Cálculo de Geodésicas en el Espacio Hiperbólico de Dimensión 2

Ángel Emmanuel Peñaflor Zetina  
Directores:  
Dr. Francisco Gabriel Hernández Zamora  
Dr. Evodio Muñoz Aguirre

### Introducción

Objetivo Encontrar las curvas geodésicas en el espacio hiperbólico de dimensión 2.

* ¿Qué es una curva geodésica?
* ¿Qué es el espacio hiperbólico de dimensión 2?

### Contenido

# Variedades Topológicas y Suaves

### Variedades topológicas

Sea un espacio topológico, diremos que es una **variedad topológica de dimensión**  si:

* es un *espacio de Hausdorff*.
* es *segundo numerable*.
* es *localmente euclidiano de dimensión* , esto quiere decir que, para cada punto existe una vecindad abierta que contiene a y un homeomorfismo .

### Ejemplo de variedades topológicas

### Ejemplo: El espacio proyectivo

.

### Cartas

Una **carta** en es un par ordenado donde es un subconjunto abierto de y es un homeomorfismo de a .

Si y son dos cartas en tales que , llamaremos **mapa de transición** a la composición de funciones:

Y además diremos que las cartas y son **suavemente compatibles** si o si el mapa de transición es un difeomorfismo.

### Atlas y la estructura suave

* Una colección de cartas es un **atlas** , en si dichas cartas forman una cubierta para .
* Diremos que el atlas es **suave** si cualesquiera dos cartas son suavemente compatibles, a las cartas de un atlas suave les llamaremos *cartas suaves*.
* Un atlas suave es llamado **maximal** si no está propiamente contenido en ningún atlas más grande.

### Variedades Suaves

Si es una variedad topológica y es un atlas maximal en , diremos que el par es una **variedad suave**, a dicho atlas maximal le llamaremos la **estructura suave** en .

### Ejemplo de variedades suaves

### Funciones suaves

Sean una variedad suave dimensional, un entero no negativo y una función. Diremos que es **suave** si para cada punto existe una carta suave , cuyo dominio contiene a , tal que la composición de funciones es suave en .

### Ejemplo de funciones y mapas suaves

* El mapa identidad.
* El mapa de inclusión
* Los mapas constantes.
* Las proyecciones.
* La composición de funciones suaves.

# Espacios Tangentes

### Espacios tangentes en

Sea un punto en , definiremos el **espacio tangente a en el punto**  como el conjunto:

Un **vector tangente** a es un elemento de para algún .

tiene estructura de espacio vectorial. Dados , y :

### Ejemplo de espacios tangentes

### Derivada direccional

Si tenemos un punto y un vector podemos parametrizar la recta que pasa por con dirección de la siguiente manera:

Si es una función suave definida en una vecindad de y es un vector en podemos obtener la *derivada direccional* de en en la dirección de como:

### Derivada direccional

La derivada direccional es lineal y cumple la regla del producto. Esto quiere decir que si y son funciones suaves definida en una vecindad de , es una constante y , entonces:

Si es un punto en y es un funcional lineal, diremos que es una **derivación** en si cumple la regla del producto. Denotaremos al conjunto de todas las derivaciones en un punto por .

### Derivaciones

El conjunto de todas las derivaciones en , el cual denotamos por es un espacio vectorial bajo las operaciones:

Los espacios y son isomorfos y el isomorfismo está dado por:

### Espacios tangentes a variedades

Sea una variedad suave y sea un punto. Diremos que un mapa es una **derivación** en si es lineal y además cumple la regla del producto.

Llamaremos al conjunto de todas las derivaciones en un punto de una variedad el **espacio tangente** a la variedad en ese punto, este se denota .

### Base para el espacio tangente

Si es una variedad suave dimensional, un punto en y una carta suave que contiene a , una función suave definida en una vecindad de podemos definir:

Sean una variedad suave, y una carta suave que contenga a . El conjunto

forma una base para el espacio tangente .

# Geometría Riemanniana

### Variedades Riemannianas

Sea una variedad suave. Una **Métrica Riemanniana** en es un campo suave 2-tensorial covariante simétrico, el cual es definido positivo en cada punto.

El par , donde es una variedad suave y es una métrica Riemanniana, es llamado un **Variedad Riemanniana**.

