计算机图形学

计算机图形学

计算机科学与技术学院

伯彭波

Bézier曲 线

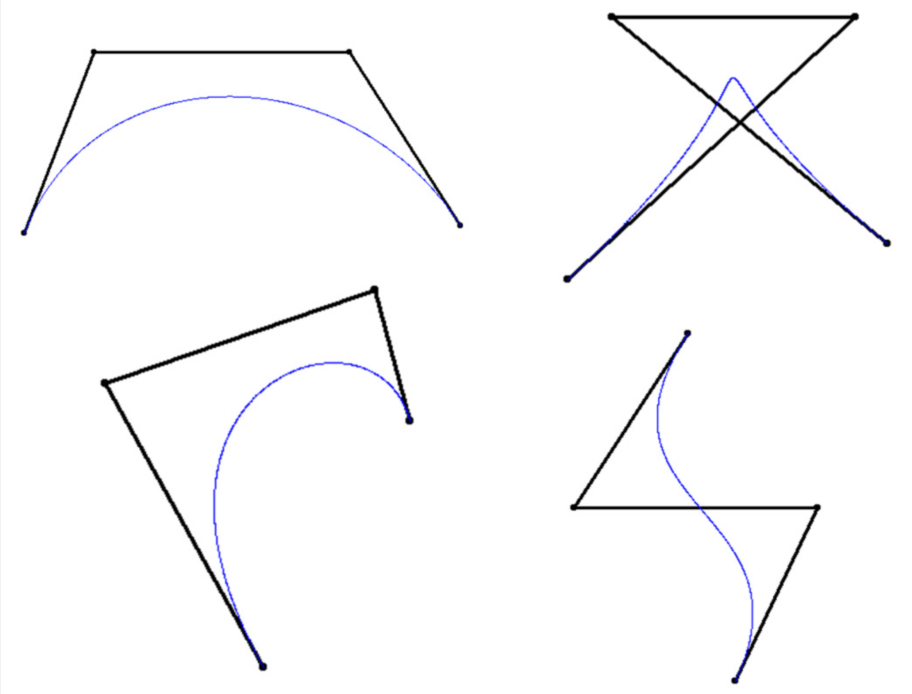
法国雷诺汽车公司的工程师Pierre Bézier(1962)和法国雪铁龙汽车公司的de Casteljiau(1959)分别提出了一种利用控制多边形的参数曲线表示方法，称为Bézier曲线。

Pierre Bézier

Paul de Casltejau

Bézier曲 线

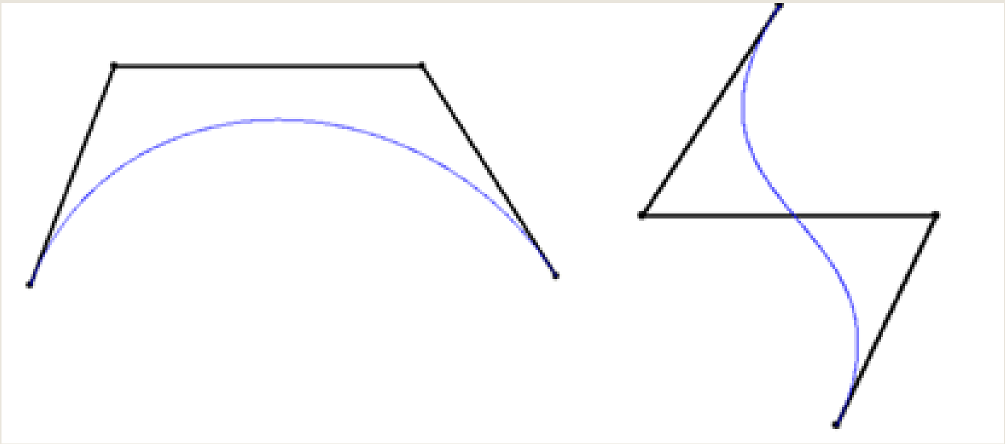
- Bézier的想法面向几何而不是面向代数
- Bézier曲线由控制多边形唯一定义
- 绘制Bézier曲线的直观交互性使得对设计对象的控制达到了直接的几何化程度，使用方便



几种典型的三次Bezier曲线

Bézier曲线

- Bézier曲线只有第一个顶点和最后一个顶点落在控制多边形上
- 多边形的第一条和最后一条边表示了曲线在起点和终点的切矢量方向
- 曲线的形状趋近于控制多边形的形状，改变控制多边形的顶点位置就会改变曲线的形状



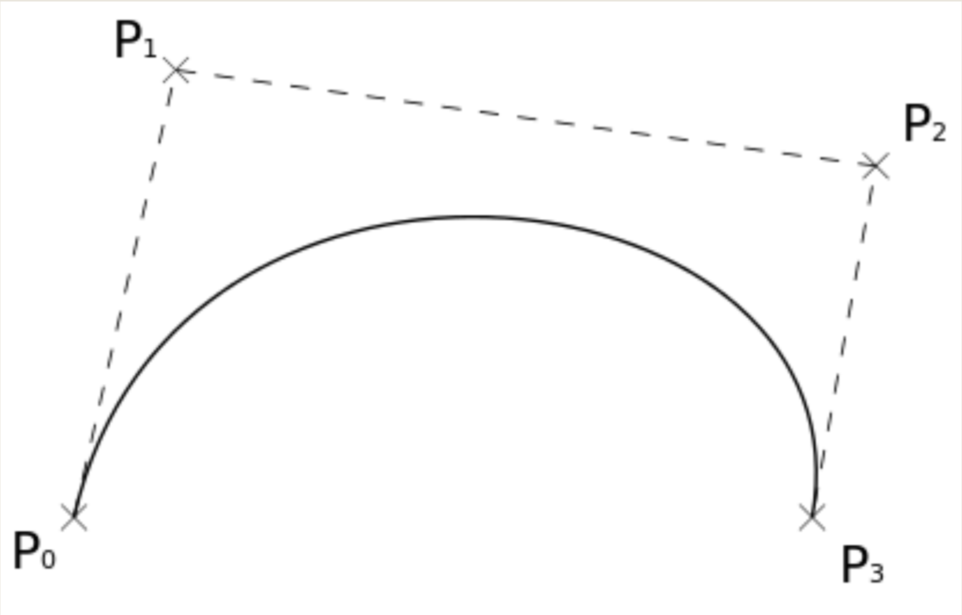
请看视频

Bézier曲 线

给定n+1个控制点，P_i (i=0,…,n), 定义n次Bézier曲线为：

$$\boxed{P(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t) \qquad t\in[0,1]}$$

其中，P_i称为控制点，所有的控制点构成控制多边形



Bézier曲 线

给定n+1个控制点，P_i (i=0,…,n), 定义n次Bézier曲线为：

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t) \qquad t\in[0,1]$$

其中，P_i称为控制点，所有的控制点构成控制多边形

$B_{i,n}$是Bernstein 基函数，公式为：

$$B_{i,n}(t)=C_n^i t^i(1-t)^{n-i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}$$

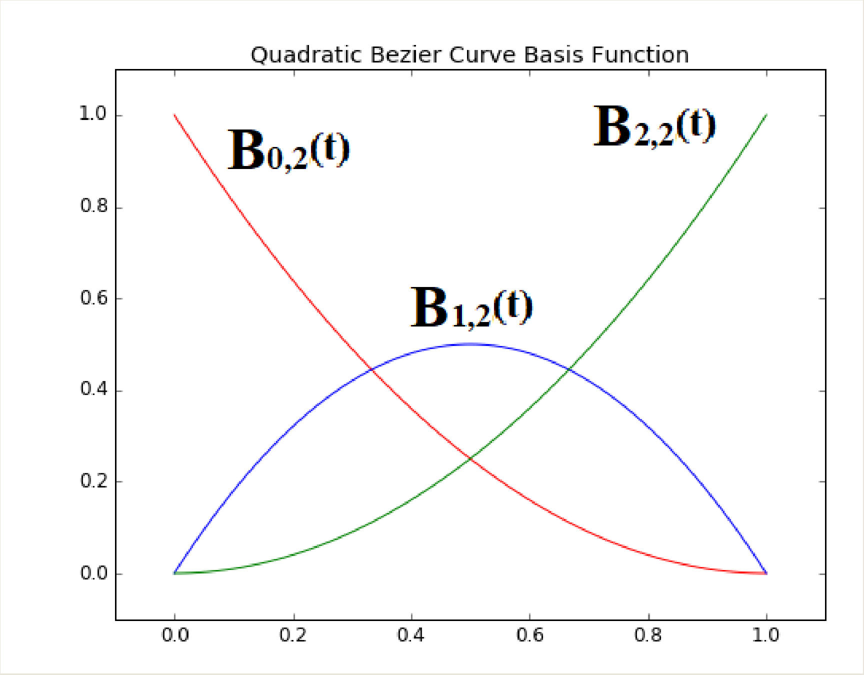
注意，t=0, i=0时，t^i=1, i!=1

Bézier曲 线

Bernstein 基函数

$$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

注意， t=0, i=0时， t^i=1, i!=1



Bézier曲 线

Bernstein 基函数

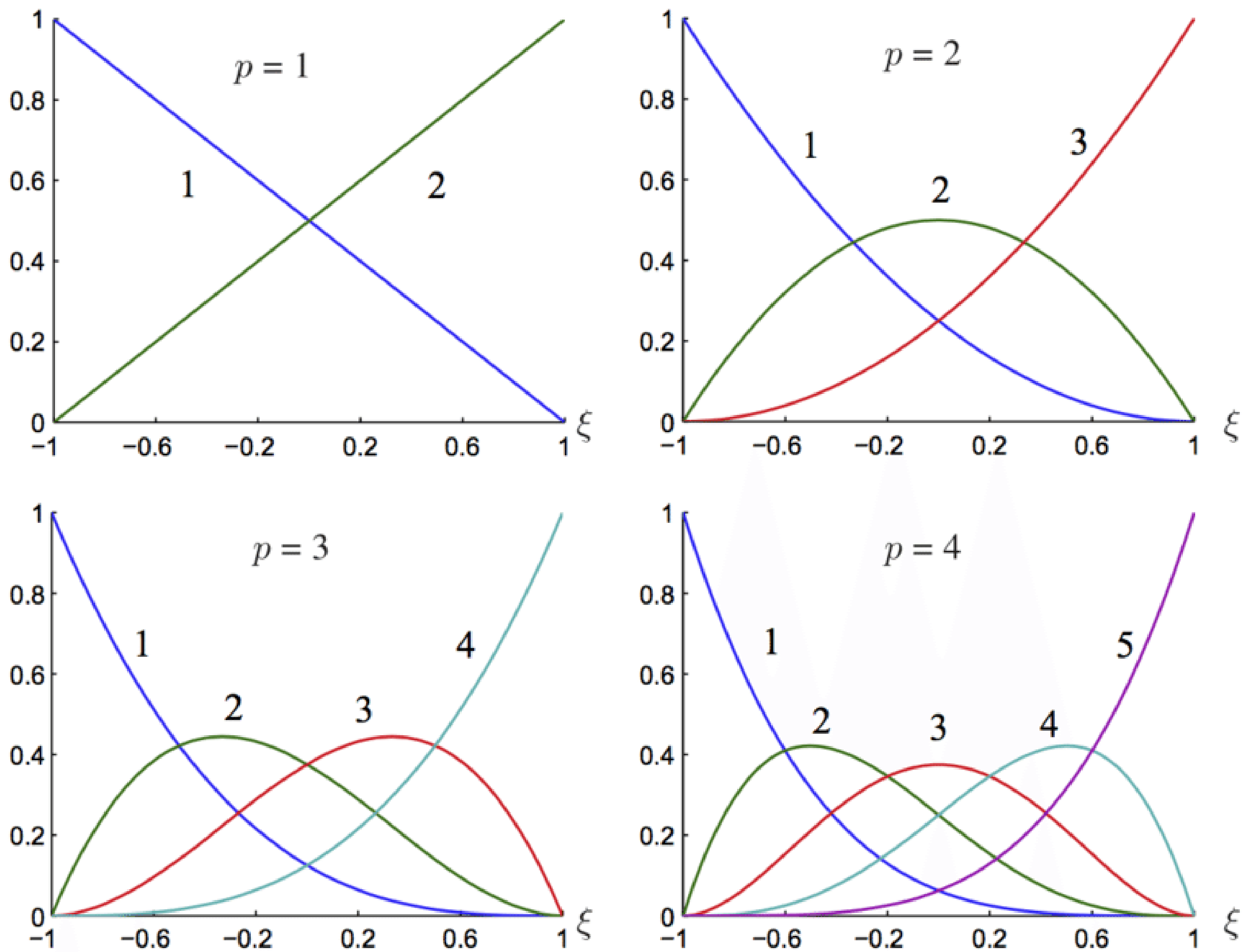
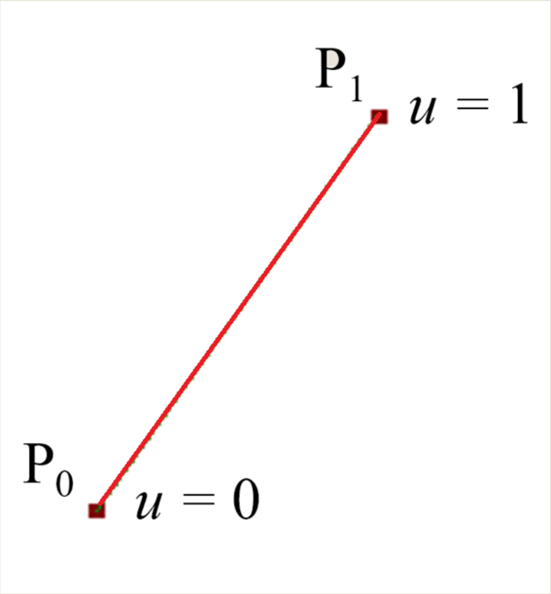


Fig. 1. Bernstein basis functions for polynomial degree $p = 1, 2, 3, 4$.

