计算机图形学

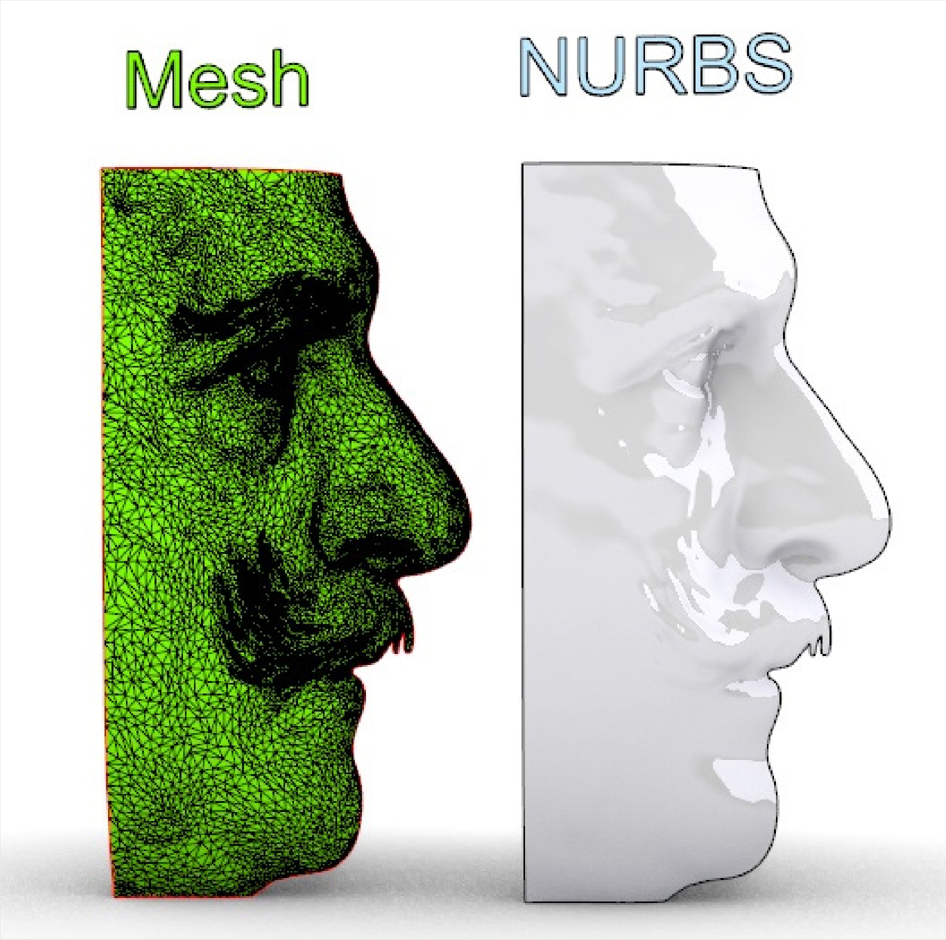
计算机图形学

计算机科学与技术学院

伯彭波

曲线曲面造型

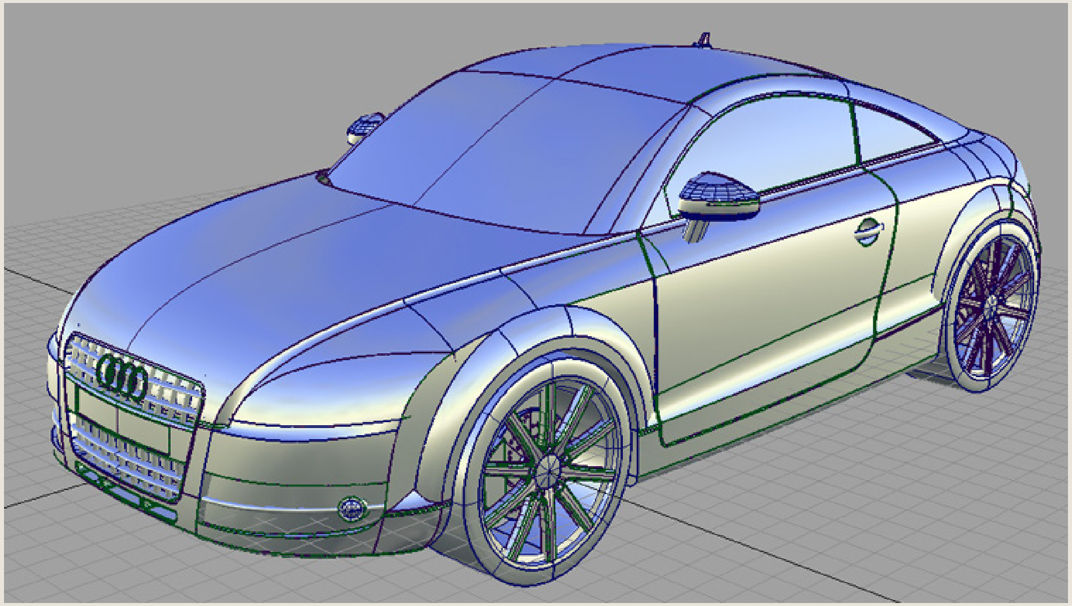
- 网格曲面和光滑曲面



曲线曲面造型

- 曲线曲面的应用：

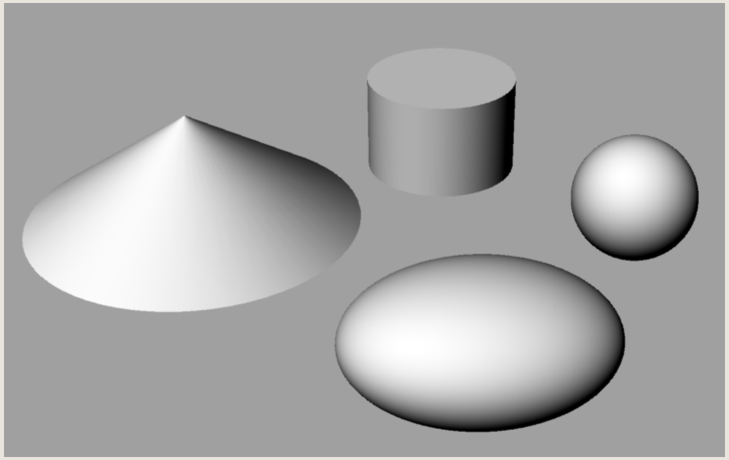
从卫星的轨道、导弹的弹道，到汽车和飞机等的外形，直至日常生活中的图案和花样设计



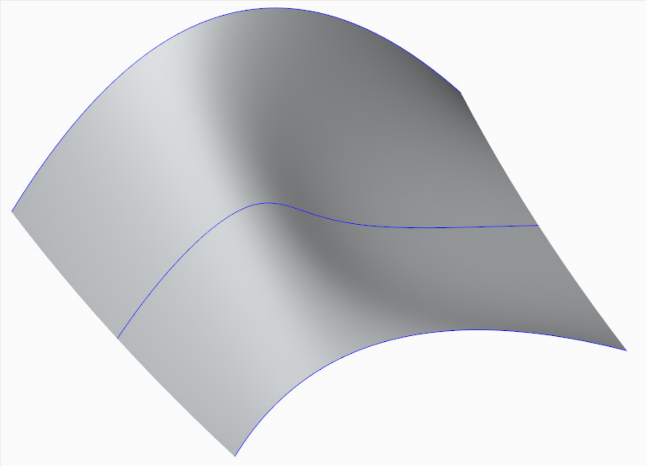
曲线曲面造型

工业产品的形状大致上可分为两类：

- 初等解析曲面：例如平面、圆柱面、圆锥面、球面。大多数机械零件属于这一类。
- 自由曲线曲面：不能由初等解析曲面组成。例如飞机，汽车，船舶的外形。



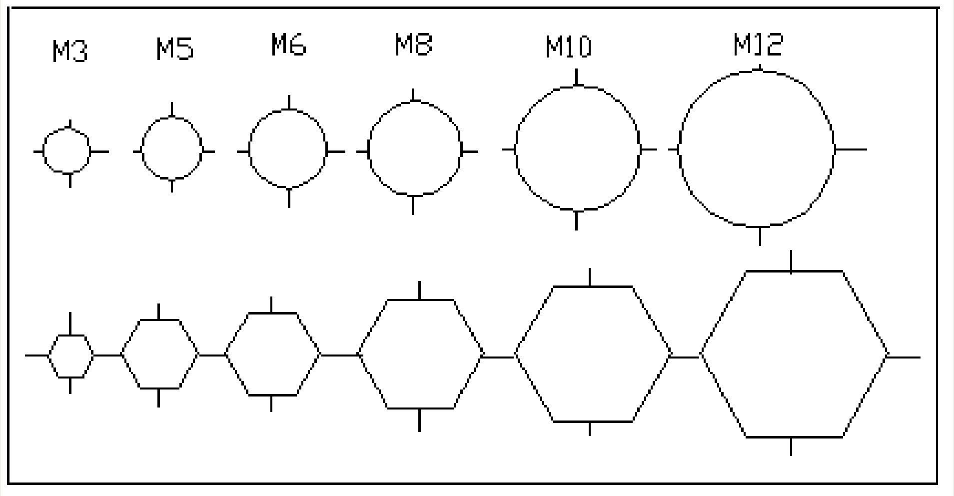
解析曲面

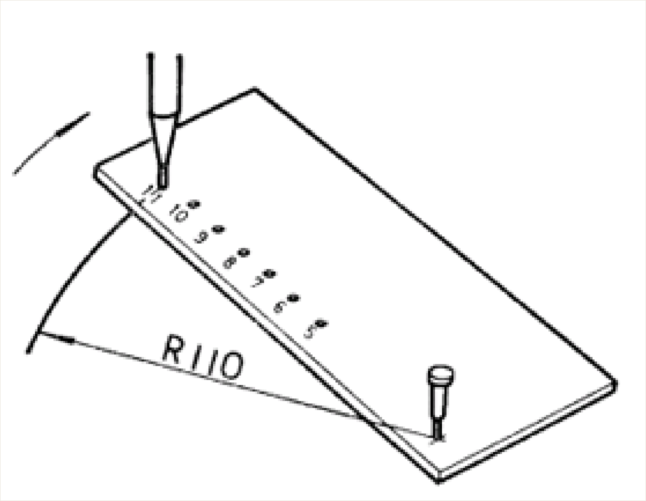


自由曲面造型

早期手工绘图

简单曲线的绘制方法

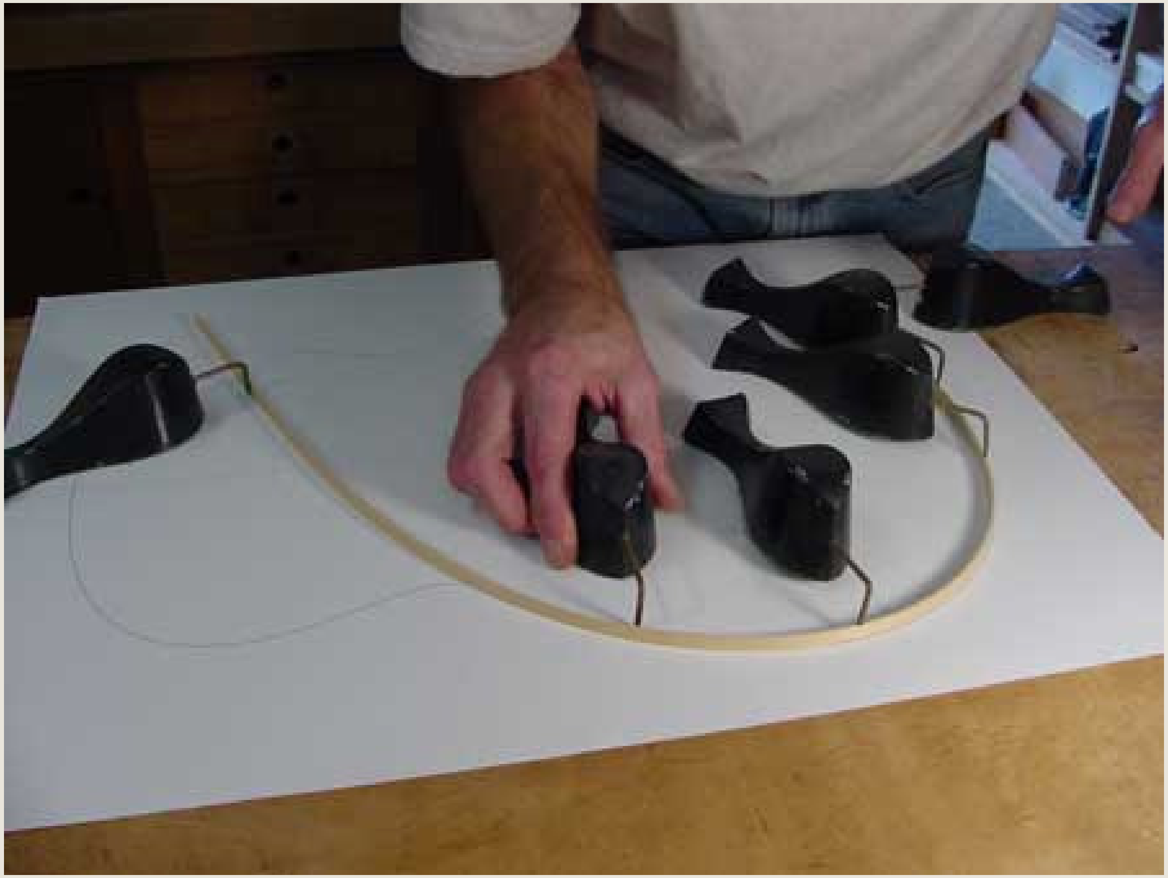




早期手工绘图

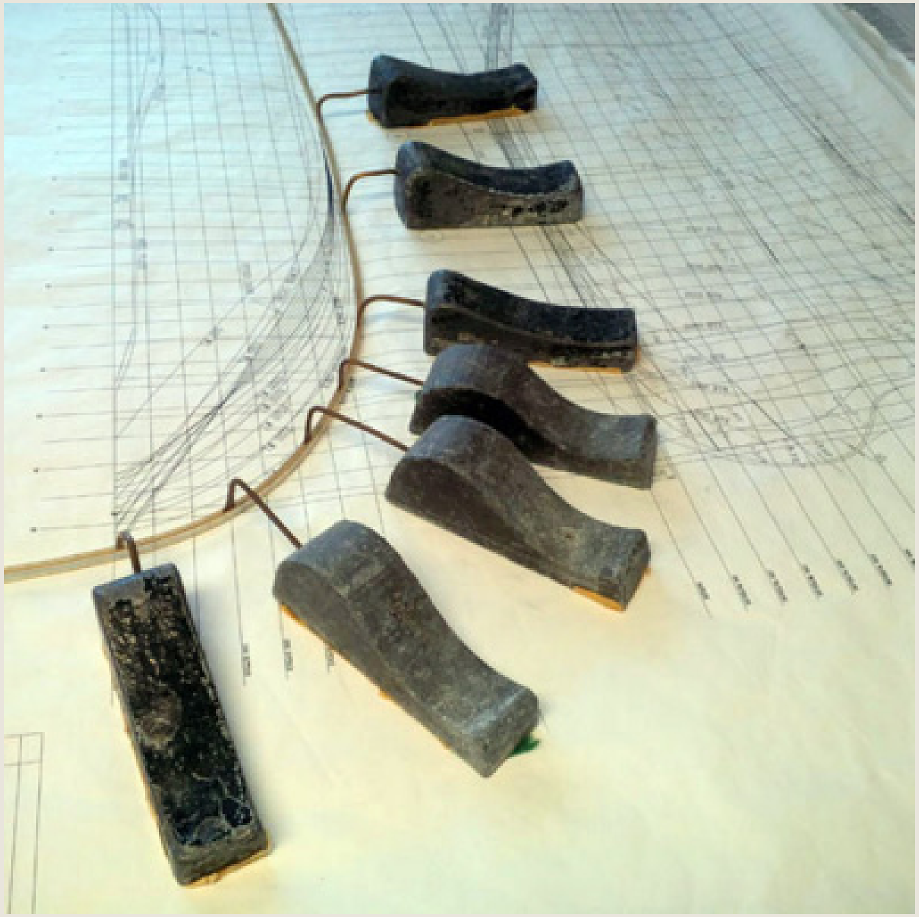