### Variedades Riemannianas

1. Campo suave
2. tensor covariante
3. Simétrico.
4. Definido positivo.

### Variedades Riemannianas

Sean una variedad Riemanniana, y una carta suave que contiene a . La métrica puede expresarse de manera local en como:

donde es la base del espacio dual a , asociada a la base , y son funciones suaves dadas por:

### Variedades Riemannianas

Dada una métrica es posible asociar a esta una matriz , la cual depende de las coordenadas locales de la carta sobre la cual esté definida. Las entradas de son las funciones definidas anteriormente.

La matriz es simétrica y definida positiva.

### Métrica Euclidiana

En con la base estándar definimos la métrica:

$$g = \sum\_{i=1}^{n} \sum\_{j=1}^{n} \delta\_{ij} dx\_{i} dx\_{j} = \sum\_{i=1}^{n} \left(dx\_{i}\right)^{2}
\only<3>{, \quad G = I\_{n \times n}}$$

Aplicando esta métrica a dos vectores tangentes arbitrarios y se obtiene:

### Variedades Riemannianas

Toda variedad suave puede ser equipada con una métrica Riemanniana.

*Proof.*

1. Sea una variedad suave y cualquier carta suave en .
2. Dado un punto en la carta y dos vectores tangentes en como, podemos expresar a estos como una combinación lineal:

 ◻

*Proof.*

1. Definimos en la métrica como:
2. Utilizando una partición de la unidad subordinada a la estructura suave de se construye una métrica global , de tal modo que:

