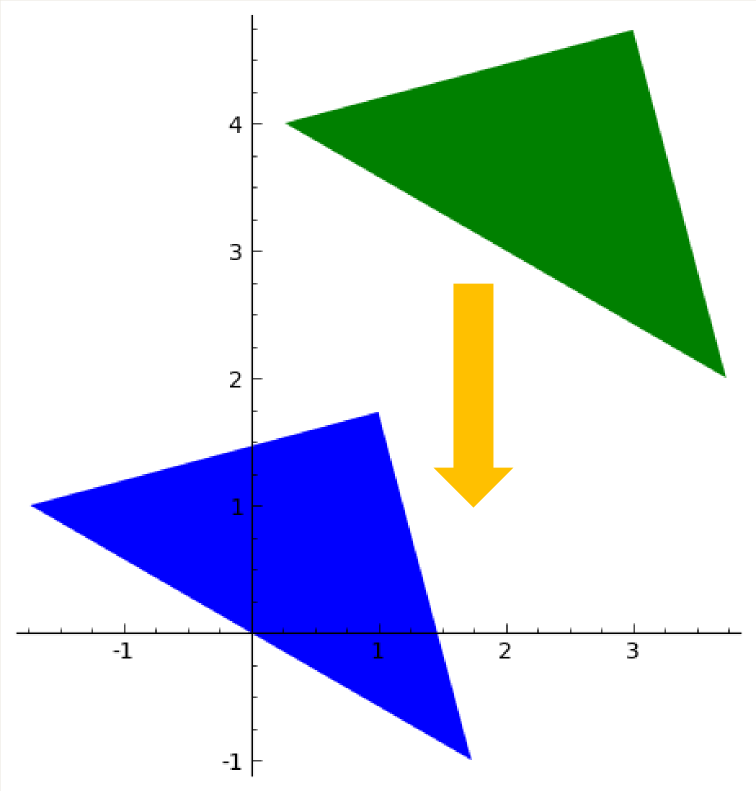
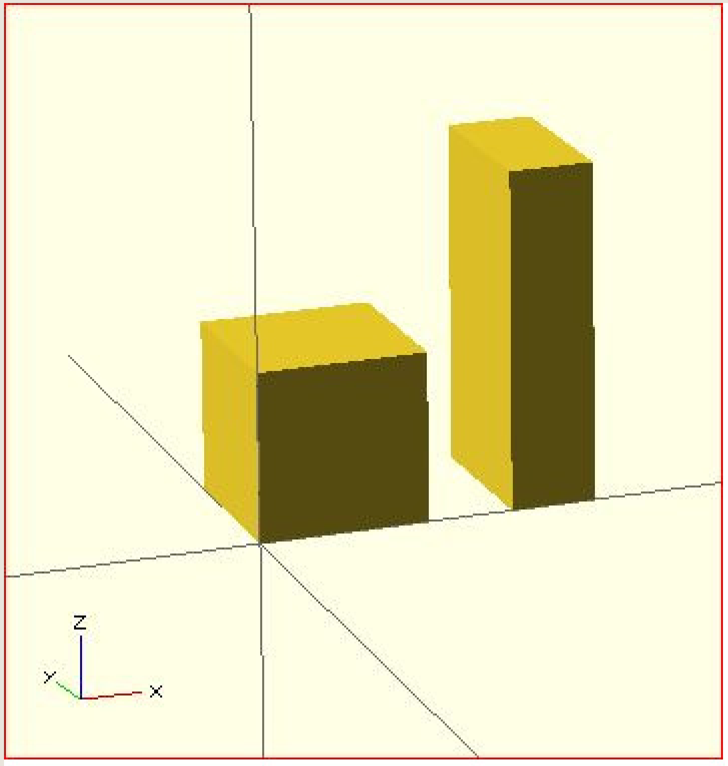
计算机图形学

哈尔滨工业大学（威海）
计算机科学与技术学院
伯彭波

第四章：几何变换

概念：几何变换（图形变换）将一个图形的每个点映射到一个新的位置，得到一个新的图形。

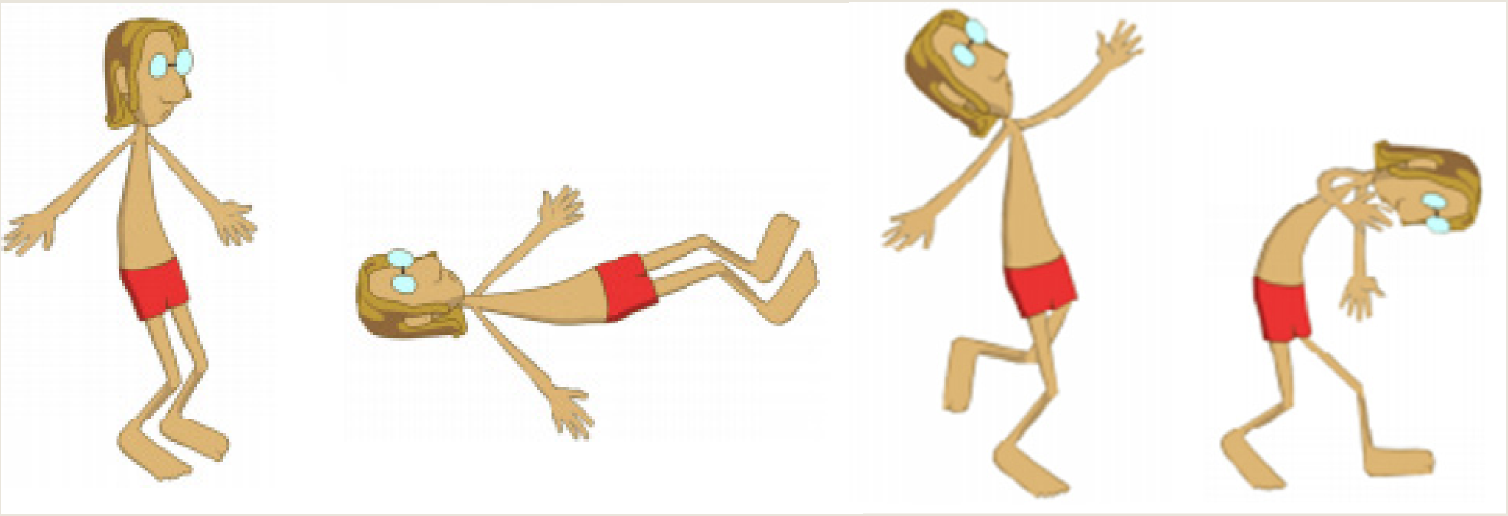




第四章：几何变换

概念：几何变换（图形变换）将一个图形的每个点映射到一个新的位置，得到一个新的图形。

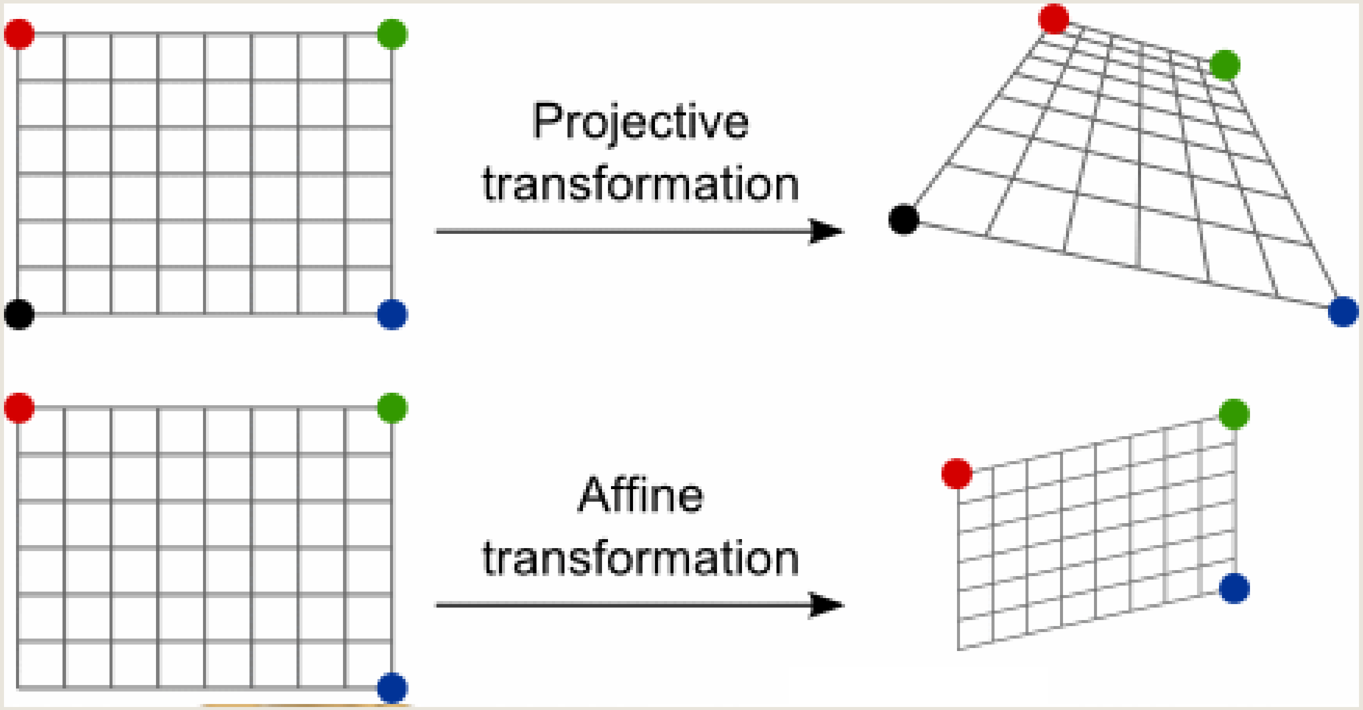
几何变换的种类：刚体变换，非刚体变换



第四章：几何变换

概念：几何变换（图形变换）将一个图形的每个点映射到一个新的位置，得到一个新的图形。

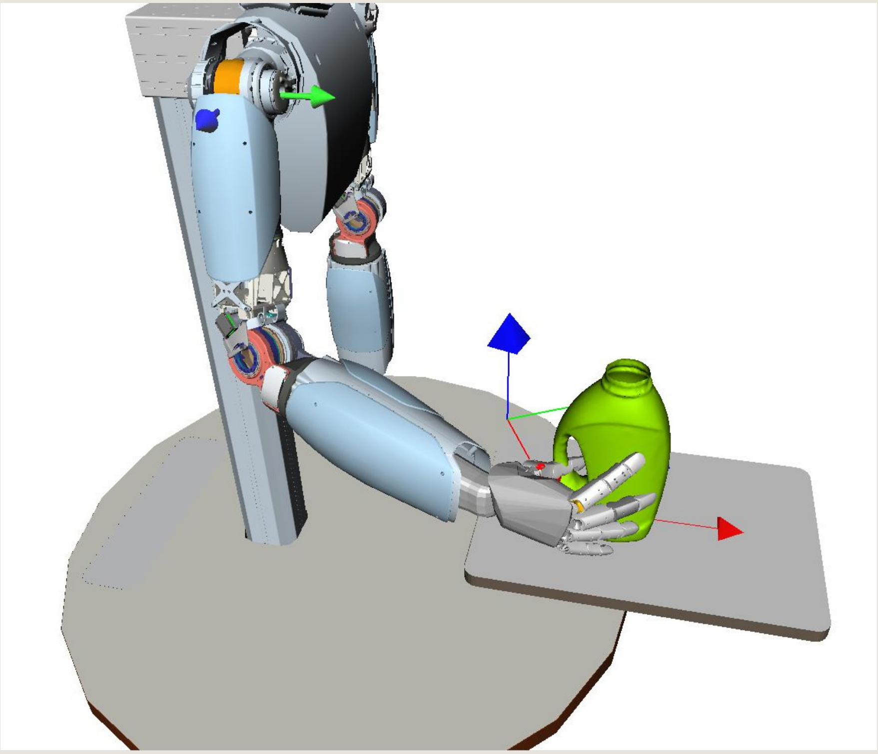
几何变换的种类：仿射变换，射影变换



第四章：几何变换

概念：几何变换（图形变换）将一个图形的每个点映射到一个新的位置，得到一个新的图形。

✓ 举例：机器人的运动规划



第四章：几何变换

概念：几何变换（图形变换）将一个图形的每个点映射到一个新的位置，得到一个新的图形。

✓ 举例：拍照

第四章：几何变换

- 二维基本几何变换
- 齐次坐标的表示
- 复合变换
- 坐标系转换
- 三维基本几何变换

- 几何变换用矩阵表示

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(x' \quad y' \quad z') = (x \quad y \quad z) M^T$$