复杂曲线的绘制方法

- 先确定一些满足条件的位于曲线上的坐标点，然后借用曲线板把这些点分段光滑地连接成曲线。



早期手工绘图

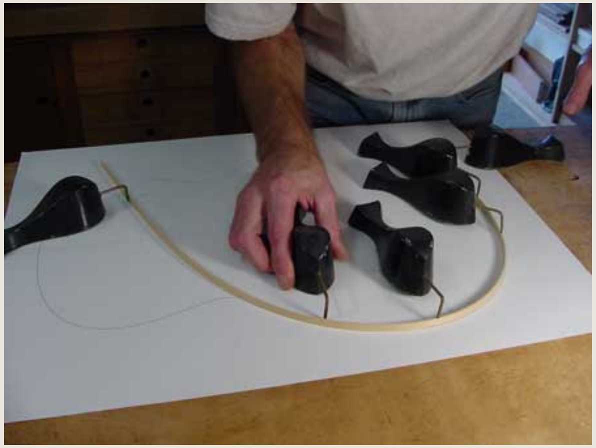
- 得到的曲线的精确程度取决于所选择的数据点的精度和数量:坐标点的精度高，点的数量取得多，则连成的曲线愈接近于理想曲线。



早期手工绘图

存在的问题：

- **不灵活**
- **不易修改**
- **耗费时间**

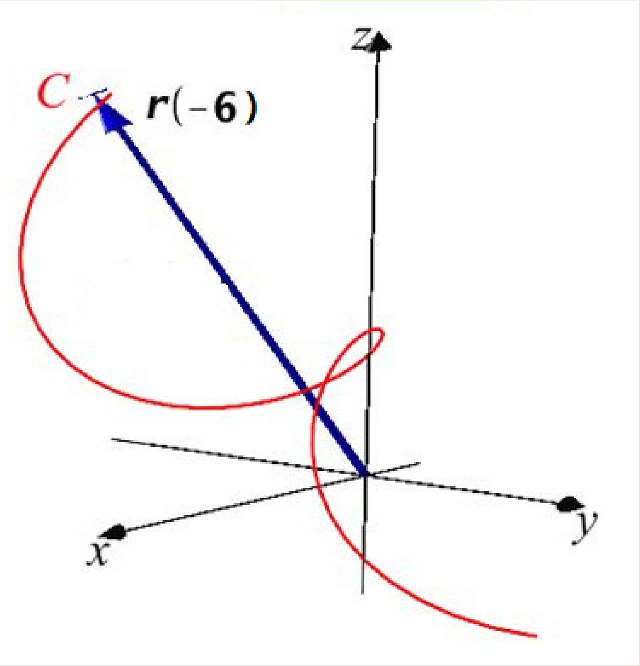


- 用数学方法表示曲线和曲面
- 借用计算机的计算能力进行曲线曲面的设计

利用计算机设计曲线和曲面

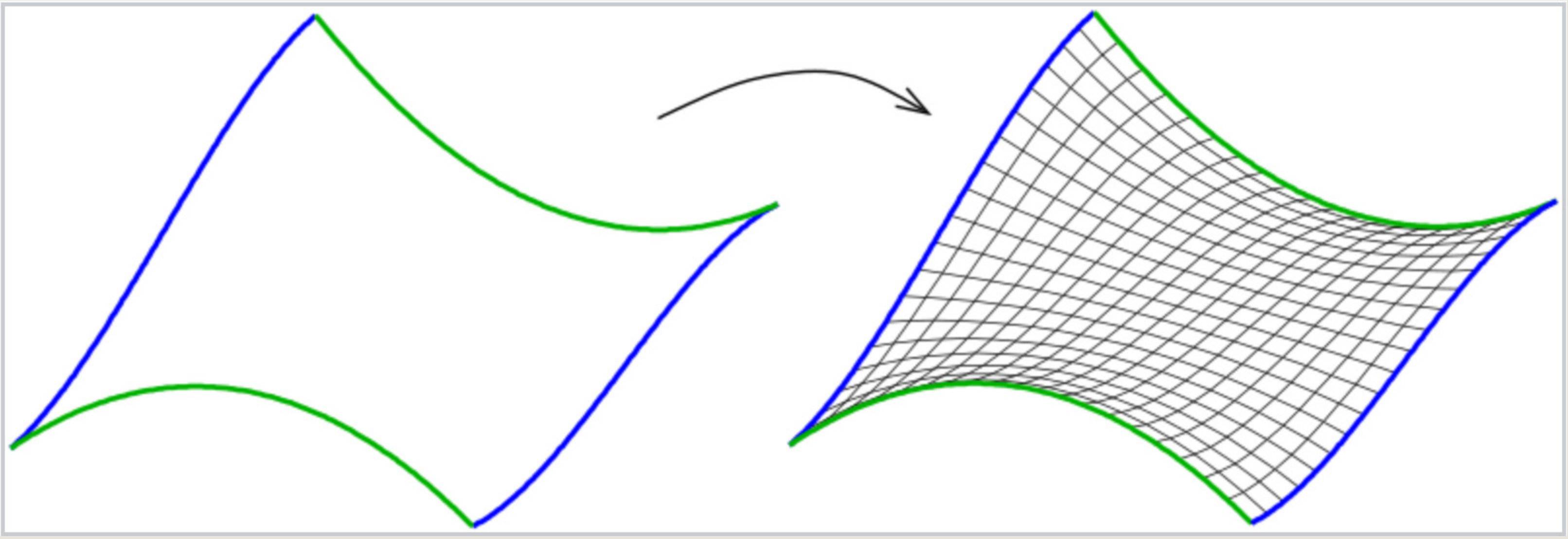
- 1963年，美国波音(Boeing)飞机公司的Ferguson将曲线曲面表示成**参数矢量函数**形式，从此，**参数形式**成为自由曲线曲面数学描述的标准形式。

$$r(t)=\begin{pmatrix} t\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ t \\ 3+t\cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}, t\in[-6,6]$$



