

es evidente por como se ha definido la función que esta es una reparametrización por longitud de arco de la cual tiene velocidad unitaria.

Para probar la unicidad supongamos que y son reparametrizaciones por longitud de arco para la curva y que ambas tienen velocidad unitaria. Dado que tanto como tiene la misma longitud, y deberán estar definidas en el mismo dominio , por lo cual ambas funciones serán homeomorfismos por partes de a . Definamos la función , es un homeomorfismo que satisface . Por hipótesis y son curvas admisibles, por lo cual serán regulares excepto quizá en un conjunto de medida cero, por lo cual, utilizando la regla de la cadena se sigue que para cada :

Al ser un homeomorfismo será continuo y , por lo cual , así, podemos concluir que . ◻

**Lema 1.16**. Cualesquiera dos puntos en una variedad suave pueden ser conectados por una curva admisible.

*Proof.* Es evidente que las variedades (topológicas) son tanto conexas como conexas por caminos, esto dado que ambas propiedades se preservan bajo homeomorfismos y, como se muestra en el anexo [[Anexo: Topologia De Variedades]](#Anexo: Topologia De Variedades) las bolas coordenadas forman una base para la topología de la variedad.

Sean y sea una curva que conecte a y . Por la compacidad de se tendrá que existe una partición de para la cual la imagen de esté contenida en una única bola coordenada para cada .

Podemos remplazar la curva por la preimagen de una recta en que coincida con la curva en la frontera de la bola coordenada, considerado la unión de todas estas rectas obtendremos una curva admisible que conectará a los puntos y . ◻

**Definición 1.17** (Distancia Riemanniana). Sea una variedad Riemanniana. Dados dos puntos la *distancia Riemanniana* se define como el escalar:

donde es una curva admisible en . A esta curva se le conoce como una *curva minimizante*.

**Definición 1.18** (Geodésica). Sea una variedad Riemanniana. Decimos que una curva es una *geodésica* si, para cada se tiene que:

Las geodésicas como mencionábamos son curvas que, al menos de manera local, minimizan distancias. Enunciaremos dos teoremas que caracterizan esta propiedad, sin embargo, no las demostraremos. (El margen de está tesis es demasiado pequeño para contener la demostración).

**Teorema 1.17**. Sea una variedad Riemanniana. Toda curva minimizante en es una geodésica cuando se le da una parametrización con rapidez unitaria.

**Teorema 1.18**. Sea una variedad Riemannian, algún punto arbitrario y una bola centrada en . Sea una geodésica (o la restricción de una geodésica), con , además denotaremos a por .

Si es cualquier curva admisible que una a los puntos y , entonces:

y, si se da el caso que , entonces se tendrá que .

Estos dos resultados nos están diciendo que la distancia más corta entre dos puntos es una geodésica, sin embargo, el segundo teorema también nos está diciendo que esta es una propiedad local. Do da un ejemplo de que esta propiedad es local en la esfera, dado un punto en la esfera, las geodésicas dejan de ser minimizantes después de la antípoda de .

Un resultado si mostraremos sobre las geodésicas es su existencia y unicidad, ya que, como veremos, este resultados nos dará una manera explicita para calcular a las geodésicas.

**Teorema 1.19** (Existencia y unicidad de geodésicas). Sea una variedad suave equipada con una conexión afín . Para cada punto , cada vector tangente y cada real existe un intervalo abierto que contiene a y una geodésica que satisface y . Cualesquiera geodésicas que satisfagan las misma condiciones coincidirán en la intersección de sus dominios.

*Proof.* Sea una carta suave en que contenga a . Expresaremos a la geodésica en la coordenadas locales de la carta como . Por definición de geodésica sabemos que para cada se tiene:

en los términos estudiados en la sección anterior, esto quiere decir que una geodésica es una curva cuyo campo de velocidades es siempre paralelo. Utilizando la expresión encontrada en el teorema [1.8](#X0c33f617244a5301cfda80dfe18e769355b8909) podemos representar, en términos de las coordenadas locales de , al campo de velocidades, obteniendo la expresión:

Luego, este campo será nulo para cada si y solo si:

para cada . De este modo tendremos un sistema de ecuaciones diferenciales cuasilineales de segundo orden. Podemos reducir este sistema realizando la sustitución por la variable auxiliar , obteniendo el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

Este sistema de ecuaciones tiene solución y dicha solución es única, esto está garantizado por el Teorema de Picard-Lindelöf. ◻

A la ecuación sin reducir usualmente se le conoce como la *ecuación geodésica*. A continuación resolveremos la ecuación para ver como podemos encontrar las geodésicas de diferentes variedades.