第四章：几何变换

- 二维基本几何变换
- 齐次坐标的表示
- 复合变换
- 坐标系转换
- 三维基本几何变换

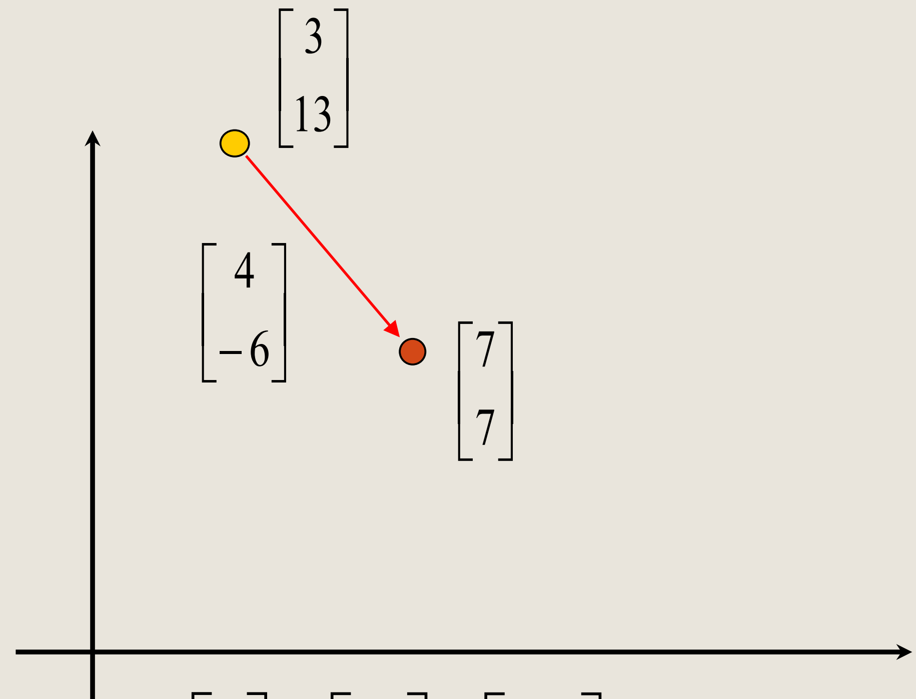
> 平移
> 相对于坐标原点的放缩
> 绕坐标原点的旋转

二维几何变换

- 平移：一个点加上一个平移向量得到变换后的点

- 公式：$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$

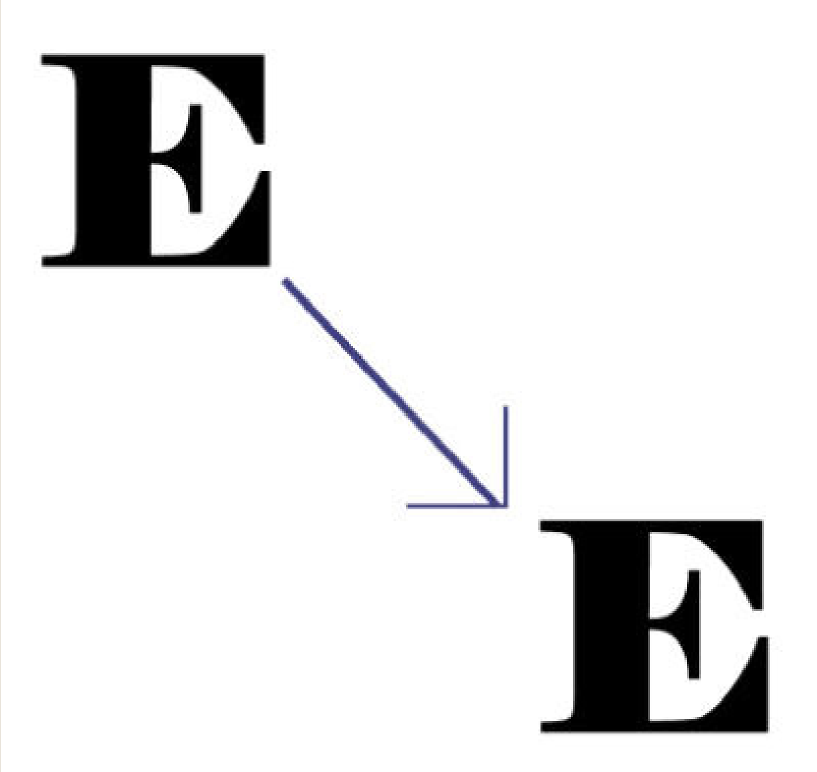
简写成：$P' = P + T$

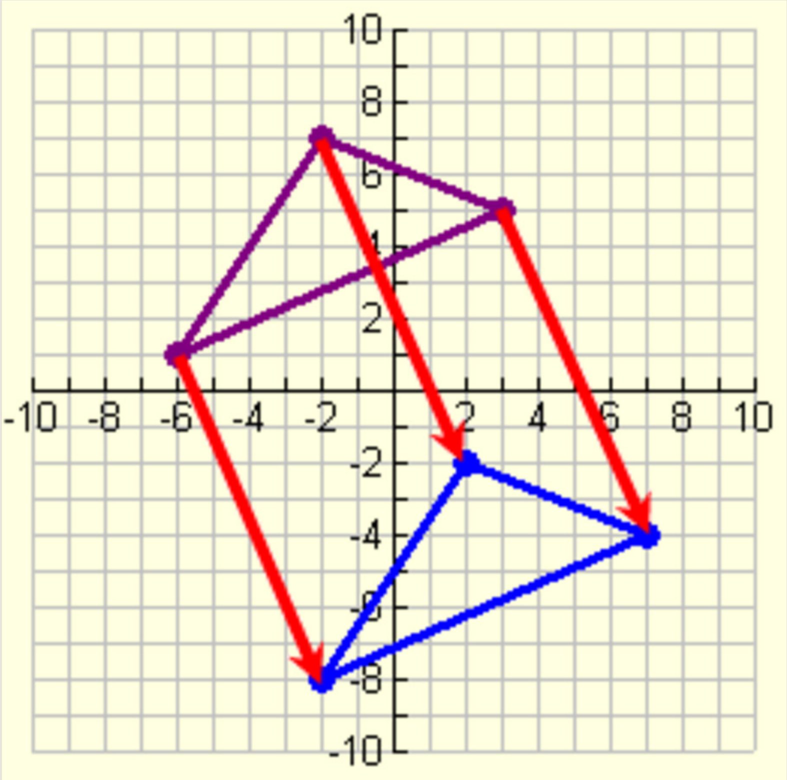


$$\begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

二维几何变换

- **图形的平移**：图形上所有点加上<u>相同</u>的<u>平移向量</u>。
- **多边形的平移**：对多边形的<u>顶点</u>进行平移，然后将变换后的顶点连接起来，得到变换后的多边形。



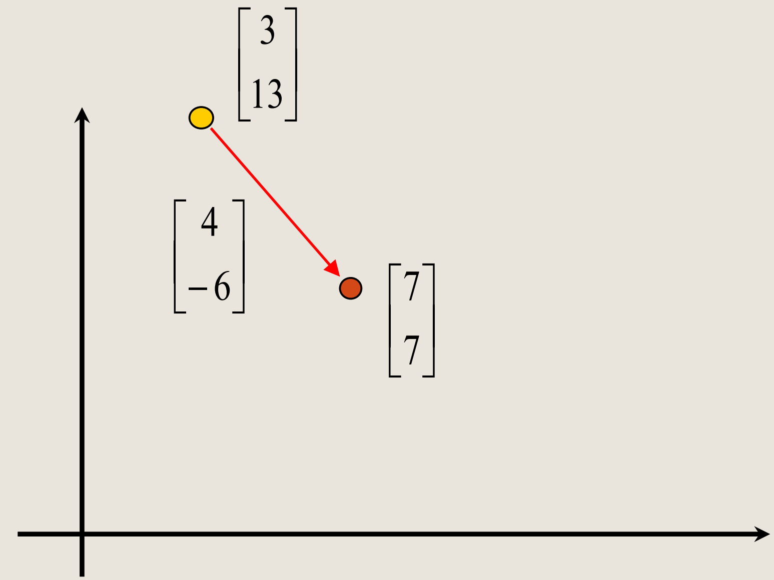


二维几何变换

- 平移的矩阵表示

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

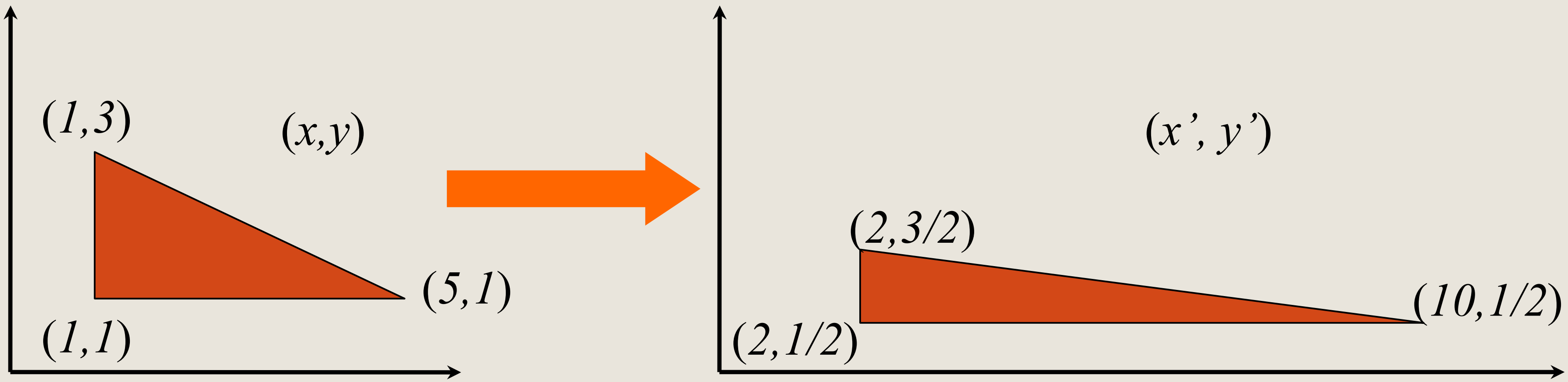
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$