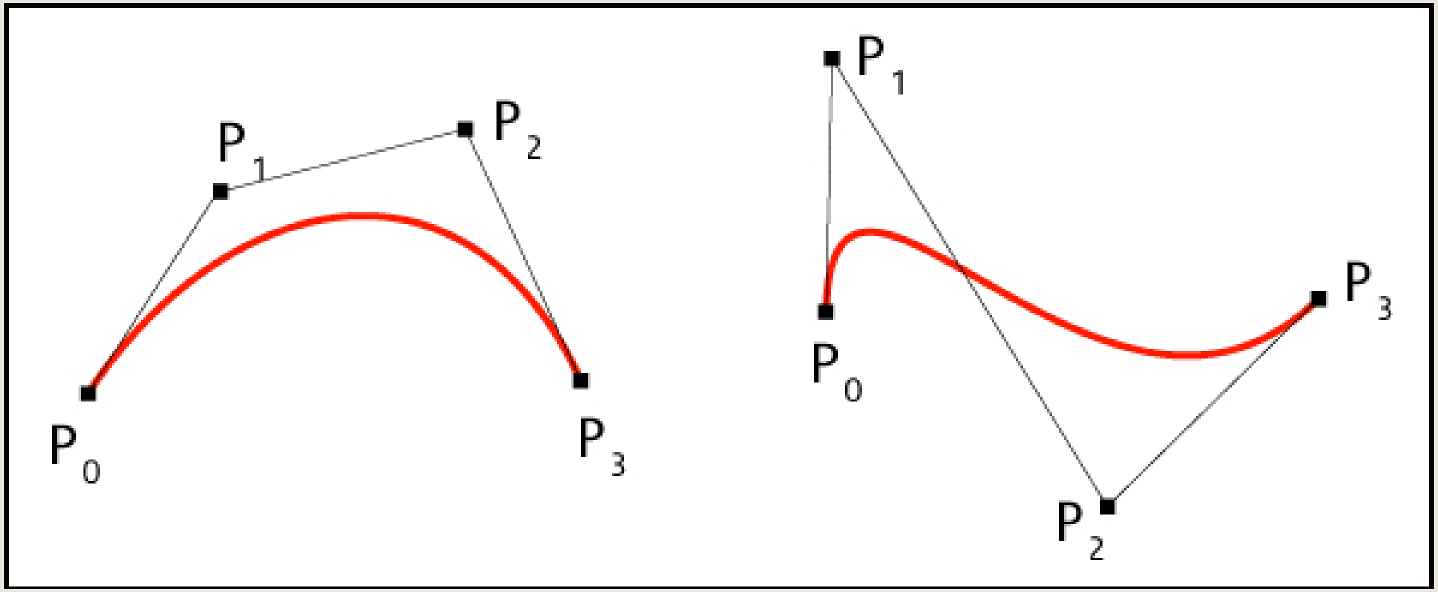
利用计算机设计曲线和曲面

- 1964年 MIT的孔斯（Coons）用**封闭曲线的四条边界**定义一块曲面；



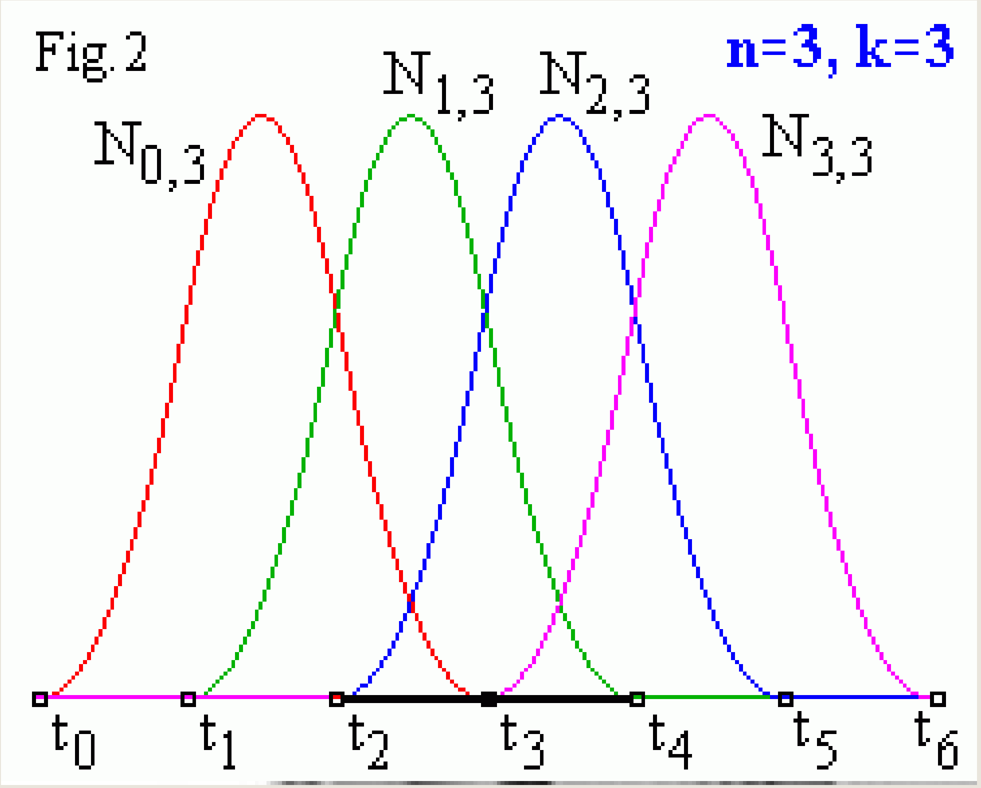
利用计算机设计曲线和曲面

- 1971年 雷诺汽车公司的贝塞尔（Bezier）发表了一种**用控制多边形定义曲线和曲面**的方法；同期，法国雪铁龙（Citroen） 汽车公司的德卡斯特里奥（de Castelijau）也独立地研究出与Bezier类似的方法。



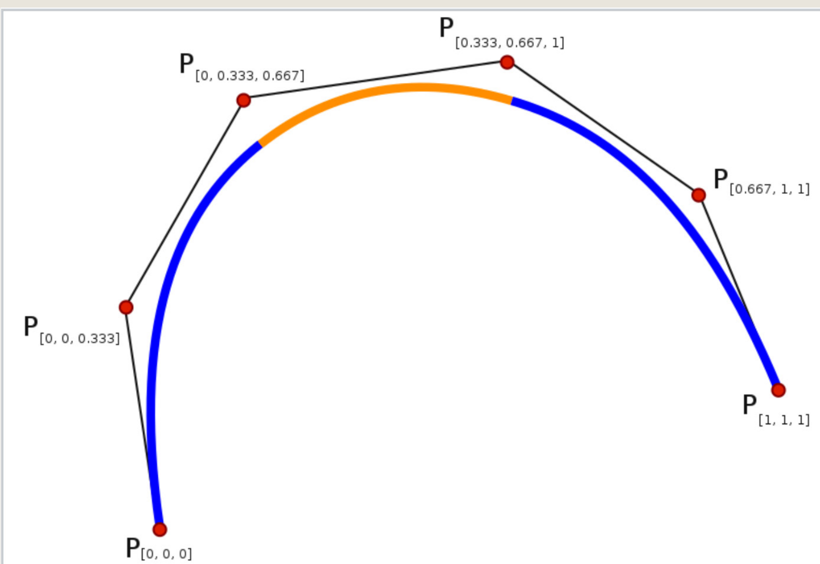
利用计算机设计曲线和曲面

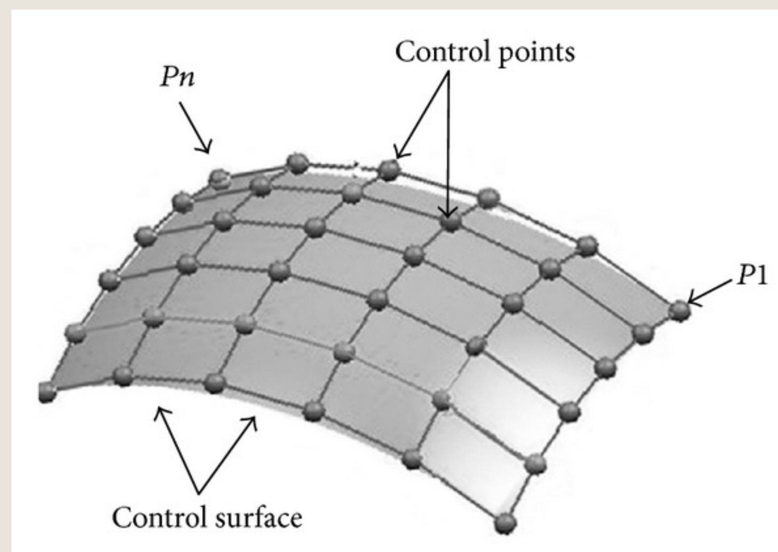
- 1972年 德布尔（DeBoor）给出了B样条的标准计算方法；



利用计算机设计曲线和曲面

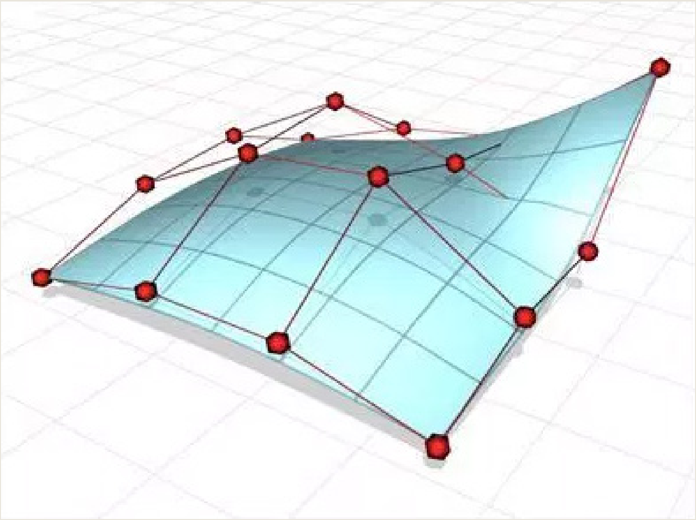
- 1974年，美国通用汽车公司的戈登（Gorden）和里森费尔德（Riesenfeld）将B样条理论用于形状描述，提出了**B样条曲线和曲面**。

