计算机图形学

哈尔滨工业大学（威海）
计算机科学与技术学院
伯彭波

B样条曲线与曲面

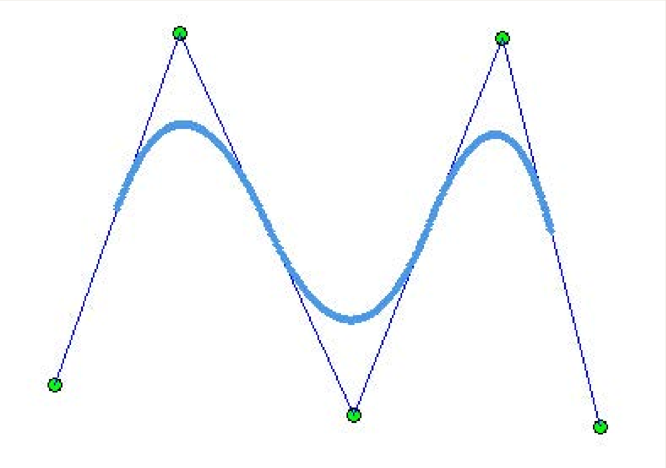
- Bezier曲线或曲面有许多优越性，但有以下不足：
  - ◆Bezier曲线或曲面不能作局部修改
  - ◆控制多边形的顶点个数决定了Bezier曲线的次数
  - ◆Bezier曲线或曲面的拼接比较复杂

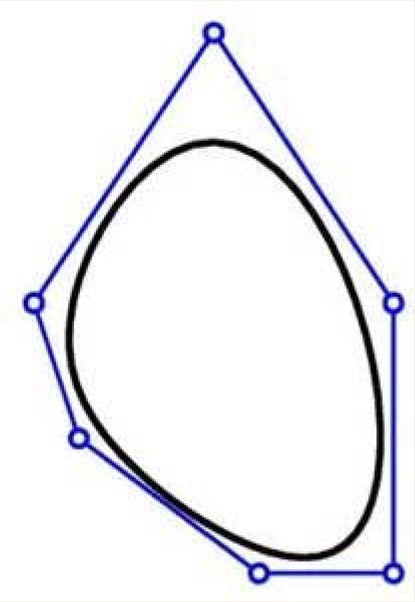
B样 条 曲 线 与 曲 面

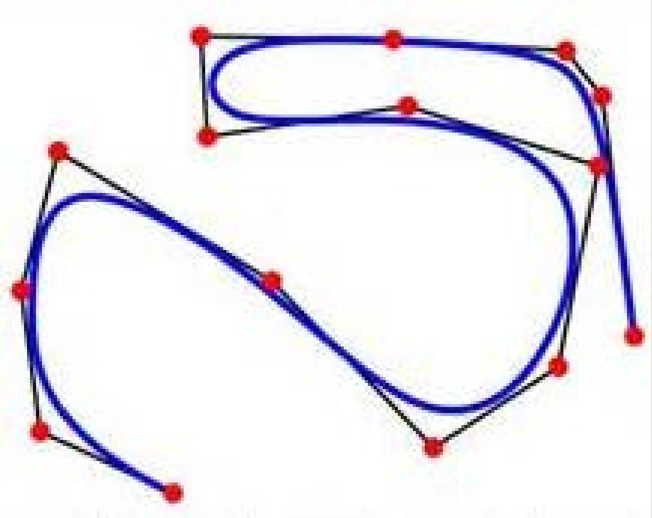
- **1972年，Gordon、Riesenfeld等人发展了1946年Schoenberg提出的样条方法，提出了B样条方法，在保留Bezier方法全部优点的同时，克服了Bezier方法的弱点。**

B样条曲线与曲面

- B样条曲线例子







请看视频

B样条曲线的定义

- B样条曲线的方程定义为：

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i N_{i,k}(t) \qquad t_{k-1} \le t \le t_{n+1}$$

$P_i\,(i=0,1,\ldots,n)$ 是控制多边形的顶点

$N_{i,k}(t)$ (i=0,1,…,n) 称为k阶(k-1次)B样条基函数

- B样条基函数是一个称为节点矢量的非递减的参数t的序列 $t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots, t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{n+k-1}, t_{n+k}$ 所决定的k阶分段多项式。

B样条基函数的定义

de Boor-Cox递推定义

$$N_{i,1}(t)=\begin{cases}1 & t_i<t<t_{i+1}\\ 0 & \text{Otherwise}\end{cases}$$

$$N_{i,k}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}N_{i,k-1}(t)+\frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}}N_{i+1,k-1}(t)$$

并约定 $\frac{0}{0}=0$

节点矢量：$t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots, t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{n+k-1}, t_{n+k}$

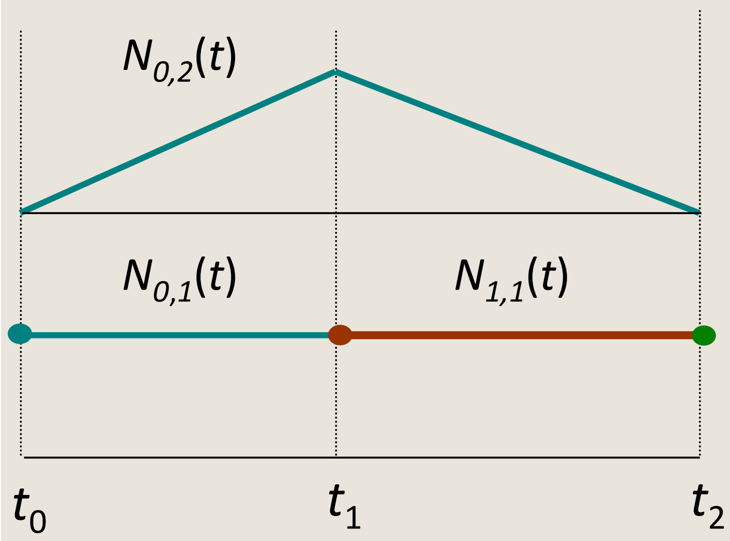
B样条基函数的定义

实例：

$$N_{0,1}(t)=\begin{cases}1 & \text{if } t_0 \le t < t_1 \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}, \quad N_{1,1}(t)=\begin{cases}1 & \text{if } t_1 \le t < t_2 \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}, \quad \cdots$$

$$N_{0,2}(t)=\frac{t-t_0}{t_1-t_0}N_{0,1}(t)+\frac{t_2-t}{t_2-t_1}N_{1,1}(t)$$

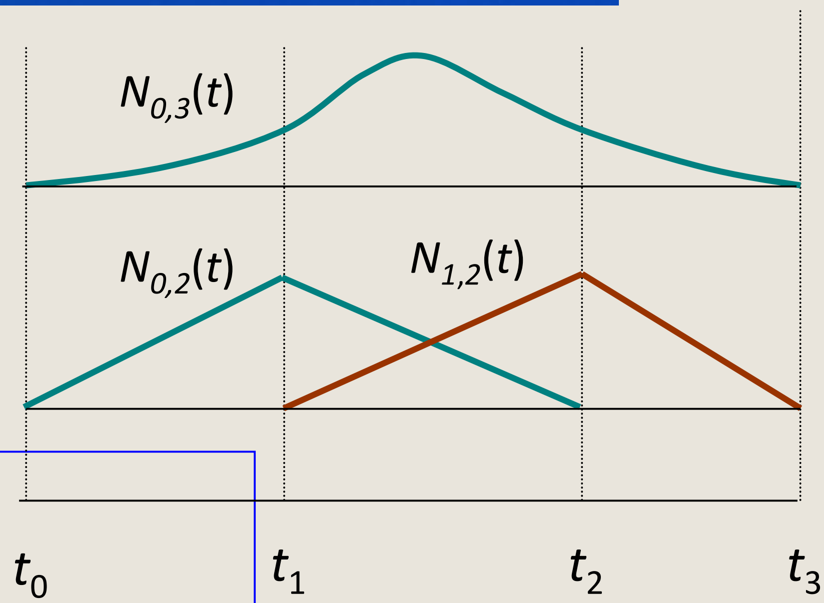
$$=\begin{cases}\dfrac{t-t_0}{t_1-t_0}, t_0 \le t < t_1 \\ \dfrac{t_2-t}{t_2-t_1}, t_1 \le t < t_2 \\ 0,, otherwise\end{cases}$$



B样条基函数的定义

实例：

$$N_{0,3}(t)=\frac{t-t_0}{t_2-t_0}N_{0,2}(t)+\frac{t_3-t}{t_3-t_1}N_{1,2}(t)$$

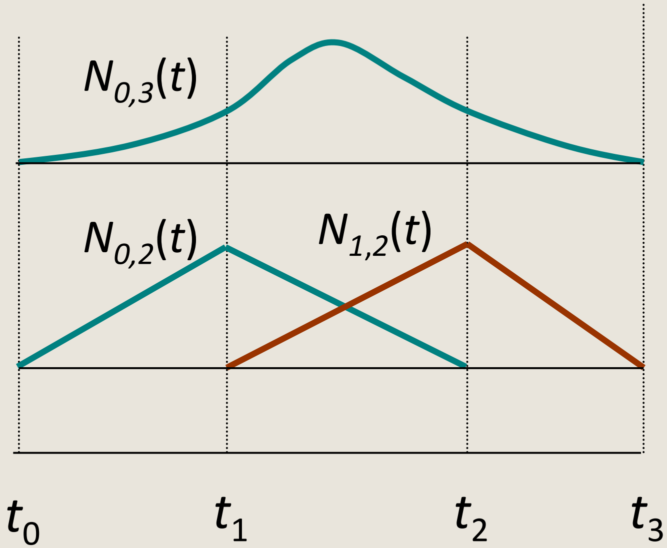


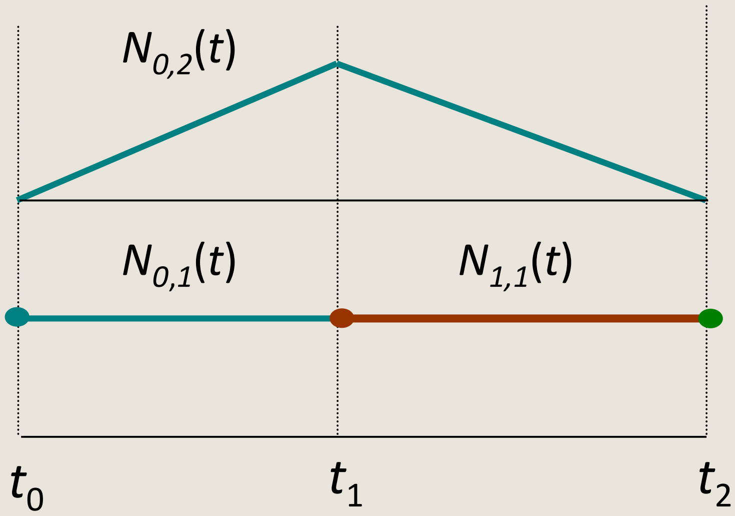
$$N_{0,3}(t)=\begin{cases}\dfrac{t-t_0}{t_2-t_0}\times\dfrac{t-t_0}{t_1-t_0} & \text{if } t_0\le t<t_1\\[2ex] \dfrac{t-t_0}{t_2-t_0}\times\dfrac{t_2-t}{t_2-t_1}+\dfrac{t_3-t}{t_3-t_1}\times\dfrac{t-t_1}{t_2-t_1} & \text{if } t_1\le t<t_2\\[2ex] \dfrac{t_3-t}{t_3-t_1}\times\dfrac{t_3-t}{t_3-t_2} & \text{if } t_2\le t<t_3\\[2ex] 0 \quad \text{otherwise} & \end{cases}$$

B样条基函数的定义

总结:

- $N_{i,k}(t)$ 在 $[t_i, t_{i+k}]$ 之间非零
- B样条基函数是分段的多项式函数





B样条曲线的定义

- k阶的B样条曲线的定义：

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iN_{i,k}(t)$$

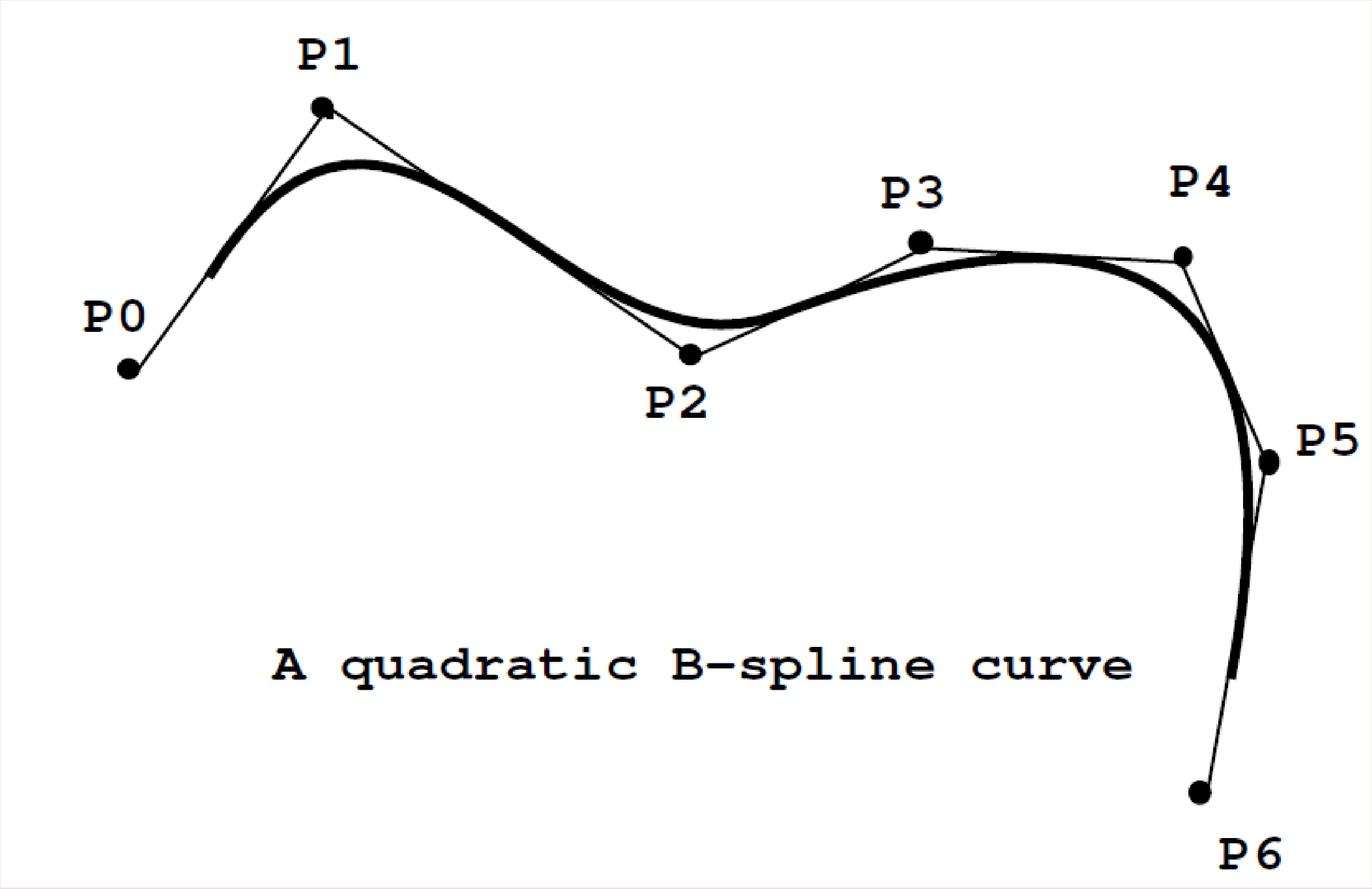
曲线的参数区间为：　$t\in[t_{k-1},t_{n+1}]$

$$t_0,t_1,\dots,\overbrace{t_{k-1},t_k,t_{k+1},\dots,t_{n-1},t_n,t_{n+1}}^{\text{B 样条曲线的参数区间}},\dots,t_{n+k}$$