- 矩阵表示：$P' = MP + T$

二维几何变换

- 关于原点的**放缩**



$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y/2 \end{cases}$$

- 公式：$\begin{cases} x' = S_x \times x \\ y' = S_y \times y \end{cases}$

二维几何变换

- 关于原点放缩的矩阵表示

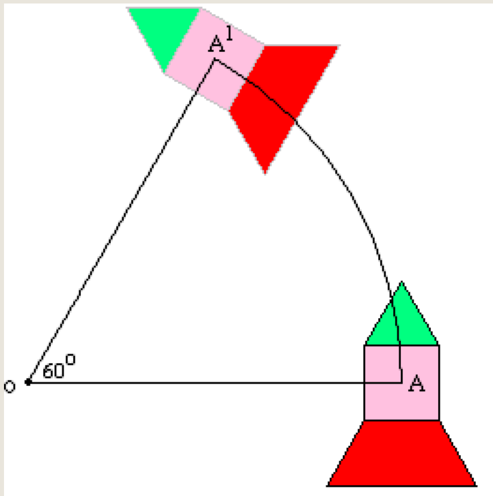
$$\begin{cases} x' = S_x \times x \\ y' = S_y \times y \end{cases}$$

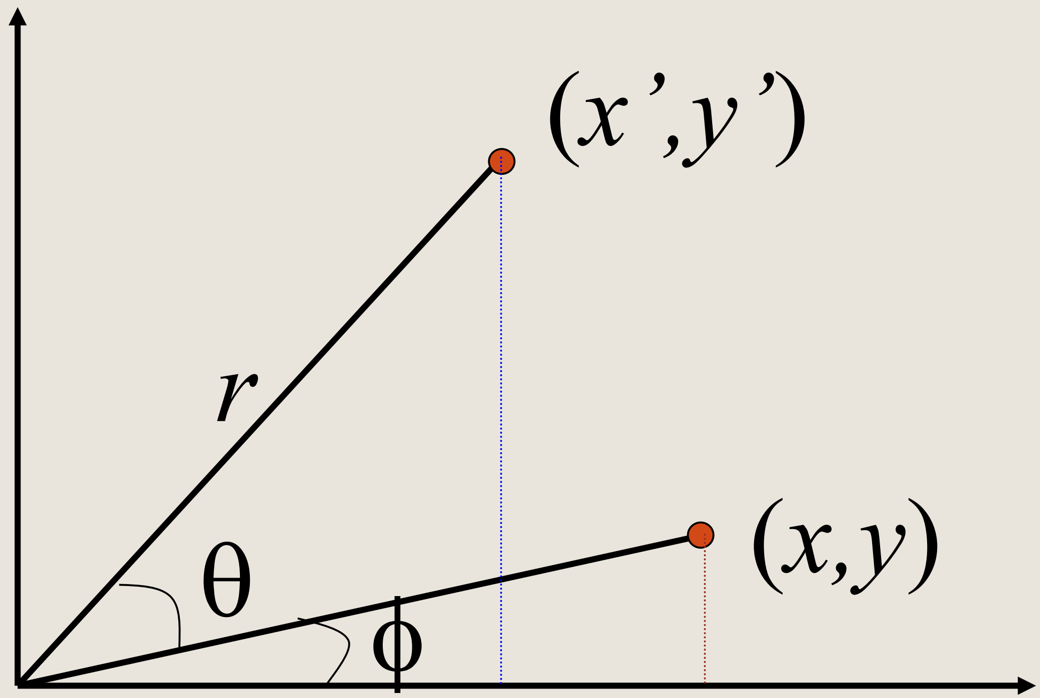
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- 矩阵表示：$P' = MP$

二维几何变换

- 绕原点的旋转





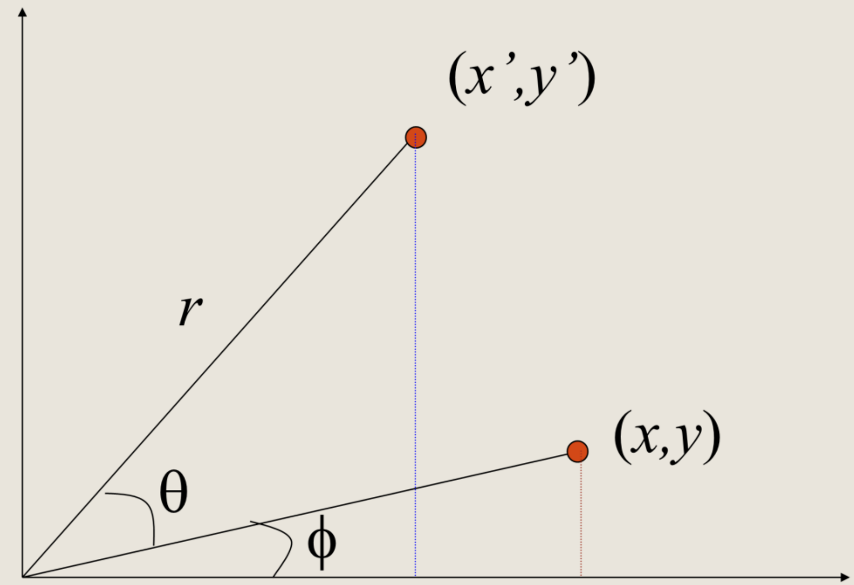
- 变换前的点跟变换后的点在一个圆上，

  用圆的参数方程表示点：

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

二维几何变换

- 绕原点的**旋转**



- 变换公式:

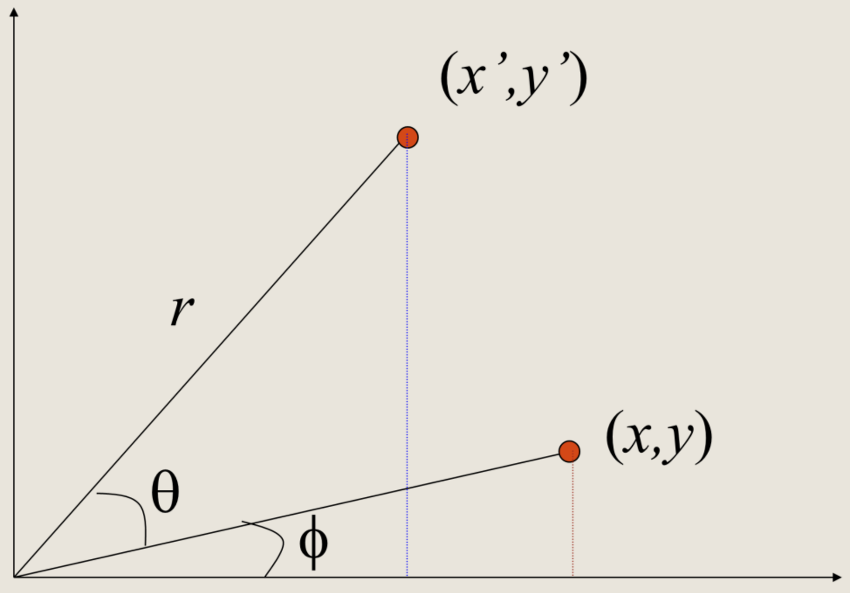
$$x' = r\cos(\phi+\theta)$$
$$= r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta$$
$$= x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = r\sin(\phi+\theta)$$
$$= r\sin\phi\cos\theta + r\cos\phi\sin\theta$$
$$= x\sin\theta + y\cos\theta$$

二维几何变换

- 绕原点的旋转

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$



- 矩阵表示：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- 矩阵表示：P'= MP

第四章：几何变换

- 平移
- 相对于坐标原点的放缩
- 绕坐标原点的旋转

基于笛卡尔坐标，这些基本变换用矩阵的形式表示：

- 绕原点的旋转: $P' = MP$ 矩阵乘法
- 相对于原点的放缩: $P' = MP$ 矩阵乘法
- 平移: $P' = MP + T$ 矩阵乘法、加法

第四章：几何变换

- 二维基本几何变换
- 齐次坐标的表示
- 复合变换
- 坐标系转换
- 三维基本几何变换

➢ 齐次坐标是用一个n+1维向量来表示一个n维的向量。

$$(x, y) \Leftarrow (xh, yh, h) \qquad h \neq 0$$

➢ 规范化齐次坐标表示就是h=1的齐次坐标表示。

$$(x, y) \Leftarrow (x, y, 1)$$

➢ 当h=0时，表示无穷远点。

- 齐次坐标的表示

➢ 例子：

平面上一点P的笛卡尔坐标

（2, 3）

P点的齐次坐标

（2w, 3w, w）, w≠0

一般采用

（2, 3, 1）

使用齐次坐标的平移

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

比较：使用笛卡尔坐标的平移

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

使用齐次坐标的放缩

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

比较：使用笛卡尔坐标的放缩

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x}' \\ \mathrm{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