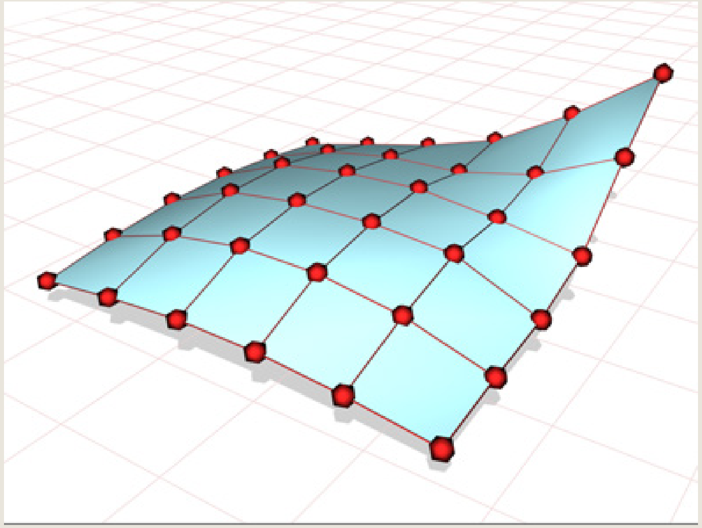




利用计算机设计曲线和曲面

- 1975年，美国Syracuse大学的佛斯普里尔（Versprill）提出了**有理B样条**方法。
- 80年代后期皮格尔（Piegl）和蒂勒（Tiller）将有理B样条发展成**非均匀有理B（NURBS）**样条方法，并已成为当前自由曲线和曲面描述的最广为流行的技术。





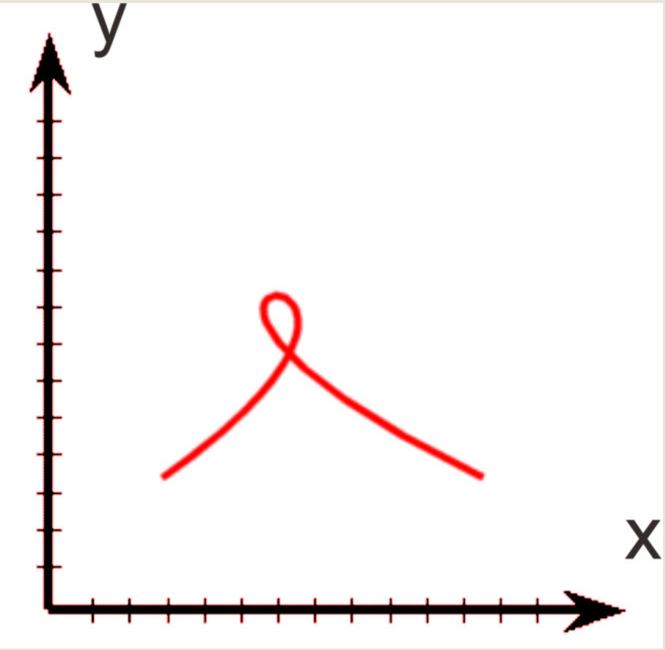
曲线曲面的表示方法

- 曲线与曲面的两种表示方法
  - 非参数表示
    - 显式表示
    - 隐式表示
  - 参数表示

15

曲线曲面的表示方法

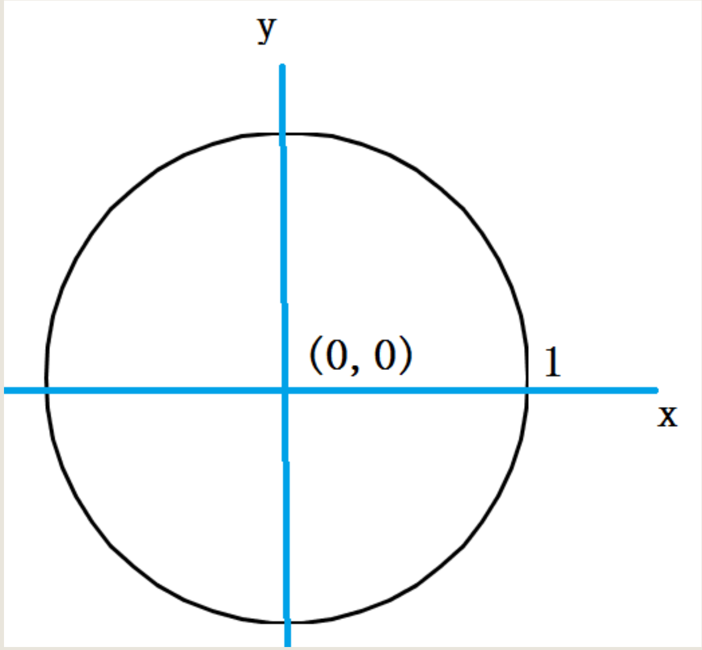
- **曲线的显式表示**
  - ◆函数 y=f(x) 上的点表示的曲线
  - ◆每一个x值只对应一个y值，所以显式方程不能表示封闭或者多值曲线，例如圆。



无法用函数y=f(x)表示的曲线

曲线曲面的表示方法

- **曲线的隐式表示**
  - 方程 F(x,y)=0的解的集合表示的曲线。
  - **优点**：通过判断函数F(x,y)大于、小于或等于零，来判断点落在所表示曲线上或在曲线的内侧或外侧。



用方程 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 表示的圆

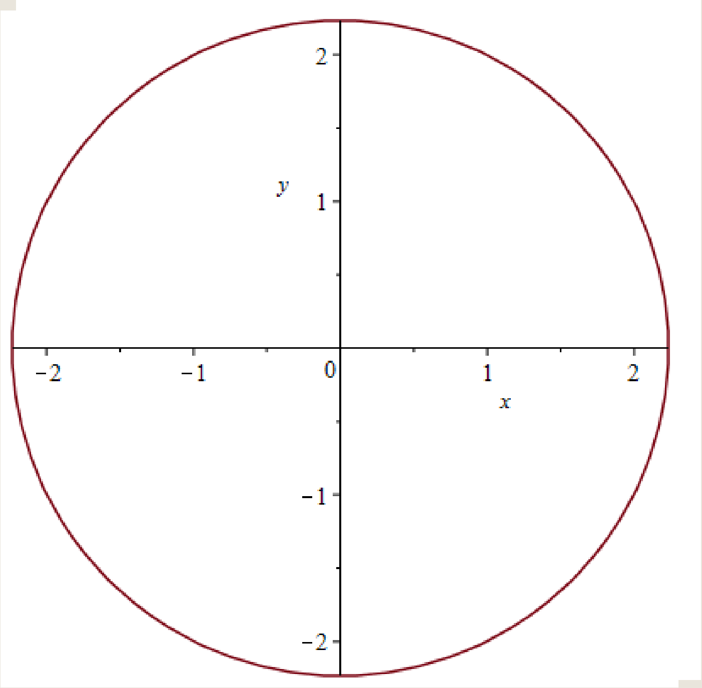
曲线曲面的表示方法

- **隐式曲线定义：** $\{p=(x,y): F(x,y)=0\}$
- **函数$F(x,y)$的图与平面 $z=0$ 的交线**

例子：

令函数是$F(x,y) = x^2 + y^2 - 5$

则该函数的图(Graph)如右图所示



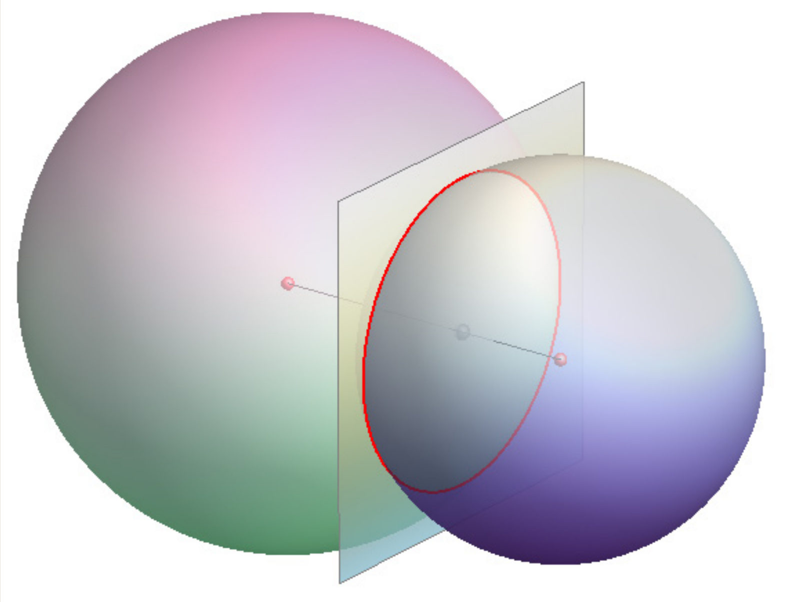
F(x,y)=0定义的曲线是:

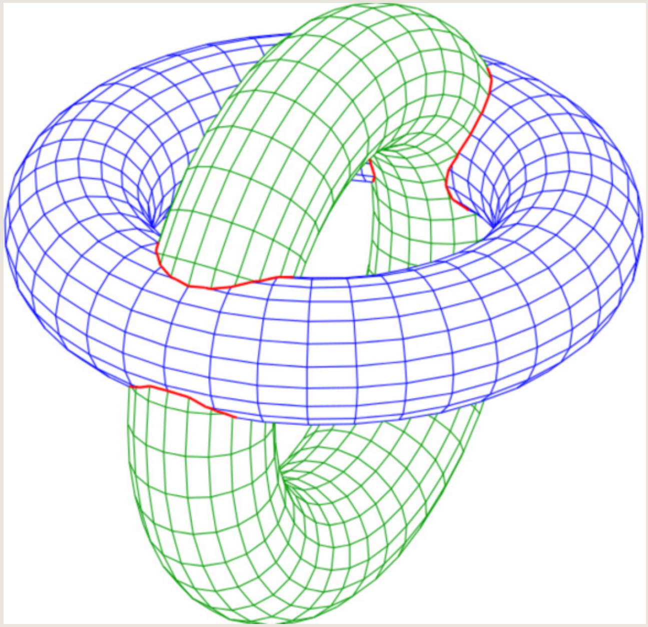
这个图与Z=0的平面的交线

曲线曲面的表示方法

- **三维空间曲线的隐式表示：利用方程组表示**

$$\begin{cases} f(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$





曲线曲面的表示方法

- 曲线的参数表示
  - ◆将曲线上各点的坐标变量显式地表示成参数t的函数形式 $P(t)=(x(t),y(t),z(t))$, $t\in[0,1]$

曲线曲面的表示方法

参数曲线例子

- **连接 $P_0(x_0,y_0)$和$P_1(x_1,y_1)$两点的直线段的参数方程可写为**

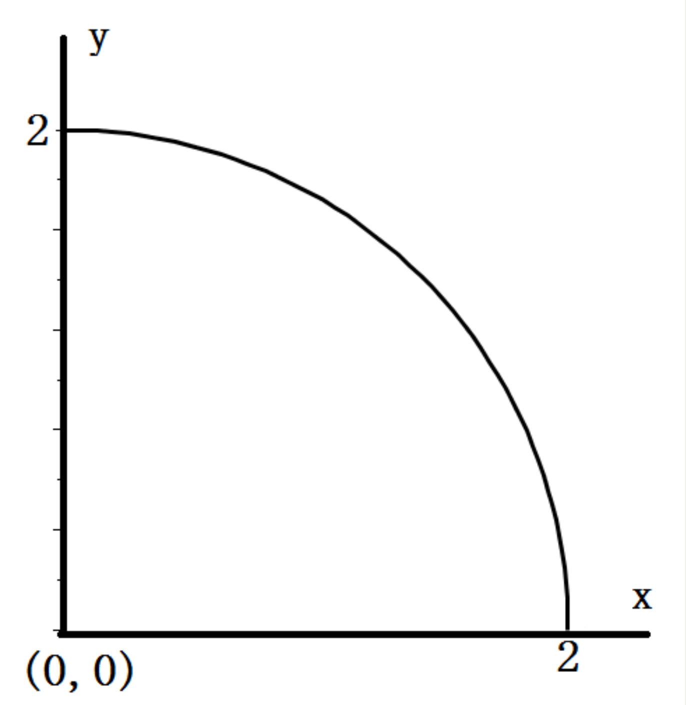
$$P = P_0 + (P_1 - P_0)t \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