1. B样条曲线的参数区间是节点矢量的一段
2. 一个控制点关联的B样条基函数可能只有部分在曲线的参数区间内

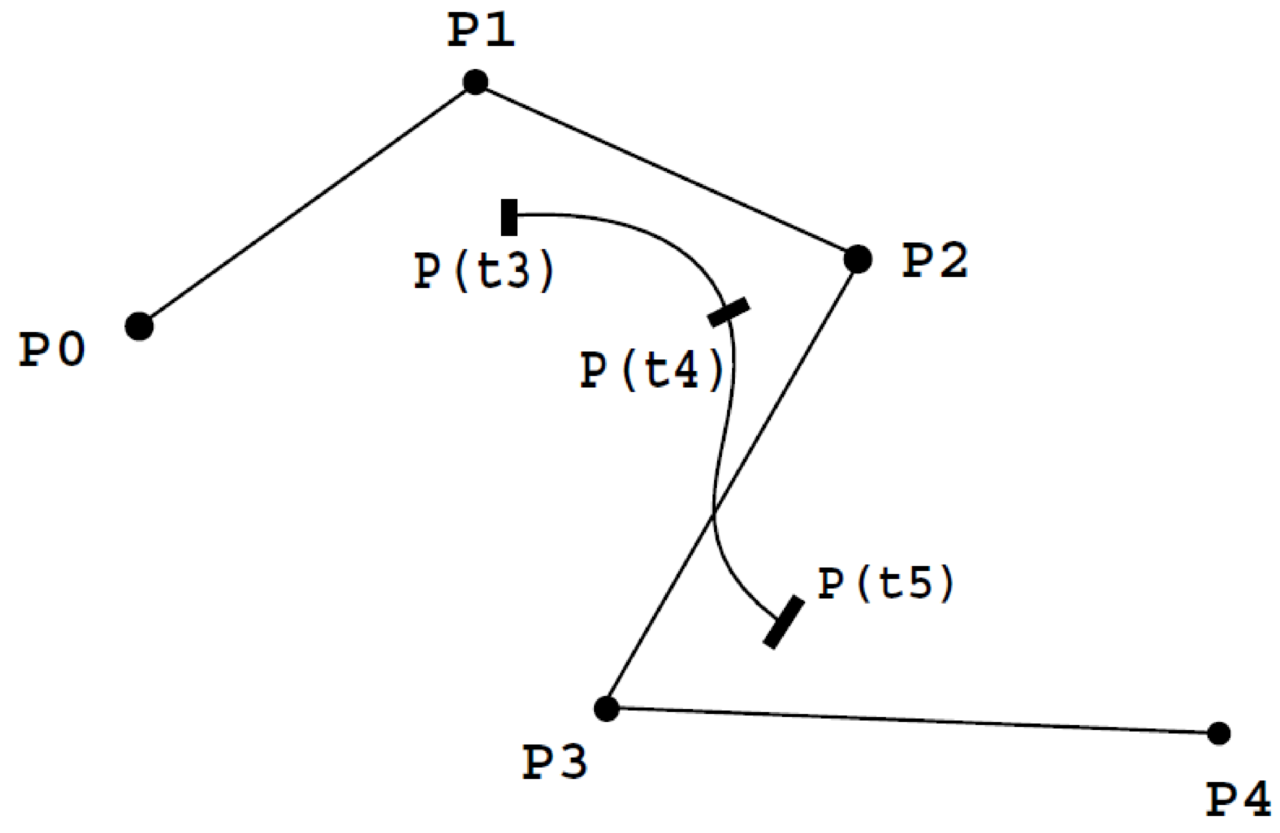
B样条曲线

B样条曲线例子：3阶（2次）B样条曲线



B样条曲线

B样条曲线例子：4阶（3次）B样条曲线



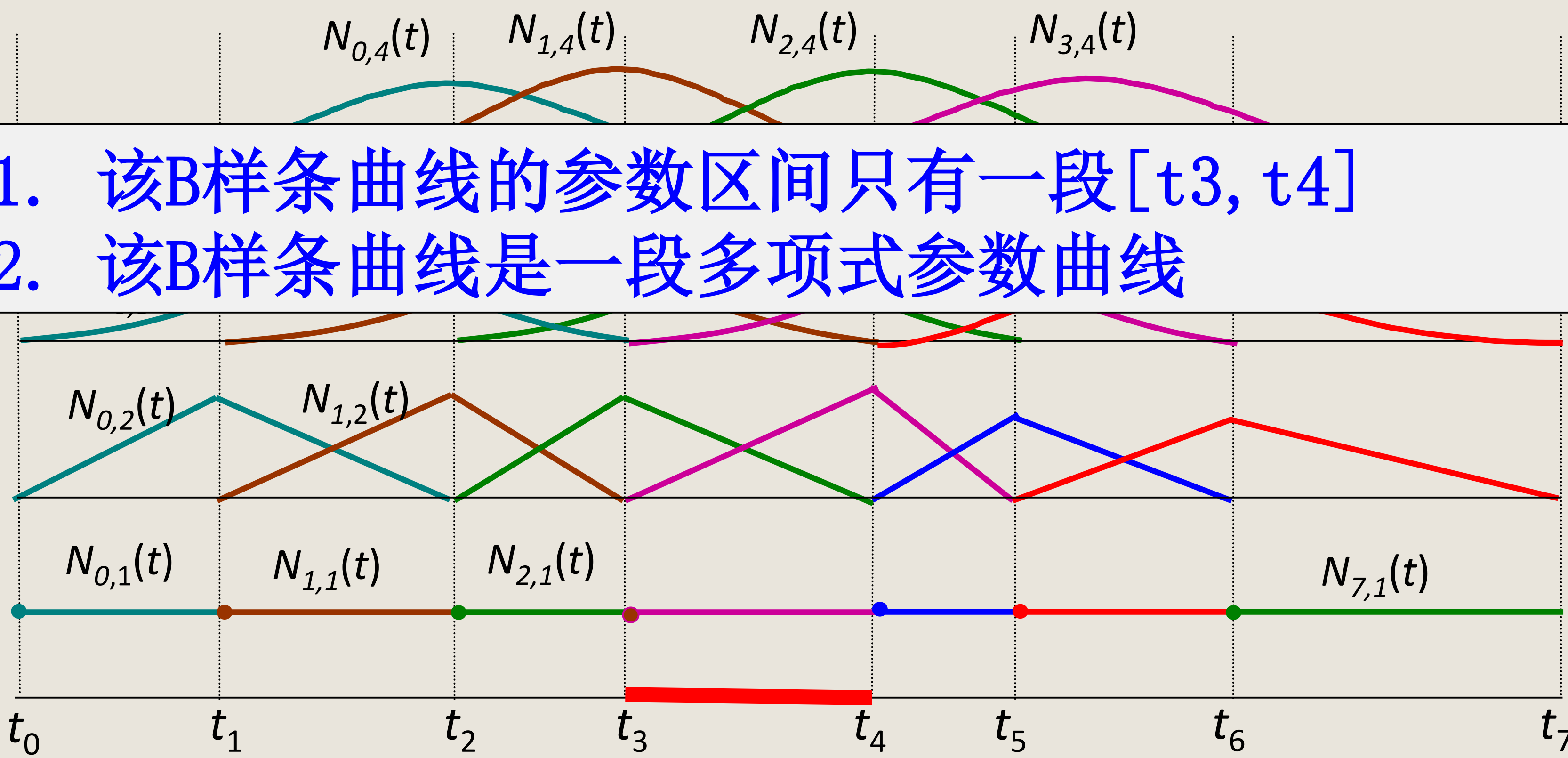
A cubic B-spline curve

B样条基函数的定义

实例：一个4阶B样条曲线：

$$P(t) = N_{0,4}(t)\,P_0 + N_{1,4}(t)\,P_1 + N_{2,4}(t)\,P_2 + N_{3,4}(t)\,P_3$$

节点矢量： $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_7\}$ 参数区间： $t_3 <= t <= t_4$



1. 该B样条曲线的参数区间只有一段[t3, t4]
2. 该B样条曲线是一段多项式参数曲线

B样条基函数的定义

实例： **一个4阶B样条曲线：k=4,n=4**

$$P(t) = N_{0,4}(t)\,P_0 + N_{1,4}(t)\,P_1 + N_{2,4}(t)\,P_2 + N_{3,4}(t)\,P_3 + N_{4,4}(t)\,P_4$$

节点矢量： $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_7, t_8\}$ 参数区间： $t_3 <= t <= t_5$

1. 该B样条曲线的参数区间有两段[t3, t4]和[t4, t5]
2. 该B样条曲线是分段的多项式曲线

视频

B样条曲线

实例： B样条曲线例子：2阶 B样条曲线

$$P(t)=\sum_{i=0}^{5}P_iN_{i,2}(t)$$

曲线的参数区间 $\boxed{[t_1,t_6]}$

即该曲线是 $\boxed{5}$ 段多项式参数曲线

B样条曲线的性质

B样条基函数的性质：

- 局部支承性 $N_{i,k}(t)\begin{cases} \geq 0 & t \in [t_i, t_{i+k}] \\ = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$
- 权性 $\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(t) = 1 \qquad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$
- 微分公式

$$N'_{i,k}(t) = \frac{k-1}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{k-1}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t)$$

B样条曲线的性质

- 局部性

- B样条曲线上的一段曲线的定义不依赖于该B样条曲线所有的控制点。
- B样条曲线的一个控制点的改变并不能影响整条曲线的形状。

B样条曲线的性质

- 局部性

◆ k阶B样条曲线上参数为 $t\in[t_i, t_{i+1}]$ 的一点至多与k个控制顶点P_j (j=i-k+1,…,i)有关，与其它控制顶点无关；

$P_{i-k}N_{i-k,k}$	$[t_{i-k},t_i]$
$\boxed{P_{i-k+1}N_{i-k+1,k}}$	$[t_{i-k+1},t_{i+1}]$
……	
$P_iN_{i,k}$	$[t_i,t_{i+k}]$
$P_{i+1}N_{i+1,k}$	$[t_{i+1},t_{i+1+k}]$

非零区间

B样条曲线的性质

- 局部性

◆ **移动控制点P_i**至多影响到定义在区间(t_i,t_{i+k})上那部分曲线的形状，对曲线的其余部分不发生影响。

$$P_iN_{i,k} \qquad\qquad [t_i,t_{i+k}]$$

非零区间

B样条曲线的性质

- 分段参数多项式
  - P(t)在每一节点区间上都是次数不高于k-1的参数t的多项式

- 导数公式

$$P'(t)=\left(\sum_{i=0}^{n}P_iN_{i,k}(t)\right)'=\sum_{i=0}^{n}P_iN_{i,k}'(t)$$

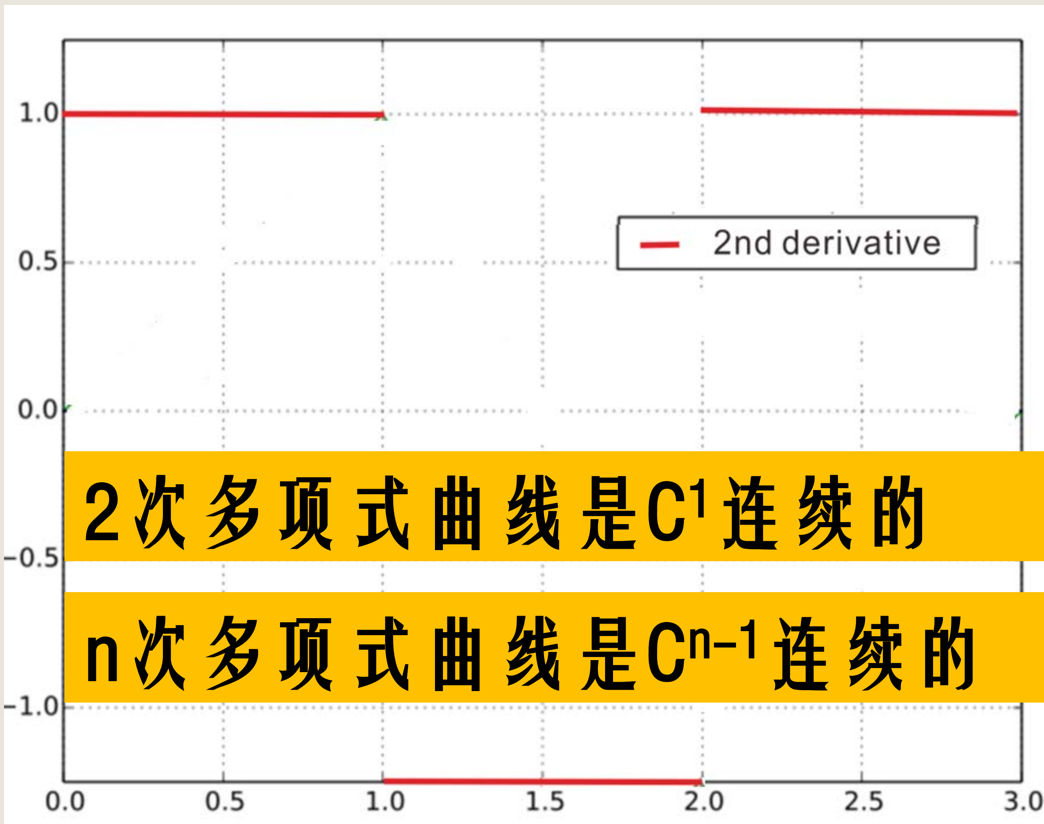
$$=(k-1)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{P_i-P_{i-1}}{t_{i+k-1}-t_i}\right)N_{i,k-1}(t)\qquad t\in[t_{k-1},t_{n+1}]$$

B样条曲线的性质

- 连续性

多项式曲线的连续性：研究曲线的导数曲线是否连续

例子:2次多项式曲线



2次多项式曲线是C^1连续的

n次多项式曲线是C^{n-1}连续的

B样条曲线的性质

- 连续性（续）

◆ B样条曲线是分段多项式曲线

◆ k阶(k-1次)B样条曲线的每一段多项式曲线内部是 C^{k-2} 连续的。

◆ 节点处的连续性与节点的重复度有关。

(1) k-1次B样条曲线P(t)在无重复的节点处至少是C^{k-2}连续；

例子：4阶(3次)B样条曲线，在节点重复度1处是C^2连续的。

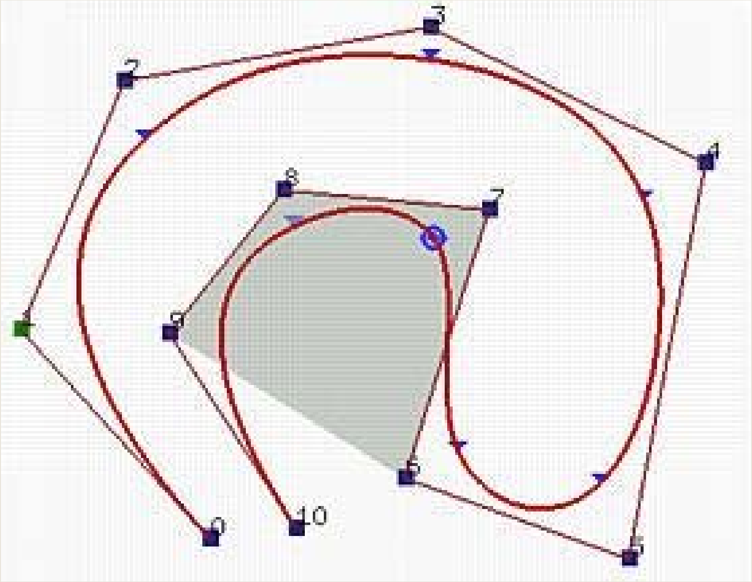
(2) B样条曲线节点重复度增加 1，节点处的连续性降低 1 阶.