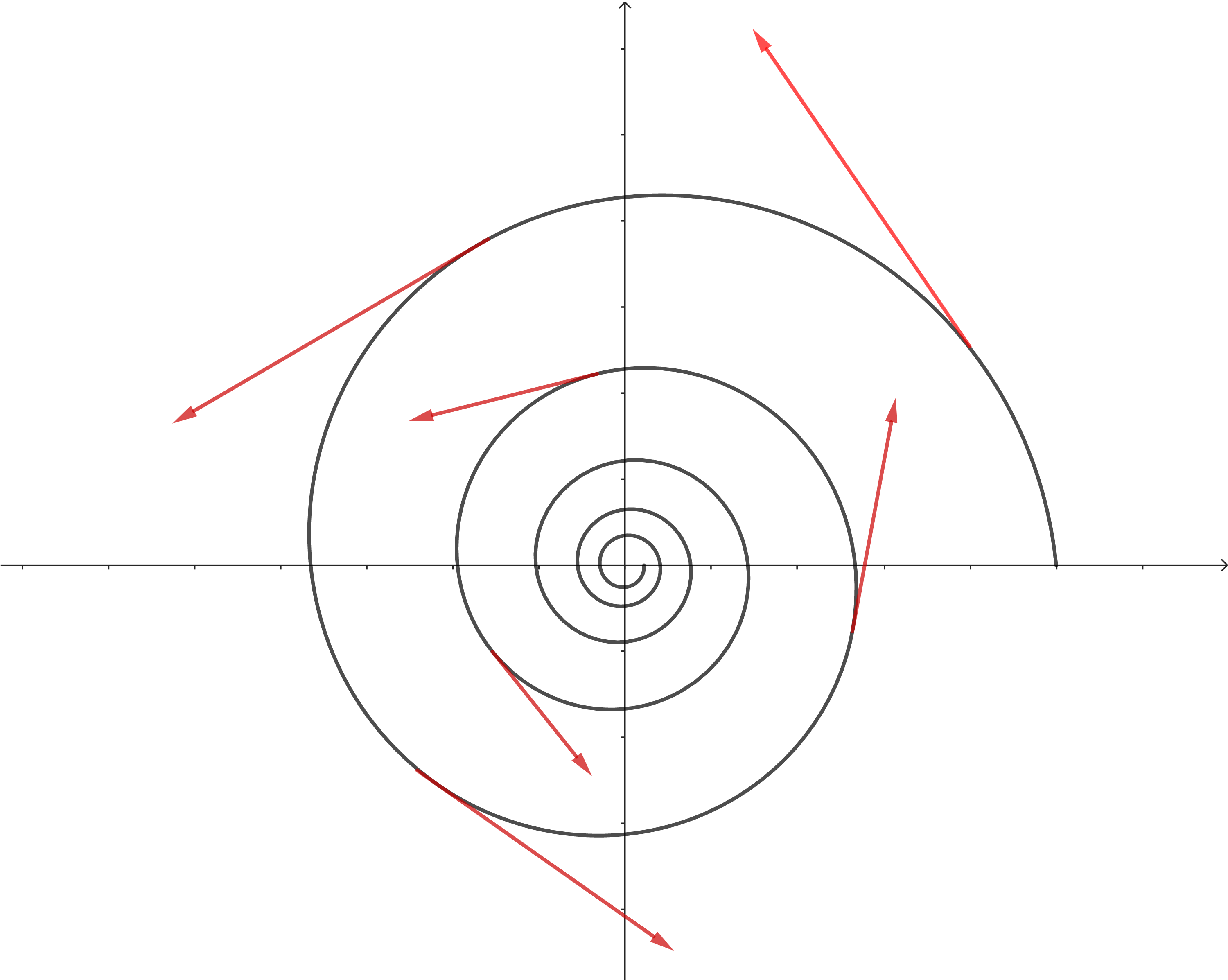
 ◻

### Curvas en Variedades

Sea una variedad suave y sea un mapa continuo, llamamos a una **curva** sobre . Además, si es suave diremos que es una **curva suave**.

Sean una curva suave, y una carta suave que contiene a . Definimos la **velocidad de en**  como el vector tangente:

### Curvas en Variedades



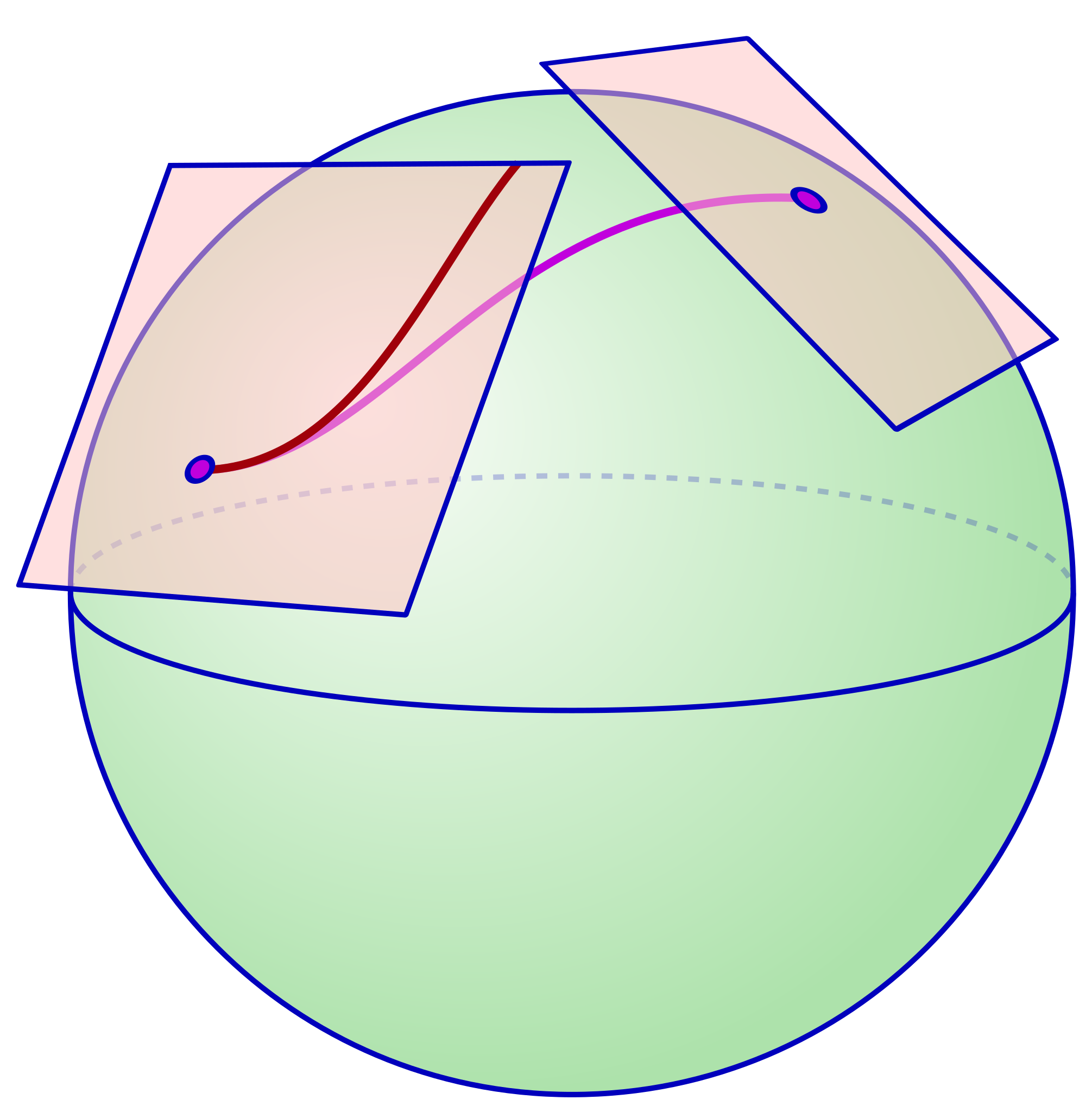
Ejemplo de una curva en el plano con algunos vectores tangentes.