使用齐次坐标的旋转

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

比较：使用笛卡尔坐标的旋转

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

第四章：几何变换

- 平移
- 相对于坐标原点的放缩
- 绕坐标原点的旋转

基于<u>齐次坐标</u>，这些基本变换用<u>矩阵乘法</u>表示：

- 绕原点的旋转： $P' = MP$
- 相对于原点的放缩： $P' = MP$
- 平移： $P' = MP$

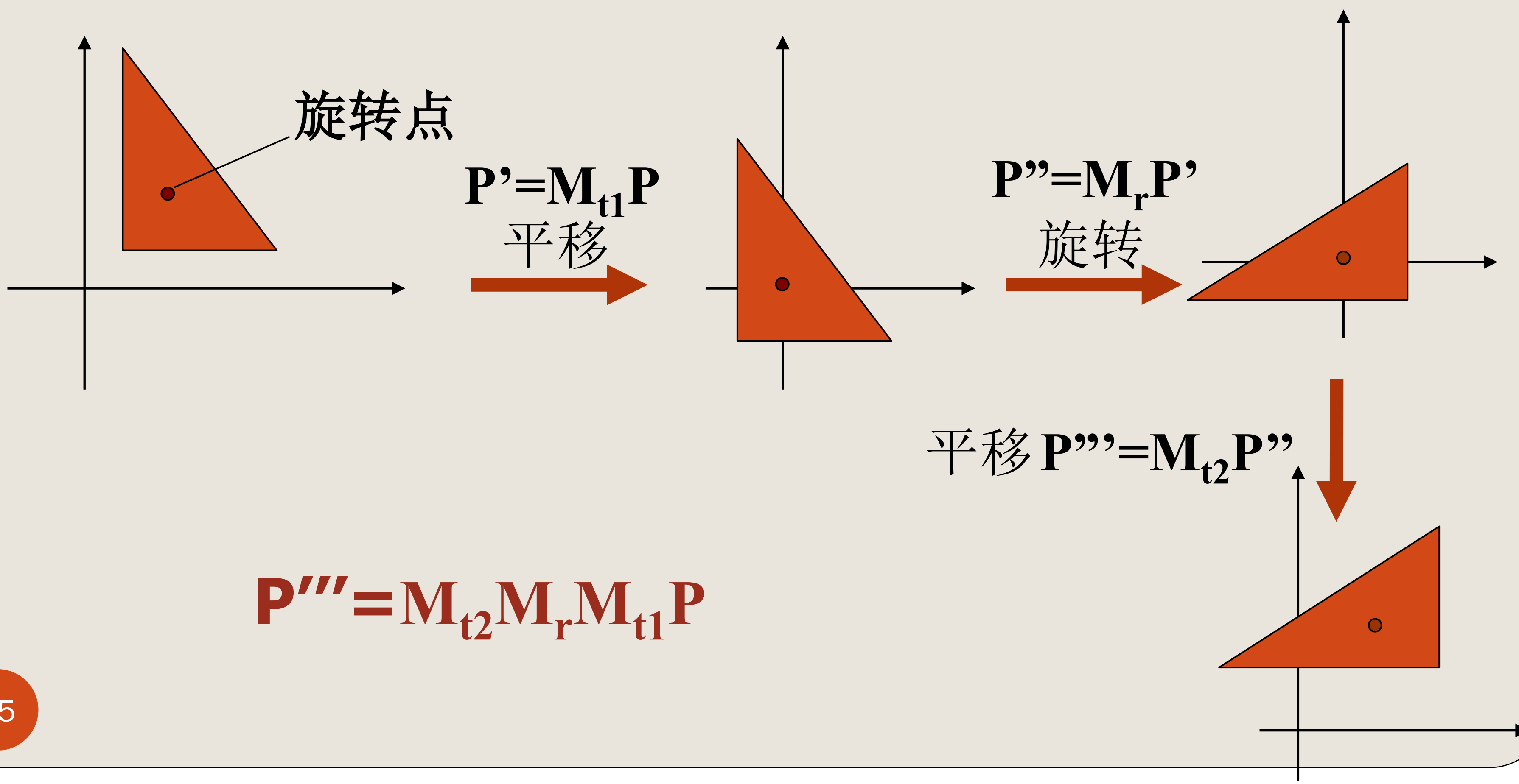
第四章：几何变换

- 二维几何变换
- 齐次坐标的表示
- 复合变换
- 坐标系转换
- 三维几何变换

- 概念：复合变换是一系列基本几何变换的组合。
- 例子：绕任意点的旋转？

- 复合变换

- **实例：** 绕任意点的旋转？
- 通过平移、旋转、平移几个基本变换的组合得到。



$$P''' = M_{t2} M_r M_{t1} P$$

第四章：几何变换

- 复合变换

- 采用齐次坐标，几个连续的变换组合可表示成

$$P' = M_1 M_2 M_3 M_4 P$$

$$= \widetilde{M} P$$

- 好处：求组合变换矩阵的运算只需做一次，图形的每一个点与复合矩阵相乘可得到变换后的点。

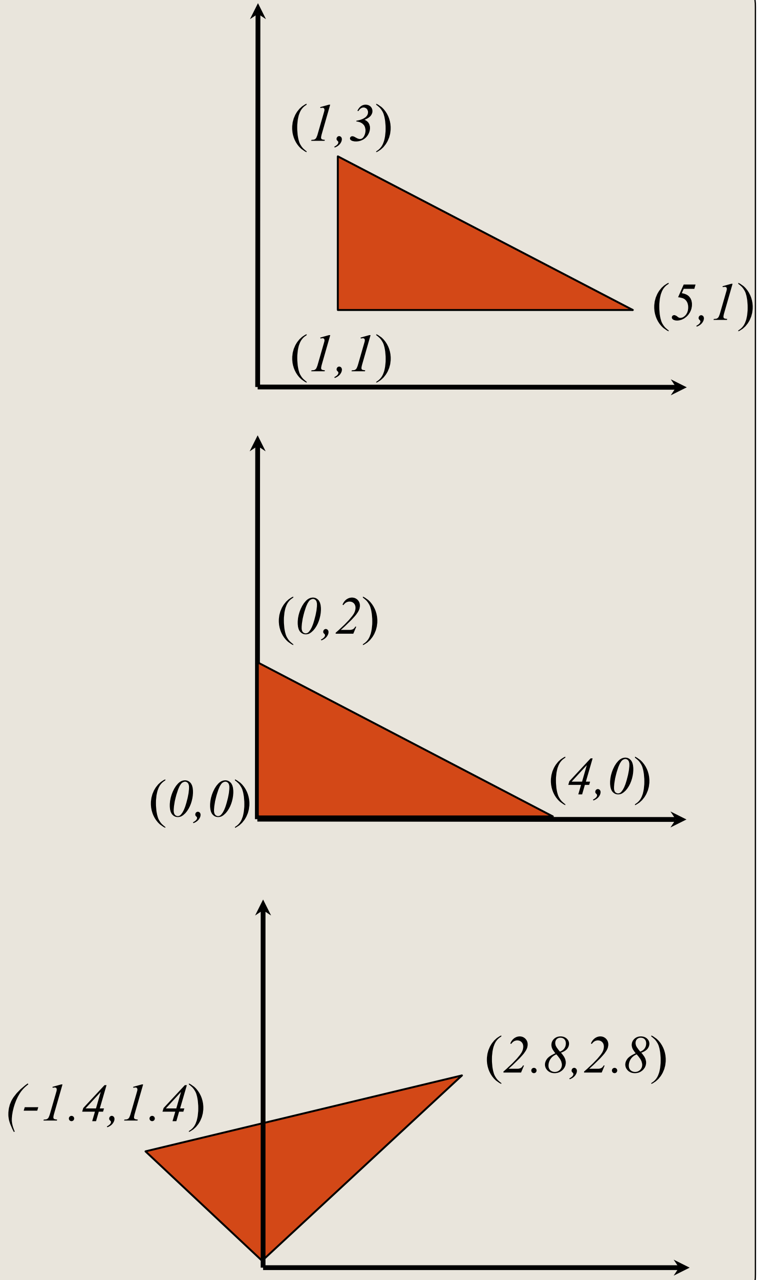
例 子：平 移+旋 转

- 平 移 ($Tx = -1$, $Ty = -1$)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 旋 转45^o

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ w'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix}$$



实例：平移+旋转

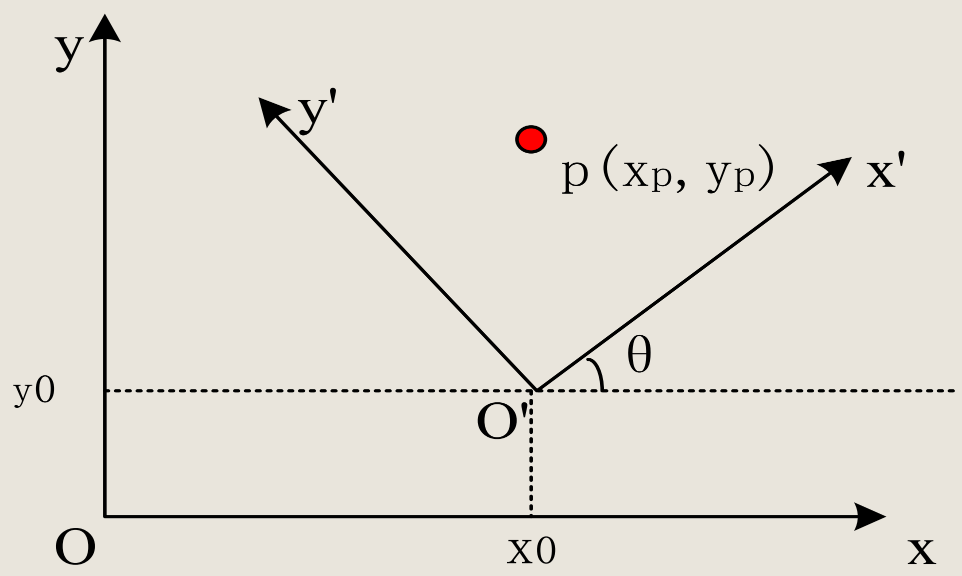
$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ w'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & T_x \cos\theta - T_y \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & T_x \sin\theta + T_y \cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

第四章：几何变换

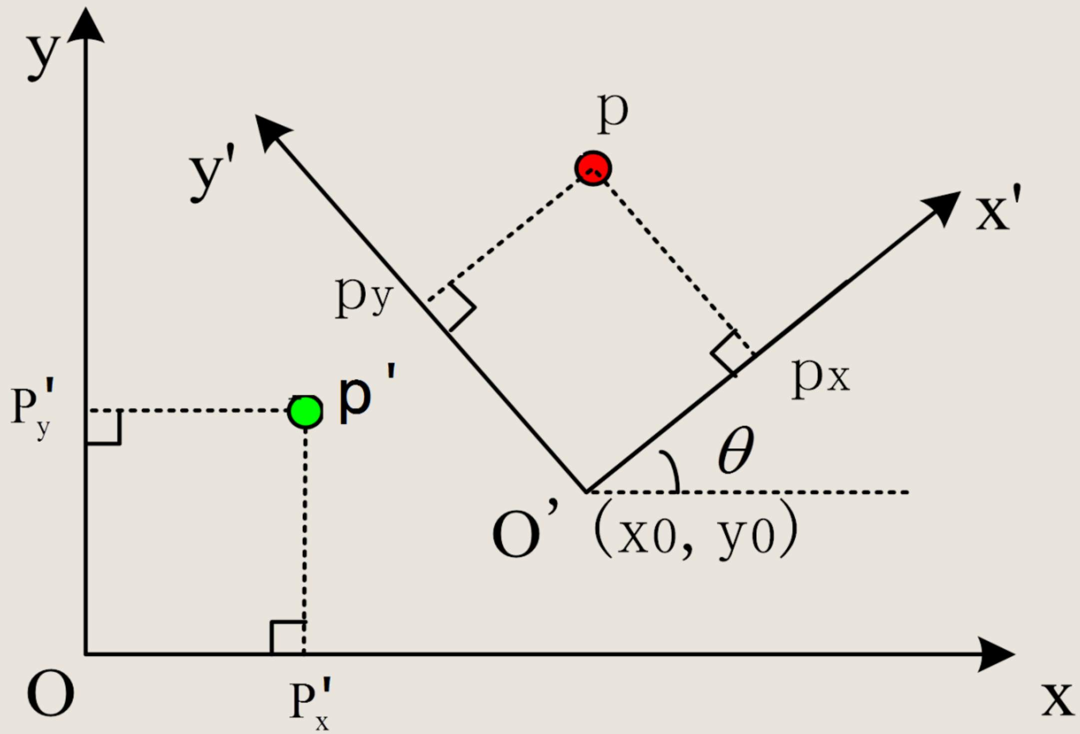
- 二维几何变换
- 齐次坐标
- 复合变换
- 坐标系转换
- 三维几何变换

➢ **概念：** 给一个坐标系x-y和一个点p在该坐标系下的表示(x_p, y_p), 在该坐标系里定义一个新的坐标系x′-y′，求点p在新的坐标系下的表示(x'_p, y'_p)?