B样条曲线的性质

● **凸包性**

◆ P(t)在区间 (t_i,t_{i+1}), $k-1 \leqq i \leqq n$ 上的部分位于k个点 $\mathbf{P_{i-k+1},\ldots,P_i}$ 的凸包 $\mathbf{C_i}$内。

◆ 整条曲线位于各凸包Ci的并集之内。



影响曲线上一点的控制点的凸包

B样条曲线的性质

- 变差缩减性

考虑平面内 n+1 个控制顶点 构成B样条曲线 P(t) 的特征多边形。该平面内的任意一条直线与 P(t) 的交点个数不多于该直线和特征多边形的交点个数。

- 直线保持性

控制多边形退化为一条直线时， 曲线也退化为一条直线。

B样条曲线的性质

- 仿射不变性

$$A[P(t)]=\sum_{i=0}^{n}A[P_i]N_{i,k}(t),\quad t\in[t_{k-1},t_{n+1}]$$

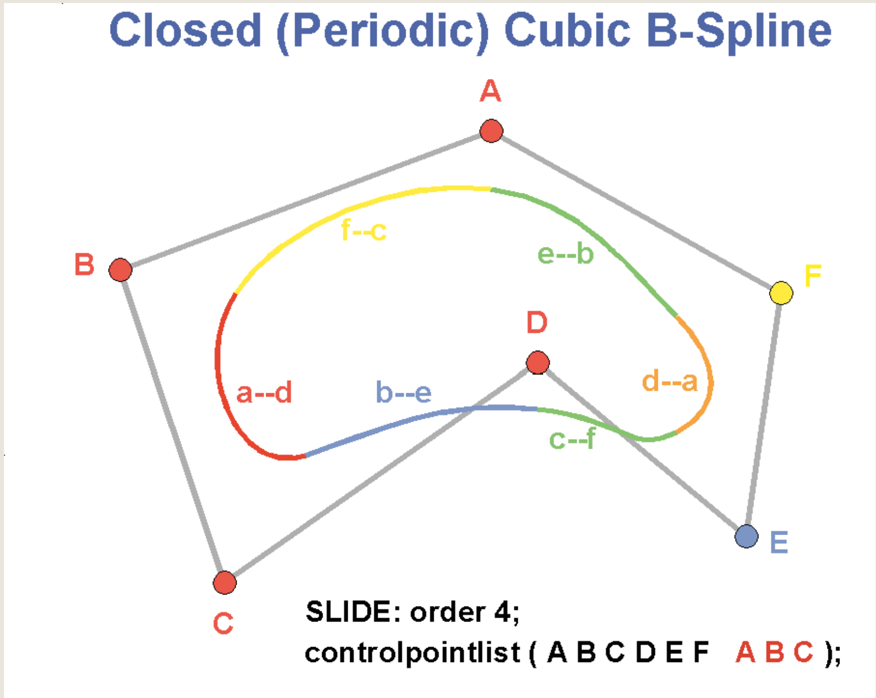
即在仿射变换下，表达式具有形式不变性。

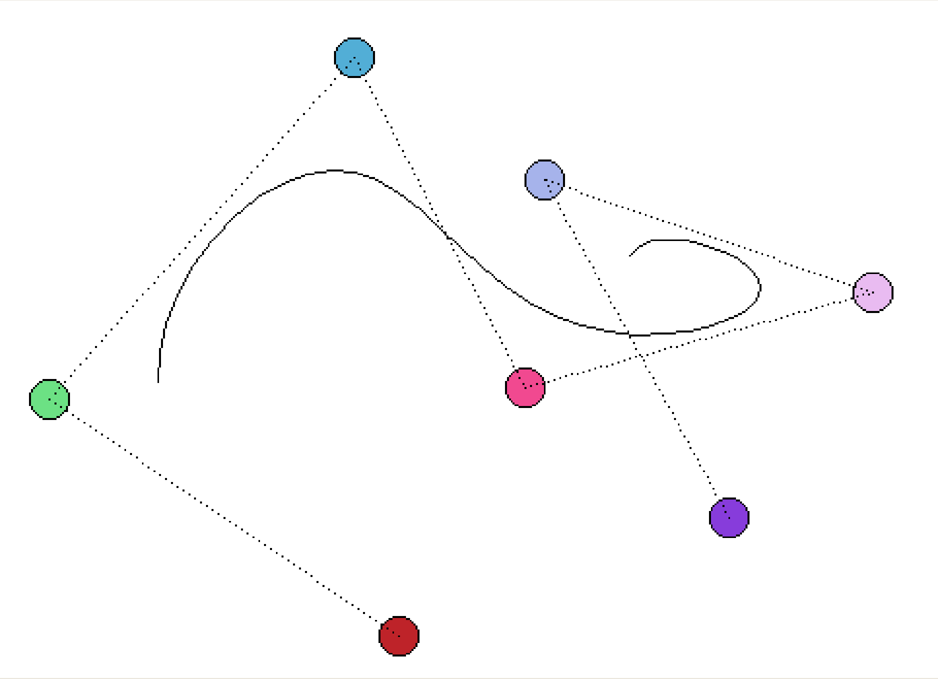
仿射变换是保持共线性(一条直线上的点变换后仍在一条直线上)，保持长度比例(经变换后一个线段的中点任然是中点)的变换，包括平移，放缩，错切，旋转，翻转等，p点的仿射变换是：

$$F(p) = Ap + q$$

B样条曲线类型的划分

- 曲线按其首末端点是否重合，分为闭曲线和开曲线。





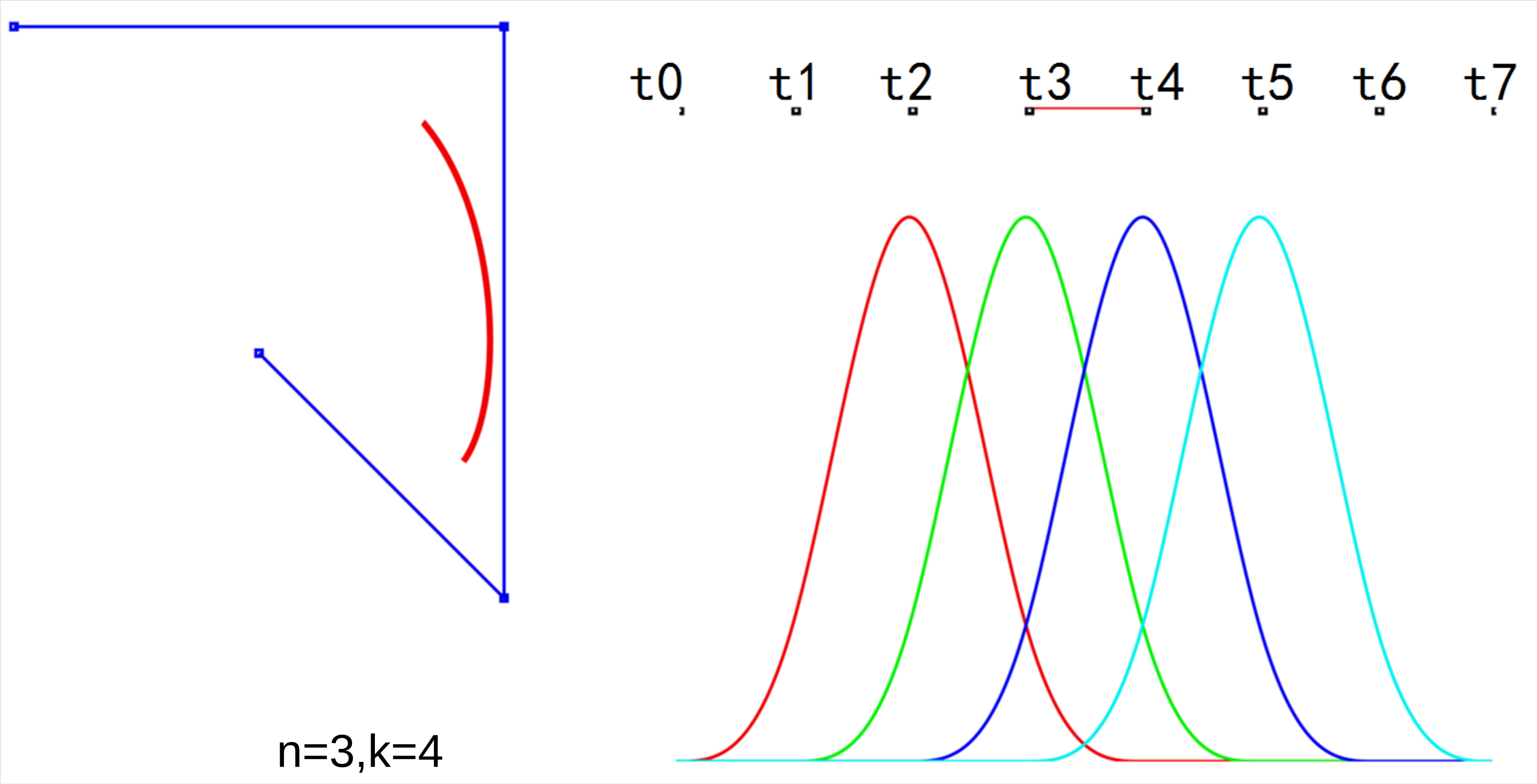
B样条曲线类型的划分

- B 样条曲线按其节点矢量中节点的分布情况，分为四种类型：
  - 均匀B样条曲线
  - 准均匀B样条
  - 分段**Bézier**曲线
  - 非均匀B样条曲线

B样条曲线类型的划分

◆1.均匀B样条曲线

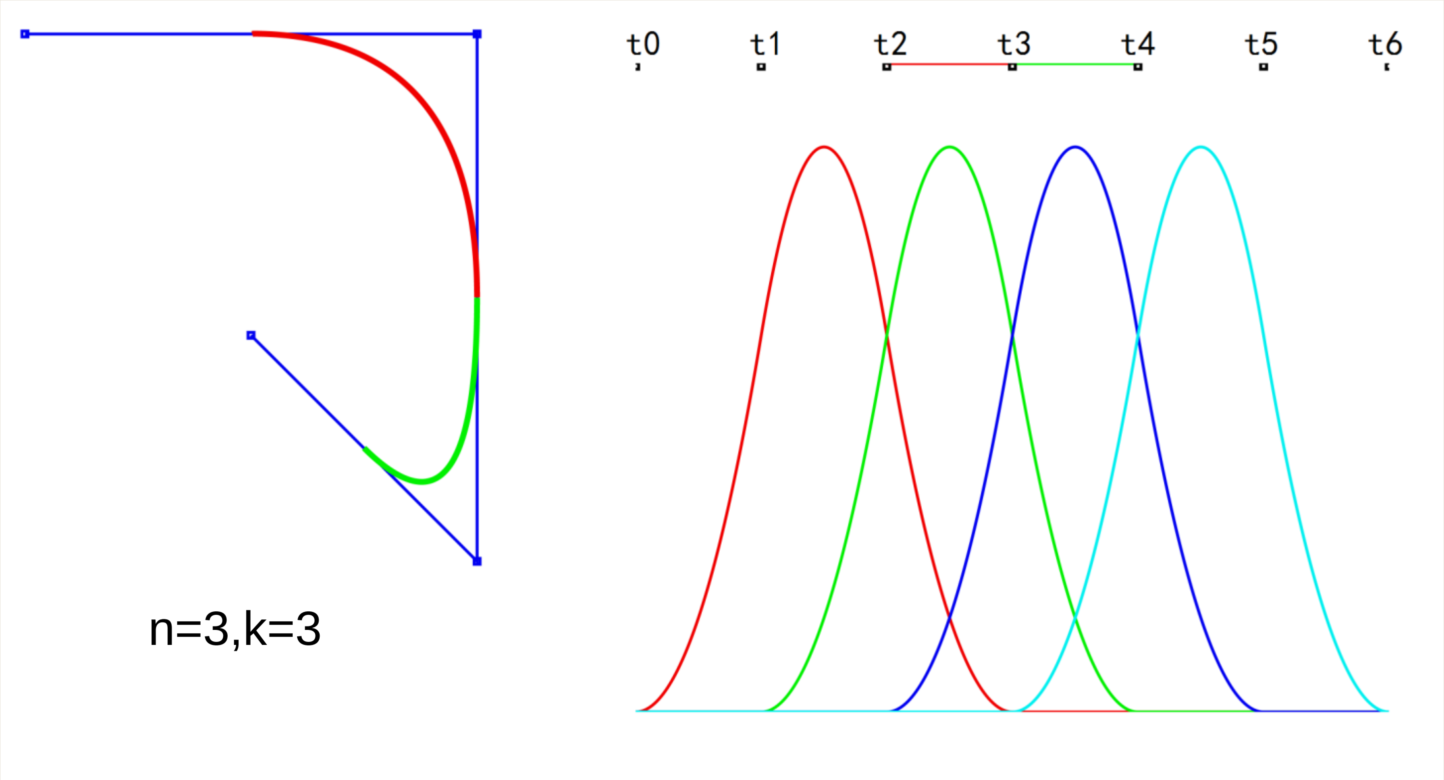
➢ 节点矢量中节点沿参数轴均匀分布



B样条曲线类型的划分

◆ 1.均匀B样条曲线（续）

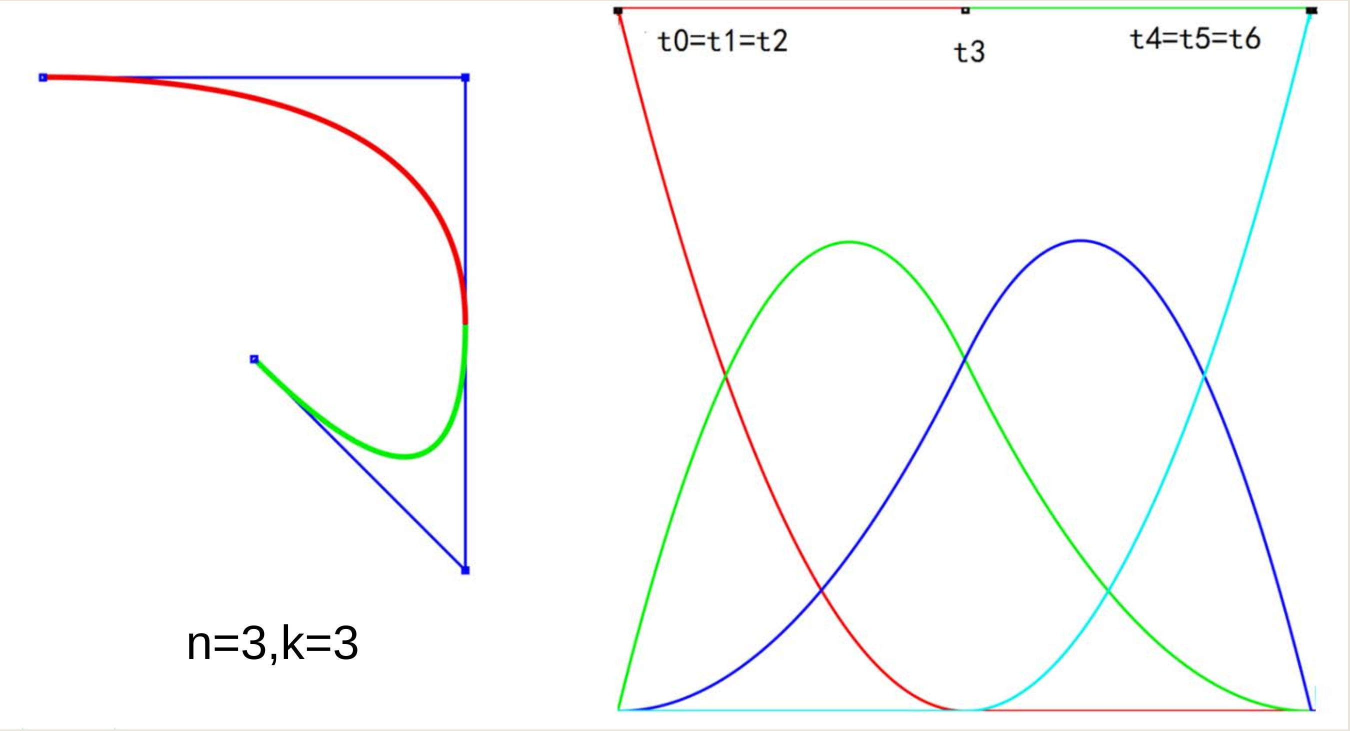
➢均匀B样条曲线不具有**Bezier**曲线端点的几何性质，即样条曲线的首末端点不是控制多边形的首末端点。



B样条曲线类型的划分

◆ 2. 准均匀B样条

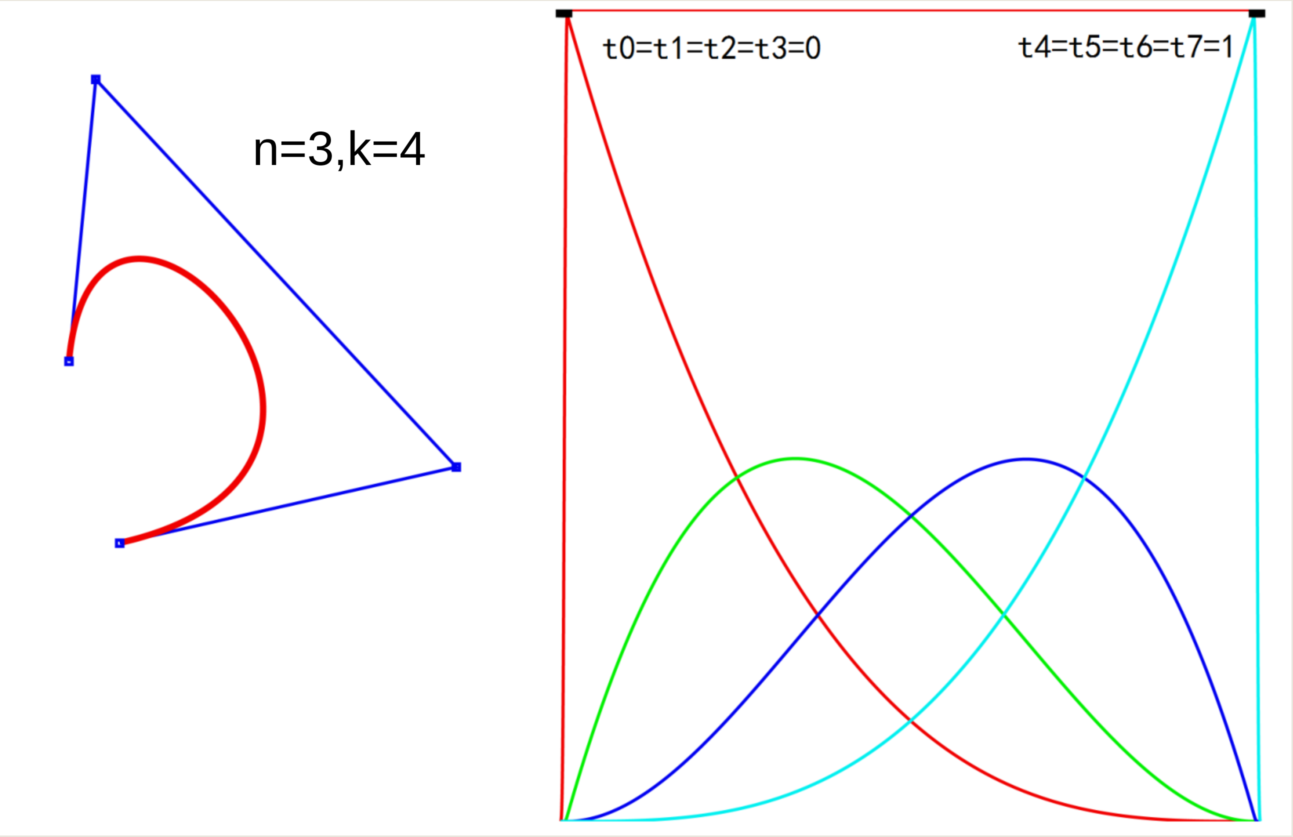
➢ 准均匀B样条曲线在两端节点具有重复度k，具有端点插值和端点切线的性质。



B样条曲线类型的划分

- 2. 准均匀B样条（续）

例子： n=3, k=4的准均匀的B样条曲线。



B样条曲线类型的划分

◆ 2. 准均匀B样条(续)