### Conexión Afín

Una **conexión afín** en es un map bilineal:

el cual cumple las siguientes dos propiedades:

* es lineal en su primera coordenada con respecto al anillo de funciones suaves.
* cumple la siguiente regla del producto:



Representación de una conexión afín en una variedad

### Conexión Afín

Usualmente se denota a la conexión afín como y se le llama la derivada covariante de en la dirección de .

De manera local la derivada covariante puede ser expresada como:

En la ecuación anterior son funciones suaves, a las cuales se les llama los *símbolos de Christoffel*. En una variedad Riemanniana los símbolos pueden ser obtenidos por la ecuación:

# Geodésicas

### Geodésicas

Sea una variedad suave equipada con una conexión afín . Diremos que una curva es una **curva geodésicas** si:

### Existencia y unicidad de geodésicas

Sea una variedad suave equipada con una conexión afín. Para cada punto , cada vector tangente y cada real existe un intervalo abierto que contiene a y una geodésica que satisface y . Cualesquiera dos geodésicas que satisfagan las mismas condiciones condiciones coincidirán en la intersección de sus dominios.

### Existencia y unicidad de geodésicas

*Proof.*

1. Como se mencionó anteriormente, dada una carta se puede expresar a la conexión en términos de las coordenadas locales como:
2. Por definición de geodésica, , esto ocurre si y solo si:

 ◻

### Geodésicas en

*Proof.*

1. Esta ecuación puede ser reducida realizando la sustitución , de modo que obtenemos:
2. El teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias garantiza que este sistema tendrá solución y dicha solución será única.

 ◻

### Geodésicas en

Consideremos al subconjunto de :

este subconjunto es un abierto en , por lo cual es una variedad topológica, este subconjunto puede ser cubierto por una única carta, por lo cual está determina una estructura suave. Hacemos de una variedad Riemanniana dotándolo de la métrica cuyos coeficientes son:

a esta variedad Riemanniana se le conoce como **espacio hiperbólico de dimensión 2** o **modelo de Poincaré del semiplano superior**.

### Geodésicas en

Para calcular las geodésicas en el comenzamos calculando los símbolos de Christoffel.

### Geodésicas en

Si es una curva podemos suponer que está parametrizada como , si es una curva geodésica al sustituir estas parametrizaciones y los símbolos de Christoffel en la ecuación geodésica obtendremos el sistema de ecuaciones diferenciales:

Las soluciones de este sistema de ecuaciones son las siguientes:

Si ,  
 Si ,

### Geodésicas en

# Conclusiones

### Conclusiones

1. En este trabajo se desarrollaron herramientas de la teoría de variedades suaves. Se estudiaron las propiedades de las variedades topológicas y las variedades suaves.
2. Se trasladaron conceptos del cálculo en espacios euclidianos a las variedades suaves.
3. Se trabajaron conceptos de geometría Riemanniana.
   * Se definieron conceptos como las métricas Riemannianas, las conexiones y las curvas geodésicas.
   * Se demostró la existencia de las métricas en variedades suaves, así como la existencia y unicidad de las conexiones y las geodésicas.
4. Se definió el espacio hiperbólico de dimensión y se encontraron las curvas geodésicas.

### Referencias