曲线曲面的表示方法

参数曲线例子

- 四分之一的圆弧

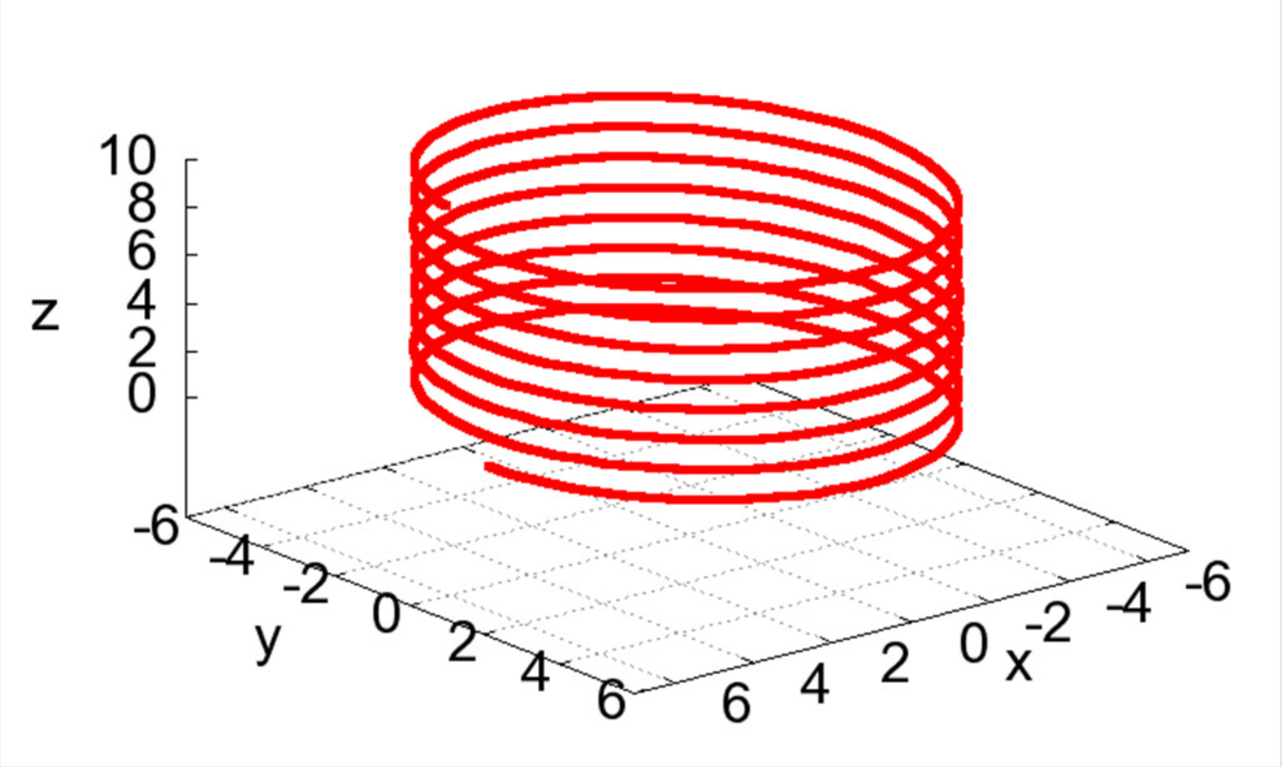
$$P(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}, \qquad t\in[0,\pi/2]$$



曲线曲面的表示方法

参数曲线例子：

●螺旋线 Parametric helix: <5cos(t), 5sin(t), t/5>

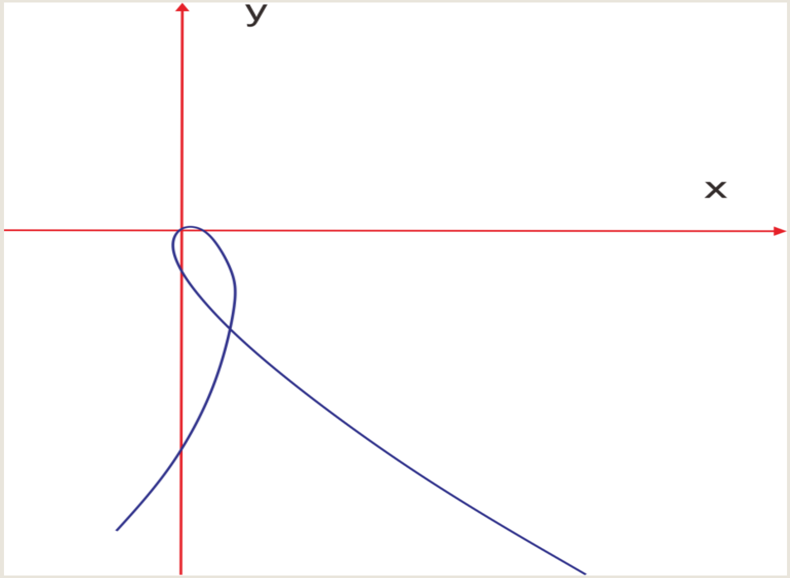


曲线曲面的表示方法

多项式参数曲线：**x(t),y(t)是t的多项式函数**

例:

$$P(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4t^3+10t^2-30t+2 \\ -30t^2-10t+10 \end{pmatrix},\quad t\in[-5,5]$$

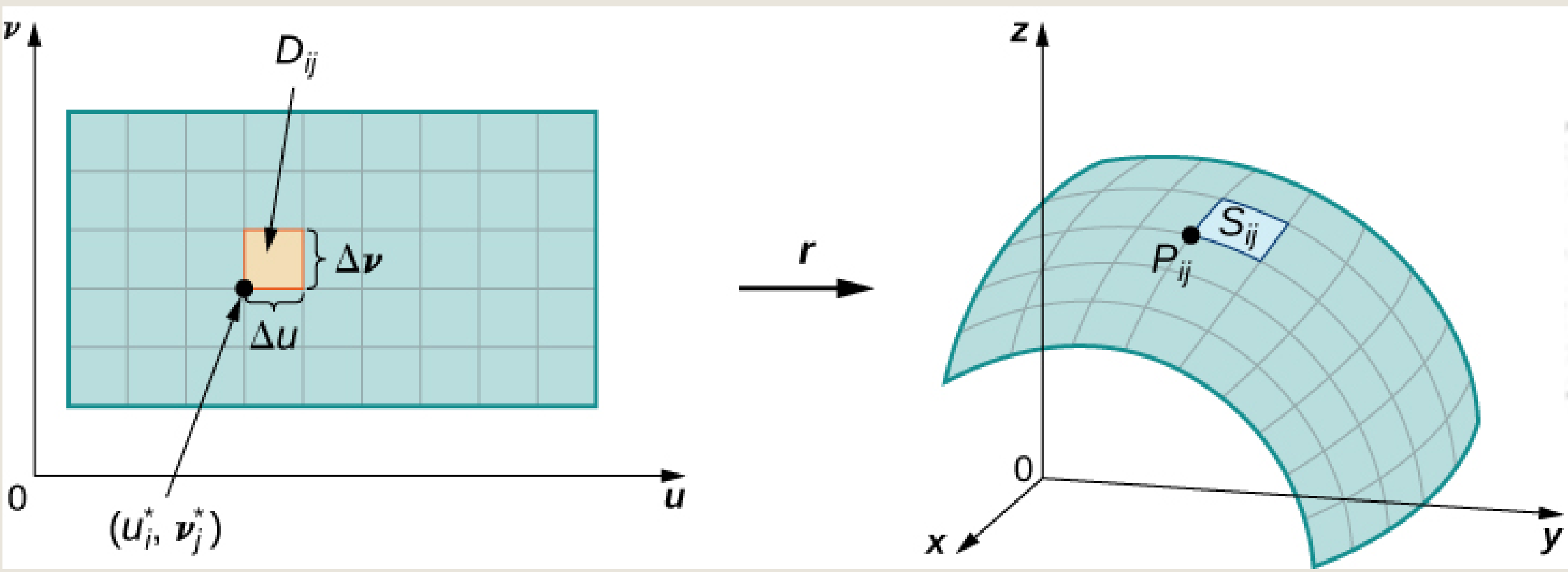


曲线曲面的表示方法

- **参数曲面的表示**

◆**曲面上各点的坐标变量显式地表示成参数(u,v)的函数形式**

$$r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\ ,\ u\in[a,b],\ v\in[c,d]$$



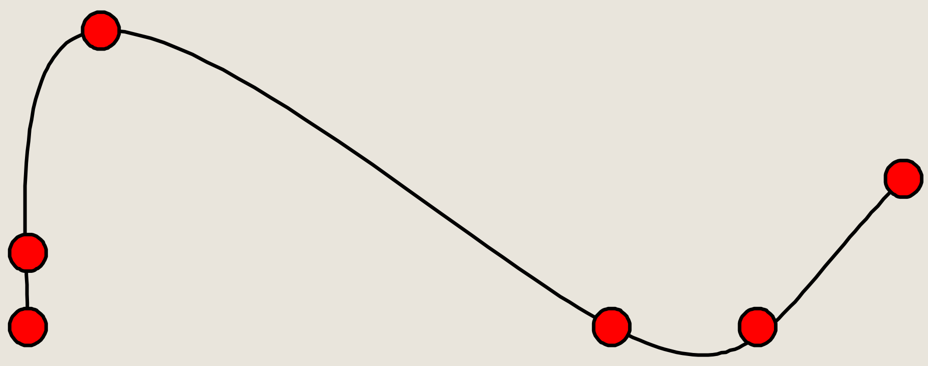
参数表示比非参数表示更优越

- 更大的自由度
- 参数方程的形式不依赖于坐标系的选取，具有形状不变性；
- 在参数表示中，变化率以切矢量表示，不会出现无穷大的情况；
- 对参数表示的曲线、曲面进行平移、比例、旋转等几何变换比较容易；
- 用参数表示的曲线曲面的交互能力强，参数的系数几何意义明确，并提高了自由度，便于控制形状。