坐 标 系 转 换

方法： 将新坐标进行变换，使之与原始坐标系重合，求得变换后的点在原始坐标系中的坐标。



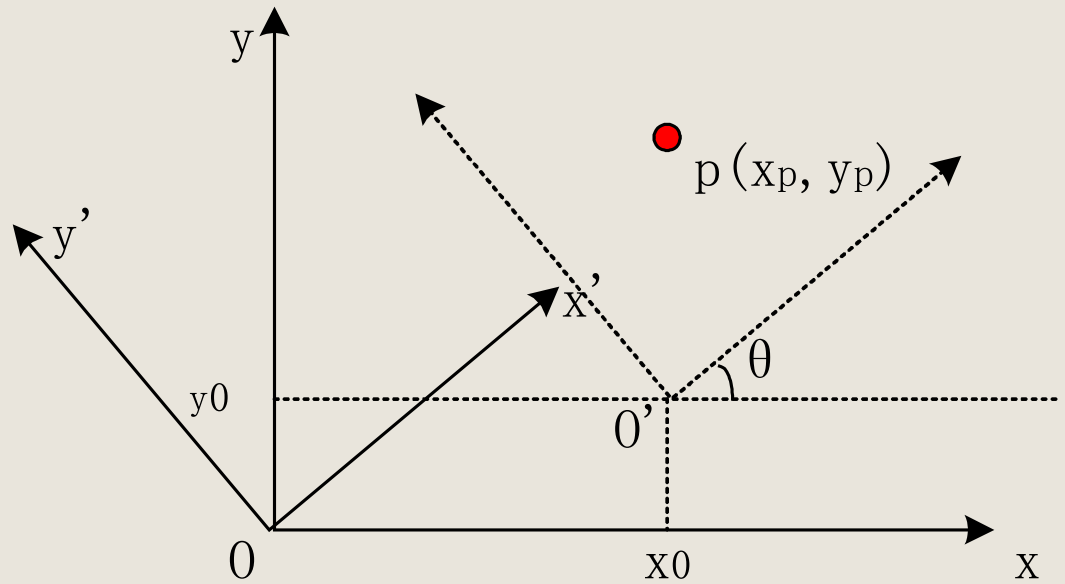
坐标系间的变换的原理

坐标系转换

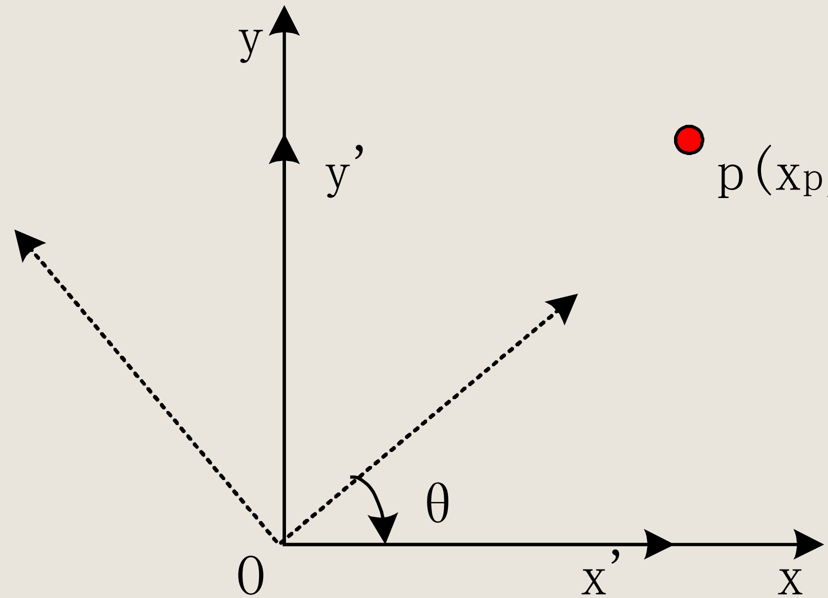
分两步进行:

(a)将x’y’坐标系的原点平移到xy坐标系的原点;

(b)将x’轴旋转到x轴上。



(a)将x’y’坐标系的原点平移到xy坐标系的原点



(b)将x’轴旋转到x轴上

坐标系转换

利用复合变换得到：

$$p' = \begin{bmatrix} x_p' \\ y_p' \\ 1 \end{bmatrix} = T_r T_t \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

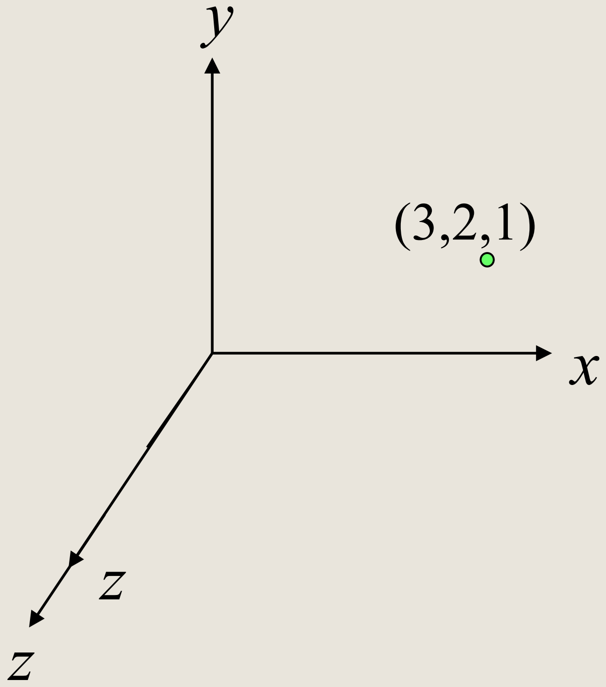
第四章：几何变换

- 二维几何变换
- 齐次坐标的表示
- 复合变换
- 坐标系转换
- 三维几何变换

  - 平移
  - 放缩
  - 旋转
  - 坐标系变换

三维几何变换

笛卡尔坐标下，一个点的表示$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$



三维几何变换

齐次坐标：一个空间点用4维向量表示

笛卡尔坐标到齐次坐标

$(x, y, z) \rightarrow (\mathbf{x, y, z, 1})$

$(x, y, z) \rightarrow (\mathbf{wx, wy, wz, w})$

齐次坐标到笛卡尔坐标

$(\mathbf{x, y, z, w}) \rightarrow (\mathbf{x/w, y/w, z/w, 1}) \rightarrow (x/w, x/w, z/w)$

三维几何变换

基于齐次坐标，基本的三维几何变换可以用矩阵乘法表示：

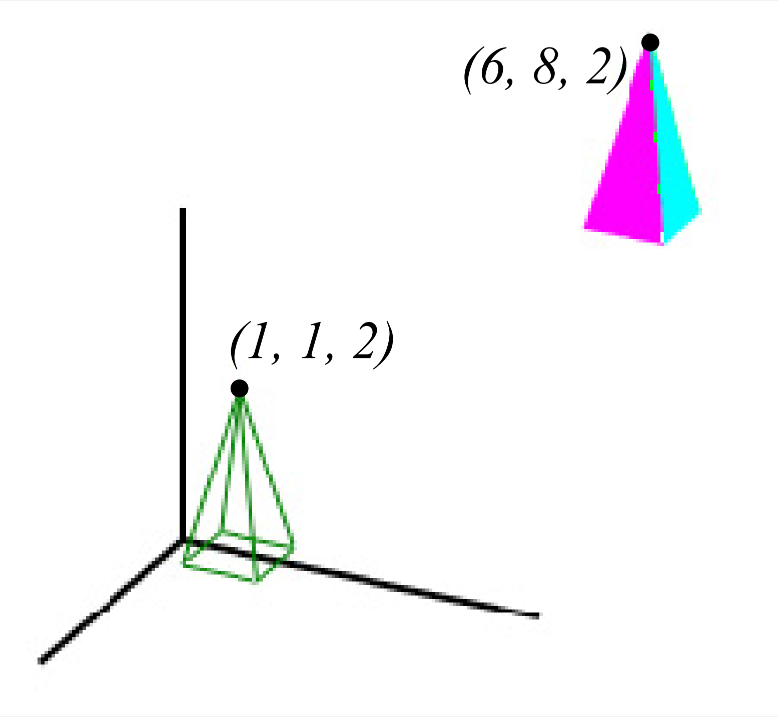
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

三维平移

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

$Example:$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

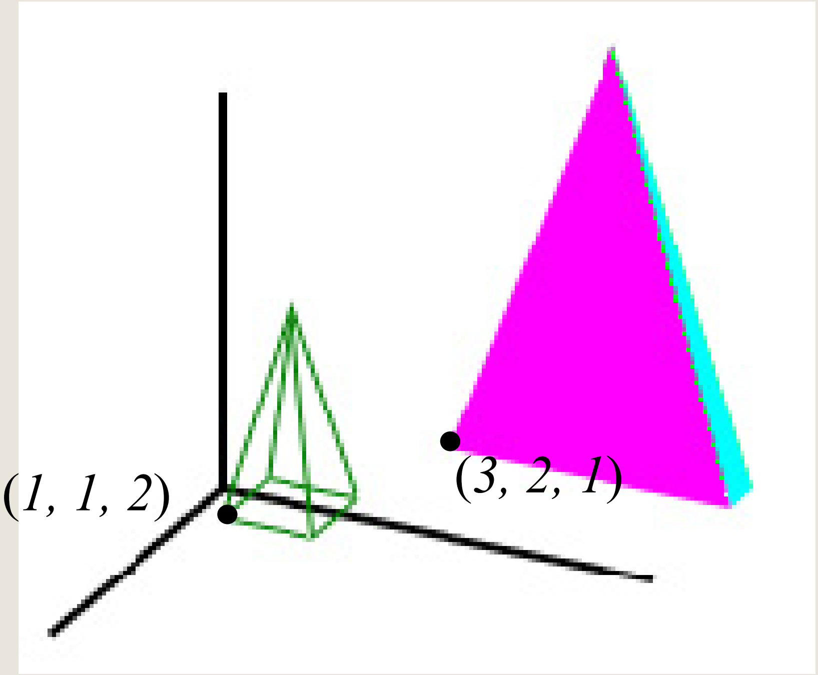


➢ 相对于原点的放缩

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Example

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ½ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