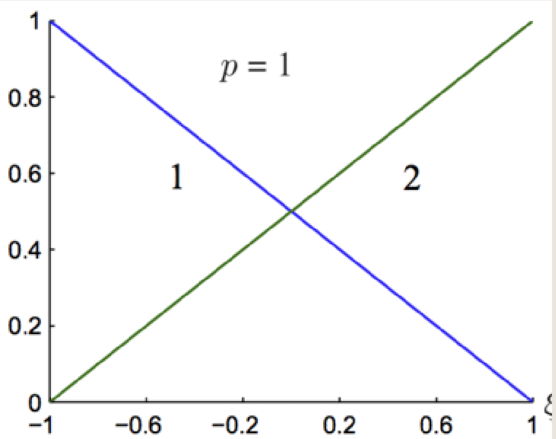
Bézier曲 线

1次Bézier曲线

$$P(u) = (1 - u)\,\mathrm{P}_0 + u\,\mathrm{P}_1\,,\ 0 \le u \le 1$$



1次的Bernstein基函数如右图

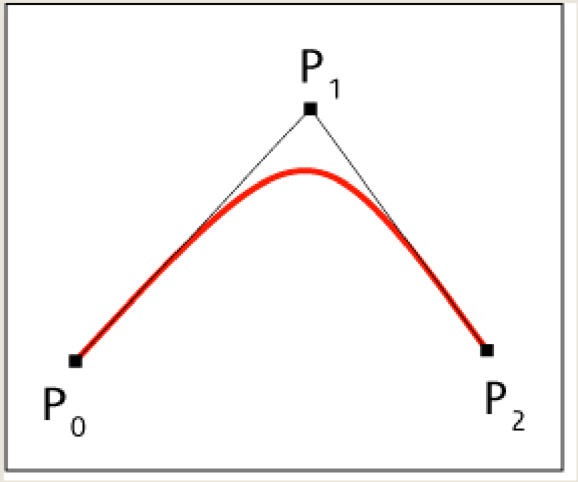


Bézier曲 线

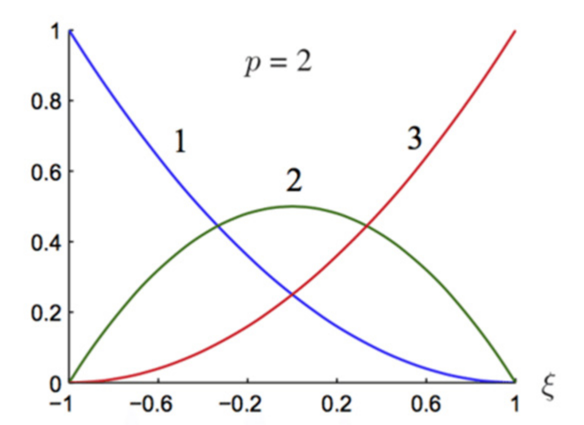
2次Bézier曲线

$$P(u) = (1 - u)^2\, \mathrm{P}_0 + 2\,(1-u)\, u\, \mathrm{P}_1 + u^2\, \mathrm{P}_2\,,$$

$$0 \le u \le 1$$



2 次的Bernstein基函数如右图

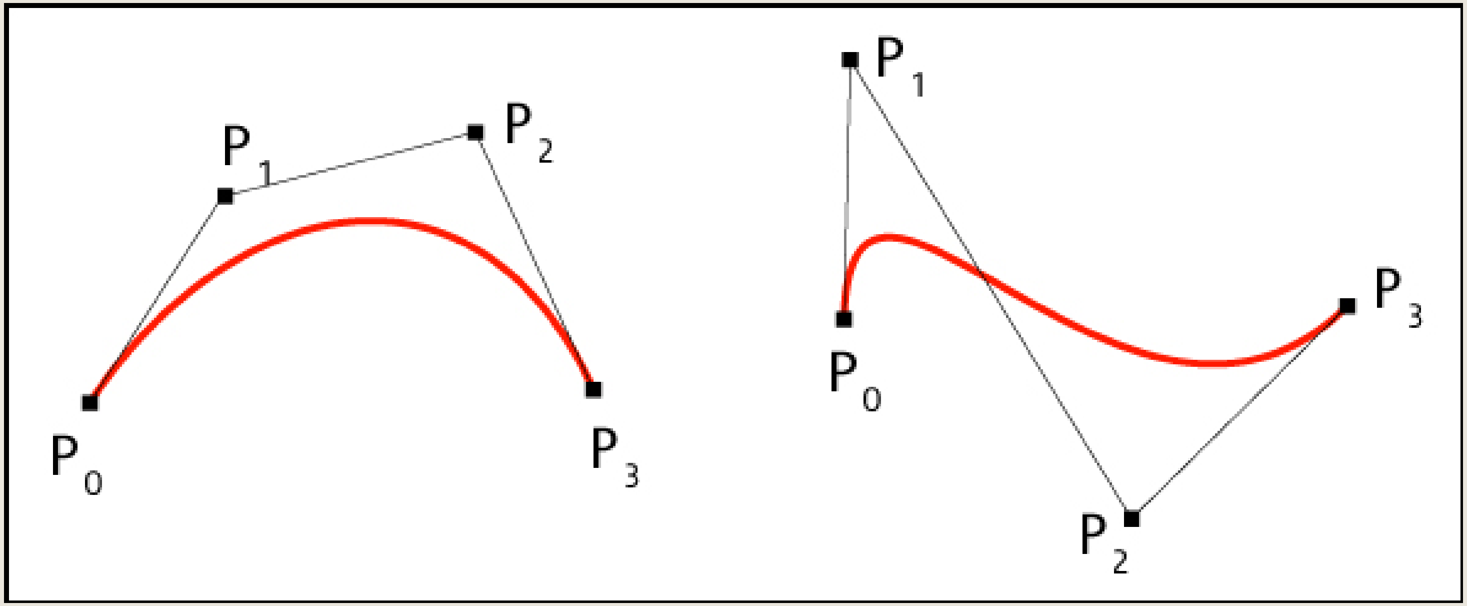


Bézier曲 线

三次Bézier曲线

$$P(u) = (1 - u)^3 P_0 + 3\,(1-u)^2\, u\, P_1 + 3\,(1-u)\, u^2\, P_2 + u^3\, P_3\,,$$

$$0 \le u \le 1$$



Bernstein基函数的性质

$$B_{i,n}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^{i}(1-t)^{n-i}$$

1) **非负性：** 对于所有的***i,n***以及 $0\le t\le 1$ 均有 $B_{i,n}\ge 0$

2) **规范性(权性)：** $\sum_{i=0}^{n}B_{i,n}(t)\equiv 1,\qquad 0\le t\le 1$

3) **对称性** $B_{i,n}(t)=B_{n-i,n}(1-t), i=0,1,\ldots,n$

4) **递推性** $B_{i,n}(u)=(1-u)B_{i,n-1}(u)+uB_{i-1,n-1}(u),\quad i=0,1,\ldots,n$

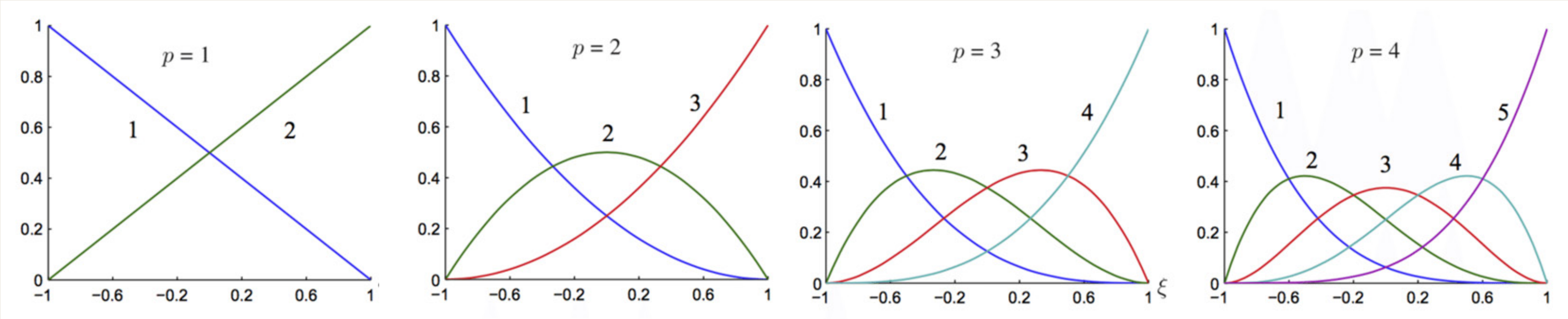
Bernstein基函数的性质

$$B_{i,n}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^{i}(1-t)^{n-i}$$

5) 端点性

$$B_{i,n}(0)=\begin{cases}1, & i=0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$$B_{i,n}(1)=\begin{cases}1, & i=n\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$



Bernstein基函数的性质

$$B_{i,n}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}$$

6) 最大性

$B_{i,n}(t)$ 在 $u=i/n$ 处达到最大值

7) 可导性

$$B'_{i,n}(u)=n[B_{i-1,n-1}(u)-B_{i,n-1}(u)] \qquad i=0,1,\ldots,n$$

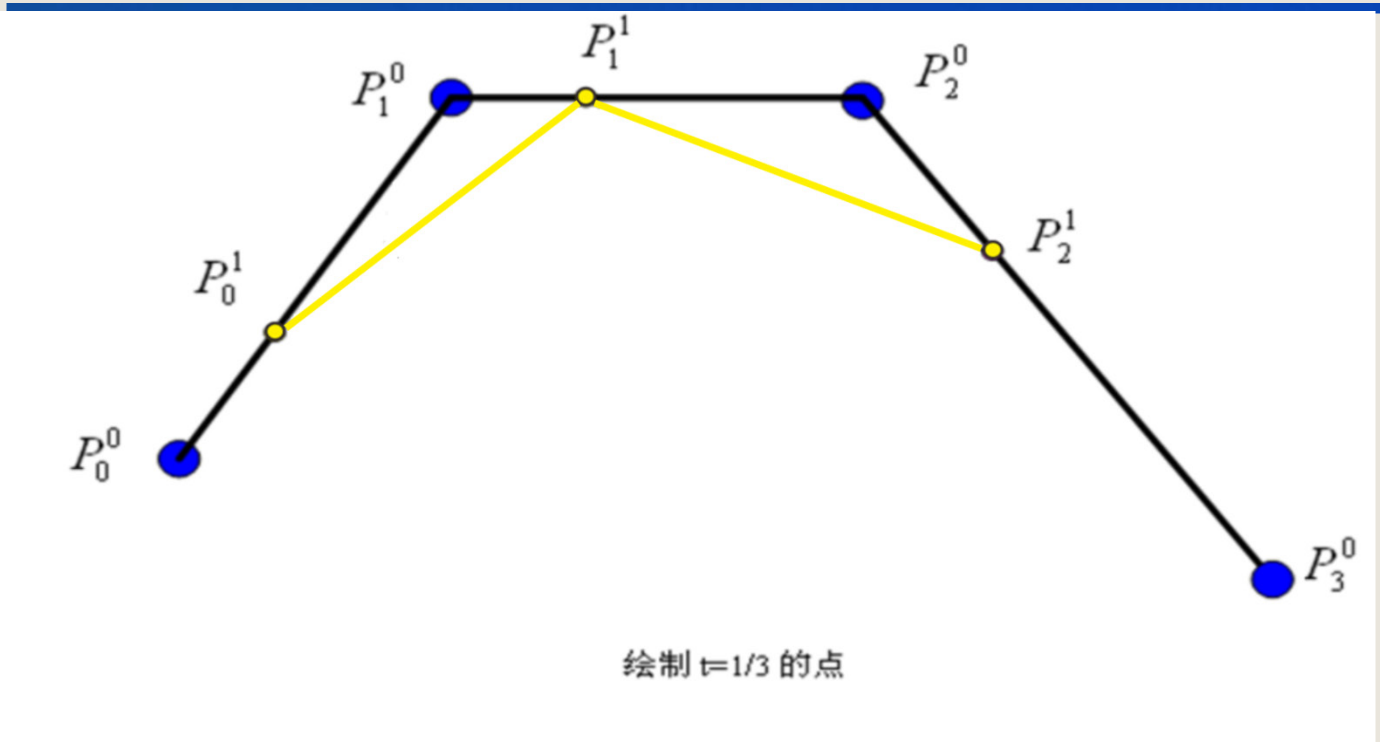
Bezier曲线的生成

- **De Casteljau算法**
  - 计算Bezier曲线上的点，可用Bezier曲线方程，但使用de Casteljau提出的递推算法则要简单得多。
  - 以三次Bezier曲线为例进行说明。