曲线曲面造型的基本概念

1. 插值

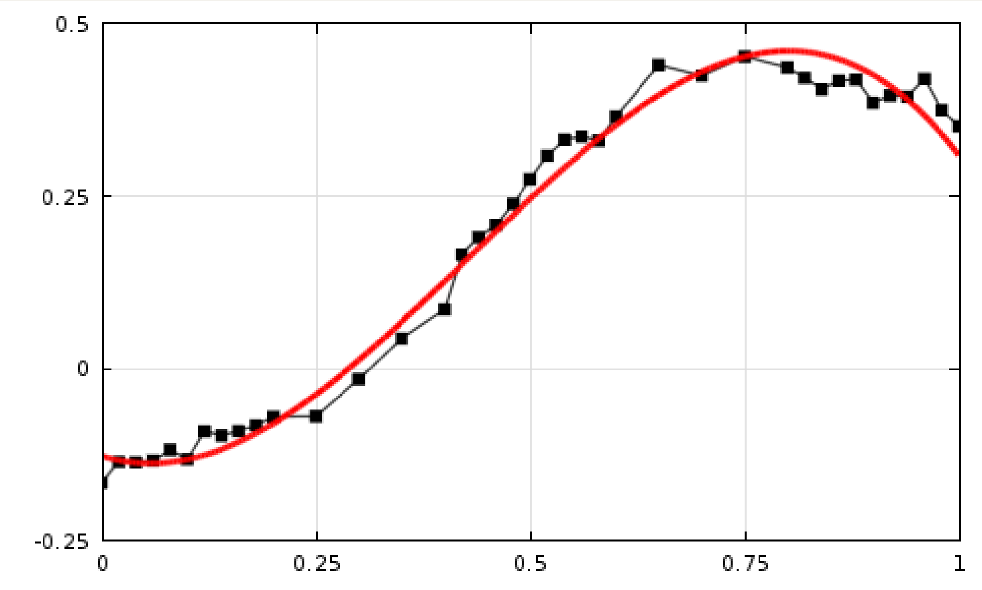
- **给定一组有序的数据点Pi，i=0, 1, …, n，构造一条曲线顺序通过这些数据点，称为对这些数据点进行插值，所构造的曲线称为插值曲线。**



曲线的插值

2. 逼近

- **构造一条曲线使之在某种意义下最接近给定的数据点，称为对这些数据点进行逼近，所构造的曲线为逼近曲线。**

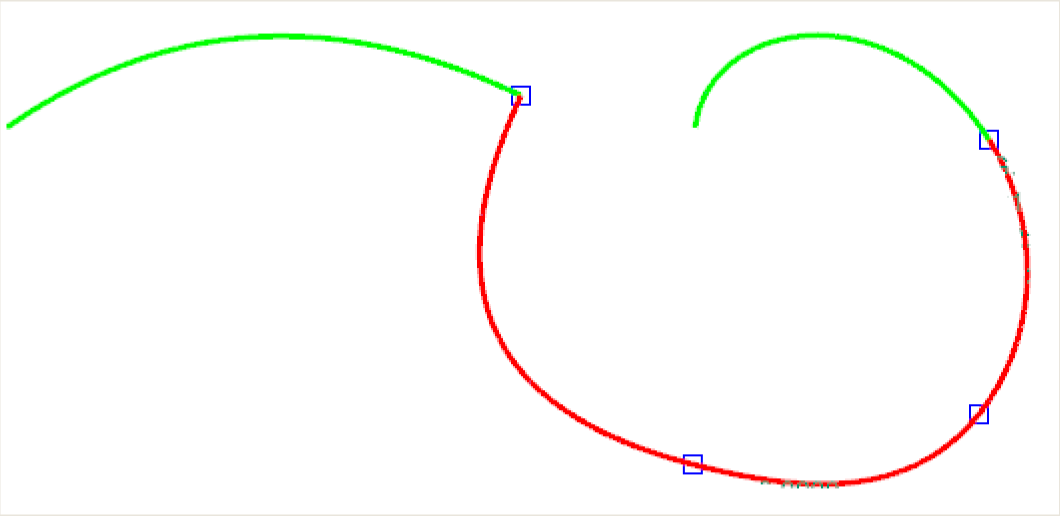


曲线的逼近

曲 线 曲 面 造 型 的 基 本 概 念

3. 连续性

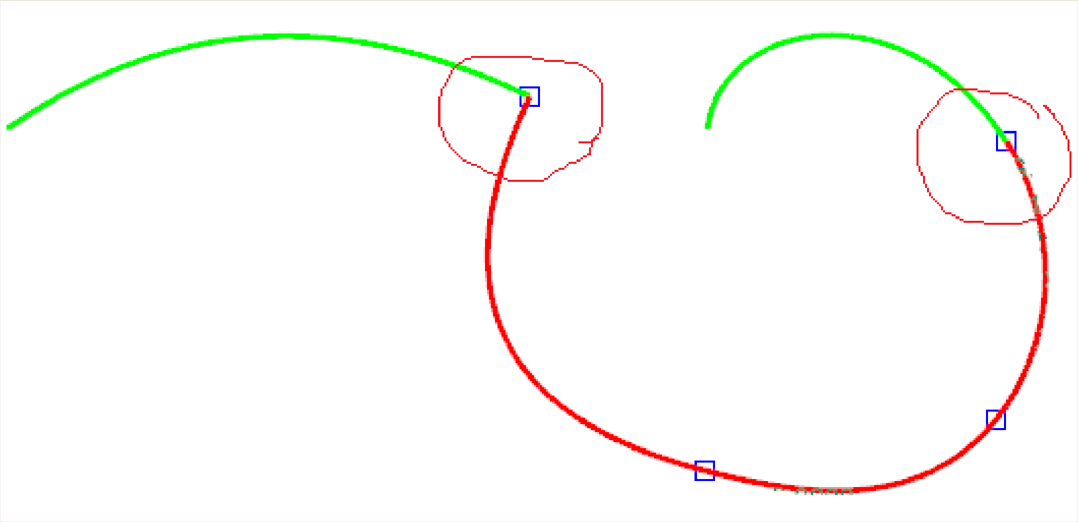
- 单一的曲线段或曲面片难以表达复杂的形状
- 必须将一些曲线段连接成组合曲线，或将一些曲面片连接成组合曲面，才能描述复杂的形状。



曲 线 曲 面 造 型 的 基 本 概 念

3. 连续性

- 多条曲线首尾相连要求连接处具有合乎要求的连续性
  - ◆参数连续性,用 $C^{阶数}$表示
  - ◆几何连续性,用 $G^{阶数}$表示

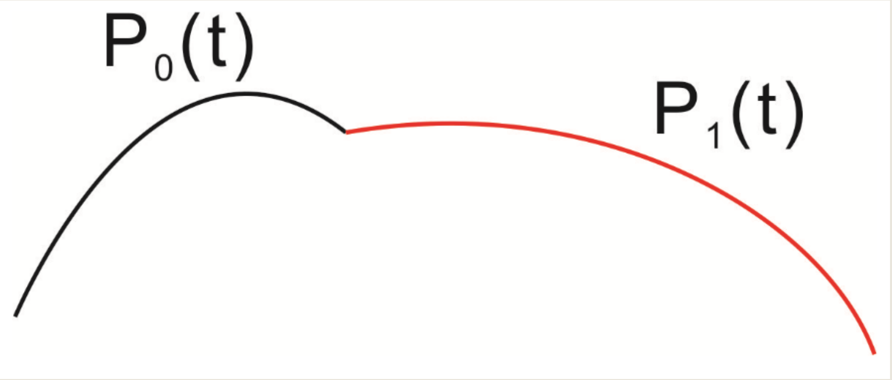


曲线曲面造型的基本概念

- 参数连续性

➢ C^0: 零阶参数连续性，指相邻两个曲线段在交点处具有相同的坐标。

- C^0连续:$P_0(1)=P_1(0)$



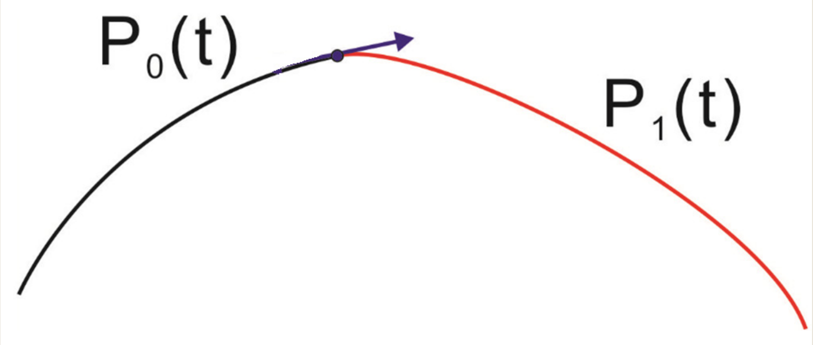
曲 线 曲 面 造 型 的 基 本 概 念

- 参数连续性

➢ C^1: 一阶参数连续性：满足C^0连续，且相邻两个曲线段在交点处具有相同的一阶导数。

- C^1连续: C^0 + 一阶导相等

$$P'_0(1)=P'_1(0)$$



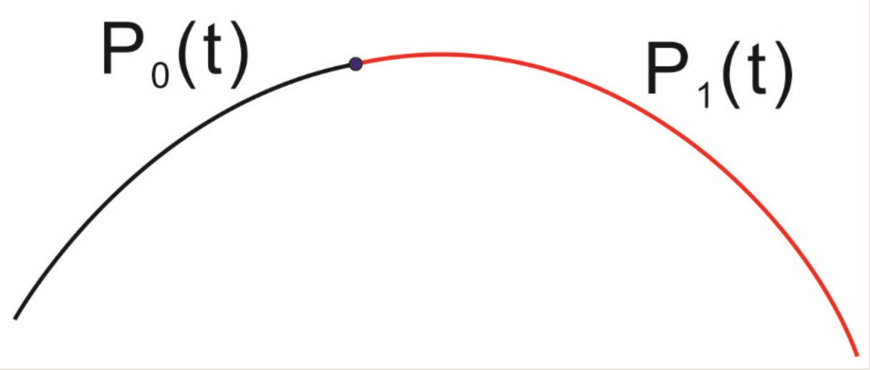
曲线曲面造型的基本概念

- 参数连续性

➢ C^2：二阶参数连续性：满足C1连续，且相邻两个曲线段在交点处具有相同的二阶导数。

- C^2连续: C^0+C^1+二阶导相等

$$P''_0(1)=P''_1(0)$$



曲 线 曲 面 造 型 的 基 本 概 念

● 参数连续性

➢ 参数连续性与曲线的参数化相关

- 参数曲线 $C(t) = At^2 + Bt + C, \quad 0 <= t <= 1$

  在曲线终点处的一阶导矢是:

  $C'(1) = 2A + B$

- 对C(t)重新参数化 $t = 2s$,

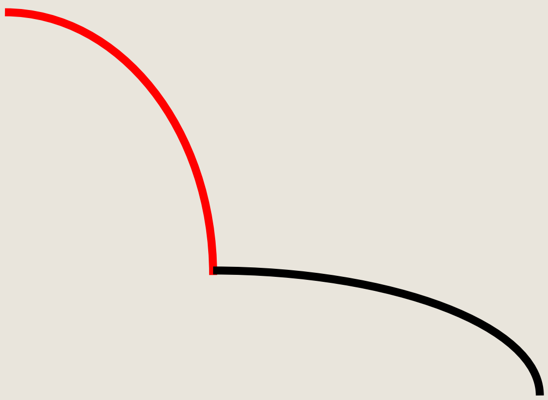
  $C(s) = 4As^2 + 2Bs + C, \quad 0 <= s <= 0.5$