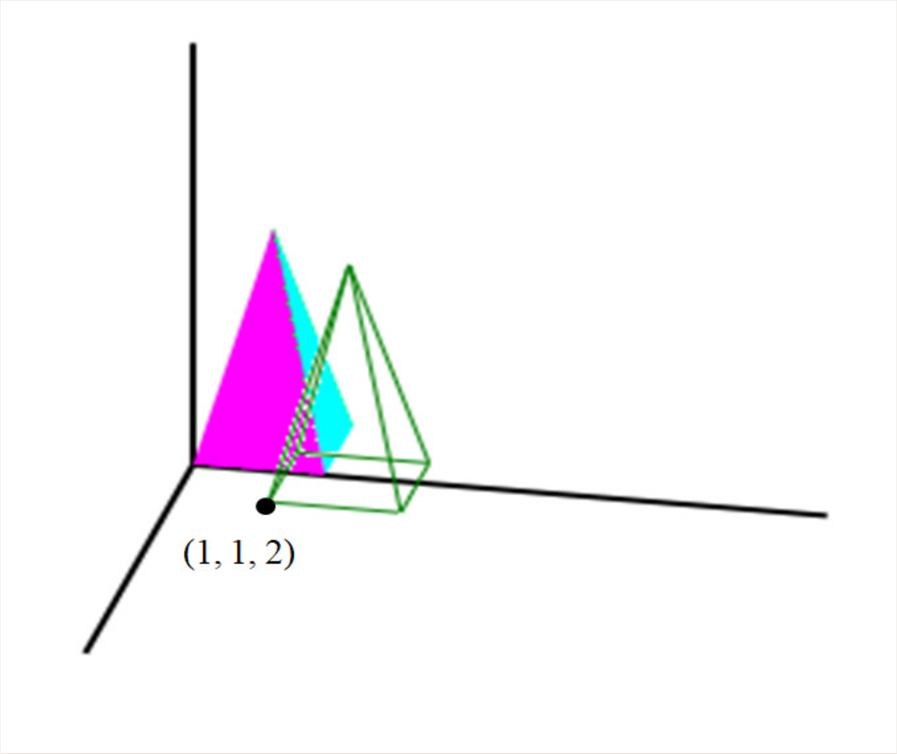
关于任意点的放缩，比如（1，1，2）

1. 将该点平移到坐标原点

Tx = -1, Ty = -1, Tz = -2

变换矩阵为：

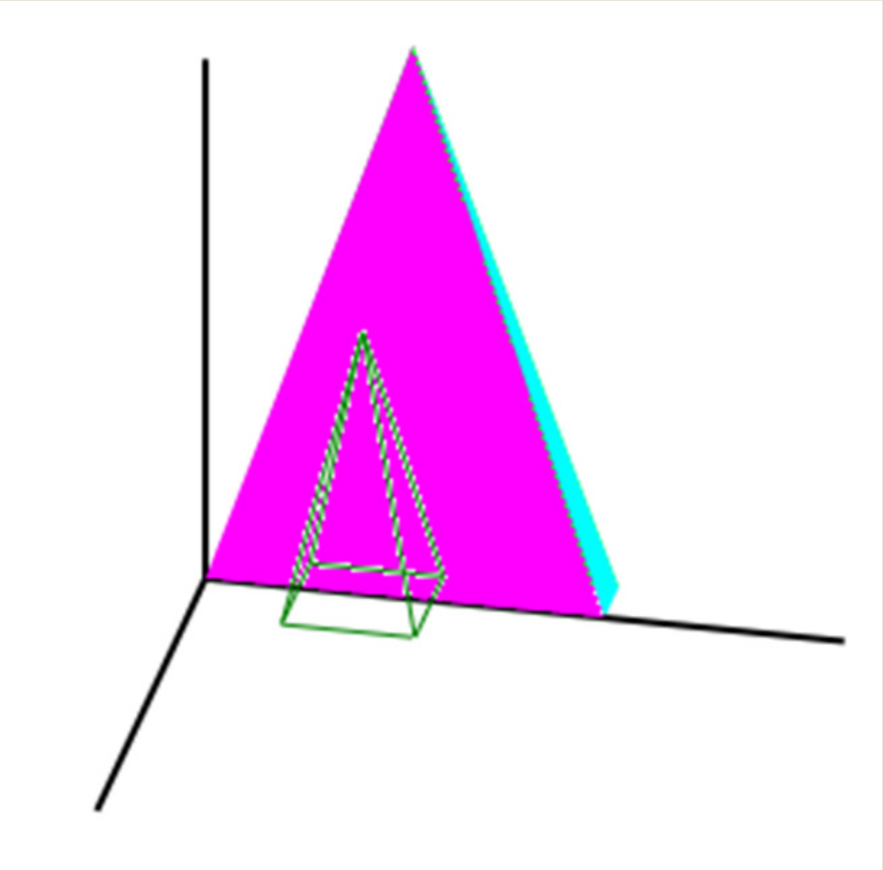
$$M_{t1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



相对于某个点的放缩，比如（1，1，2）

2. 做相对于原点的放缩

$$M_s = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

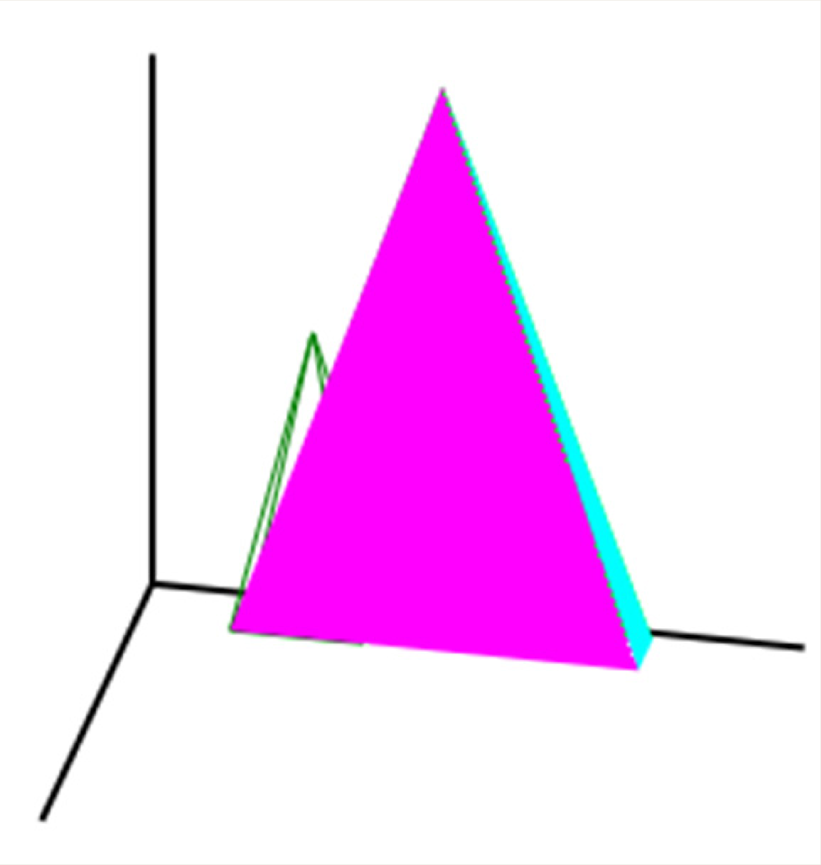


➢ 相对于某个点的放缩，比如（1，1，2）

3. 做第一步相反的平移操作

Tx = 1, Ty = 1, Tz = 2

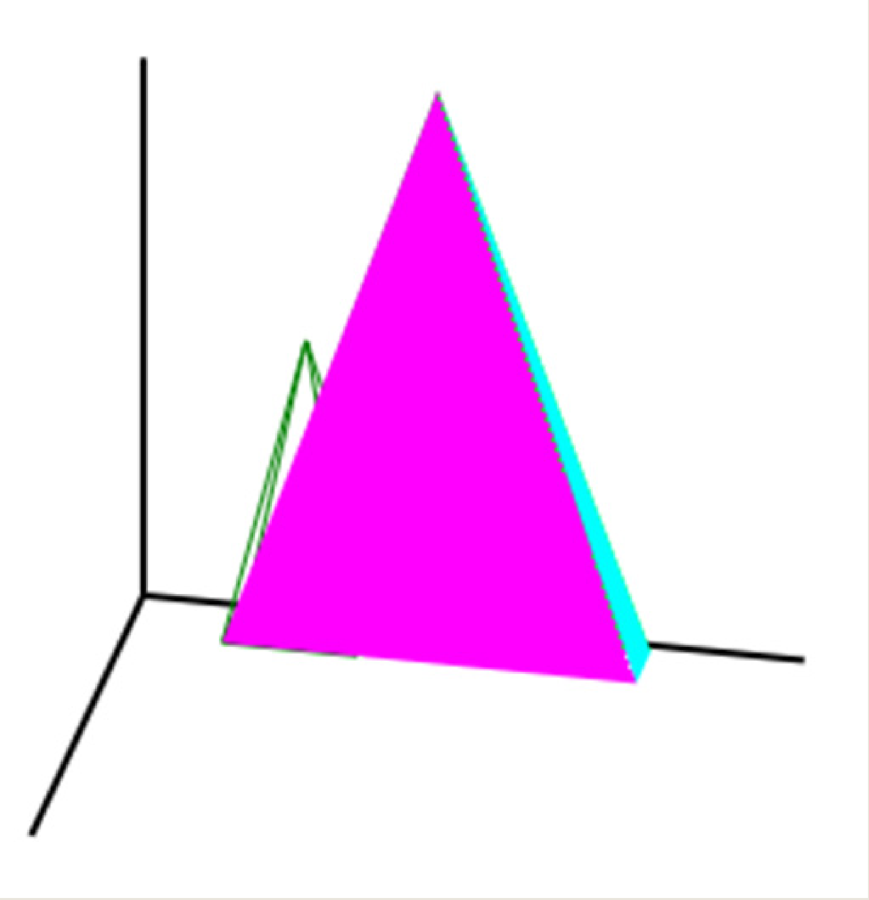
$$M_{t2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- 相对于某个点的放缩，比如（1，1，2）

复合变换的矩阵：

$$M = M_{t2} M_s M_{t1}$$



- 相对于某个点的放缩，比如（1，1，2）

复合变换的矩阵：$M = M_{t2} M_s M_{t1}$ 中，

M_{t2} 和M_{t1}的关系？

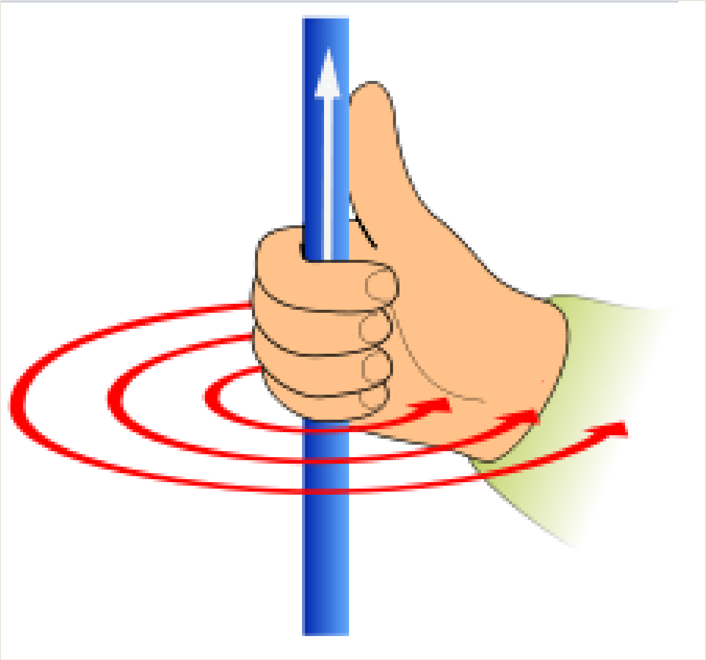
□ $M_{t1}M_{t2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore M_{t2} = M_{t1}^{-1}$

$\therefore M = M_{t1}^{-1} M_s M_{t1}$

三维旋转

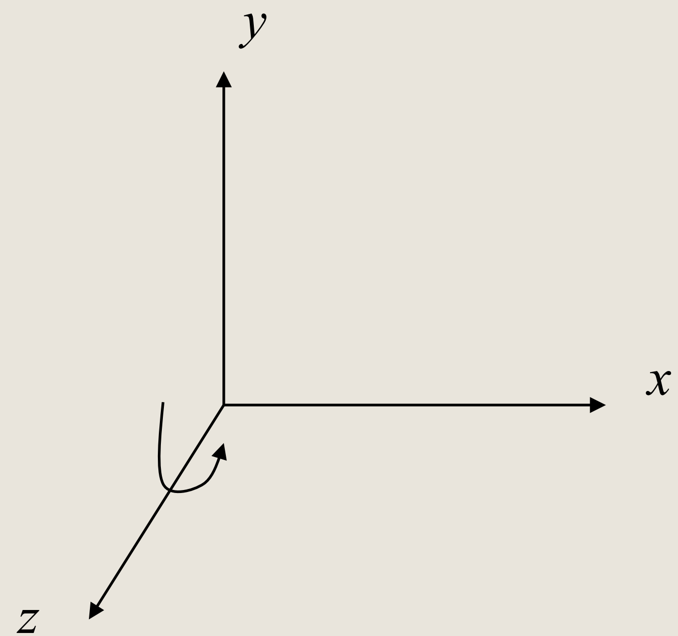
- 旋转需要指定的量: (1)旋转轴，(2)旋转角度
- 右手拇指规则：拇指指向旋转轴的方向，其余四指的方向为旋转方向。