例子： n=3, k=4的准均匀的B样条曲线。

$$P(u) = N_{0,4}(u)\, P_0 + N_{1,4}(u)\, P_1 + N_{2,4}(u)\, P_2 + N_{3,4}(u)\, P_3$$

节点矢量：T= (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)

$$N_{0,4}(u) = 1 - 3u + 3u^2 - u^3$$

$$N_{1,4}(u) = 3u - 6u^2 + 3u^3$$

$$N_{2,4}(u) = 3u^2 - 3u^3$$

$$N_{3,4}(u) = u^3$$

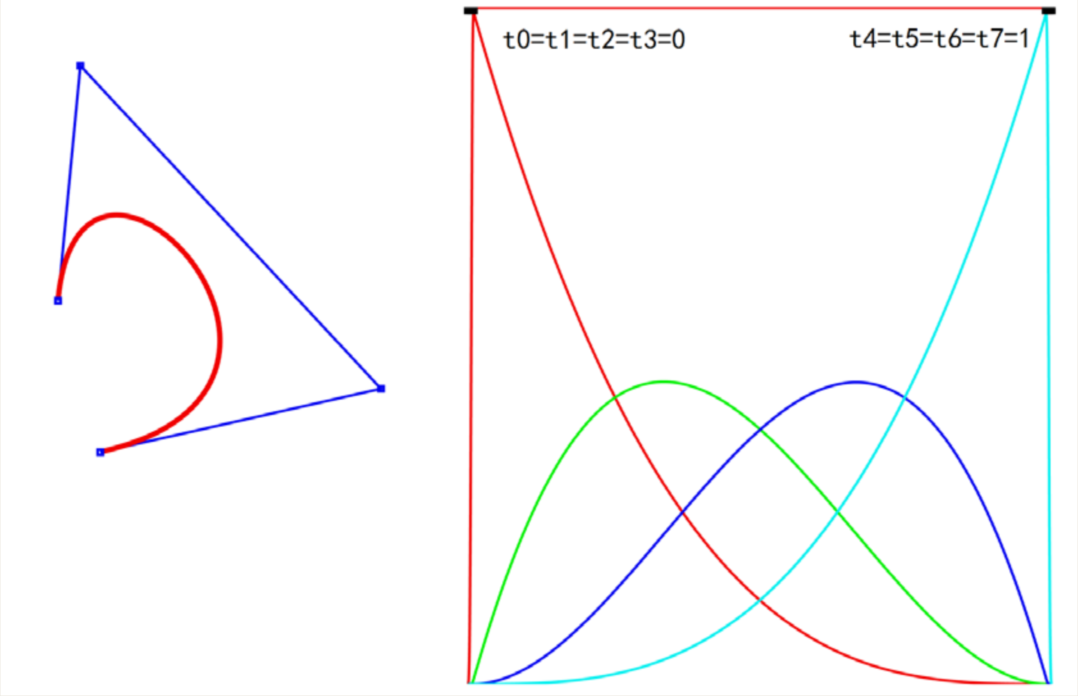
因此P(u)是一条3次Bezier曲线

B样条曲线类型的划分

◆ 2. 准均匀B样条（续）

➢ 对 k 阶B样条,在两端具有重复度k的节点矢量称为clamped 节点矢量,该B样条曲线称为clamped B样条曲线。

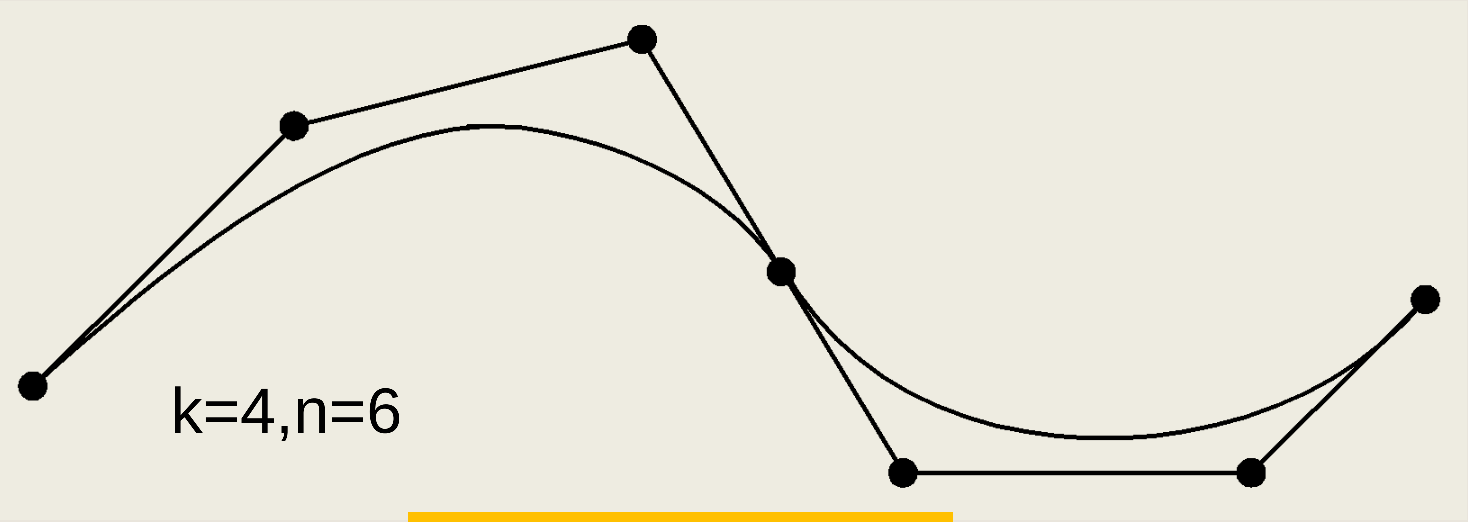
➢ 只有1段多项式的clamped B样条曲线是1条Bezier曲线。



B样条曲线类型的划分

◆ 3. 分段Bezier曲线

节点矢量中两端节点具有重复度k，所有内节点重复度为k-1，这样的节点矢量定义了分段的Bernstein基。



t0=t1=t2=t3=0
t4=t5=t6
t7=t8=t9=t10=1

B样条曲线类型的划分

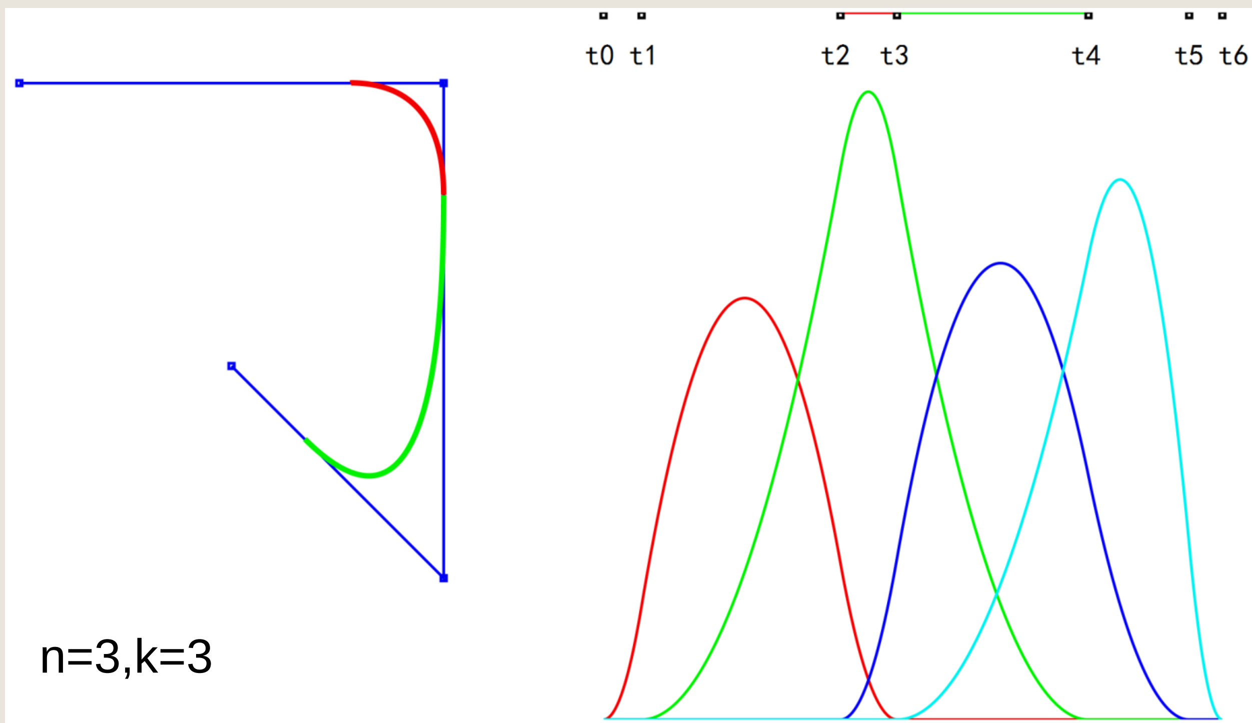
◆ 3. 分段Bezier曲线(续)

- **B样条曲线用分段Bezier曲线表示后，各曲线段就具有了相对的独立性，移动曲线段内的一个控制顶点只影响该曲线段的形状，对其它曲线段的形状没有影响。**
- **Bezier曲线一整套简单有效的算法都可以原封不动地采用.**

B样条曲线类型的划分

◆ 4. 非均匀B样条曲线

任意分布的节点矢量$T=[t_0,t_1,t_2,\ldots,t_{n+k}]$，只要在数学上成立（节点序列非递减，两端节点重复度≤k，内节点重复度≤k-1）都可选取。这样的节点矢量定义了非均匀B样条基。



B样条曲线的造型

●造型的灵活性

B样条曲线的交互控制手段：

1）控制点

2）B样条基函数

请看视频

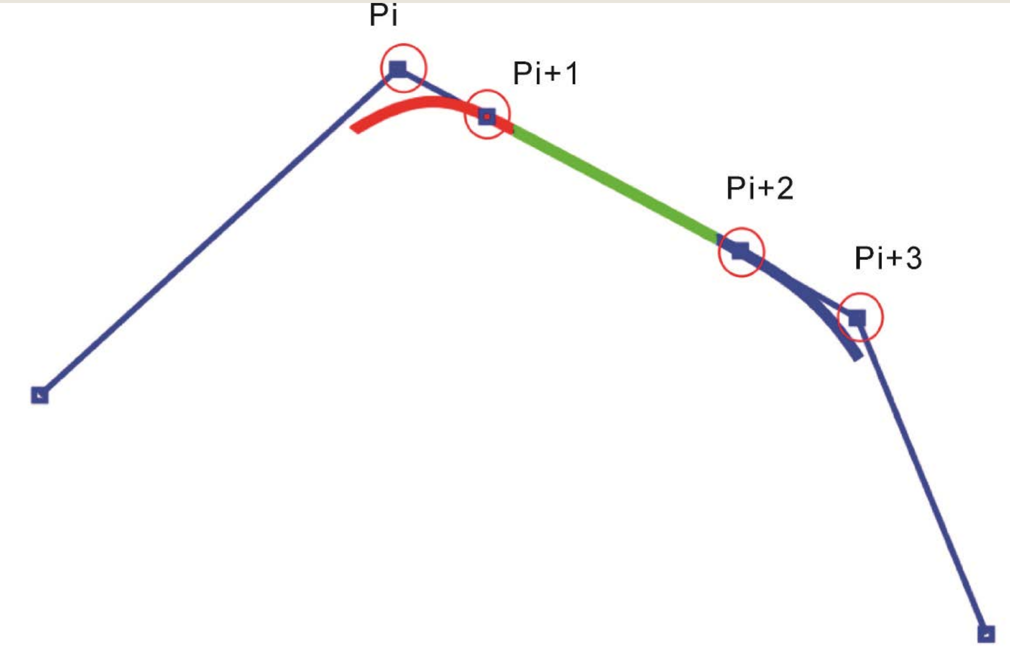
B样条曲线的造型

- 造型的灵活性

用B样条曲线可以构造直线段、尖点、切线等特殊情况.

(1)直线段的构造：

4 阶（3次）B样条曲线，若要在其中得到1条直线段，只要 $\mathbf{P_i}$, $\mathbf{P_{i+1}}$,$\mathbf{P_{i+2}}$,$\mathbf{P_{i+3}}$ 四点位于一条直线上.