  在曲线终点处的一阶导矢是:

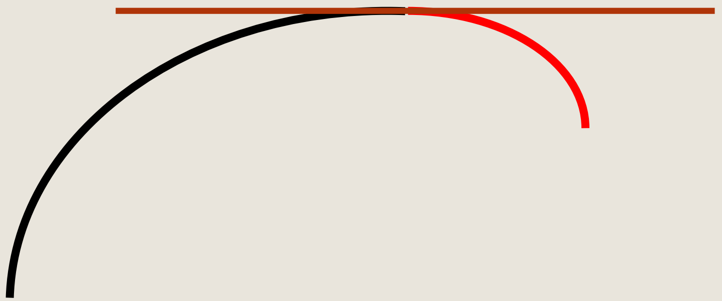
  $C'(0.5) = 4A + 2B$

曲线曲面造型的基本概念

- 几何连续性
  - G^0连续（0阶几何连续）
    - 与C^0连续相同



- 几何连续性
  - G^1连续（一阶几何连续）
    - 满足G0，且两相邻曲线段在连接点处的切矢量方向相同。

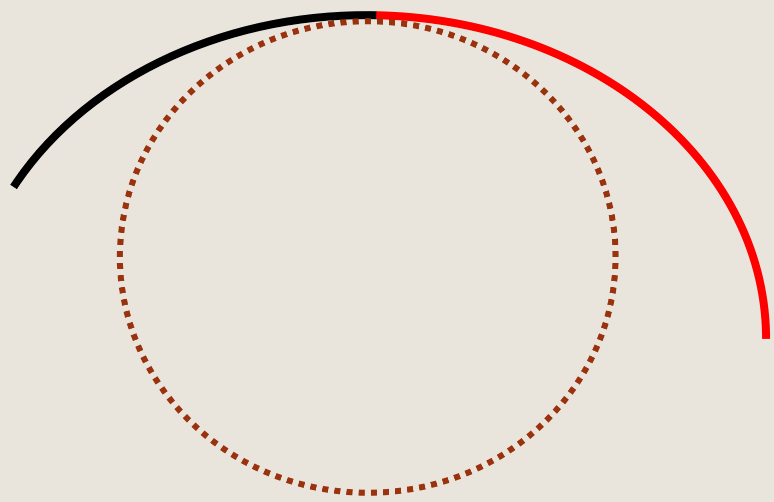


曲 线 曲 面 造 型 的 基 本 概 念

- 几何连续性

◆G^2连续（二阶几何连续）

◆满足G0，G1,且两相邻曲线段的连接点处曲率矢量相等。

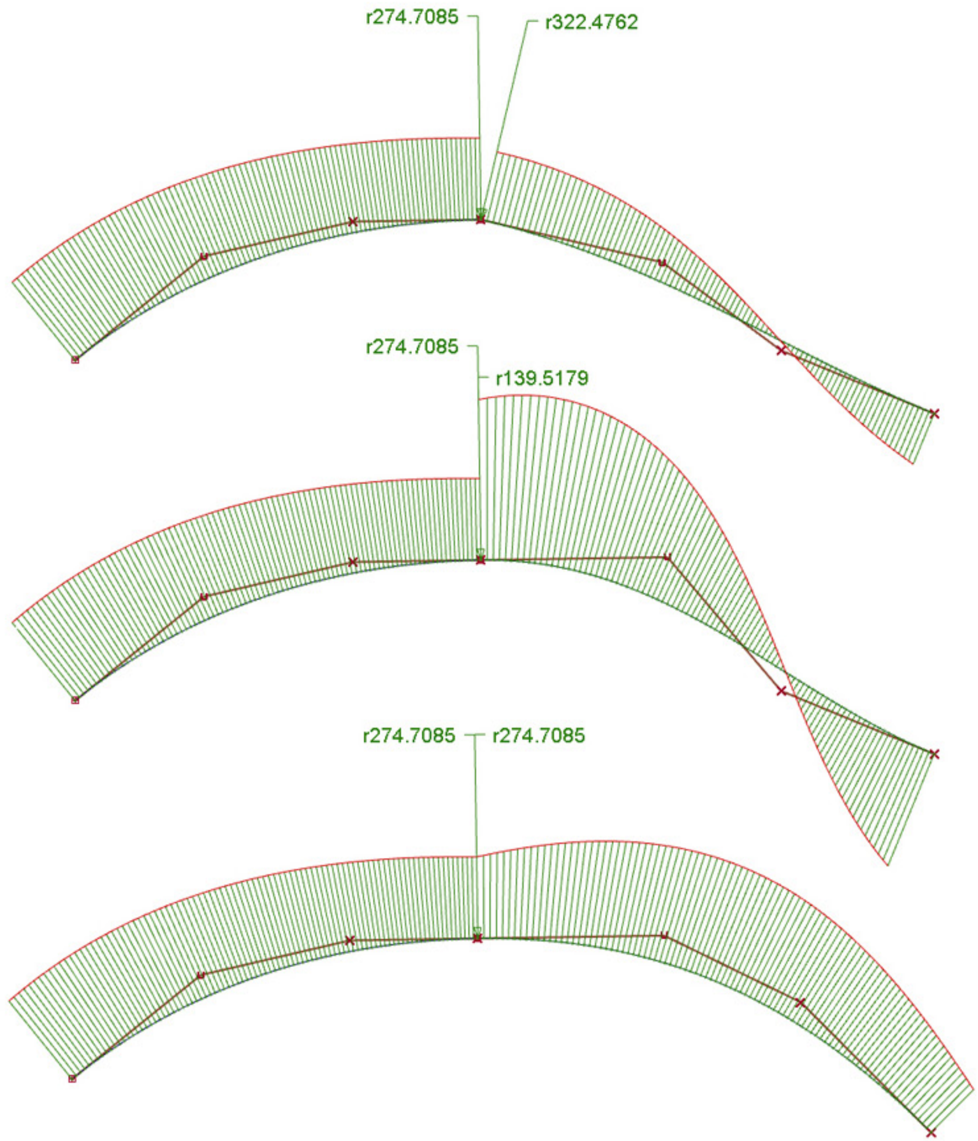


曲线的几何连续性

G0 - Position
Curvature plots are at an angle.

G1 - Tangent
Curvature plots are aligned, but radius values are different at the join.

G2 - Curvature
Curvature plots are aligned, and radius values are the same at the join.



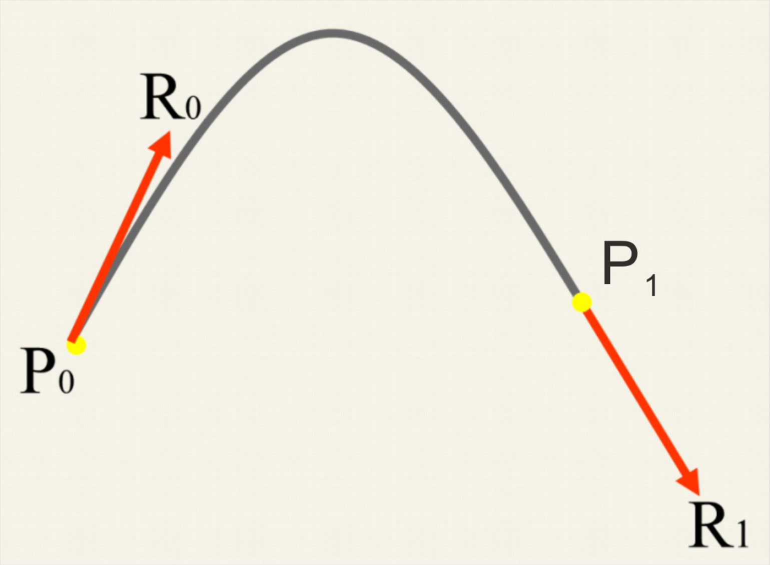
参数连续性与几何连续性的区别

- 参数连续性是传统意义上的、严格的连续。
- 几何连续性只需限定两个曲线段在交点处的参数导数成比例，不必完全相等，是一种更直观、易于交互控制的连续性。
- 参数连续性的条件更严格。

三次Hermite曲线

- 定义：给定矢量P_k、P_{k+1}、R_k和R_{k+1}，则满足下列条件的三次参数曲线P(t)为三次Hermite样条曲线：

$$p(0) = P_k$$
$$p(1) = P_{k+1}$$
$$p'(0) = R_k$$
$$p'(1) = R_{k+1}$$



三次Hermite曲线

推导

- 假设三次多项式曲线为

$$p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

注意：这里的a,b,c,d是向量，比如对于平面曲线，$\mathbf{a}=(a_x, a_y)$ 是2维向量.

✓在以下讨论中，可以将向量理解为向量的一个分量。

三次Hermite曲线

推导

- 假设三次多项式曲线为

$$p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

我们有：

$$p(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = TC \quad , \quad p'(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

三 次Hermite曲 线

将端点条件

$$p(0) = P_k$$
$$p(1) = P_{k+1}$$
$$p'(0) = R_k$$
$$p'(1) = R_{k+1}$$

带入

$$p(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = TC$$

$$p'(t) = [3t^2 \quad 2t \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

得到：

$$P_k = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$P_{k+1} = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$R_k = [0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$R_{k+1} = [3 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 0]\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

三次Hermite曲线

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ R_k \\ R_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

求解得：

$$C = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ R_k \\ R_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ R_k \\ R_{k+1} \end{bmatrix} = M_h G_h$$

三次Hermite曲线

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ R_k \\ R_{k+1} \end{bmatrix} = M_h G_h$$

- M_h是Hermite矩阵；G_h是Hermite几何矢量

三次Hermite曲线

- 3次Hermite样条曲线的方程为：

$$p(t) = TM_h G_h \qquad t \in [0,1]$$

其中 $$TM_h = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H_0 & H_1 & H_2 & H_3 \end{bmatrix}$$

三次Hermite曲线

- $T \cdot M_h = (H_0\ H_1\ H_2\ H_3)$称为Hermite基函数：

$$H_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$H_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$H_2(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