绕z轴旋转

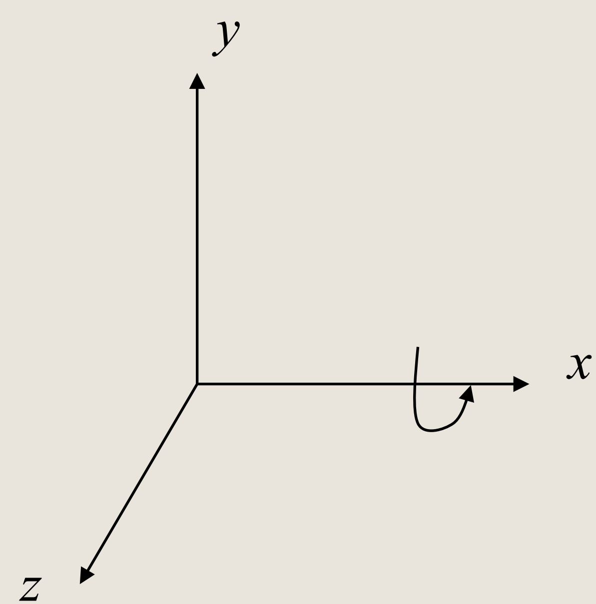
$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$
$$z' = z$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$



绕x轴旋转

$$y' = y\cos\theta - z\sin\theta$$
$$z' = y\sin\theta + z\cos\theta$$
$$x' = x$$

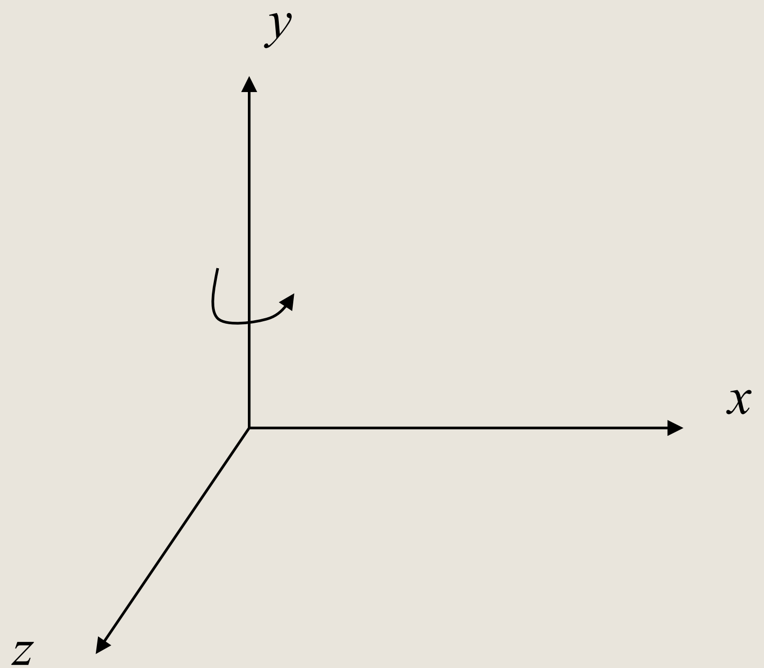


齐次坐标表示：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

绕y轴旋转

$$z' = z\cos\theta - x\sin\theta$$
$$x' = z\sin\theta + x\cos\theta$$
$$y' = y$$



齐次坐标表示：

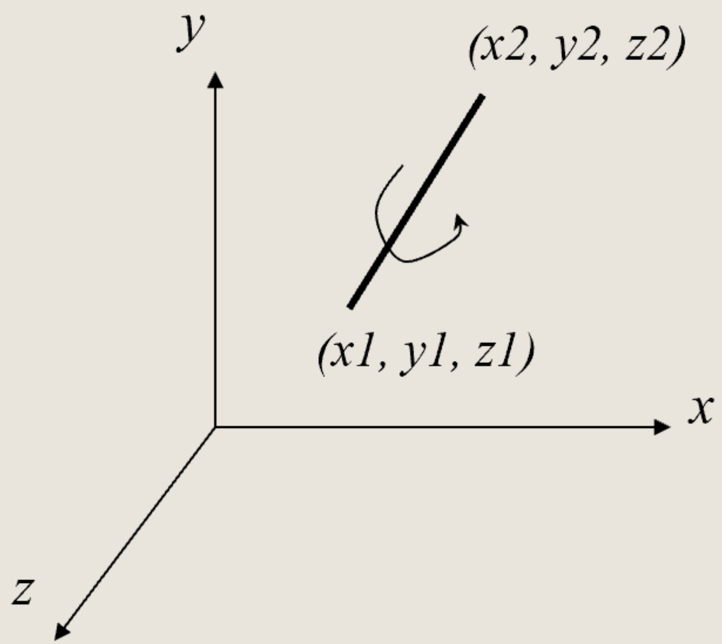
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

绕任意轴旋转

旋转轴的起点： **(x1,y1,z1)**

旋转轴的终点： **(x2,y2,z2)**

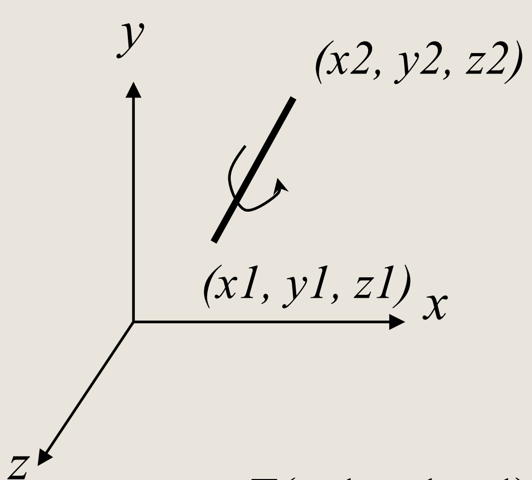
- 方法：利用基本几何变换的复合变换:将旋转轴的起点变换到坐标系原点，将旋转轴变换到Z轴。

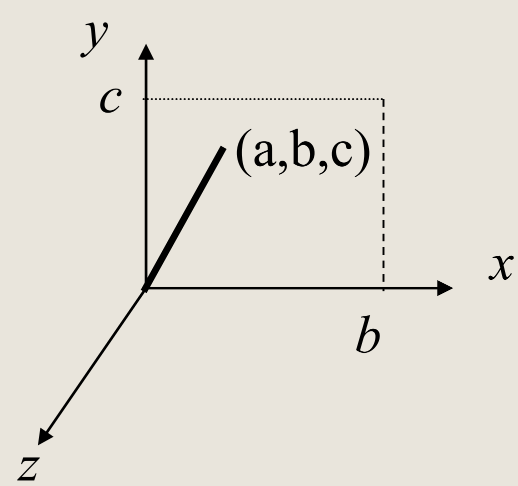


绕任意轴旋转

绕任意轴(x1,y1,z1)(x2,y2,z2)的旋转

- **Step 1**: 做平移变换，将点(*x*1,*y*1,*z*1)平移到坐标原点；另一个点变为：(a,b,c) = (x2-x1, y2-y1, z2-z1)
- 变换表示为：T(-x1,-y1,-z1)





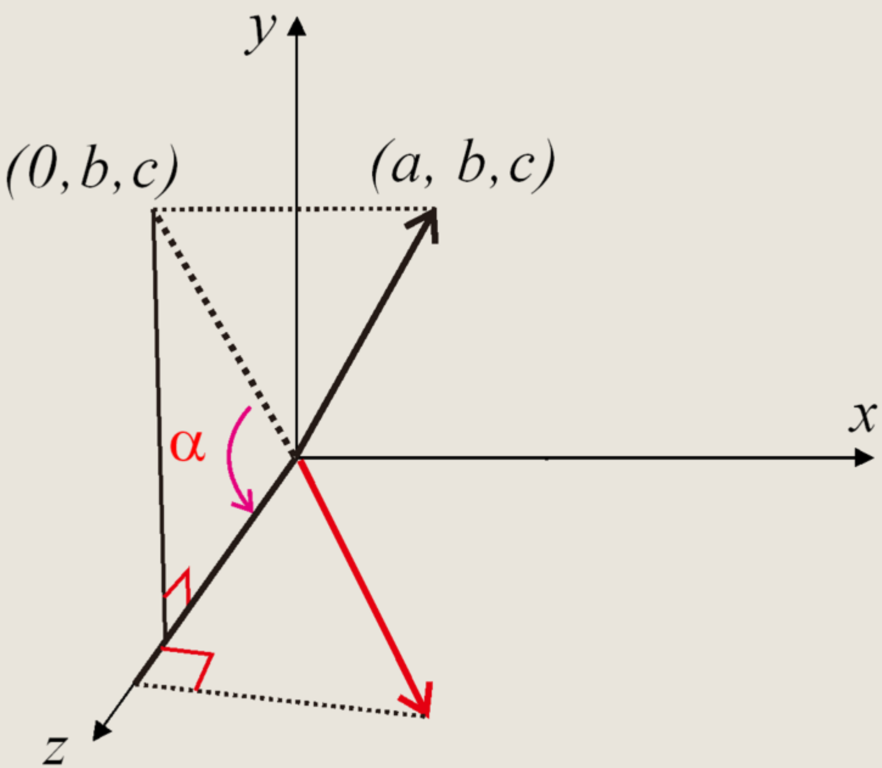
$$T(\text{-}x1,\text{-}y1,\text{-}z1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -x_1\\ 0 & 1 & 0 & -y_1\\ 0 & 0 & 1 & -z_1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- 绕任意轴旋转

  - Step 2：做绕x轴的旋转，旋转角度α(?)，使得旋转轴落到 xz 平面上。

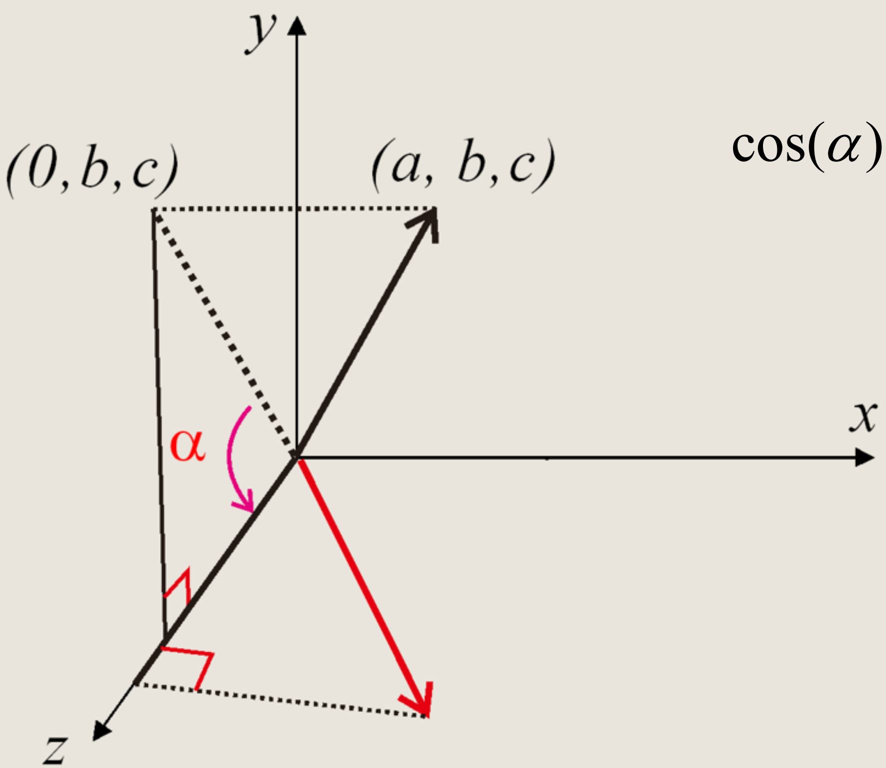
➢ 问题：如何计算旋转角度α？

利用旋转轴在y-z平面上垂直投影计算。



绕任意轴旋转

- Step 2：做绕x轴的旋转，旋转角度α(?)，使得旋转轴落到 xz 平面上。 变换表示为：$\mathbf{R_x(\alpha)}$



$$\cos(\alpha)=\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} \qquad \sin(\alpha)=\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