$$P(t) = \sum_{i=0}^{3} P_i B_{i,3}(t)$$

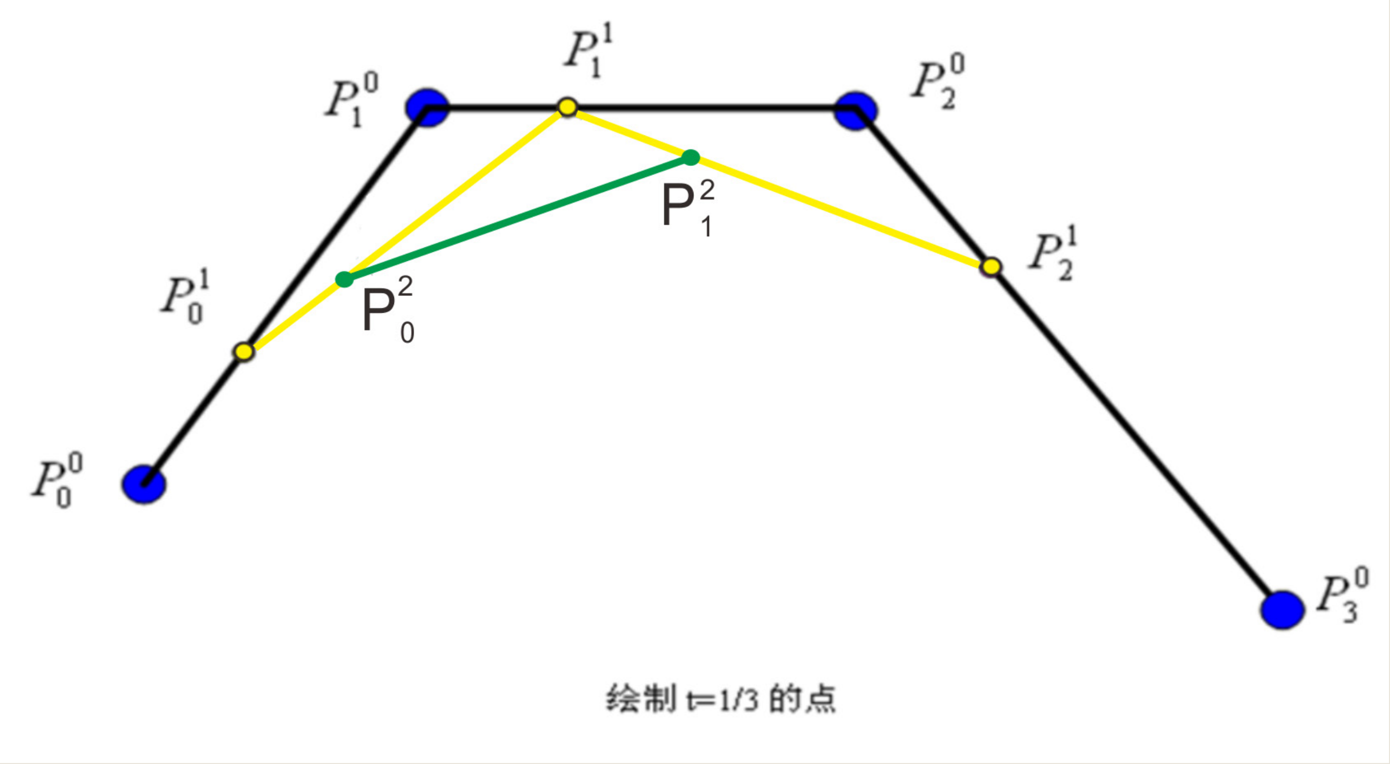
令 $P_i^0=P_i$，$i=0,1,2,3$

Bezier曲线的生成



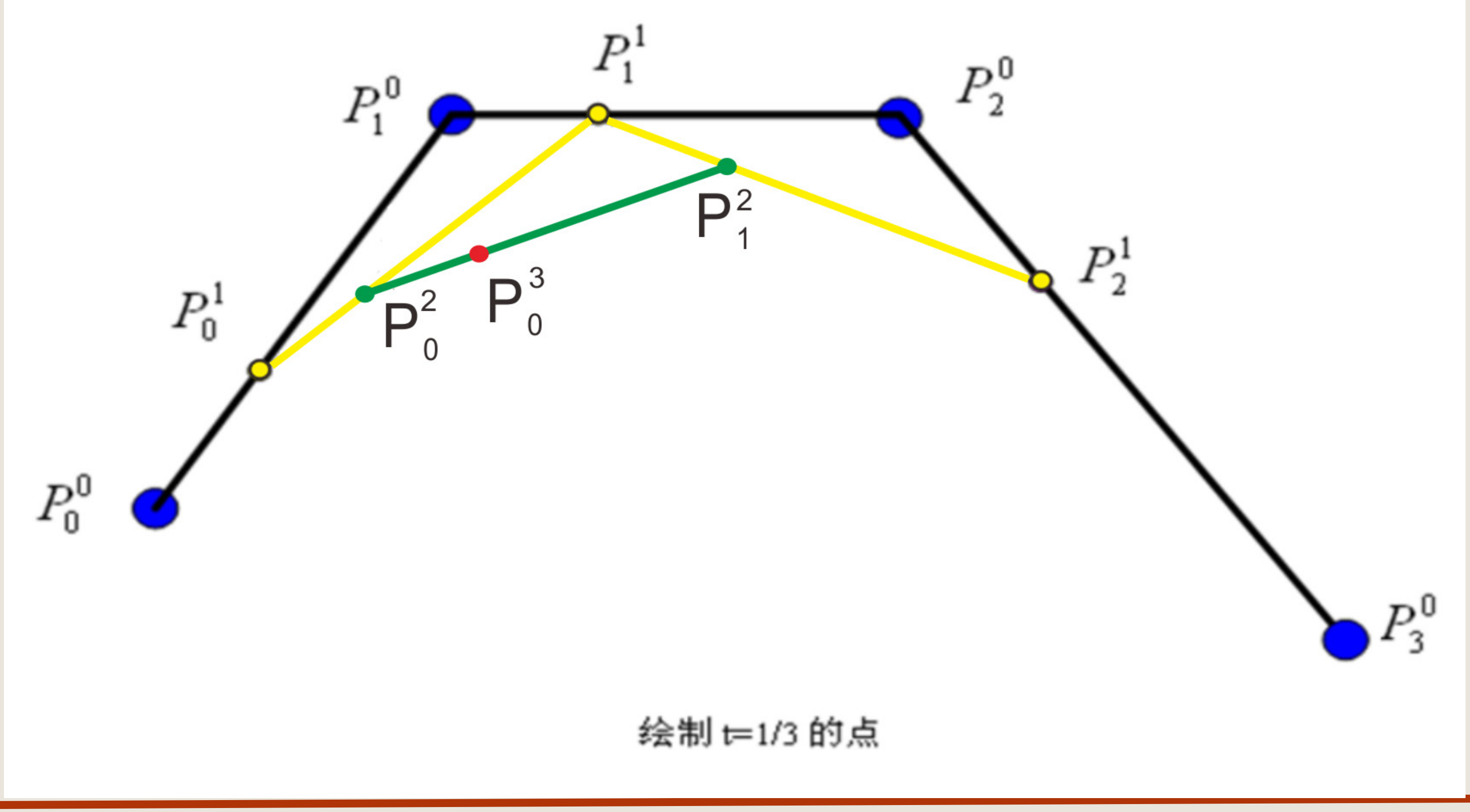
$$\begin{cases} P_0^1(t) = (1-t)\cdot P_0^0(t) + t\cdot P_1^0(t) \\ P_1^1(t) = (1-t)\cdot P_1^0(t) + t\cdot P_2^0(t) \\ P_2^1(t) = (1-t)\cdot P_2^0(t) + t\cdot P_3^0(t) \end{cases}$$

Bezier曲线的生成



$$\begin{cases} P_0^2(t) = (1-t)\cdot P_0^1(t) + t\cdot P_1^1(t) \\ P_1^2(t) = (1-t)\cdot P_1^1(t) + t\cdot P_2^1(t) \end{cases}$$

Bezier曲线的生成

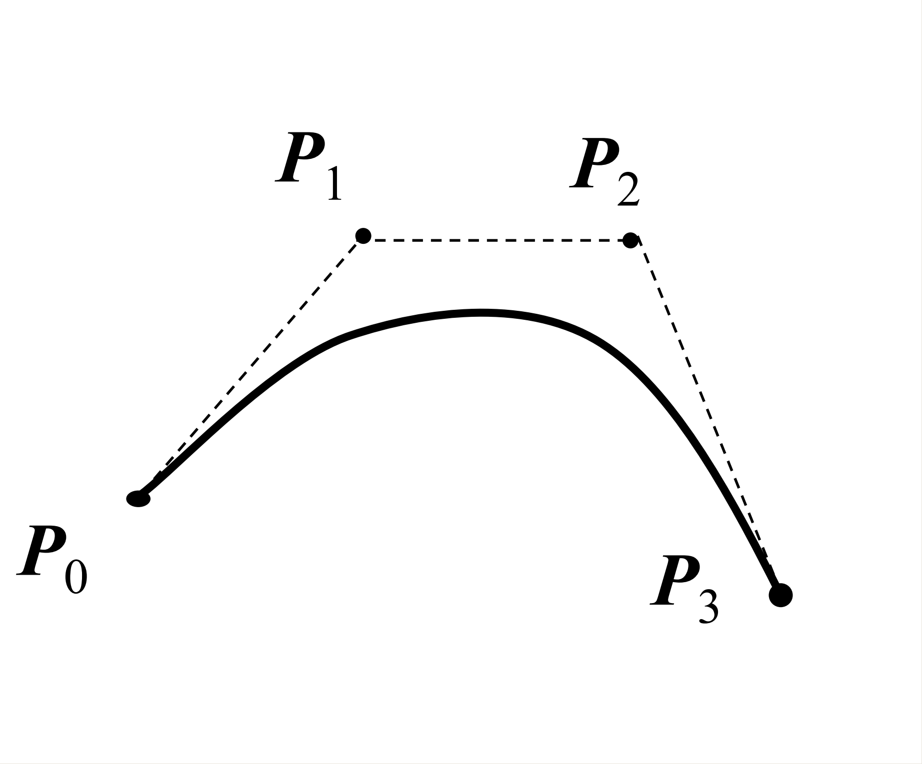


$$P_0^3(t) = (1-t)\cdot P_0^2(t) + t\cdot P_1^2(t)$$

Bézier曲线的性质

1. 端点位置

$$P(0) = P_0$$
$$P(1) = P_n$$

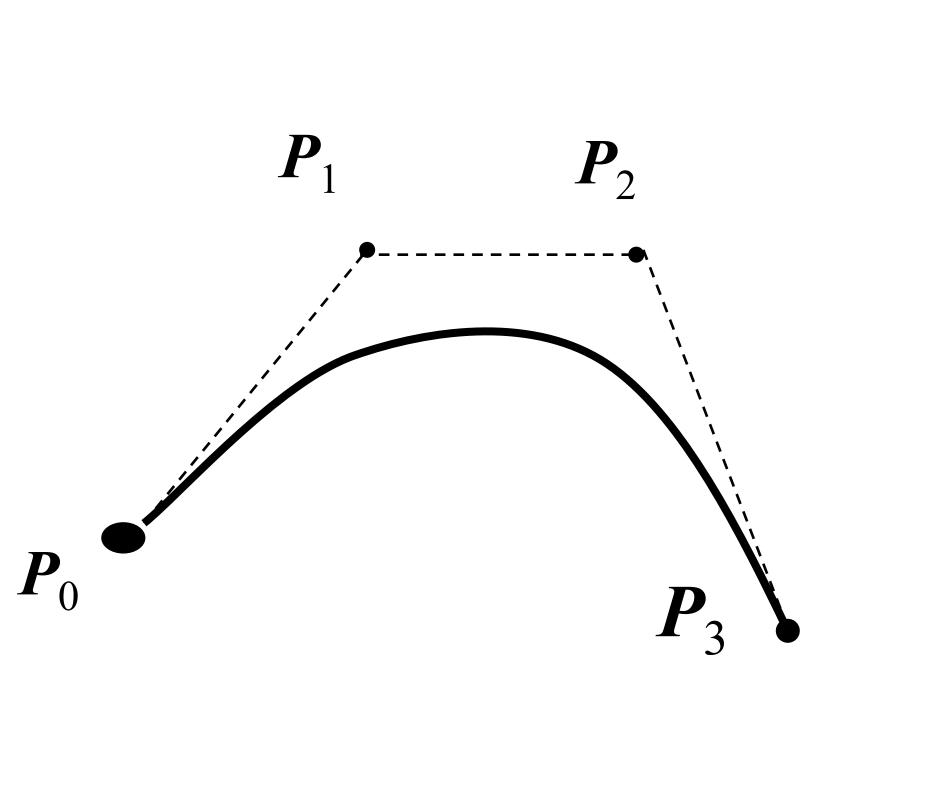


$$P(u) = (1-u)^4 P_0 + 4(1-u)^3 u P_1 + 6(1-u)^2 u^2 P_2 + 4(1-u)u^3 P_3 + u^4 P_4$$

Bézier曲线的性质

2. 端点切矢量

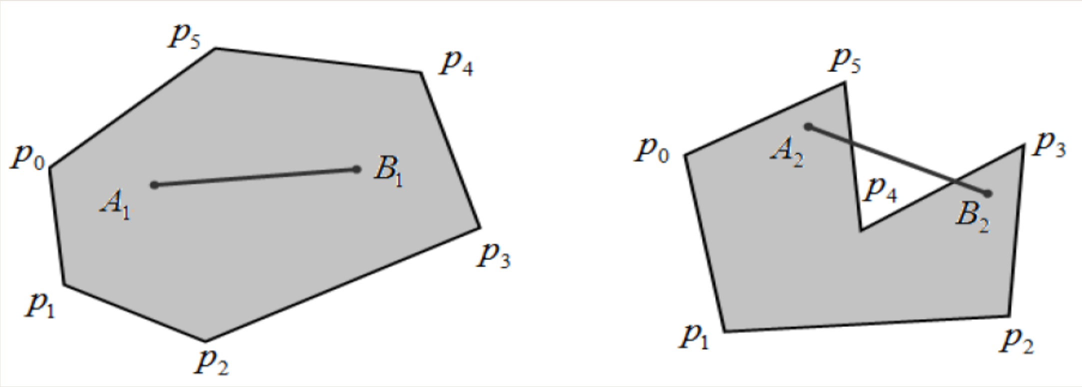
$$P'(0)=n(P_1-P_0)$$
$$P'(1)=n(P_n-P_{n-1})$$