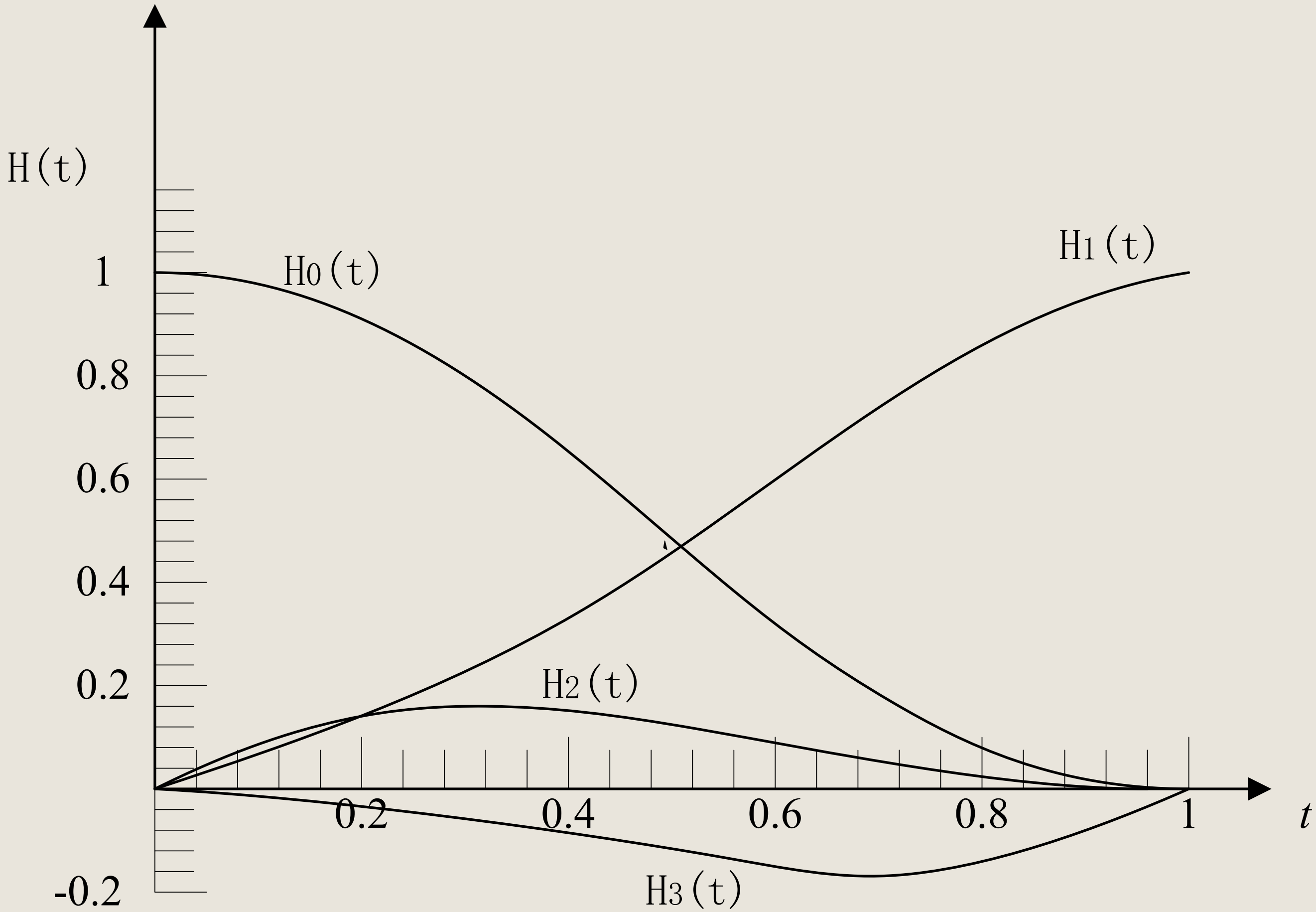
$$H_3(t) = t^3 - t^2$$

最终，Hermite曲线为：

$$p(t) = P_k H_0(t) + P_{k+1} H_1(t) + R_k H_2(t) + R_{k+1} H_3(t)$$

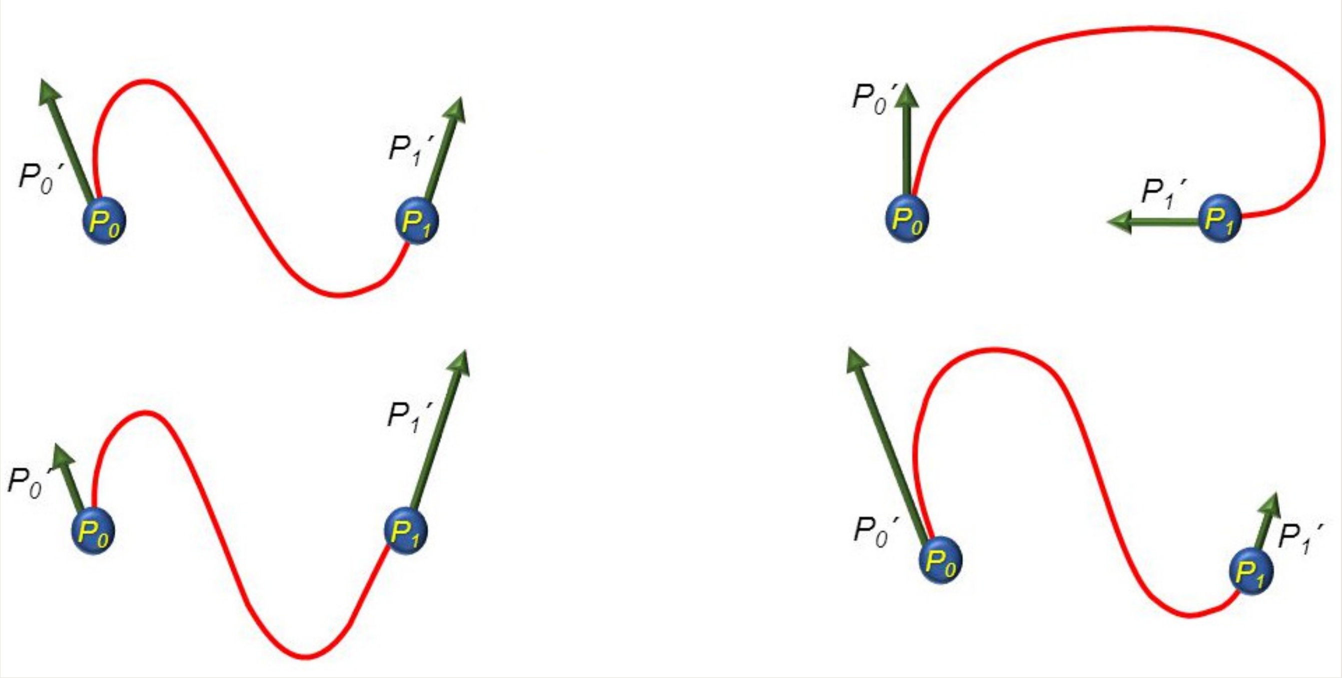
三次Hermite曲线

- Hermite基函数



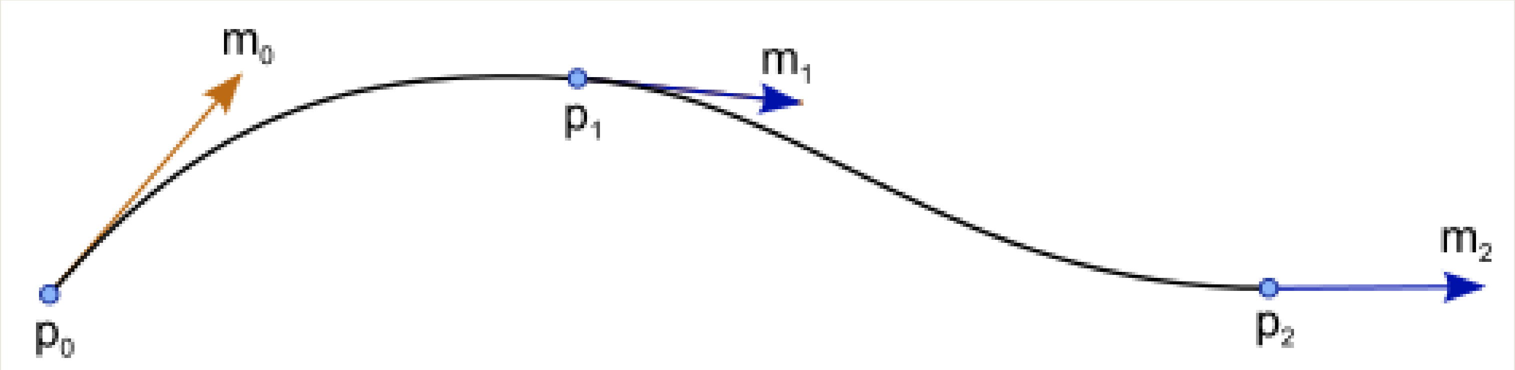
三次Hermite曲线

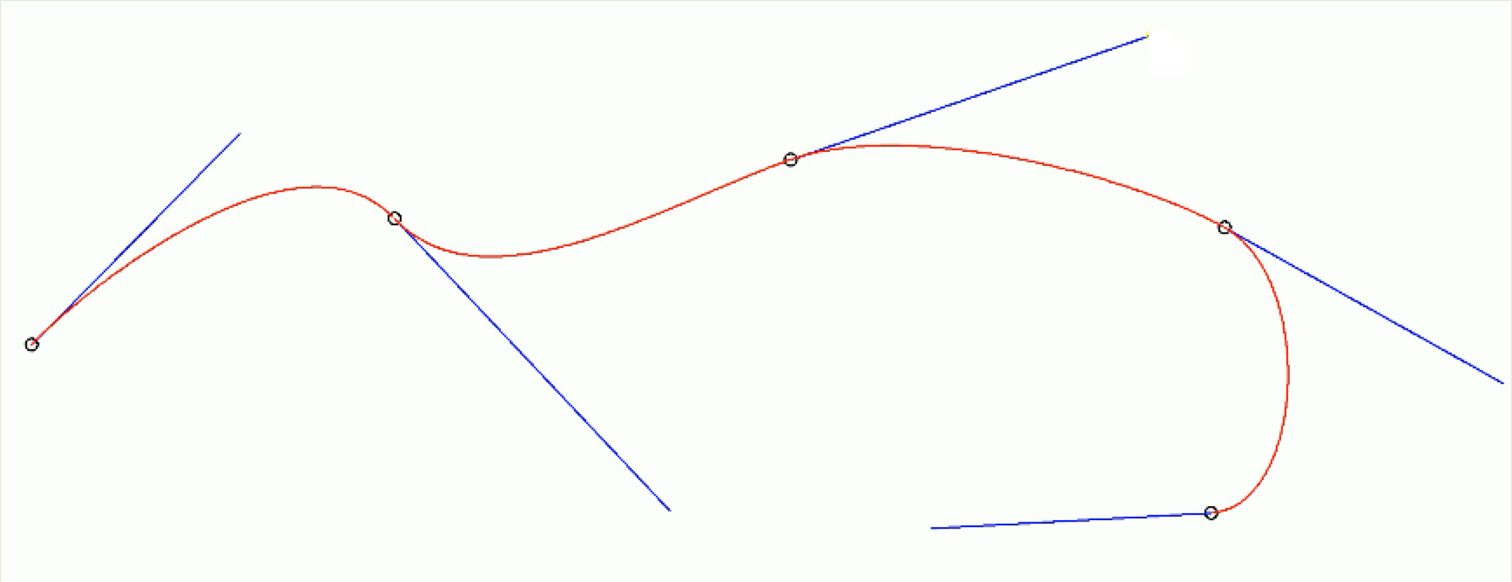
- Hermite曲线的形状控制
  - ◆改变端点位置矢量P_0, P_1
  - ◆调节切矢量 R_0，R_1 的方向
  - ◆调节切矢量 R_0，R_1 的长度



三次Hermite曲线

- Hermite样条曲线





三 次Hermite曲 线

- 优点：
  - ◆简单，易于理解
- 缺点：
  - ◆难于给出两个端点处的切线矢量作为初始条件
  - ◆不方便

本章结束