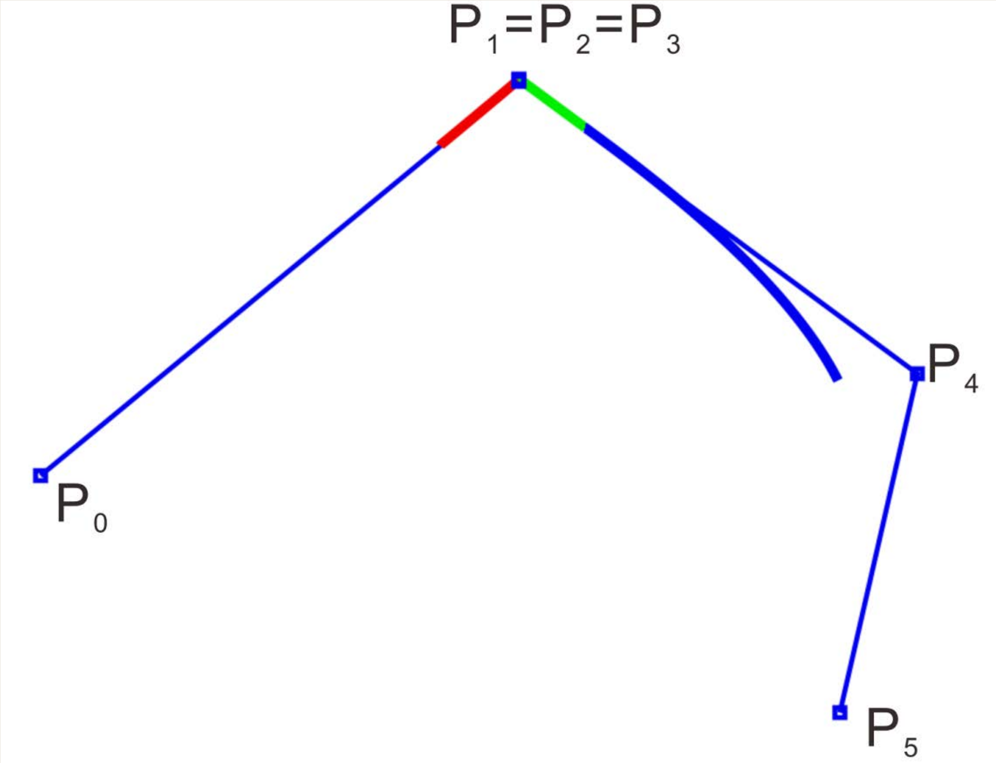


B样 条 曲 线 的 造 型

- 造型的灵活性

(2)尖点的构造（方法1）：重复控制点

4阶（3次）B样条曲线，为了使P(t)能过P_i点，只要使控制点P_i, P_{i+1},P_{i+2} 重合。

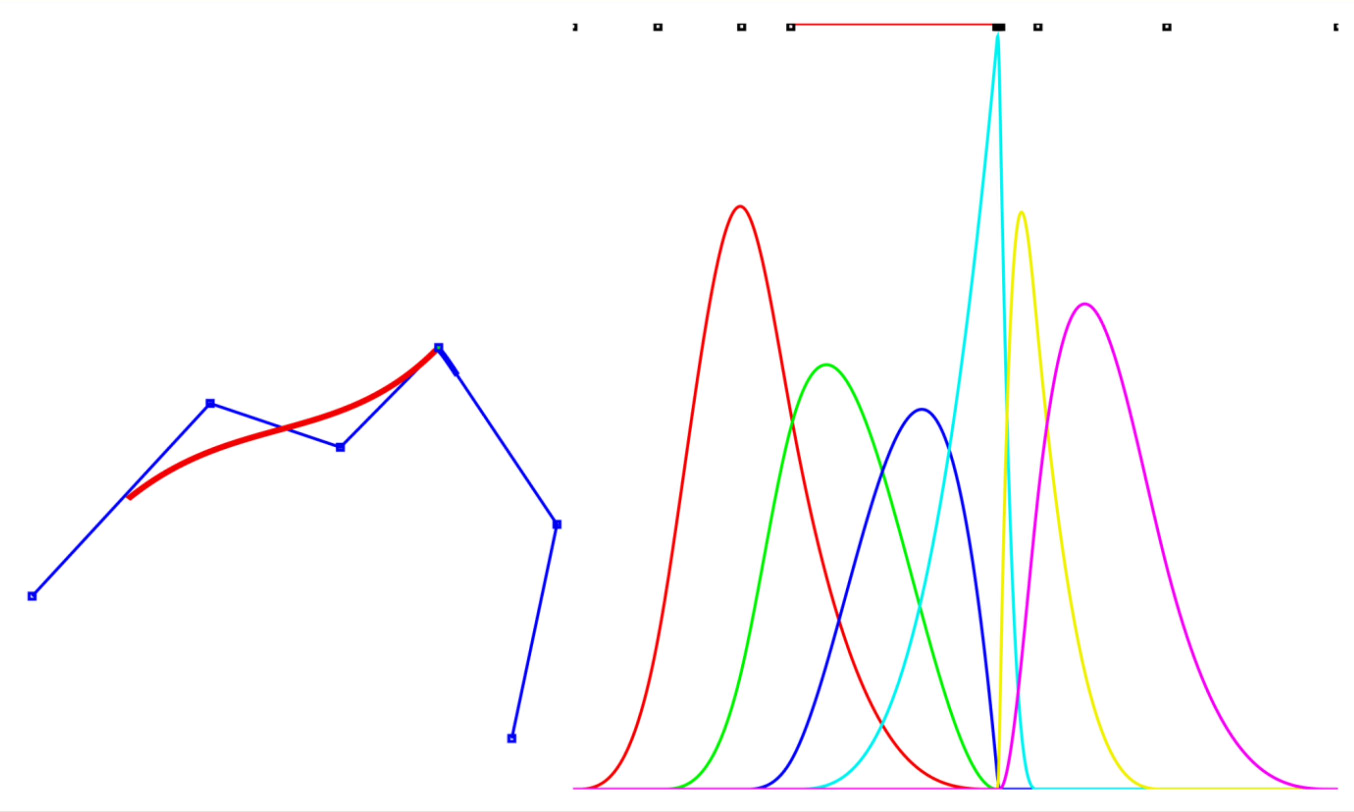


B样条曲线的造型

- 造型的灵活性

(2)尖点的构造（方法2）：重复节点

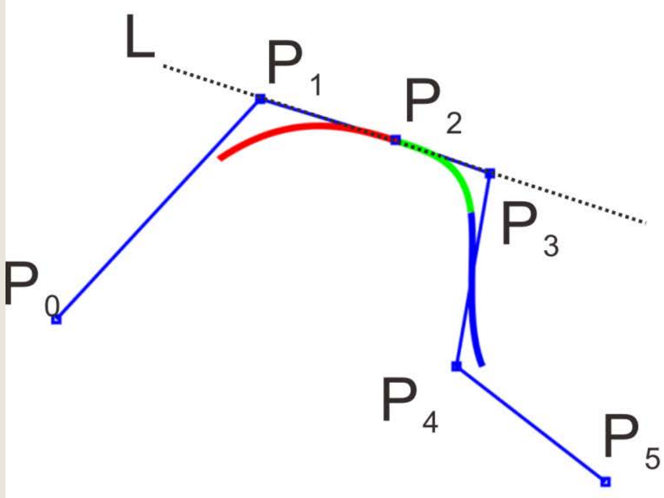
4阶（3次）B样条曲线，尖点可通过3重节点的方法得到

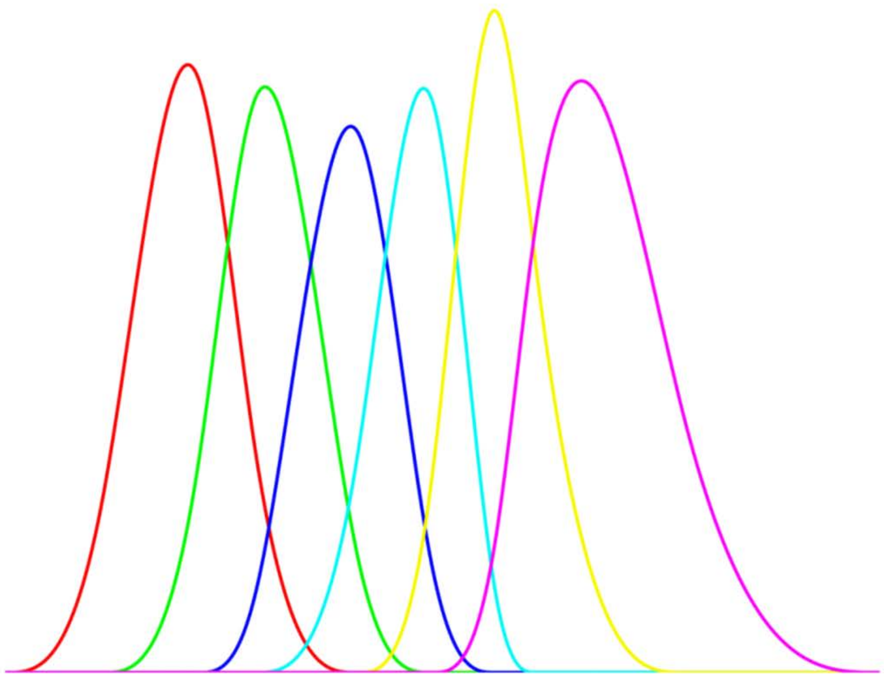


B样条曲线的造型

- 造型的灵活性

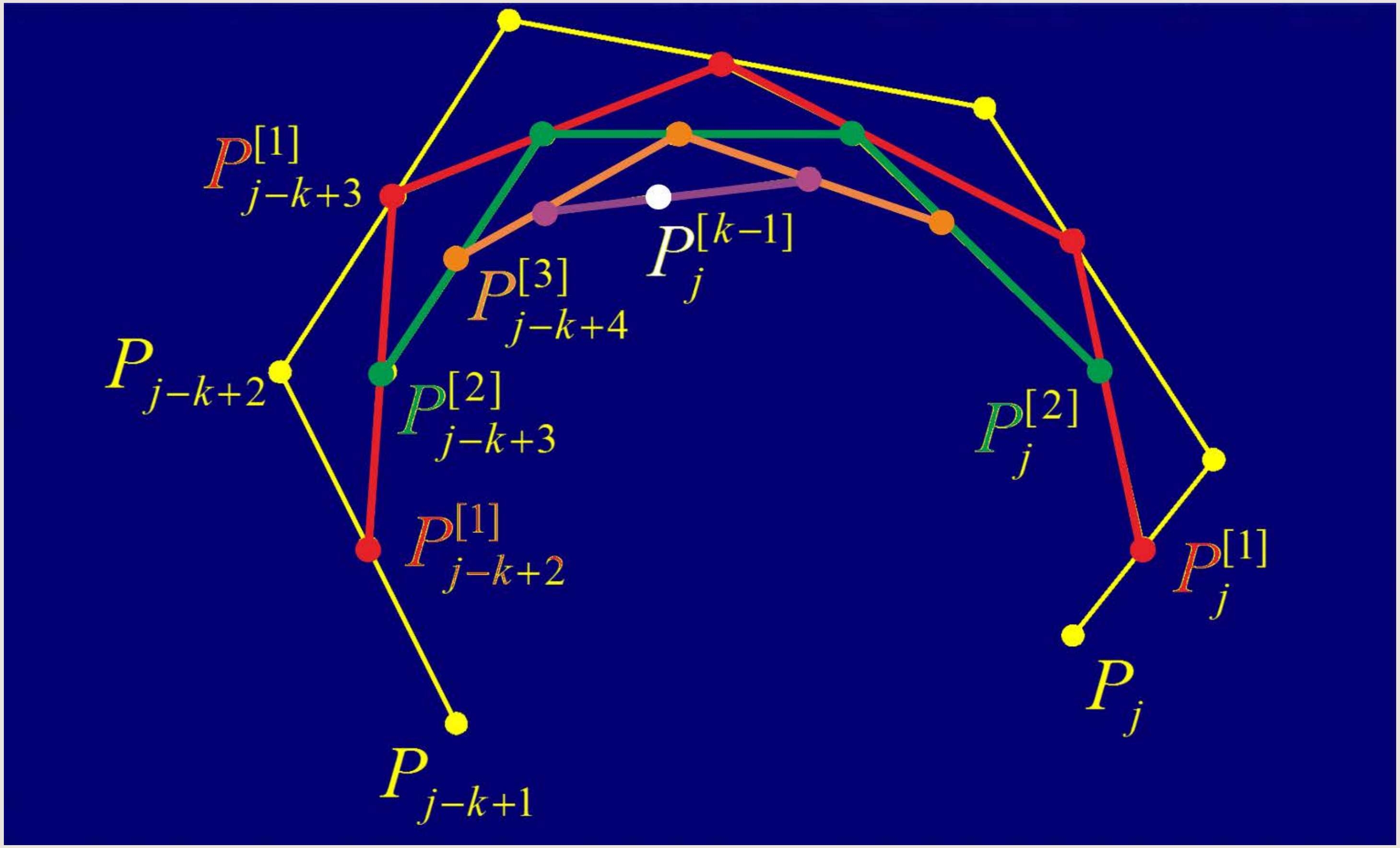
(3)切线的构造：4阶（3次）B样条曲线，为了使曲线和某一直线L相切，只要取P_i, P_{i+1},P_{i+2}位于L上及t_{i+3}的重数不大于2.





de Boor 算法

- 欲计算B样条曲线上对应一点P(t)，可以利用B样条曲线方程，但是采用de Boor 算法，计算更加快捷。



de Boor 算法

- de Boor 算法的递推关系如图

$$
\begin{array}{ccccccc}
P_0 & & & & & & \\
P_1 & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
P_{j-k+1} & & & & & & \\
P_{j-k+2} & \rightarrow & P_{j-k+2}^{[1]} & & & & \\
P_{j-k+3} & \rightarrow & P_{j-k+3}^{[1]} & \rightarrow & P_{j-k+3}^{[2]} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
P_j & \rightarrow & P_j^{[1]} & \rightarrow & P_j^{[2]} & & P_j^{[k-1]} \\
\vdots & & & & & & \\
P_n & & & & & &
\end{array}
$$

de Boor 算法

- De Boor 算法的几何意义
  - ◆ de Boor算法有着直观的几何意义——割角，即以线段 $P_i^{[r]}P_{i+1}^{[r]}$割去角 $P_i^{[r-1]}$。
  - ◆ 从多边形 $P_{j-k+1}P_{j-k+2}\ldots P_j$ 开始，经过 k-1 层割角，最后得到P(t)上的点$P_j^{[r-1]}$

B样条曲面

- 给定参数轴u和v的节点矢量

$U=[u_0,u_1,\ldots,u_{m+p}]$

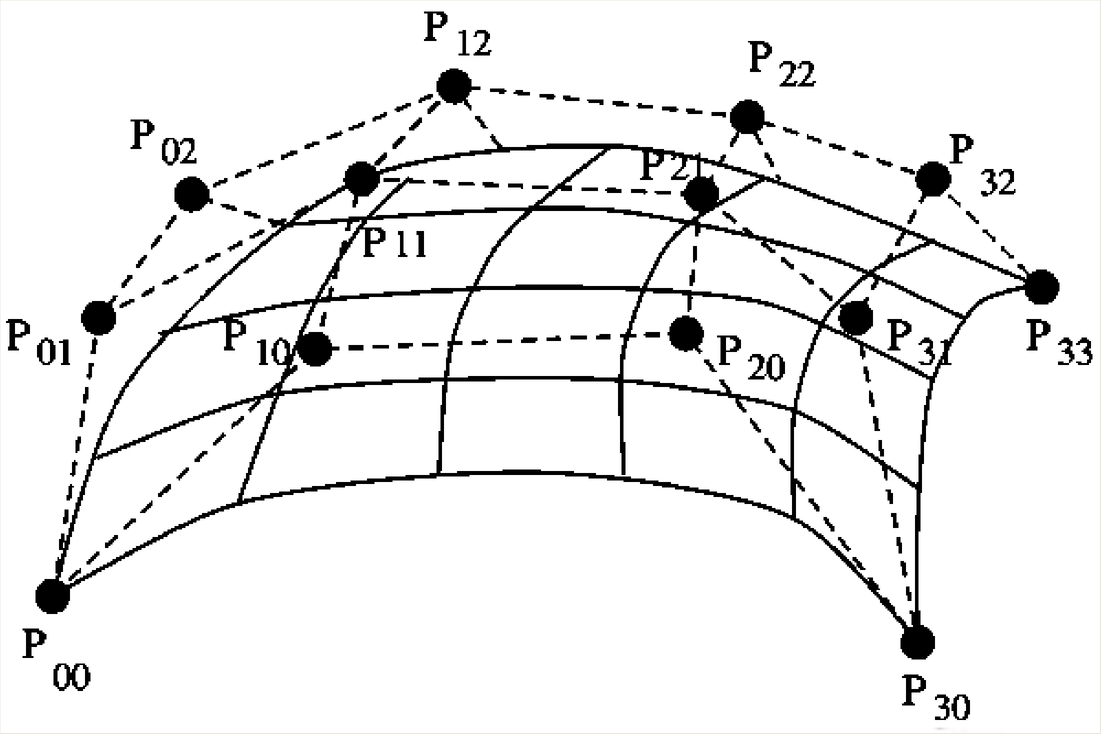
$V=[v_0,v_1,\ldots,v_{n+q}]$

定义B样条基函数 $N_{i,p}(u)$ 和 $N_{j,q}(v)$， 分别由节点矢量U和V按deBoor-Cox递推公式决定。

B样条曲面

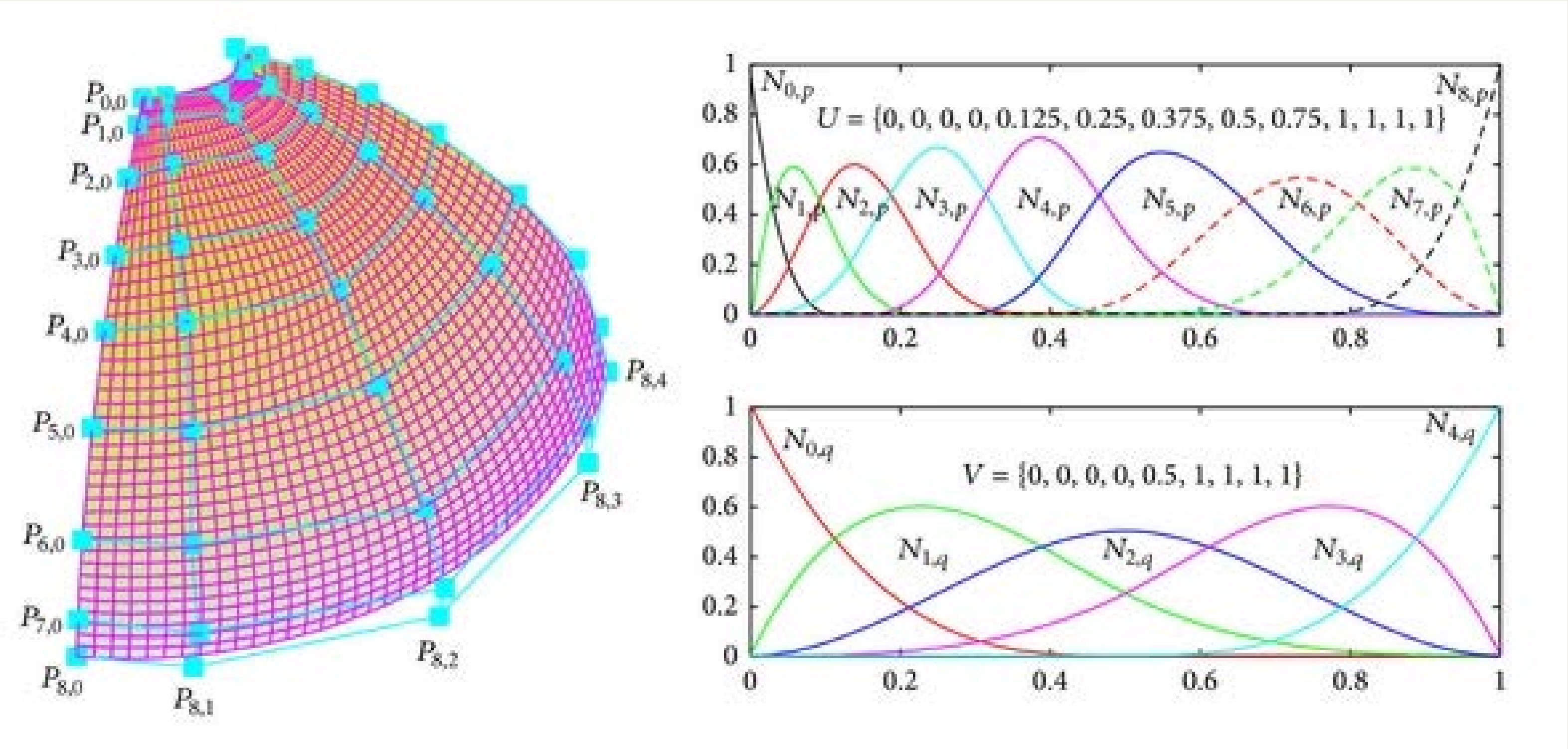
- P_{ij} 构成一个四边形网格，称为B样条曲面的**控制网格。**
- **p×q 阶B样条曲面**定义如下

$$S(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{ij}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)$$