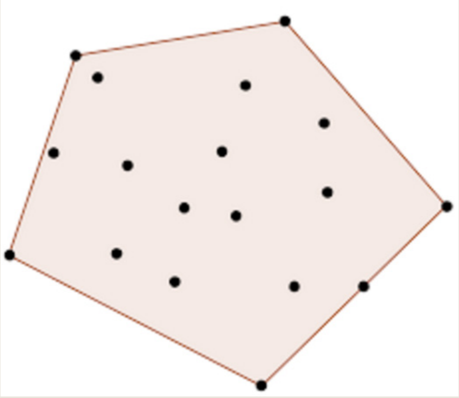
Bézier曲线的性质

3. 凸包性

- 凸集：一个点集S称为凸的，如果S内任意两点P、Q，直线段**PQ**上的所有点都在S内。



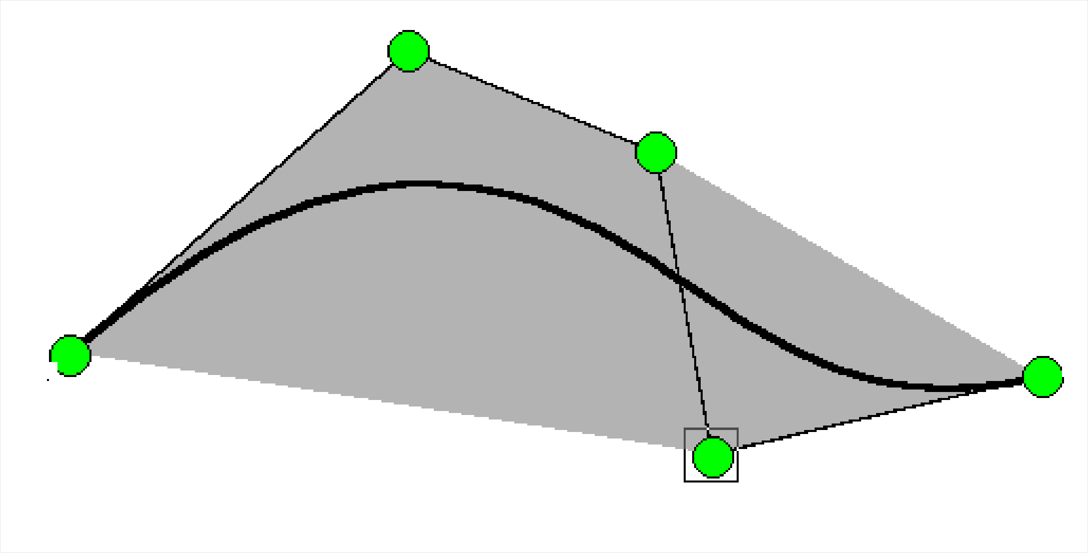
- 点集S的凸包是包含S的最小凸集。



Bézier曲线的性质

3. 凸包性（续）

◆Bezier曲线上的点均落在控制多边形各顶点构成的凸包之中。

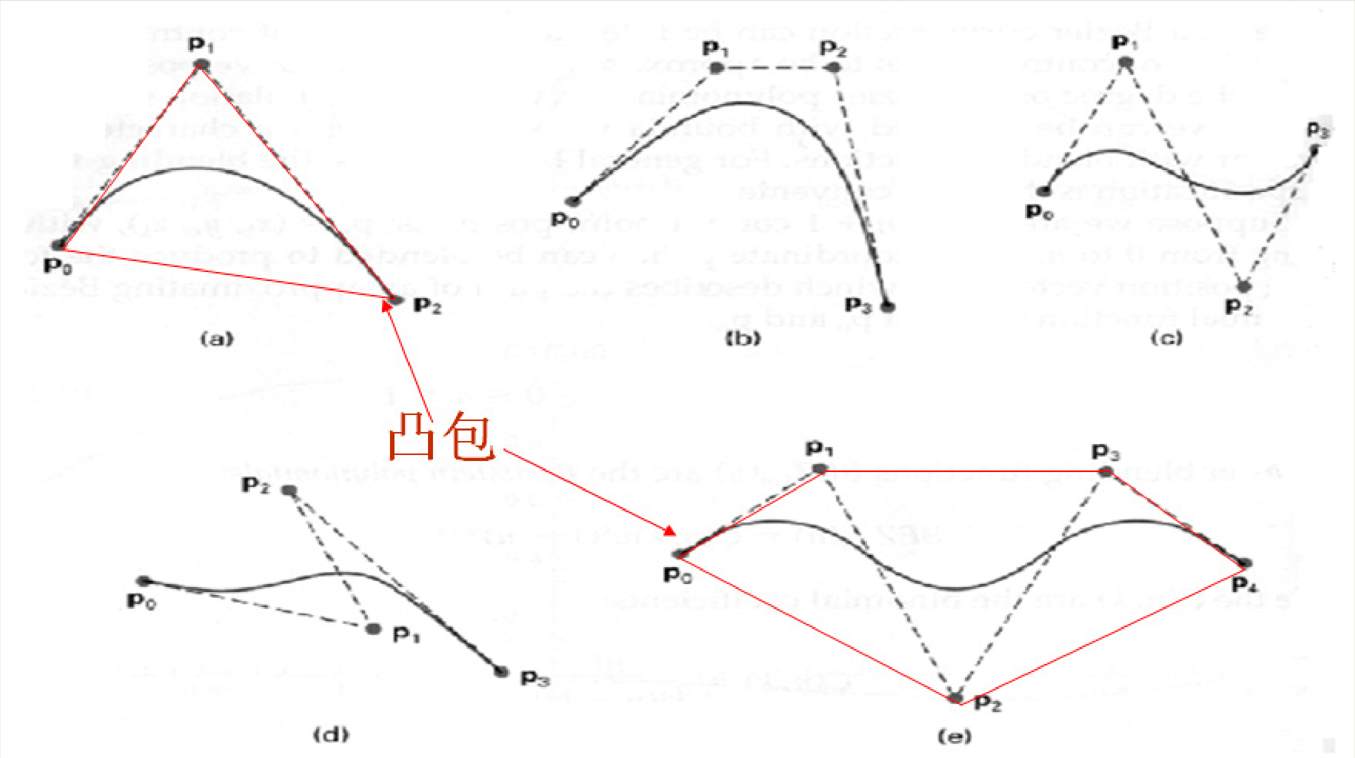


Bézier曲线的性质

3. 凸包性（续）

◆Bezier曲线的凸包性的优点：

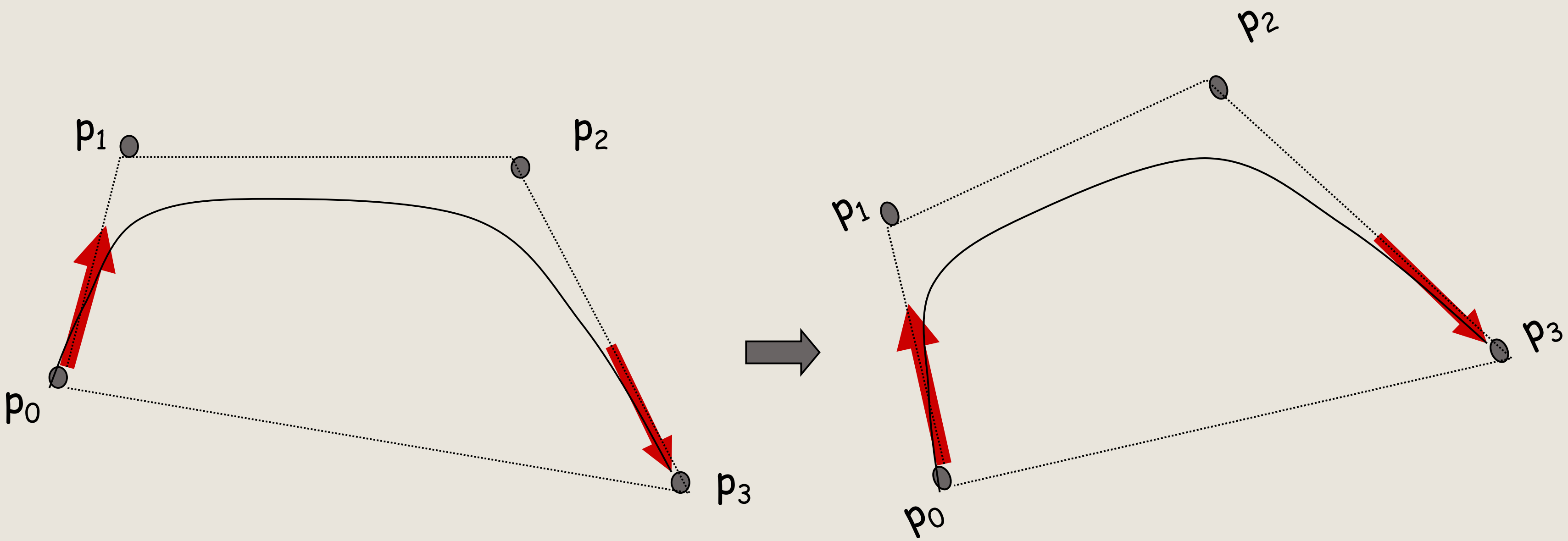
曲线的形状范围是可控的。



Bézier曲线的性质

4. 几何不变性

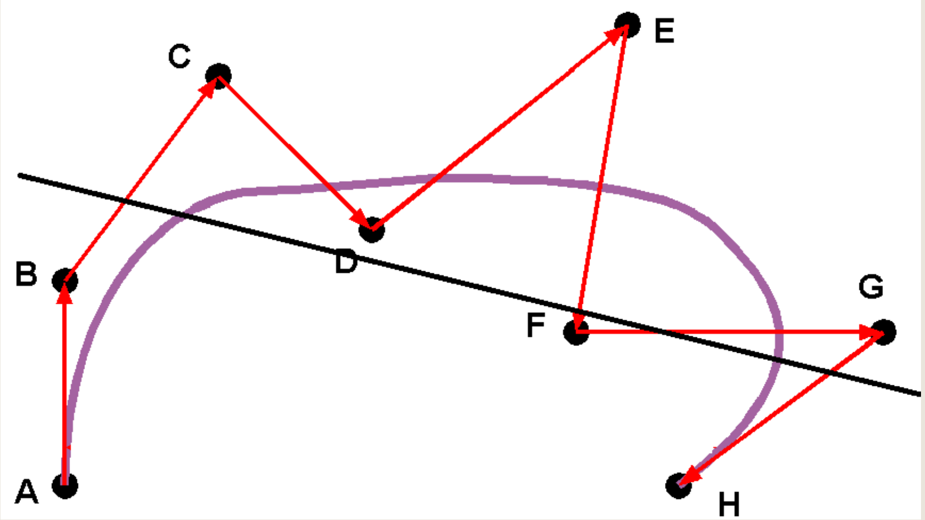
曲线方程和形状不随坐标的选取而改变



Bézier曲线的性质

5. 变差缩减性

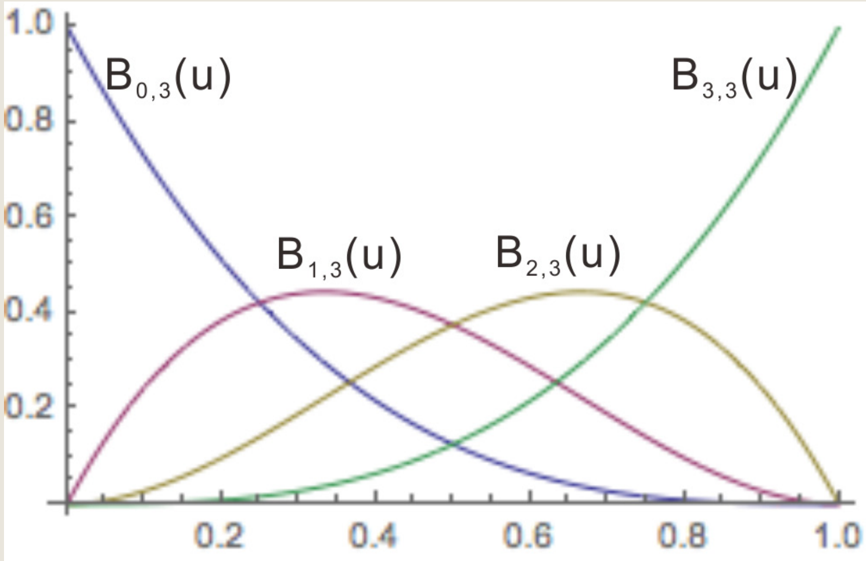
- 对于平面Bezier曲线C(u)，平面内任意直线与其交点的个数不多于该直线与其控制多边形的交点个数。
- 曲线总是比控制多边形所在的折线更平滑



Bézier曲线的性质

6. 非局部性

- ◆在区间(0, 1)范围内，每个基函数均不为零
- ◆改变某一控制点位置，整个曲线都将受到影响
- ◆不能使用控制多边形对曲线的形状进行局部调整



三次Bezier曲线的四个Bezier基函数

Bezier曲线的不足

- 控制顶点分布不均匀时，曲线上参数u的对应点分布也不均匀；

  参数均匀化

- 多边形对曲线的控制能力较弱；

  增加曲线的次数

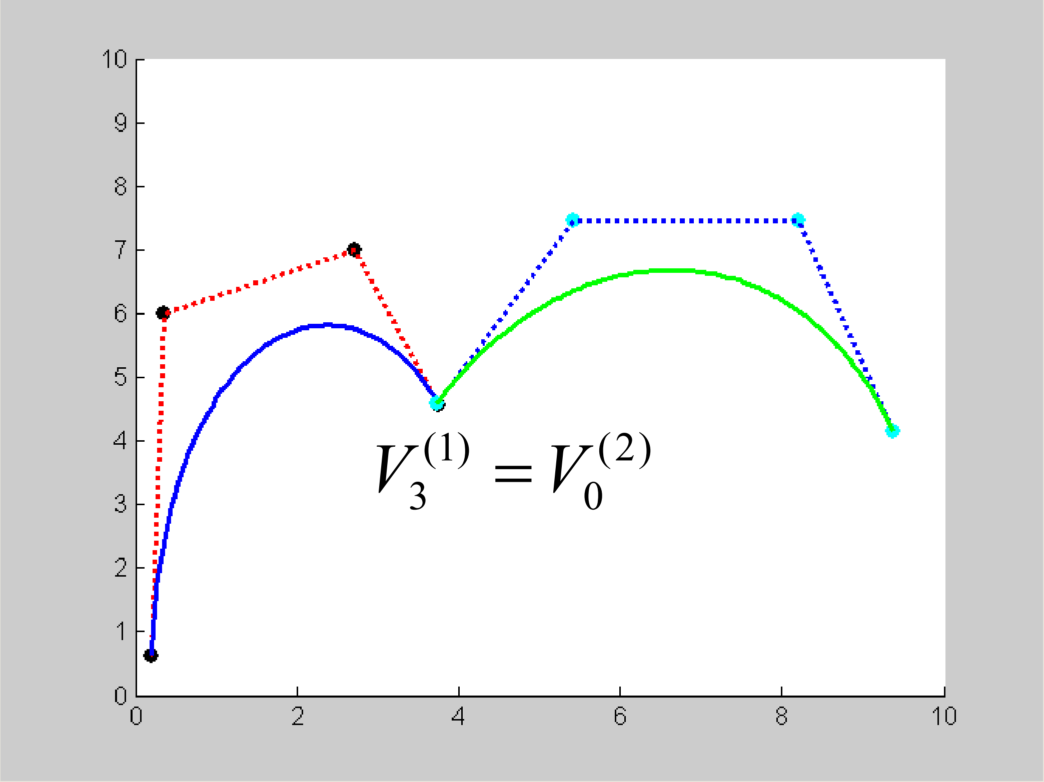
- 顶点调整缺乏局部性。

  B样条方法

Bezier 曲线的组合

- 位置连续

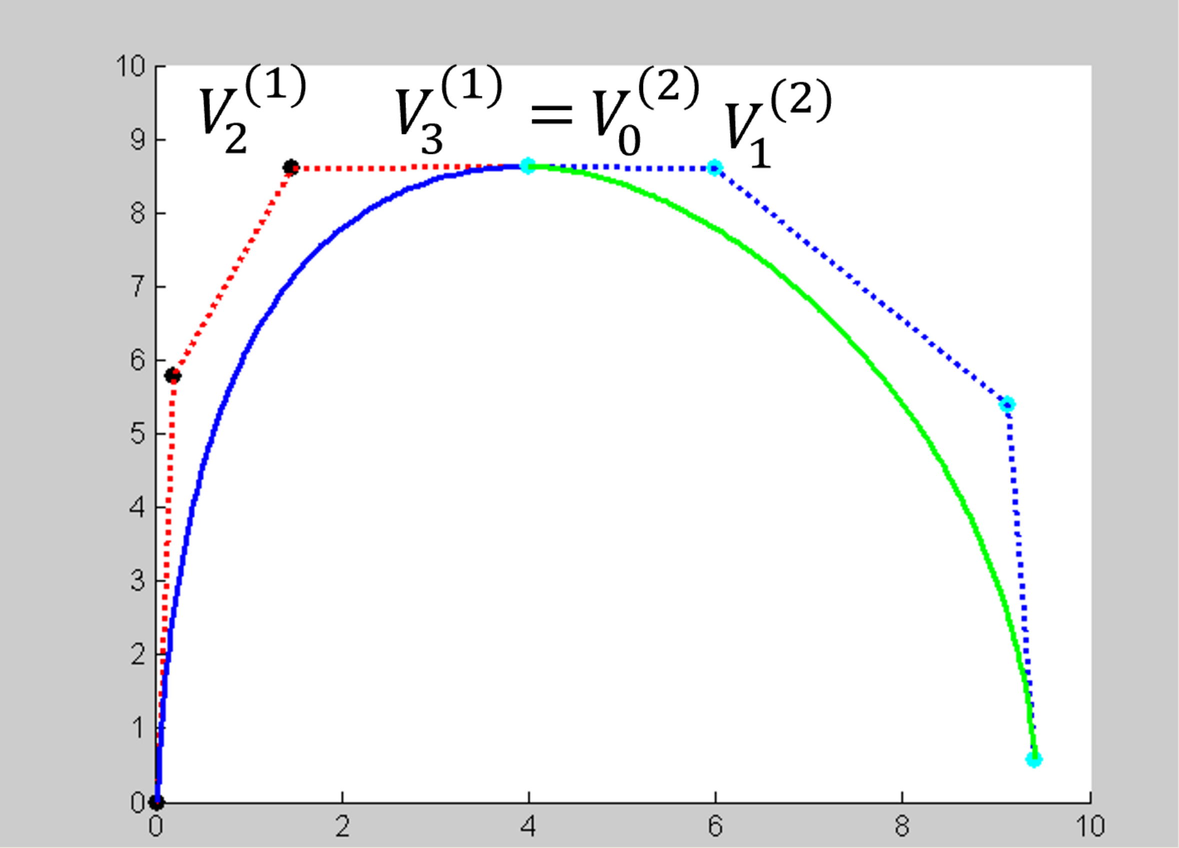
$$V_0^{(2)} = V_3^{(1)}$$



2.5 Bezier曲线的组合

- 切线连续（三顶点共线）

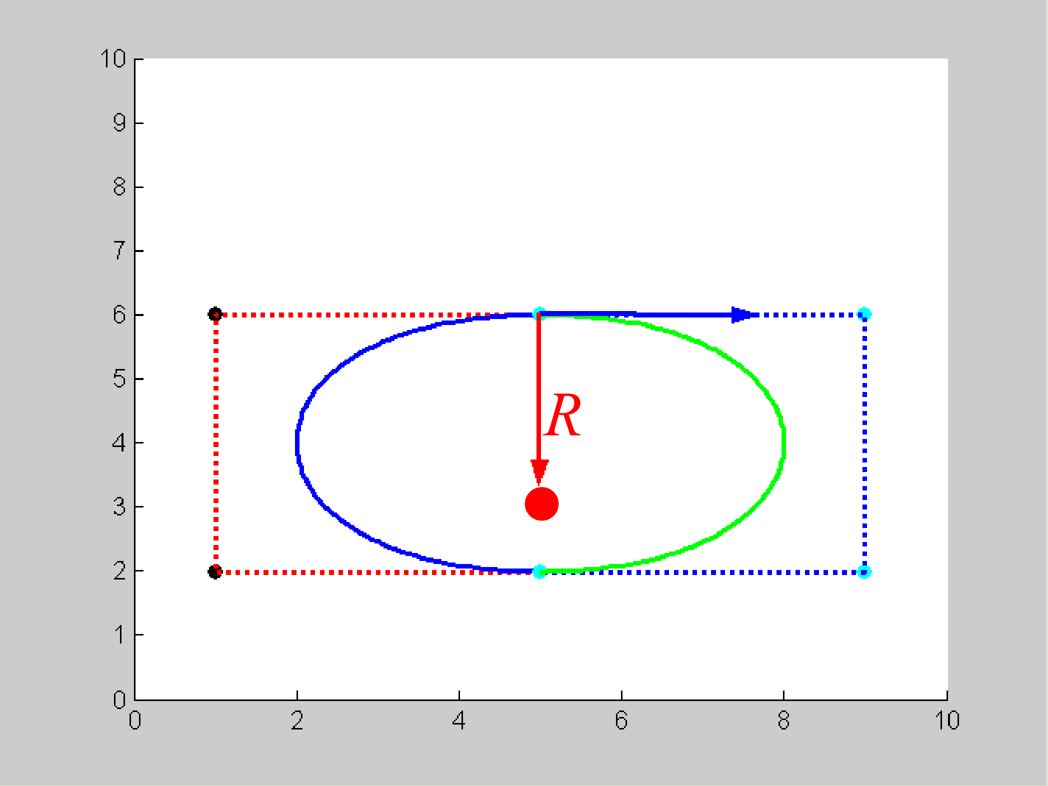
$$V_1^{(2)} = a\,(V_3^{(1)} - V_2^{(1)}) + V_0^{(2)}$$