B样条曲面

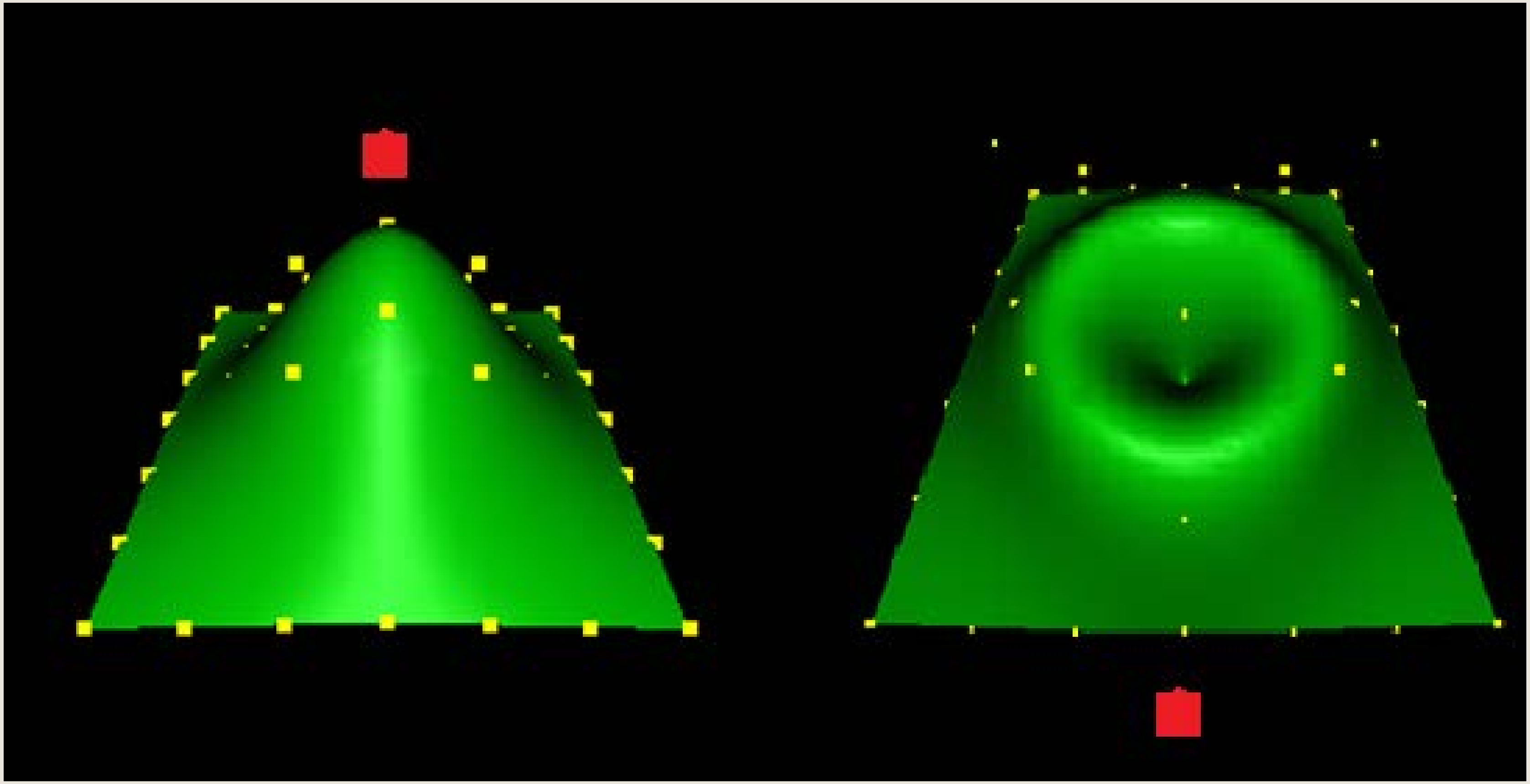
- 例子



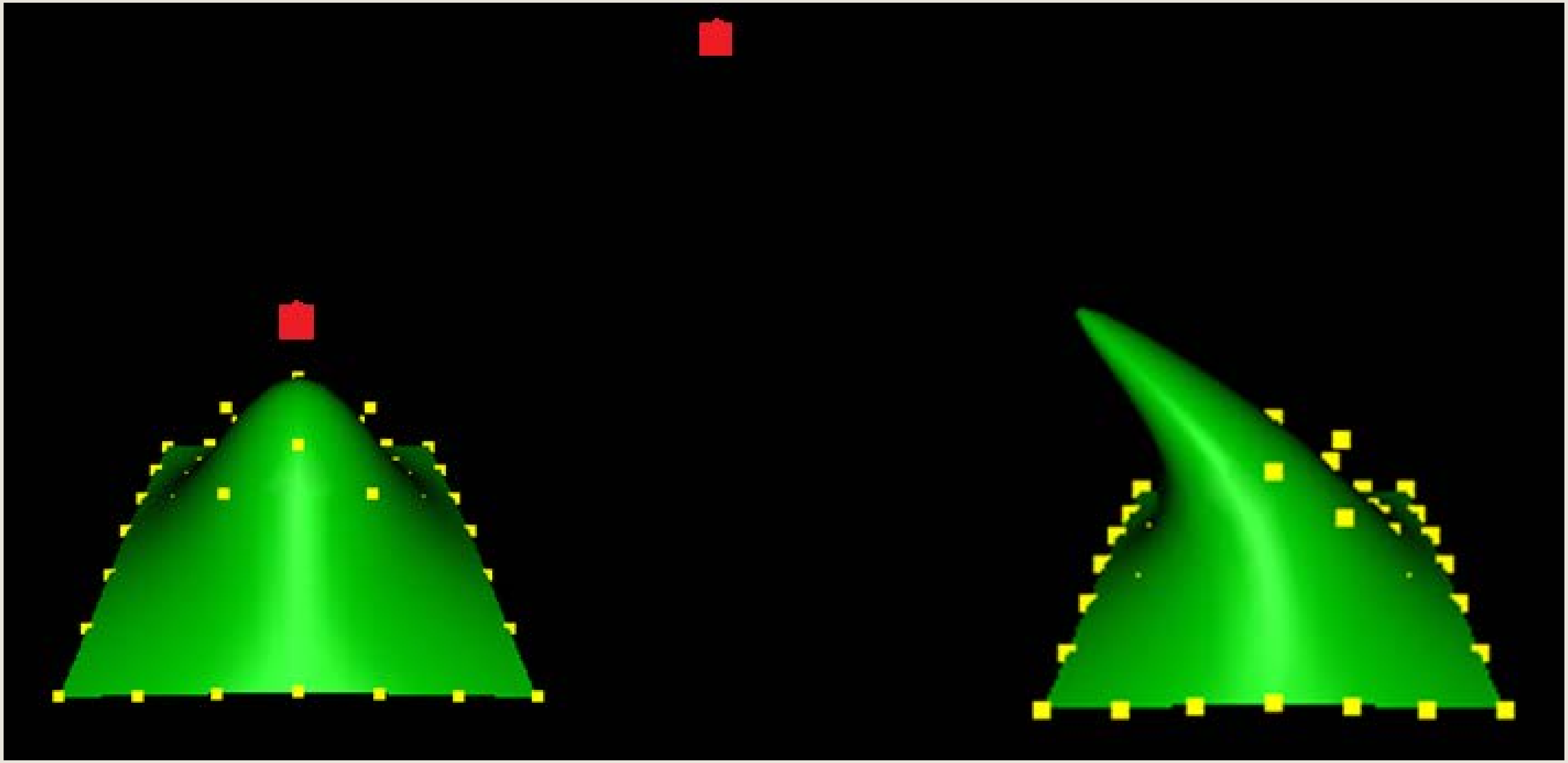
$P_{0,0}$
$P_{1,0}$
$P_{2,0}$
$P_{3,0}$
$P_{4,0}$
$P_{5,0}$
$P_{6,0}$
$P_{7,0}$
$P_{8,0}$
$P_{8,1}$
$P_{8,2}$
$P_{8,3}$
$P_{8,4}$
$U = \{0, 0, 0, 0, 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.75, 1, 1, 1, 1\}$
$N_{0,p}$ $N_{1,p}$ $N_{2,p}$ $N_{3,p}$ $N_{4,p}$ $N_{5,p}$ $N_{6,p}$ $N_{7,p}$ $N_{8,p}$
$V = \{0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1\}$
$N_{0,q}$ $N_{1,q}$ $N_{2,q}$ $N_{3,q}$ $N_{4,q}$
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1