Bezier曲线的组合

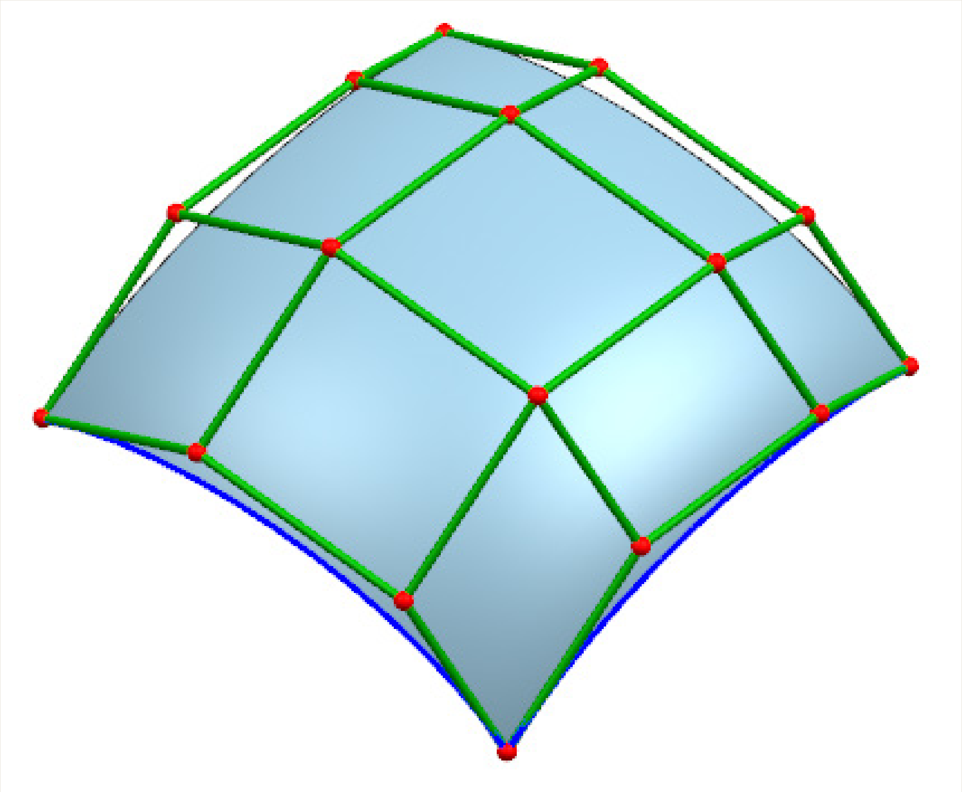
- 曲率连续的充分条件

- 位置连续
- 三顶点共线
- $V_2^{(2)} = \zeta^2 V_1^{(1)} - (2\zeta^2 + 2\zeta + \eta/2)\ V_2^{(1)} + (\zeta^2 + 2\zeta + 1 + \eta/2)\ V_3^{(1)}$



Bézier曲 面

- Bezier曲面由构成四边形网格的控制点$P_{i,j}$(i＝0，1,…,m； j＝0,1,…,n)定义.
- 控制点构成的四边形网格称为控制网格.

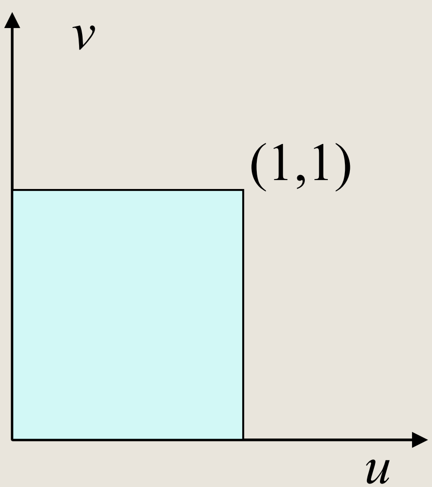


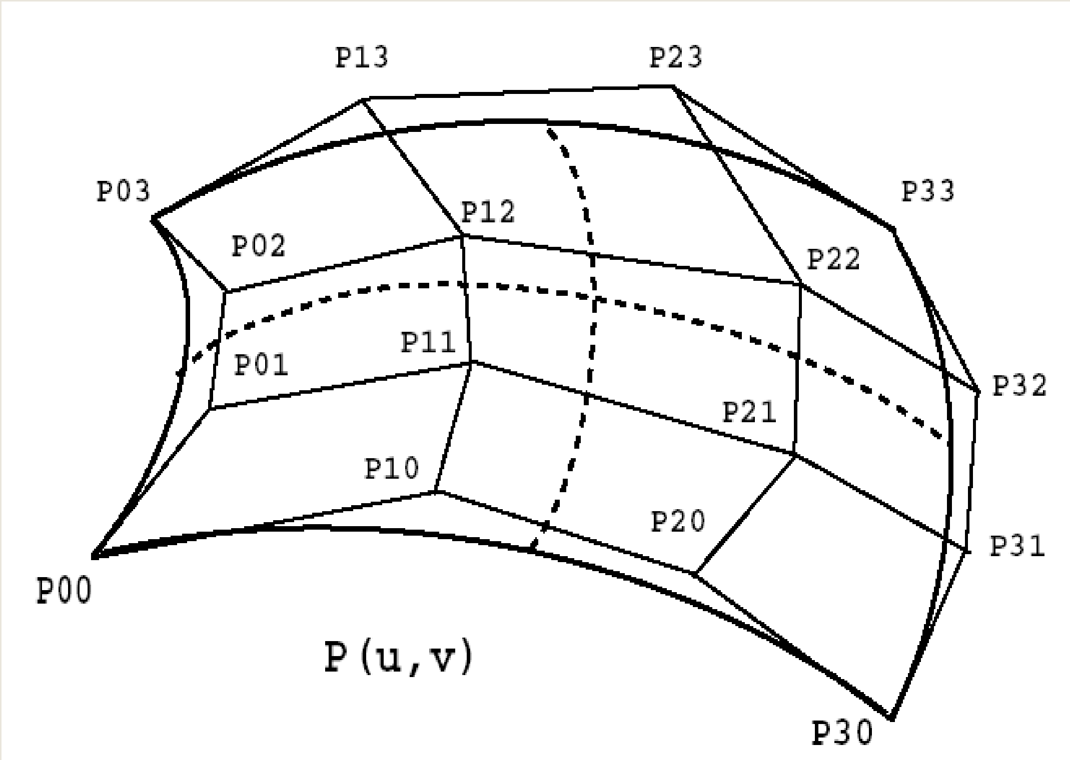
Bézier曲 面

- m×n次Bezier曲面的定义如下：

$$S(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}P_{i,j}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)$$

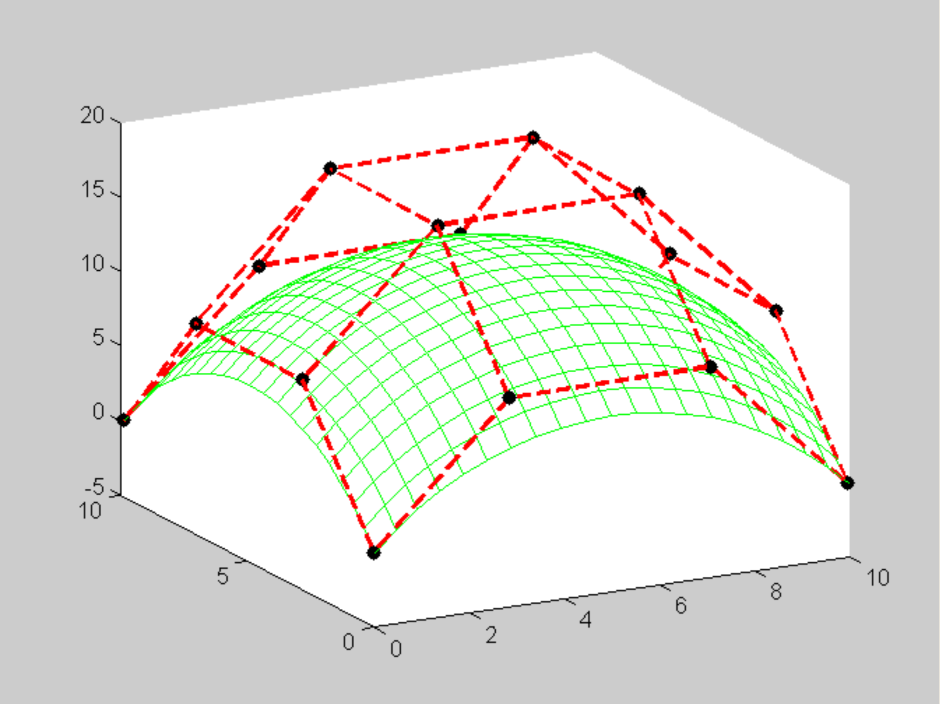
（u，v）∈〔0，1〕×〔0，1〕





Bezier曲面基本推导思路

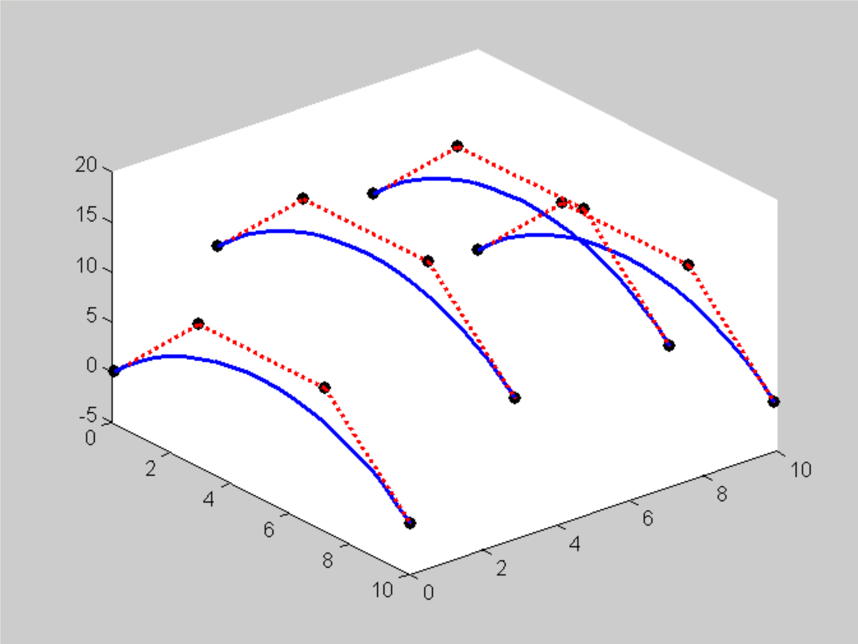
- 一个四边形网格如何定义一个曲面？

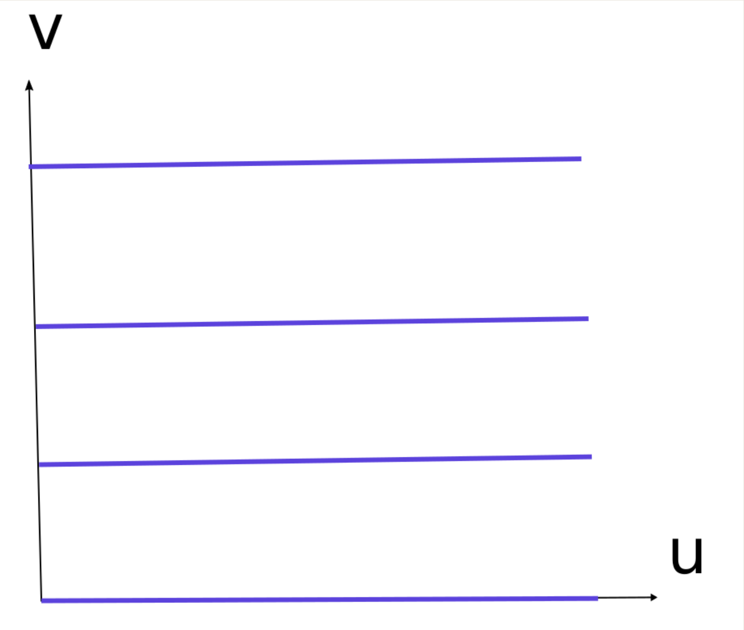


16个控制点

Bezier曲面基本推导思路

- （1）分别在u向构造4条Bezier曲线。（准线）

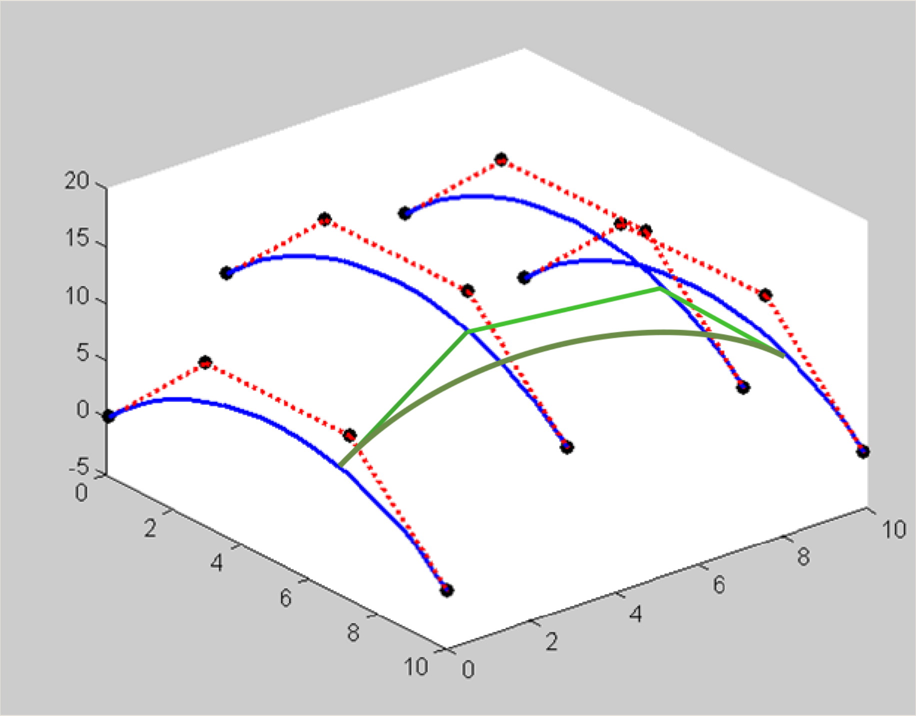


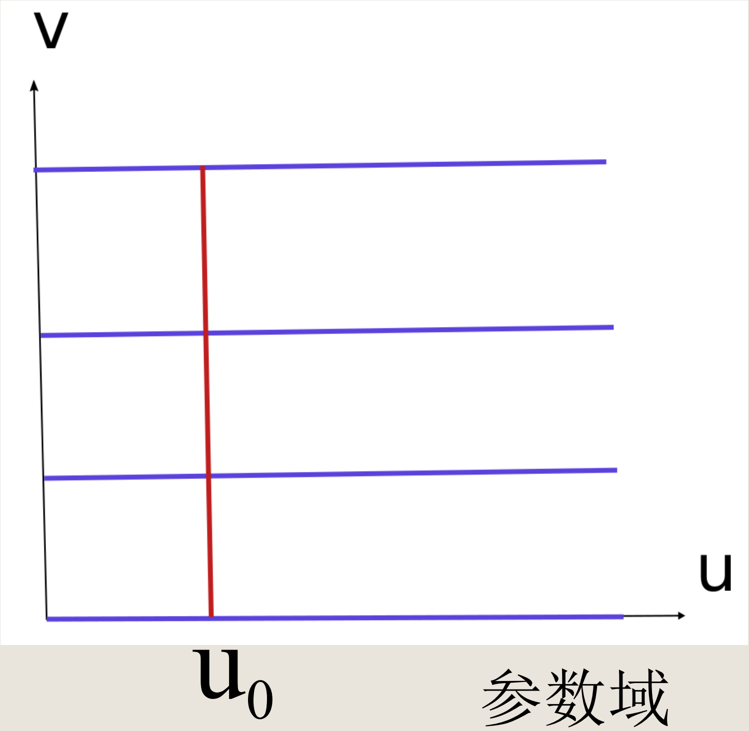


参数域

Bezier曲面基本推导思路

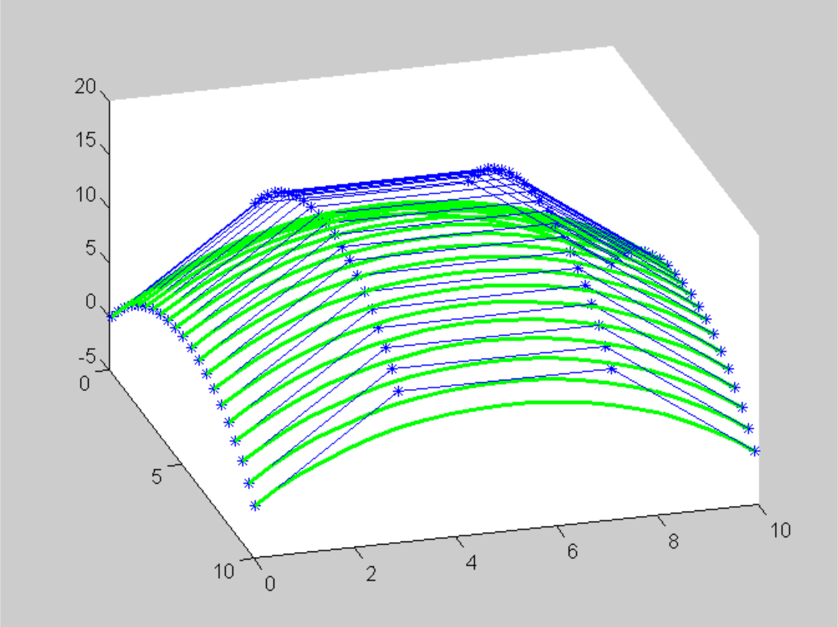
- （2）固定u坐标（$u = u_0$），与准线的4个交点作为特征多边形顶点，构造一条Bezier曲线。（母线）