B样条曲面

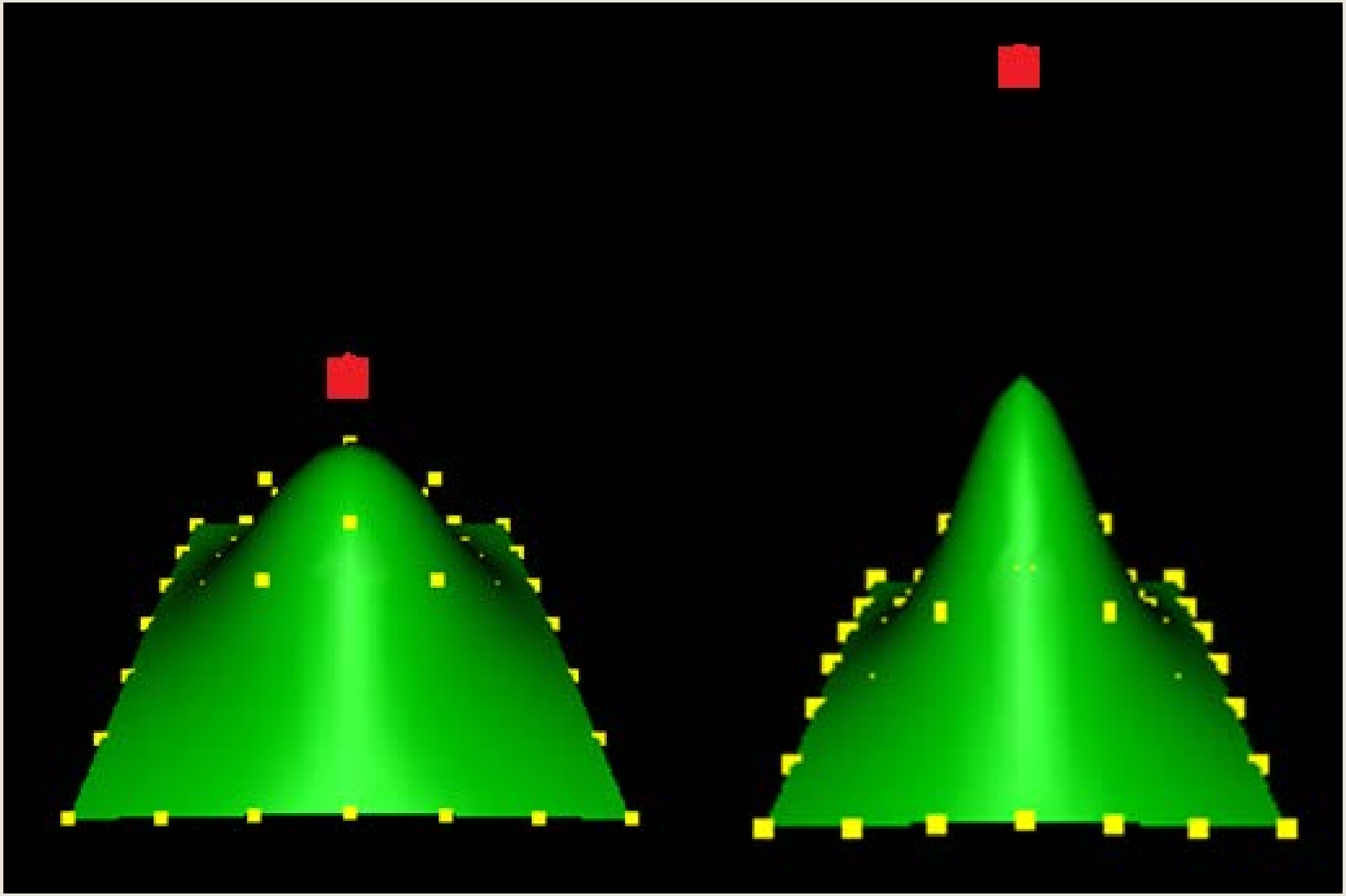
- 调整中间的控制点的位置



B样条曲面

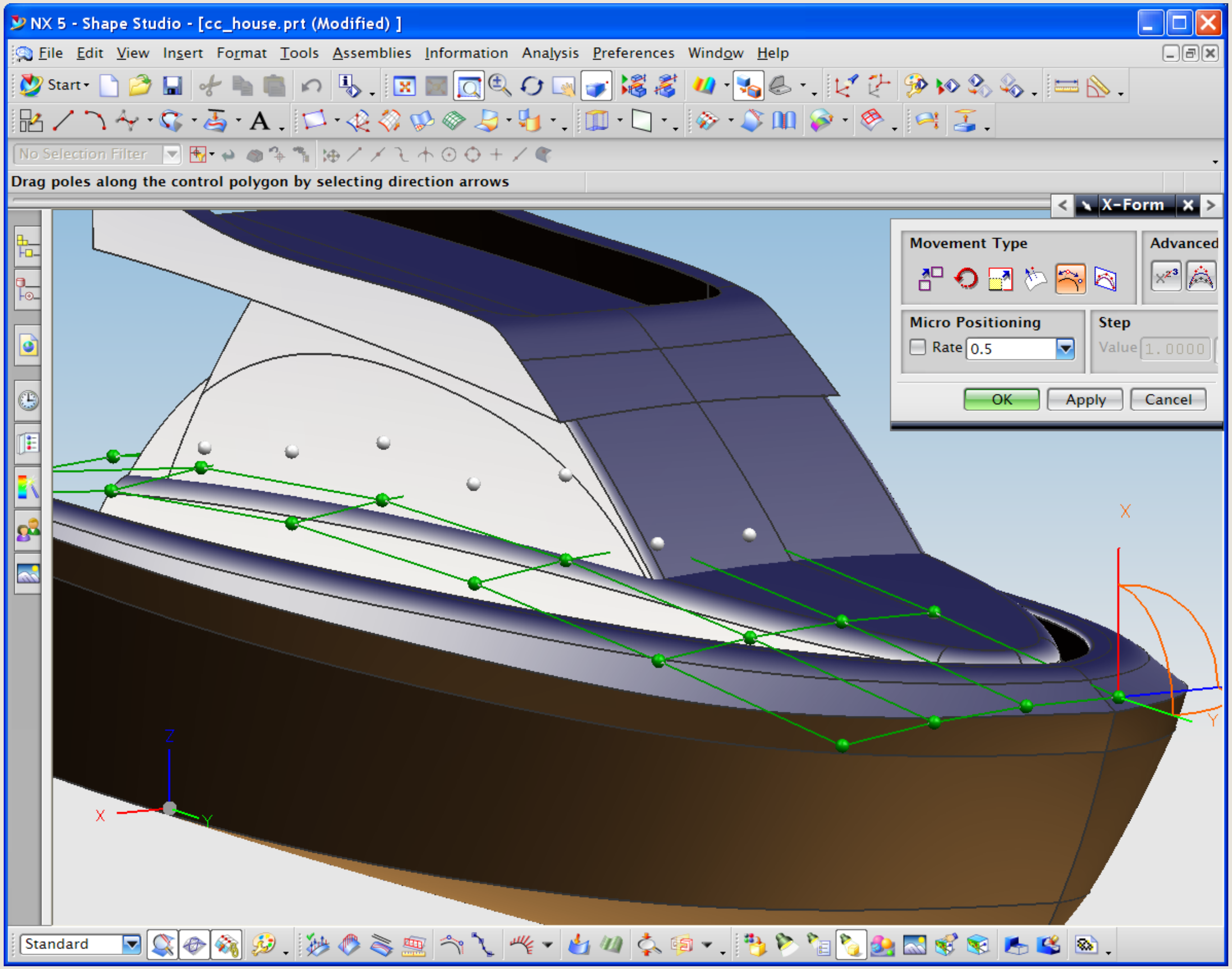


B样条曲面



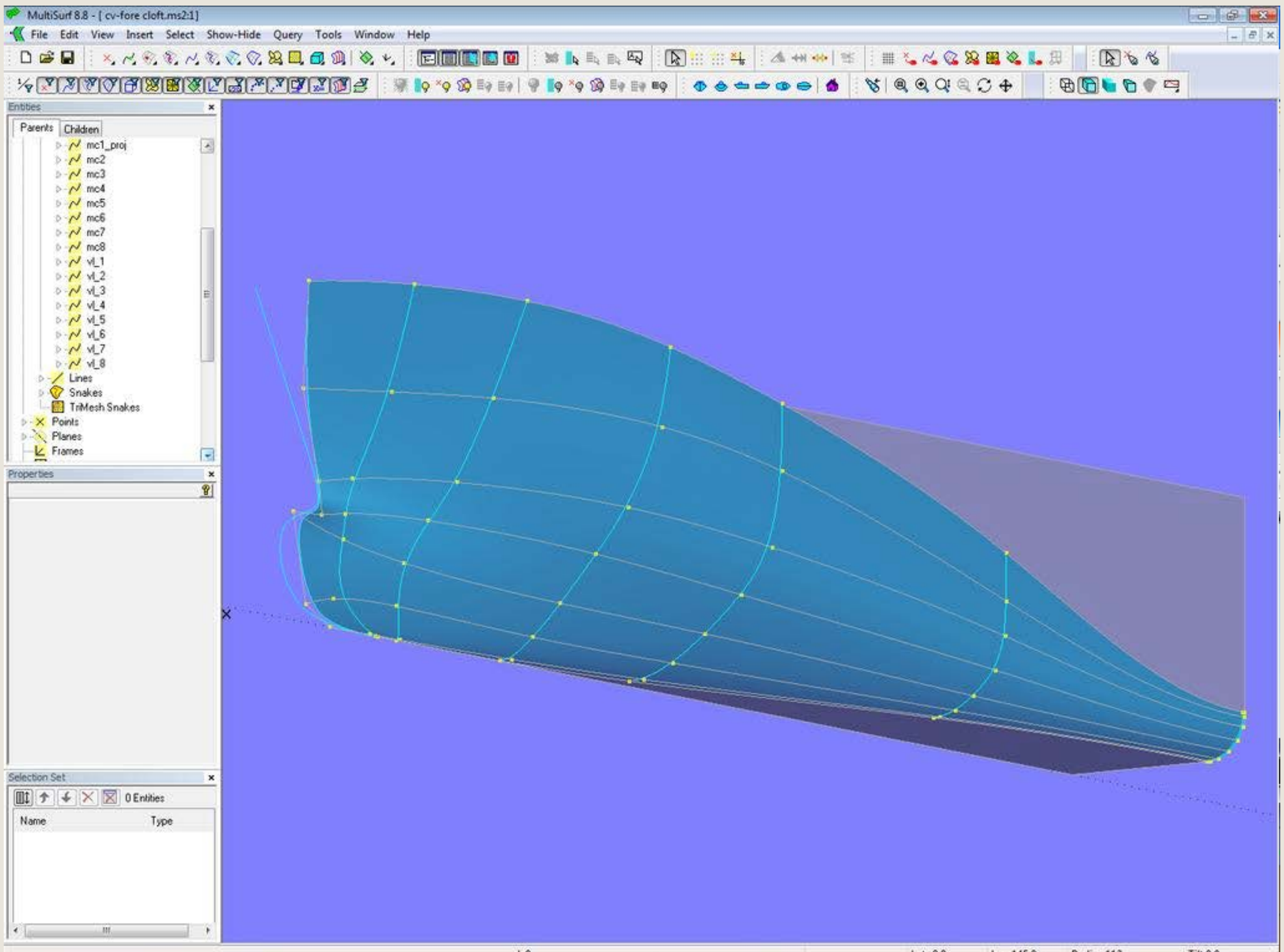
B样条曲面

工业应用： ship hull design



B样条曲面

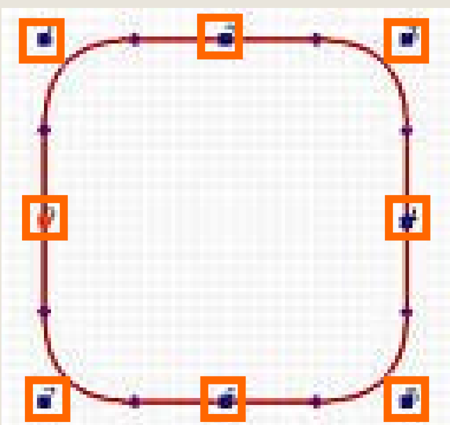
工业应用： **ship hull design**



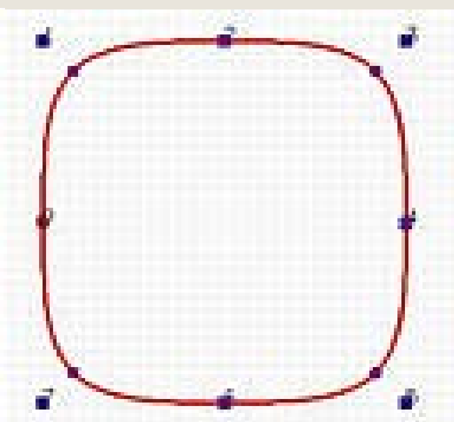
B样条的表达能力

- **B样条难以表示精确的圆**
- **圆圈只能用有理函数表示(函数的分子和分母都是多项式函数)**

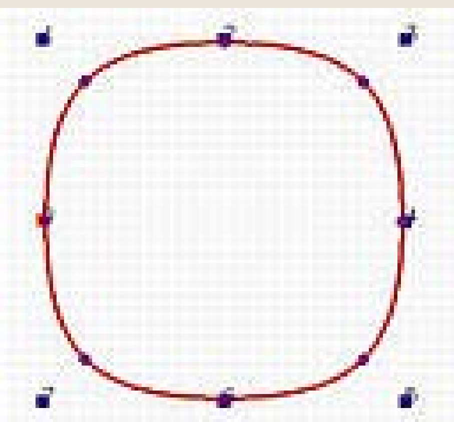
four closed B-spline curves with 8 control points:



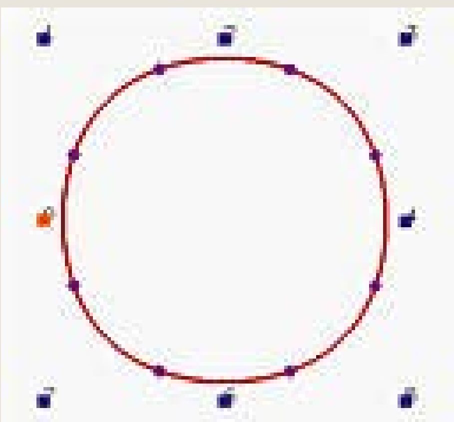
Degree 2



Degree 3



Degree 5



Degree 10

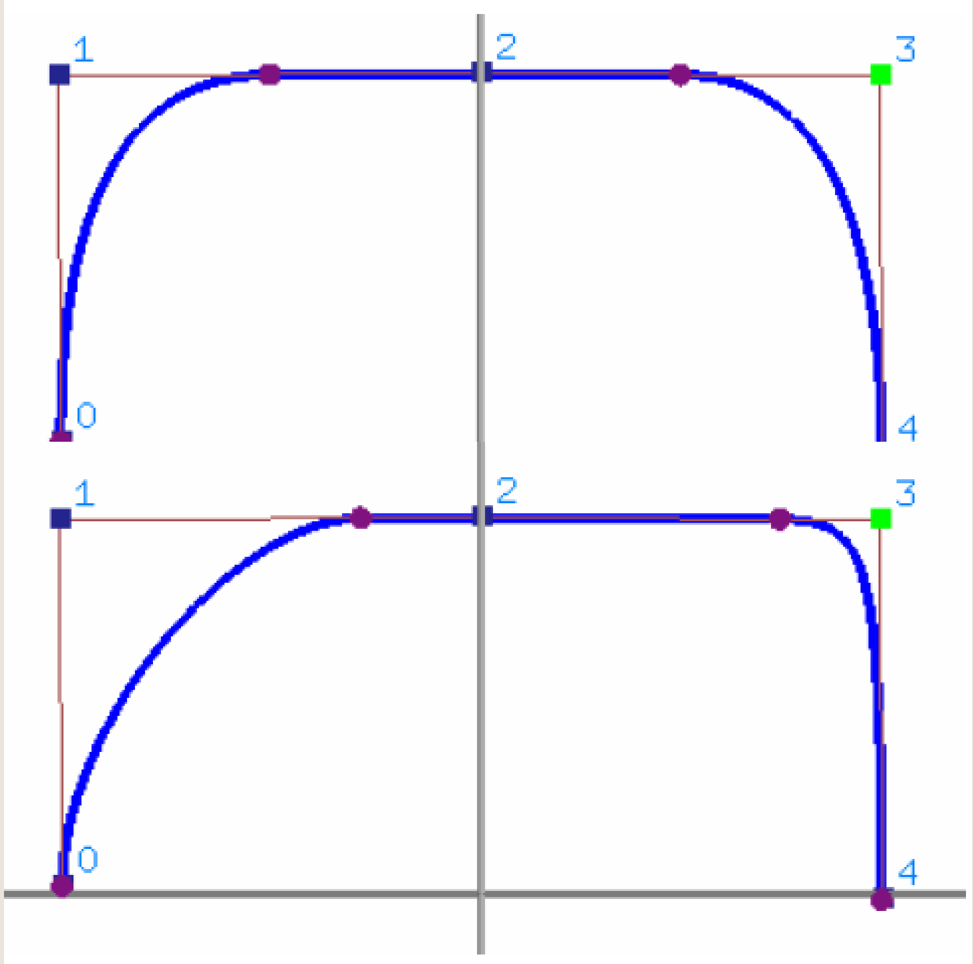
非均匀有理B样条

增加形状参数，增强B样条的表示能力

- 想法：不同的控制点具有不同的权重

NURBS

- 控制点 P_i 的不同权重使得控制点对曲线产生不同的"引力"作用。



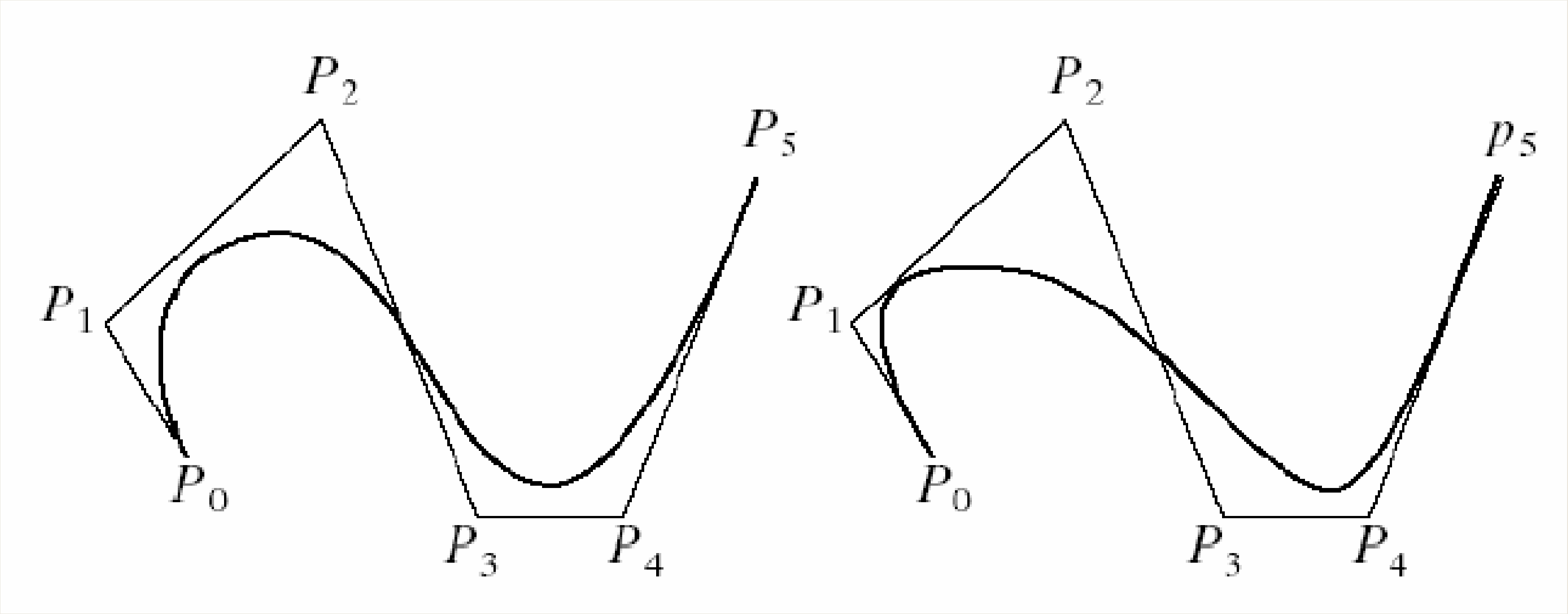
W_i=1

W_1=0.4

W_3=3.0

NURBS

- 控制点 P_i 的不同权重使得控制点对曲线产生不同的"引力"作用。



$W_i=1$　　　　$W_0=W_2=W_3=W_5=1,\ W_1=W_4=4$

非均匀有理B样条

- 方法： 使用齐次坐标将B样条推广到有理B样条，得到非均匀有理B样条，是目前的工业标准。

Non-Uniform Rational B-Splines

(NURBS)

NURBS

- B-spline曲线: 给定 n+1 个控制点P_0, P_1, ..., P_n 和 节点向量$U = \{ u_0, u_1, ..., u_m \}$, p次 B-spline 曲线为:

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u)\mathbf{P}_i$$

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

将控制点P*i* 乘以权重 *wi*

$$\mathbf{P}_i^w = \begin{bmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i z_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^w(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \begin{bmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i z_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

采用齐次坐标的B样条曲线的控制点

NURBS

$$\mathbf{C}^w(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \begin{bmatrix} w_i x_i \\ w_i y_i \\ w_i z_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}^w(u) = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u)(w_i x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u)(w_i y_i) \\ \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u)(w_i z_i) \\ \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) w_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{n} R_{i,p}(u)\mathbf{P}_i$$

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\frac{N_{i,p}(u) w_i}{\sum_{j=0}^{n} N_{j,p}(u) w_j}}_{R_{i,p}(u)} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

NURBS曲线

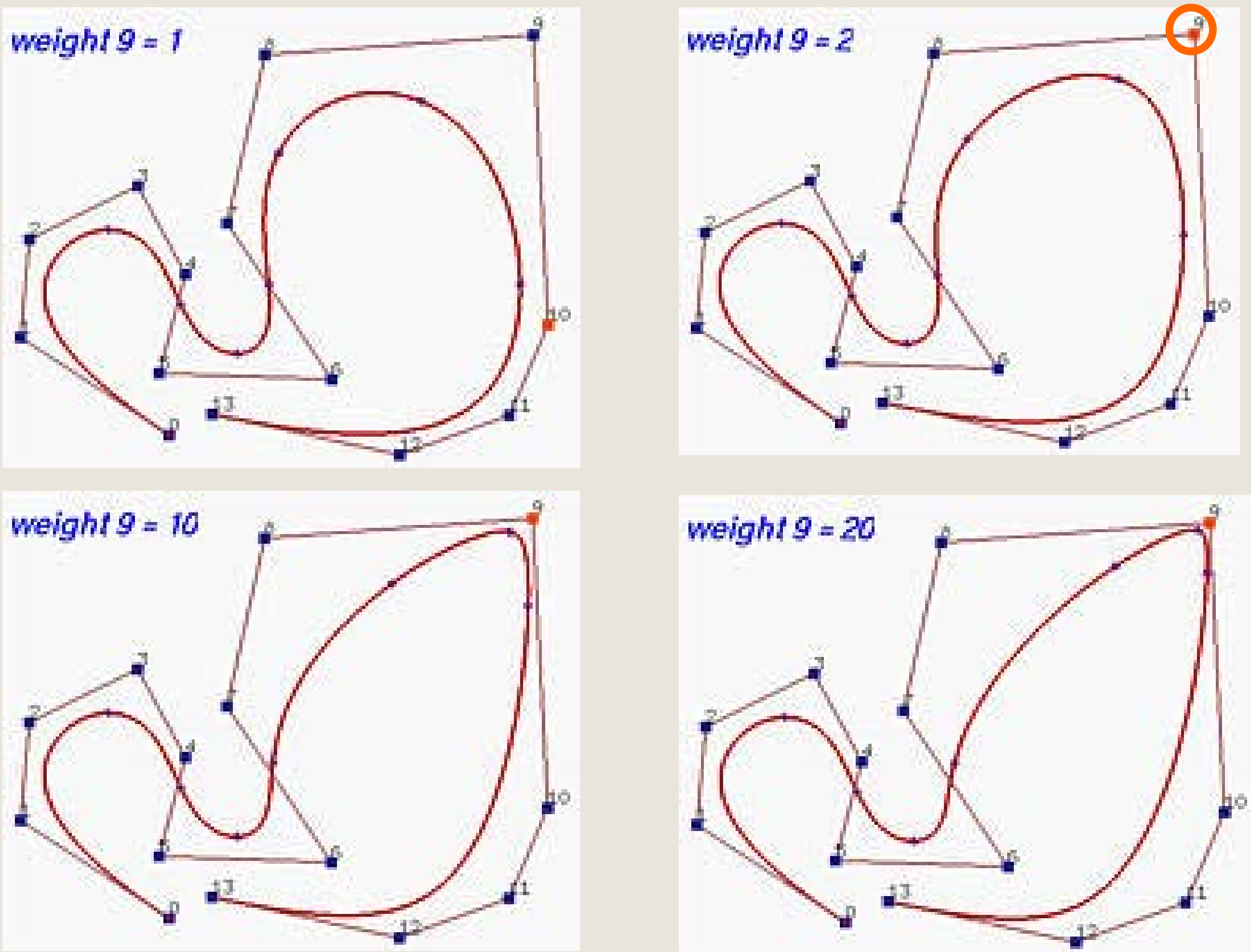
$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{n} R_{i,p}(u)\mathbf{P}_i$$

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{j=0}^{n} N_{j,p}(u)w_j}$$

1. 如果所有的权重是1, 一个 NURBS 曲线变成一个 B-spline 曲线.
2. NURBS 曲线是有理的 (Rational).