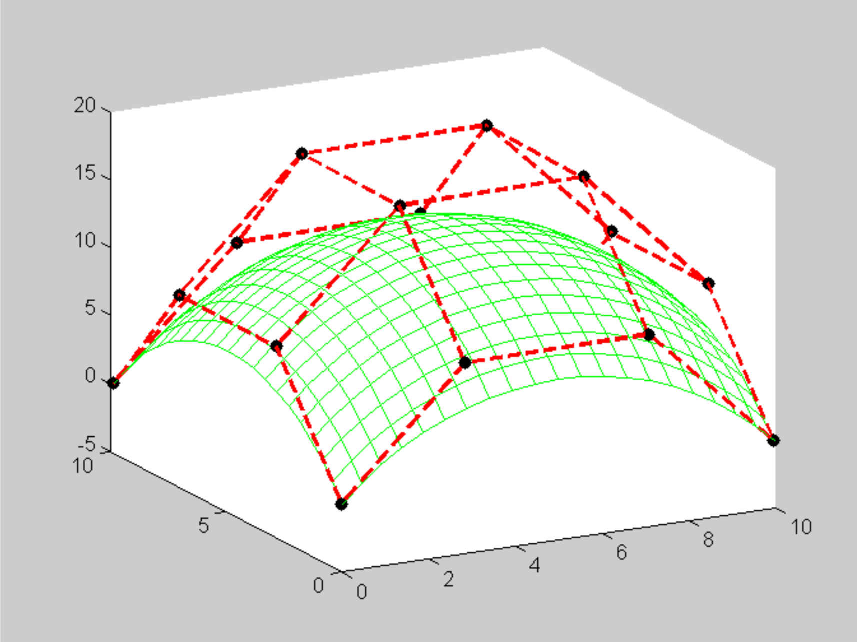




Bezier曲面基本推导思路

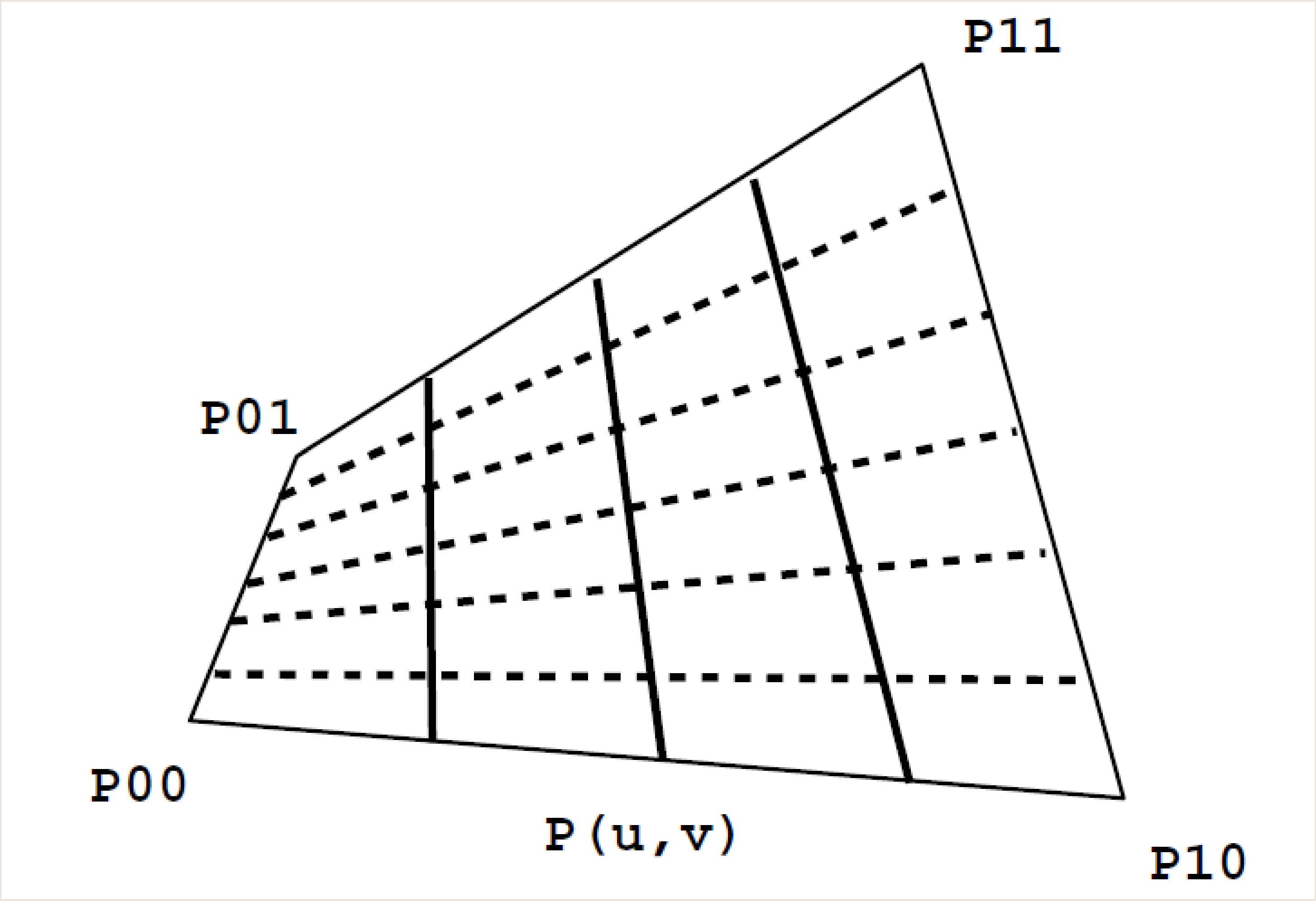
- (3) 使u_0成为变量，得到无穷多的连续变化的曲线，形成一个曲面。





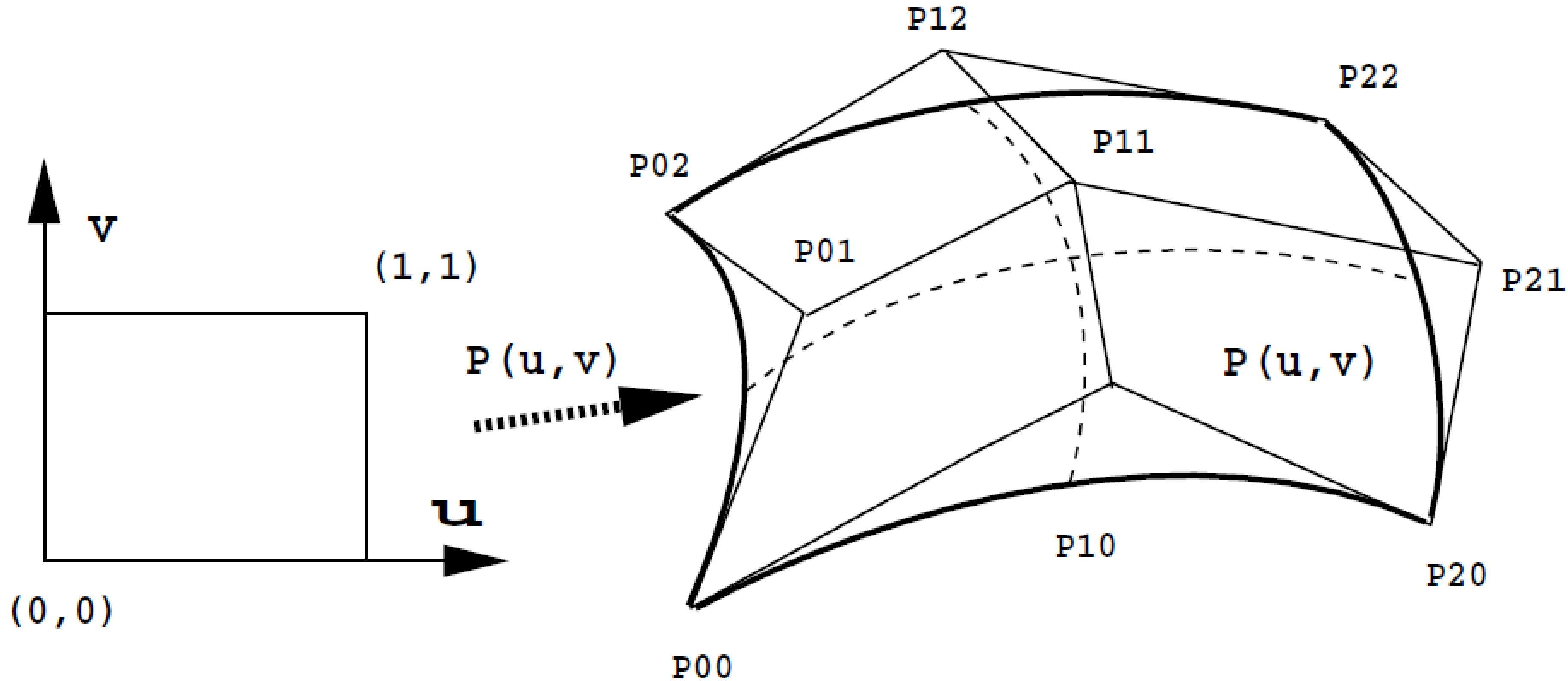
Bézier曲 面

m=n=1



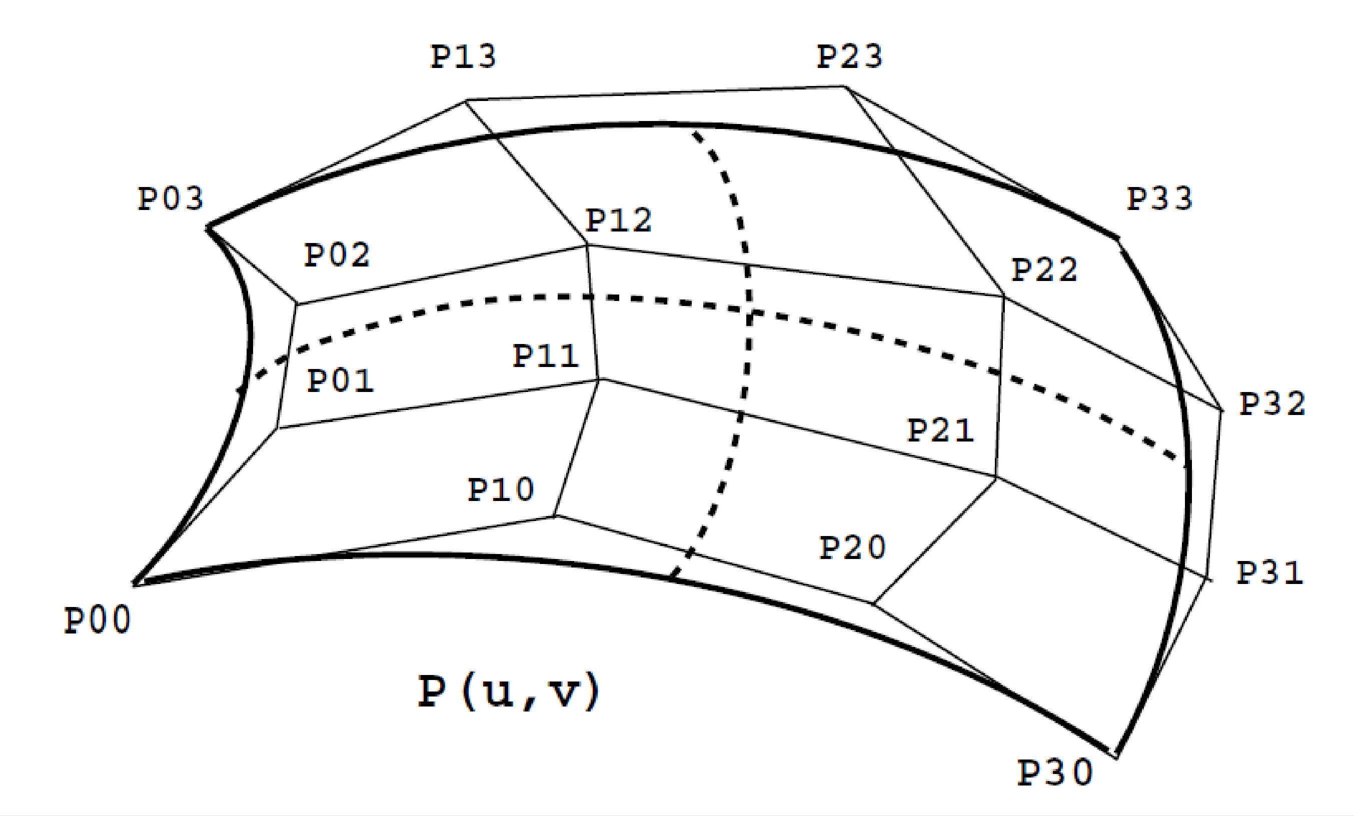
Bézier曲 面

m=n=2



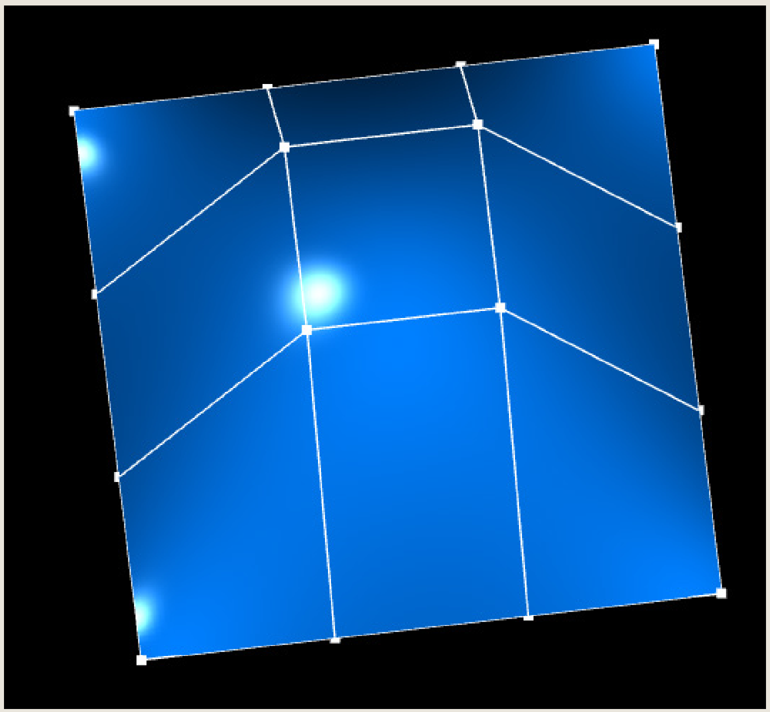
Bézier曲 面

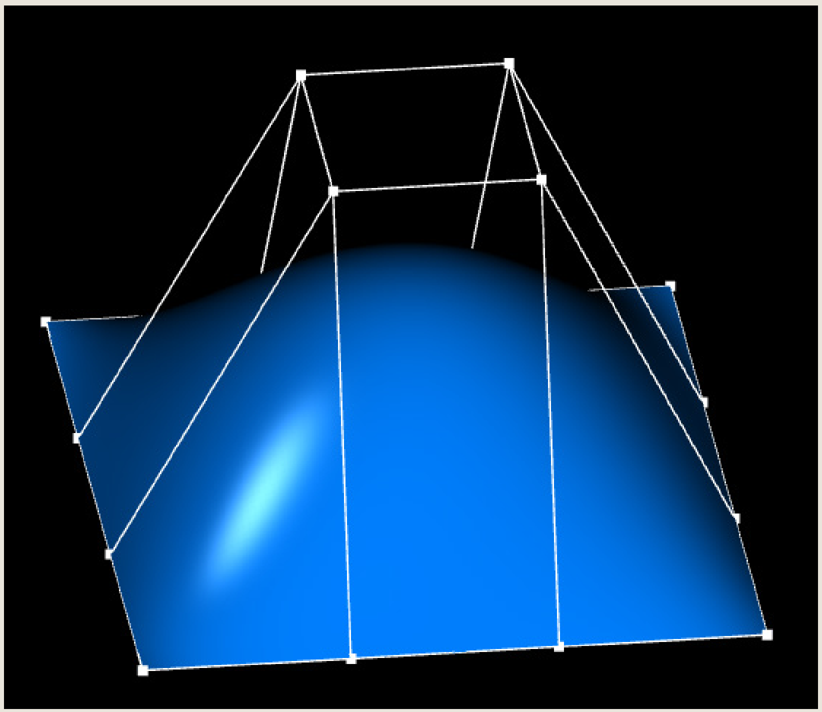
m=n=3



Bézier曲 面

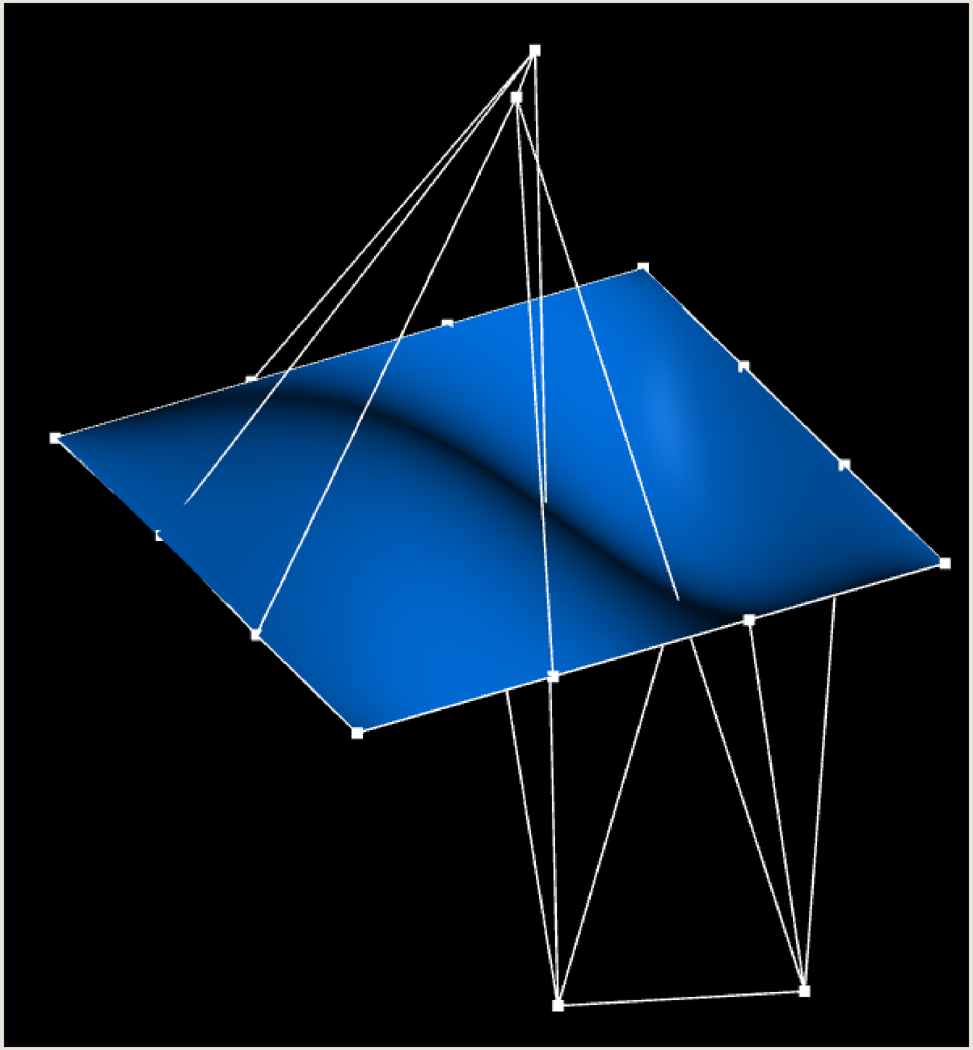
例子：双三次Bezier曲面(m=n=3)





Bézier曲 面

例子：双三次Bezier曲面



请看视频

Bézier曲 面

- Bézier曲面的矩阵形式

$$S(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)\mathrm{P}_{i,j}\ ,\quad \text{for } 0\le u,v\le 1.$$

$$S(u,v)=\begin{bmatrix}B_{0,m}(u) & B_{1,m}(u) & \cdots & B_{m,m}(u)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{0,0} & P_{0,1} & \cdots & P_{0,n}\\ P_{1,0} & P_{1,1} & \cdots & P_{1,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ P_{m,0} & P_{m,1} & \cdots & P_{m,n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{0,n}(v)\\ B_{1,n}(v)\\ \vdots\\ B_{n,n}(v)\end{bmatrix}$$

Bézier 曲面的几何性质

- **基函数的和恒等于1**

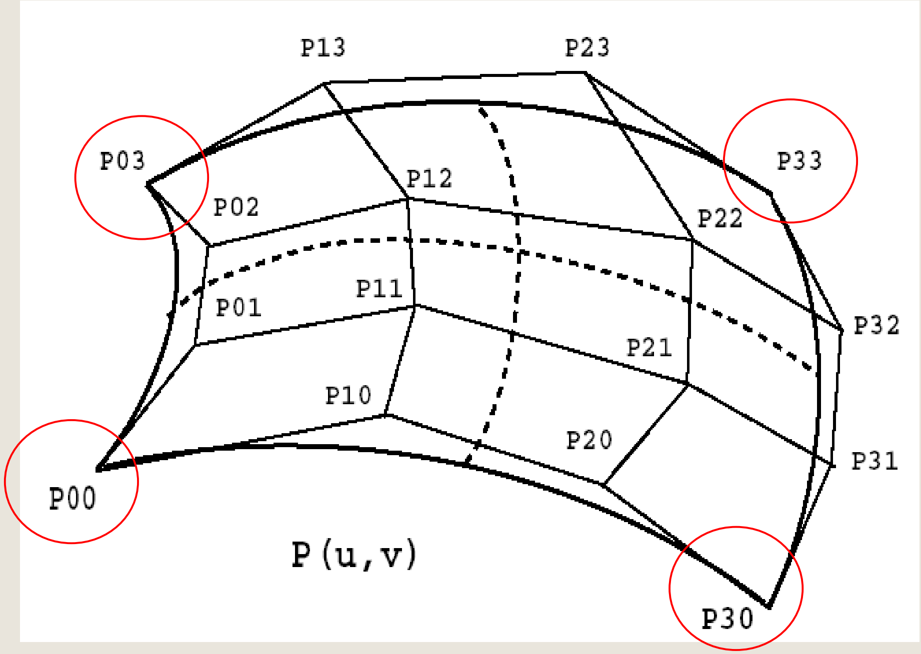
$$\boxed{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)=1\ ,\ \ \text{for all } 0\le u,v\le 1.}$$

Bézier 曲面的几何性质

- **端点插值**

曲面经过4个控制点: $\mathbf{P}_{0,0}$, $\mathbf{P}_{0,m}$, $\mathbf{P}_{n,0}$, $\mathbf{P}_{n,m}$

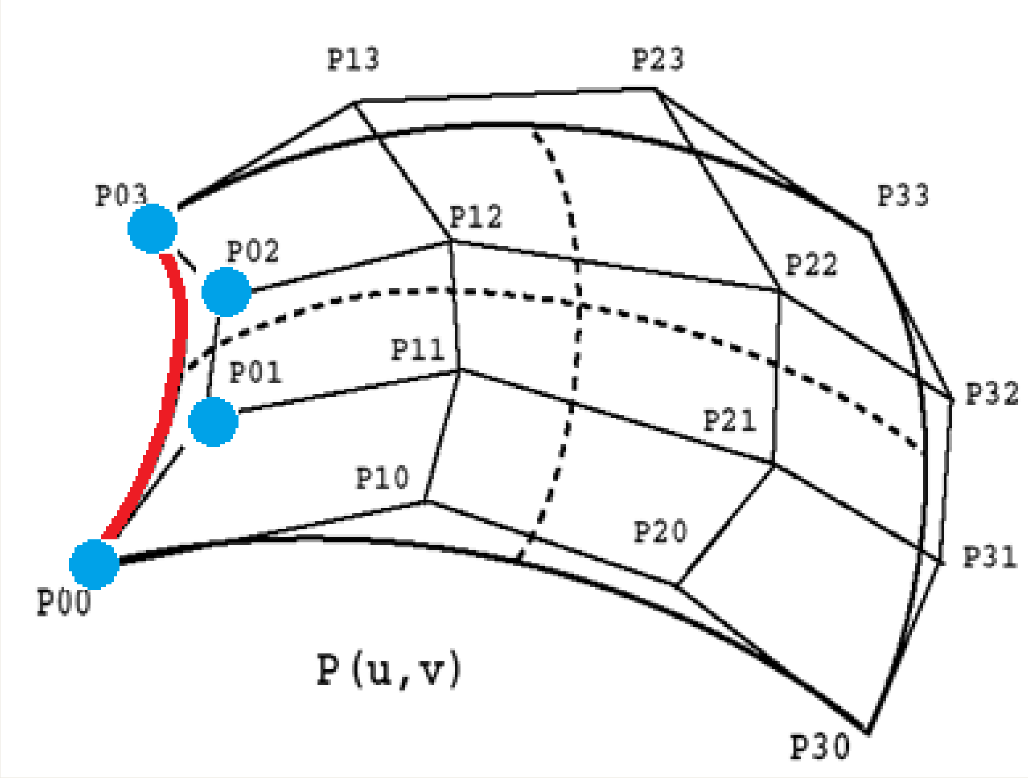
$$r(0,0) = P_{0,0}$$
$$r(0,1) = P_{0,3}$$
$$r(1,0) = P_{3,0}$$
$$r(1,1) = P_{3,3}$$