修改权重的影响

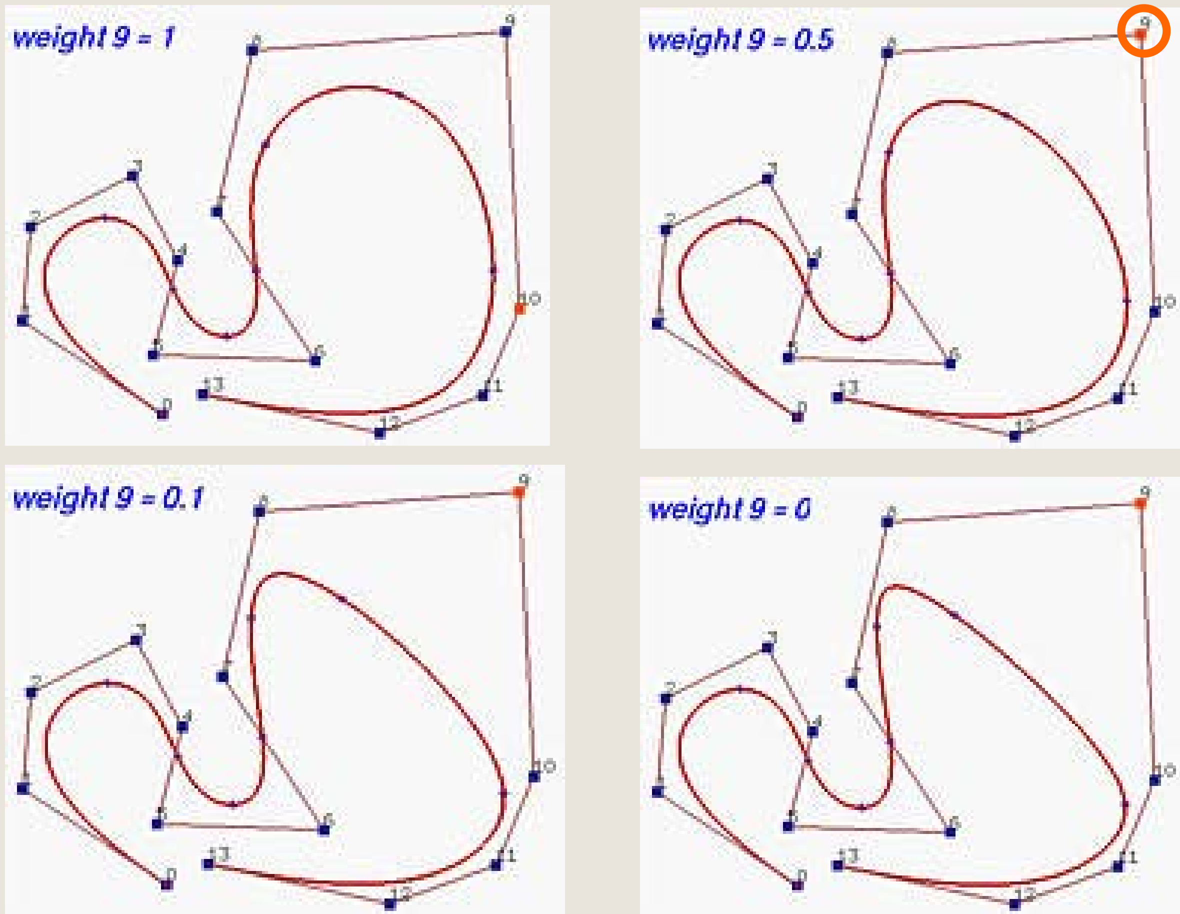
- 修改权重: 增加 w_i 的值会将曲线拉向控制点 $\mathbf{P}_i$



a NURBS curve of degree 6 and its NURBS basis functions. The selected control point is **P**9.

修改权重的影响

- 修改权重: 减小权重 w_i 会把曲线从控制点$\mathbf{P}_i$ 推开.

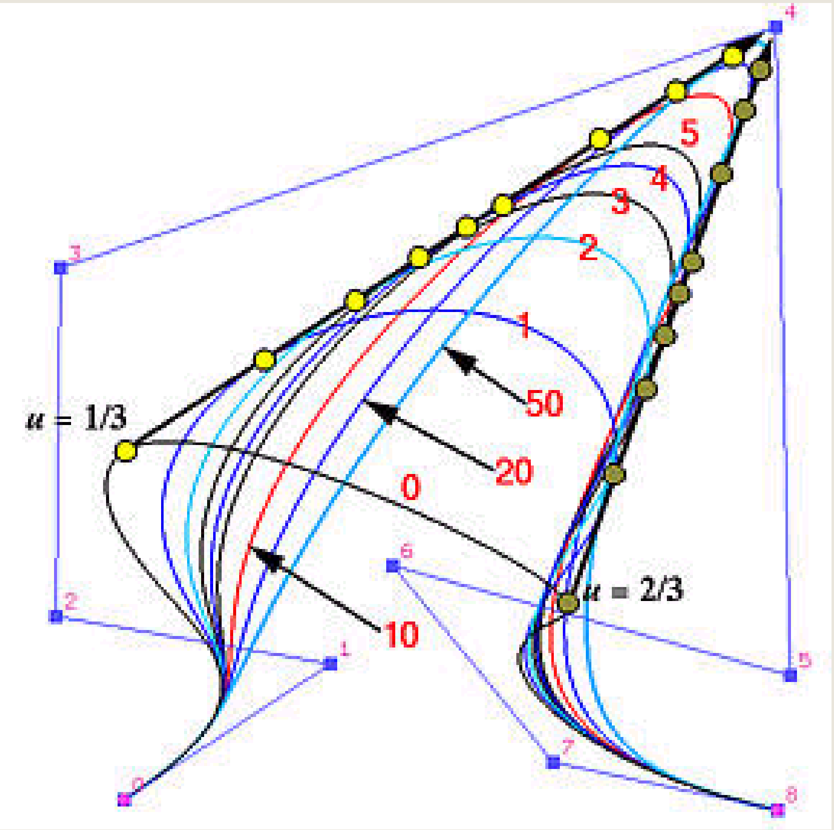


If a weight becomes zero, the coefficient of P_i is zero and, control point P_i has no impact on the computation of $C(u)$ for any u (i.e., P_i is "disabled").

修改权重的影响

$u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_6$	u_7	u_8	$u_9 = u_{10} = u_{11} = u_{12} = u_{13} = u_{14} = u_{15}$
0	1/3	2/3	1

- 一个6次 NURBS曲线，9 个控制点 ($\boldsymbol{n} = 8$)，16 个节点 ($\boldsymbol{m} = 15$) .
- 控制点P_4对应的基函数 $N_{4,6}(u)$ 在区间 $[u_4, u_{4+6+1}) = [0,1)$内非零， 因此修改w_4影响整条曲线.



本章结束

NURBS 基函数的性质

1. $R_{i,p}(u)$是 参数u的p次有理函数
2. 非负性 -- For all i and p, $R_{i,p}(u)$ is nonnegative
3. 局部支撑性 -- $R_{i,p}(u)$ is a non-zero on $[u_i,u_{i+p+1})$
4. 在节点区间$[u_i, u_{i+1})$内 至多 p+1 个 p次基函数不为零
5. Partition of Unity –区间 $[u_i, u_{i+1})$内所有非零的 p 次基函数的和等于 1

NURBS 基函数的性质

6. 假设节点点数目是m+1, B样条基函数的次数 p, 基函数数目n+1, 则有 $\boldsymbol{m = n + p + 1}$.

7. 基函数 $\mathrm{R}_{\mathrm{i,p}}(\mathrm{u})$ 是多段p 次有理函数的拼接，拼接点在 $[\mathrm{u}_{\mathrm{i}}, \mathrm{u}_{\mathrm{i+p+1}})$ 内的节点上.

8. 在重复度 *k的节点上*, 基函数$R_{i,p}(u)$ 是 $\boldsymbol{C^{p-k}}$ **连续的.**

9. *如果* $w_i = c$ for all i, 这里c是非零常数,则有 $R_{i,p}(u) = N_{i,p}(u)$

NURBS 曲线的性质

1. NURBS 曲线 $C(u)$ 是分段 p 次有理曲线.
2. 等式 $m = n + p + 1$ 一定满足.
3. 采用两端具有重复度p+1的节点矢量，NURBS 曲线 $C(u)$ 的端点和首尾控制点P_0，P_n 重合.
4. NURBS曲线具有凸包性.
5. NURBS曲线具有局部控制性.
6. C(u) 在 重复度k 的节点处是 C^{p-k} 连续的.
7. B-spline 曲线和 Bézier 曲线 是 NURBS 曲线的特殊形式.

de Boor 算法

- de Boor 算法的推导

  计算P(t)， $t_j \leqq t \leqq t_{j+1}$

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iN_{i,k}(t)=\sum_{i=j-k+1}^{j}P_iN_{i,k}(t)$$

$$=\sum_{i=j-k+1}^{j}P_i\left[\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}N_{i,k-1}(t)+\frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}}N_{i+1,k-1}(t)\right]$$

$$=\sum_{i=j-k+2}^{j}\left[\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}P_i+\frac{t_{i+k-1}-t}{t_{i+k-1}-t_i}P_{i-1}\right]N_{i,k-1}(t)\qquad t\in[t_j,t_{j+1}]$$

de Boor 算法

- 现令

$$
P_i^{[r]}(t)=\begin{cases} P_i, r=0, i=j-k+1, j-k+2,\dots,j \\ \dfrac{t-t_i}{t_{i+k-r}-t_i}P_i^{[r-1]}(t)+\dfrac{t_{i+k-r}-t}{t_{i+k-r}-t_i}P_{i-1}^{[r-1]}(t), \\ \qquad r=1,2,\dots,k-1; i=j-k+r+1, j-k+r+2,\dots,j \end{cases}
$$

则

$$
P(t)=\sum_{i=j-k+1}^{j}P_iN_{i,k}(t)=\sum_{i=j-k+2}^{j}P_i^{[1]}(t)N_{i,k-1}(t)
$$

这就是著名的de Boor 算法

B样条曲线与曲面

- 如何理解B-样条？
  - 样条插值，三对角方程 (函数、参数)
  - 给定分划，所有的B样条的全体组成一个线性空间，线性空间有基函数，这就是B样条基函数
  - 由B样条基函数代替Bezier曲线中的Bernstein基函数，即B样条曲线。

Java applet

https://cs.uwaterloo.ca/~r3fraser/splines/bspline.html

http://www.cs.technion.ac.il/~cs234325/Applets/applets/bspline/GermanApplet.html

http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/curves.html#Bspline

B样条曲线

实例：B样条曲线例子：2阶 B样条曲线 (续)

现考虑第1段参数区间$[t_1,t_2]$:

该B样条曲线所有的基函数：

$$N_{0,2}(t),\ N_{1,2}(t),\ N_{2,2}(t), \ldots,\ N_{5,2}(t)$$

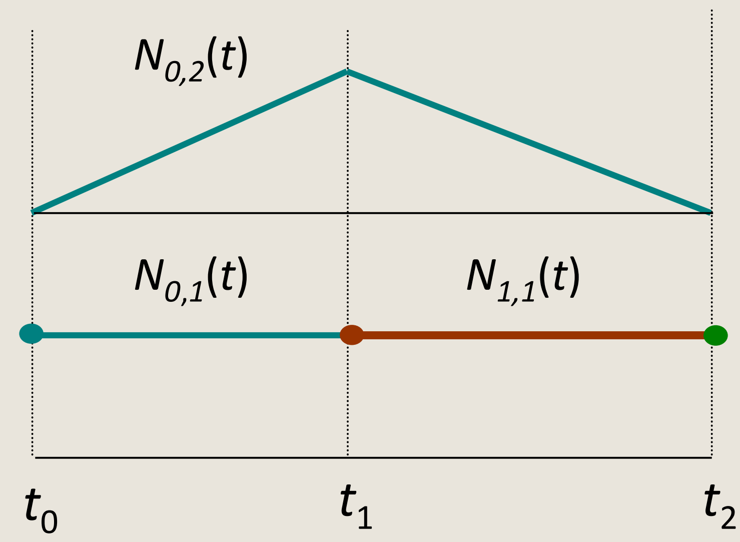
只有$N_{0,2}(t)$,$N_{1,2}(t)$在$[t_1,t_2]$内不为零

B样条曲线

实例：B样条曲线例子：2阶 B样条曲线 (续)

$$N_{0,2}(t)=\frac{t-t_0}{t_1-t_0}N_{0,1}(t)+\frac{t_2-t}{t_2-t_1}N_{1,1}(t)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{t-t_0}{t_1-t_0},t_0\le t<t_1\\ \boxed{\dfrac{t_2-t}{t_2-t_1},t_1\le t<t_2}\\ 0,,otherwise\end{cases}$$



$$N_{1,2}(t)=\frac{t-t_1}{t_2-t_1},t_1\le t<t_2$$

B样条曲线

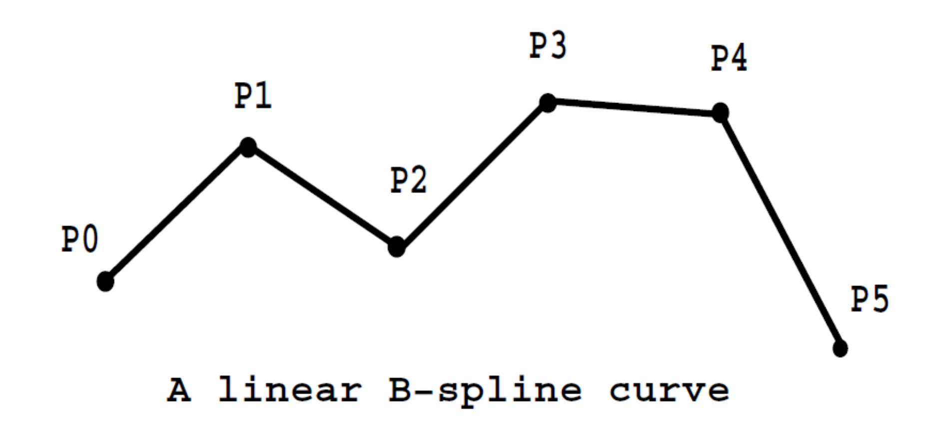
实例： B样条曲线例子：2阶 B样条曲线 (续)

考虑第1段参数区间$[t_1,t_2]$：只有$N_{0,2}(t)$,$N_{1,2}(t)$不为零，

$$\boxed{N_{0,2}(t)=\frac{t_2-t}{t_2-t_1},N_{1,2}(t)=\frac{t-t_1}{t_2-t_1}}$$

$$P(t)=P_0N_{0,2}(t)+P_1N_{1,2}(t)=P_0\frac{t_2-t}{t_2-t_1}+P_1\frac{t-t_1}{t_2-t_1}$$

$$=P_0(1-\frac{t-t_1}{t_2-t_1})+P_1\frac{t-t_1}{t_2-t_1}$$



B样条曲线类型的划分

- 3. 分段Bezier曲线

t0=t1=t2=t3=0
t4=t5=t6
t7=t8=t9=t10=1
k=4
n=6

证明：

曲线是两段多项式曲线，在连接点处连续性为C^0（4-1-3=0).

经计算$N_{0,4}(t)$ $N_{1,4}(t)$ $N_{2,4}(t)$ $N_{3,4}(t)$为

$$N_{0,4}=\left(1-\frac{t}{t_4}\right)^3,\quad N_{1,4}=3\frac{t}{t_4}\left(1-\frac{t}{t_4}\right)^2,\quad N_{2,4}=3\left(\frac{t}{t_4}\right)^2\left(1-\frac{t}{t_4}\right),\quad N_{3,4}=\left(\frac{t}{t_4}\right)^3$$

因此第一段曲线

$P_0N_{0,4}(t)+P_1N_{1,4}(t)+P_2N_{2,4}(t)+P_3N_{3,4}(t)$，$t\in[0, t4]$

B样条曲线类型的划分

◆ 3. 分段Bezier曲线

$$N_{0,4}=\left(1-\frac{t}{t_4}\right)^3,\ N_{1,4}=3\frac{t}{t_4}\left(1-\frac{t}{t_4}\right)^2,\ N_{2,4}=3\left(\frac{t}{t_4}\right)^2\left(1-\frac{t}{t_4}\right),\ N_{3,4}=\left(\frac{t}{t_4}\right)^3$$

证明（续）：

令u=t/t4， u∈[0, 1],

基函数写为

$$N_{0,4}(u)=(1-u)^3,\ N_{1,4}(u)=3u(1-u)^2$$

$$N_{2,4}(u)=3(u)^2(1-u),\ N_{3,4}(u)=(u)^3$$

所以是Bezier曲线。