Bézier 曲面的几何性质

- 边界曲线：四个边界曲线是由边界控制点定义的**Bézier** 曲线。

曲面片的边界由最外圈的顶点确定。

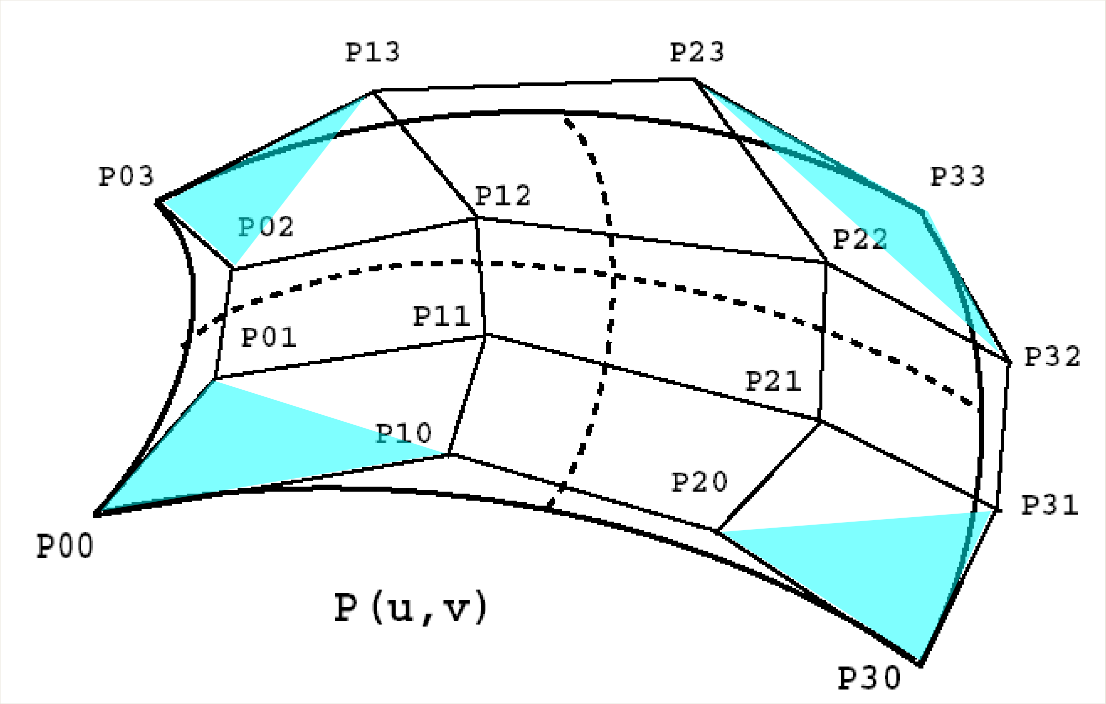


Bézier 曲面的几何性质

- 端点切平面：曲面和端点处控制网格的平面相切。比如平面$[P_{0,0}, P_{1,0}, P_{0,1}]$ 与端点$P_{0,0}$相切。

$r_u(0,0) = 3(P_{1,0} - P_{0,0})$

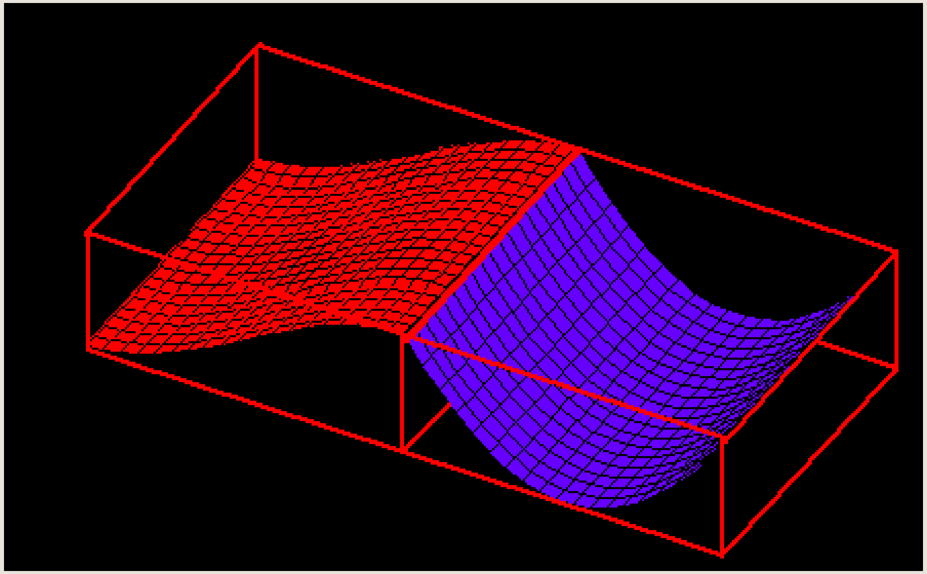
$r_v(0,0) = 3(P_{0,1} - P_{0,0})$



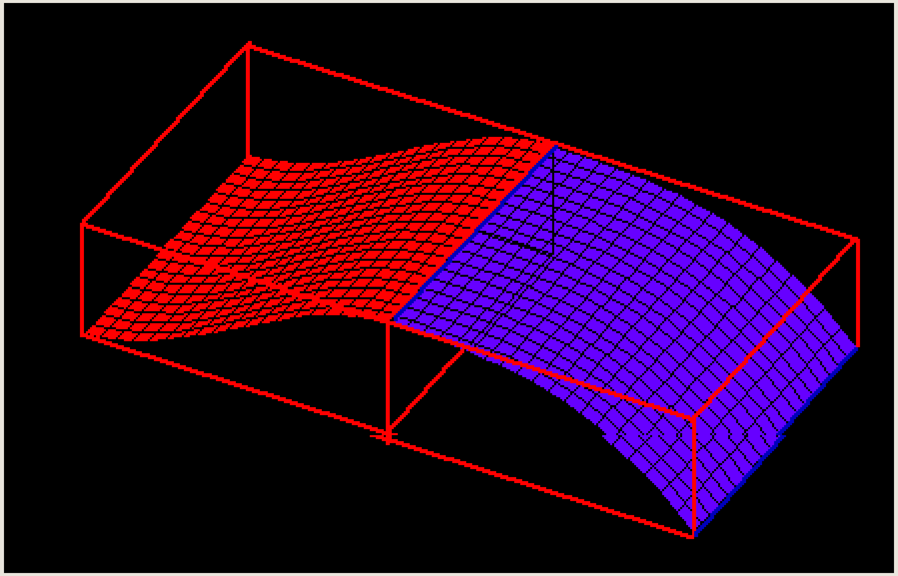
Bézier 曲面的几何性质

- 凸包性：一个 Bézier 曲面位于所有控制点的凸包内。
- 变差缩减性：一个平面和Bézier曲面的交点个数不大于该平面和控制多边形的交点个数。

Bézier 曲面的拼接

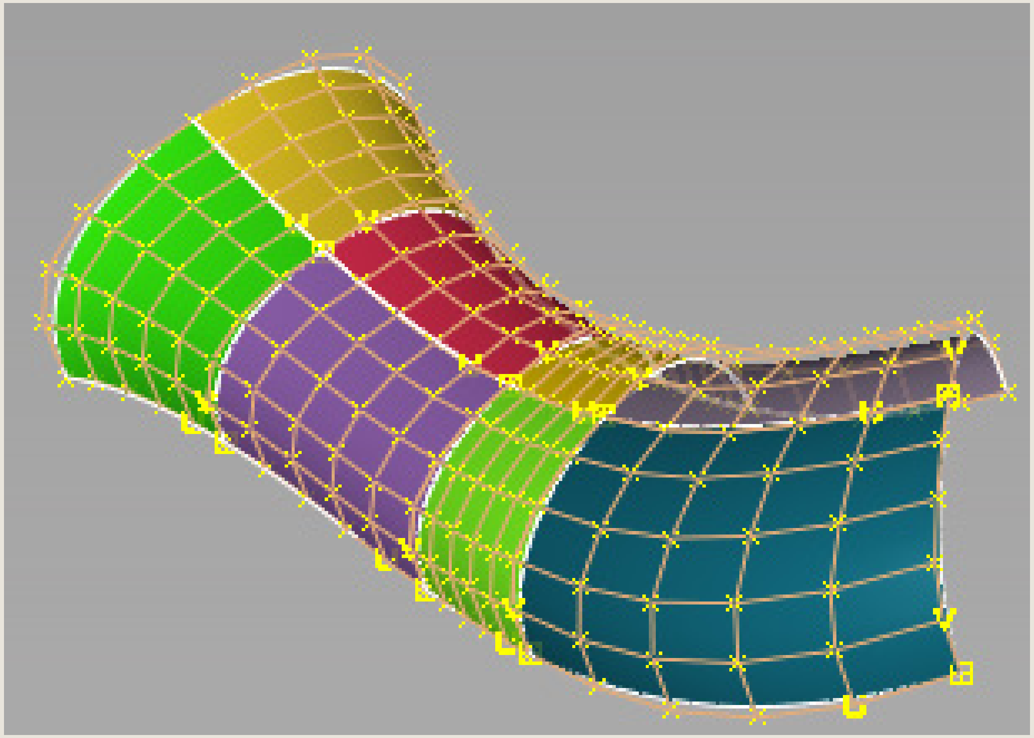


G0拼接



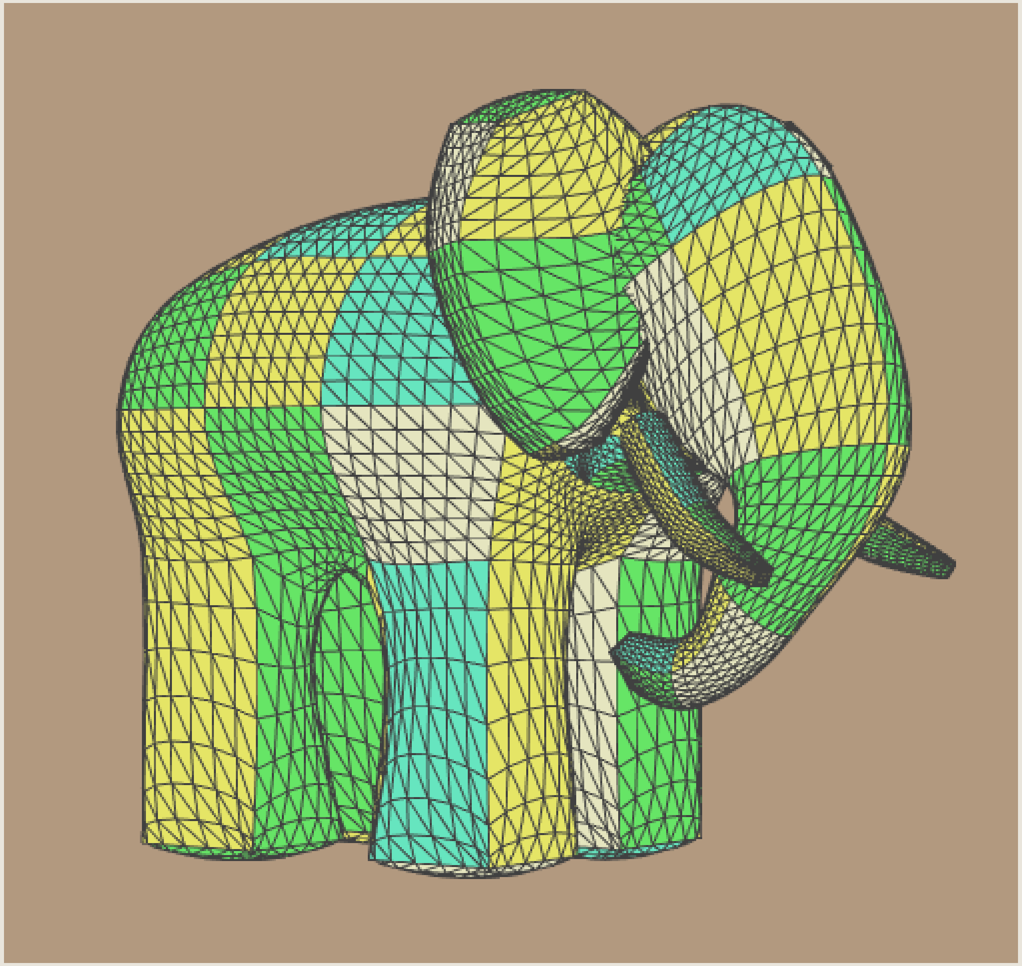
G1拼接

Bézier 曲面的拼接



Bezier曲面拼接

Bézier 曲面的拼接



Bezier曲面拼接成的大象

本章结束

Bernstein基函数的性质

$$B_{i,n}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}$$

2) 规范性(权性)： $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) \equiv 1, \quad 0 \le t \le 1$

证明：利用二项式展开

$$(1-t+t)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (1-t)^{n-i} t^i$$

$$1=\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)$$

Bernstein基函数的性质

$$B_{i,n}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}$$

3) 对称性 $B_{i,n}(t)=B_{n-i,n}(1-t), i=0,1,\ldots,n$

证明： $B_{i,n}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}(1-t)^{n-i}t^i$

$$B_{n-i,n}(1-t)=\frac{n!}{(n-i)!(n-(n-i))!}(1-(1-t))^{n-(n-i)}(1-t)^{n-i}$$

$$=\frac{n!}{(n-i)!i!}t^i(1-t)^{n-i}$$

Bernstein基函数的性质

$$B_{i,n}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^{i}(1-t)^{n-i}$$

4) 递推性 $B_{i,n}(u)=(1-u)B_{i,n-1}(u)+uB_{i-1,n-1}(u),\quad i=0,1,\ldots,n$

右边

$$=(1-u)\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}(1-u)^{n-1-i}u^{i}+u\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}(1-u)^{n-i}u^{i-1}$$

$$=\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}(1-u)^{n-i}u^{i}+\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}(1-u)^{n-i}u^{i}$$

$$=\left[\frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!}+\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}\right](1-u)^{n-i}u^{i}$$

$$=\left[\frac{n(n-1)!(n-i)}{i!(n-1-i)!n(n-i)}+\frac{(n-1)!ni}{(i-1)!(n-i)!ni}\right](1-u)^{n-i}u^{i}$$

$$=\left[\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{n-i}{n}+\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{i}{n}\right](1-u)^{n-i}u^{i}$$

Bezier曲线的生成

- De Casteljau算法

证明：利用 $B_{i,n}(t)=(1-t)B_{i,n-1}(t)+tB_{i-1,n-1}(t)$

$$P(u)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,n}(t)$$

$$P_0B_{0,n}(t)=P_0[(1-t)B_{0,n-1}(t)+\text{[redacted]}]$$

$$P_1B_{1,n}(t)=P_1[(1-t)B_{1,n-1}(t)+tB_{0,n-1}(t)\ ]$$

$\vdots$

$\vdots$

$$P_nB_{n,n}(t)=P_n[\text{[redacted]}+tB_{n-1,n-1}(t)]$$

Bezier曲线的生成

- De Casteljau算法

整理得到：

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,n}(t) \quad =$$

$$B_{0,n-1}(t)[(1-t)P_0+tP_1]+$$

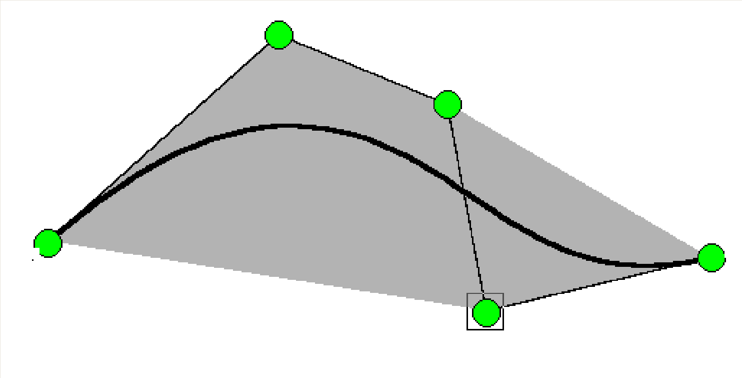
$$B_{1,n-1}(t)[(1-t)P_1+tP_2]+$$

$$\cdots$$

$$B_{n-1,n-1}(t)[(1-t)P_{n-1}+tP_n]=\sum_{i=0}^{n-1}P_i^{[1]}B_{i,n-1}(t) \quad =\ldots$$

Bézier曲线的性质

3. 凸包性（续）



◆Bezier曲线的凸包性证明：

➢ 可以从de Causteljau算法进行证明：de Causteljau算法中第k+1层的点一定位于第k层点的凸包内。

➢ 考虑Bernstein基函数的性质：基函数的值在[0,1]之间，所有基函数的和恒等于1。