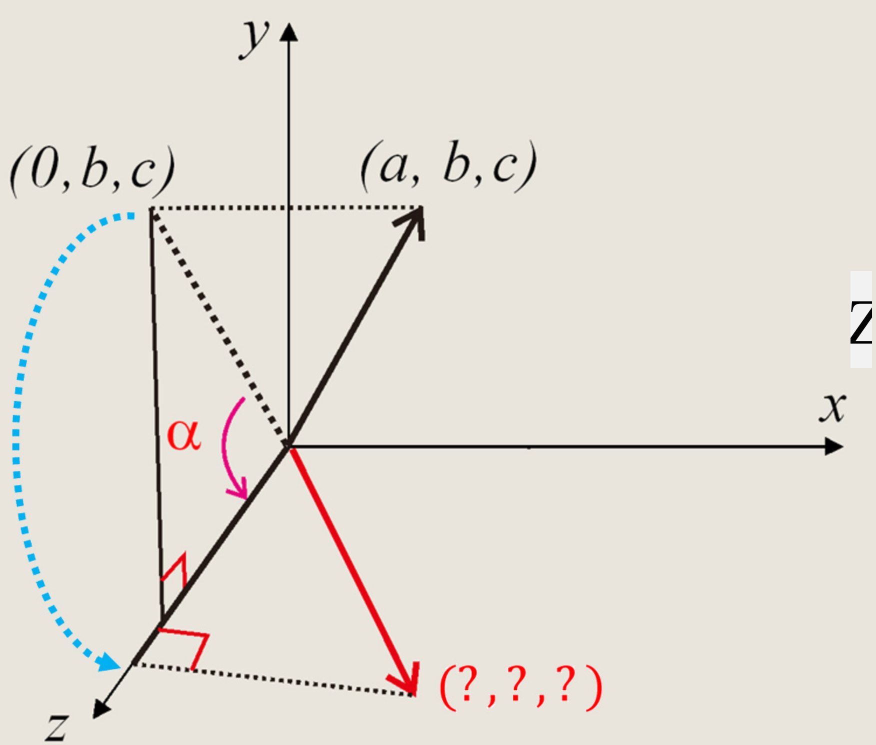
$$R_x(\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0\\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

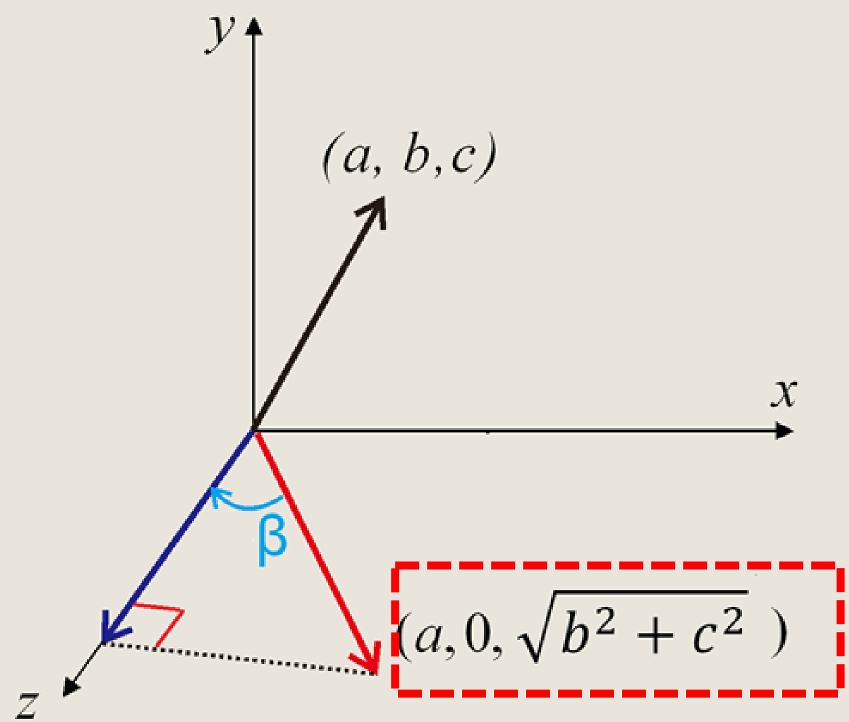
绕任意轴旋转

Step 3: 做绕y轴的旋转，顺时针旋转角度β(?)，使得旋转轴与z轴重合.

问题： 旋转角度β 等于多少？

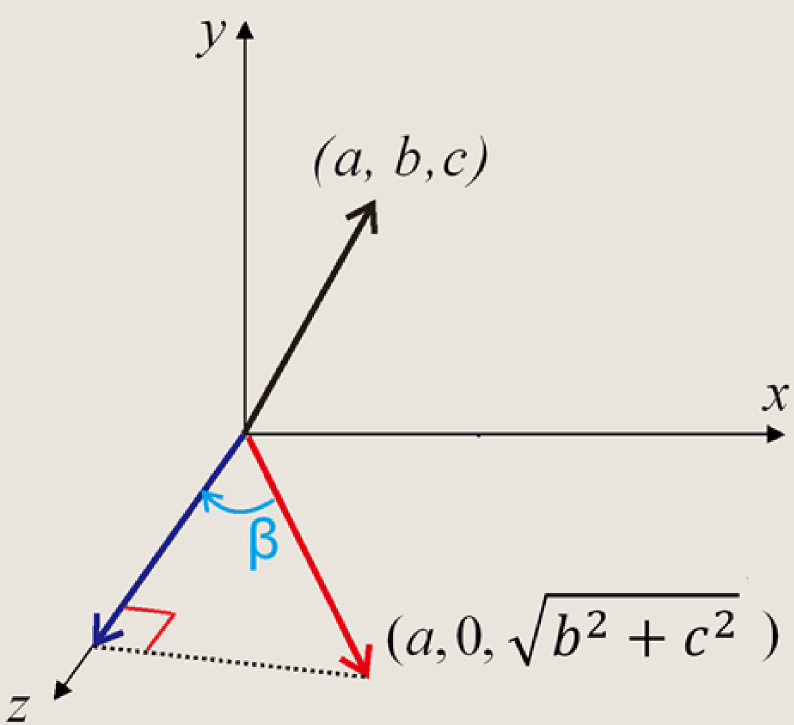
需要求出旋转轴转到x-z平面里的终点坐标。





绕任意轴旋转

Step 3: 做绕y轴的旋转，顺时针旋转角度β(?)，使得旋转轴与z轴重合，**等价逆时针旋转 -β**，**表示为$R_y(-\beta)$**



$$\cos(-\beta)=\cos(\beta)=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\sin(-\beta)=-\sin(\beta)=\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$R_y(-\beta)=\begin{bmatrix}\cos(-\beta) & 0 & \sin(-\beta) & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin(-\beta) & 0 & \cos(-\beta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

绕任意轴旋转

做完以上变换后，旋转轴与Z轴重合

- Step 4 ： 做绕着z轴的旋转 $R_z(\theta)$
- Step 5 ： 做Step 3的相反变换:$R_y(\beta)$。
- Step 6 ： 做Step 2的相反变换:$R_x(-\alpha)$。
- Step 7 ： 做Step 1的相反变换:$T(x1, y1, z1)$。

绕任意轴旋转

绕任意轴(x1,y1,z1)(x2,y2,z2)的旋转

$$M = T(x_1, y_1, z_1)R_x(-\alpha)R_y(\beta)\boxed{R_z(\theta)}R_y(-\beta)R_x(\alpha)T(-x_1, -y_1, -z_1)$$

$$\begin{bmatrix} u^2+(v^2+w^2)\cos\theta & uv(1-\cos\theta)-w\sin\theta & uw(1-\cos\theta)+v\sin\theta & (a(v^2+w^2)-u(bv+cw))(1-\cos\theta)+(bw-cv)\sin\theta \\ uv(1-\cos\theta)+w\sin\theta & v^2+(u^2+w^2)\cos\theta & vw(1-\cos\theta)-u\sin\theta & (b(u^2+w^2)-v(au+cw))(1-\cos\theta)+(cu-aw)\sin\theta \\ uw(1-\cos\theta)-v\sin\theta & vw(1-\cos\theta)+u\sin\theta & w^2+(u^2+v^2)\cos\theta & (c(u^2+v^2)-w(au+bv))(1-\cos\theta)+(av-bu)\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

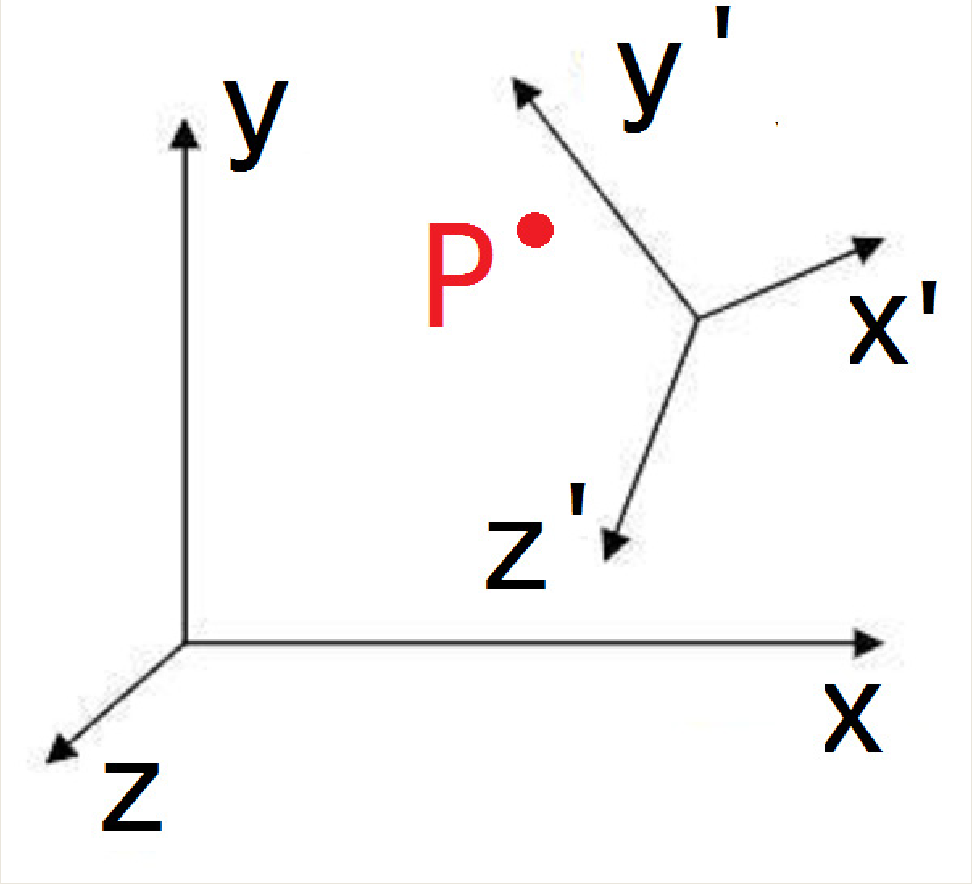
其中(u,v,w)=(x2,y2,z2)-(x1,y1,z1)

第四章：几何变换

- 二维几何变换
- 齐次坐标的表示
- 复合变换
- 三维几何变换
  - 平移
  - 放缩
  - 旋转
  - 坐标系变换

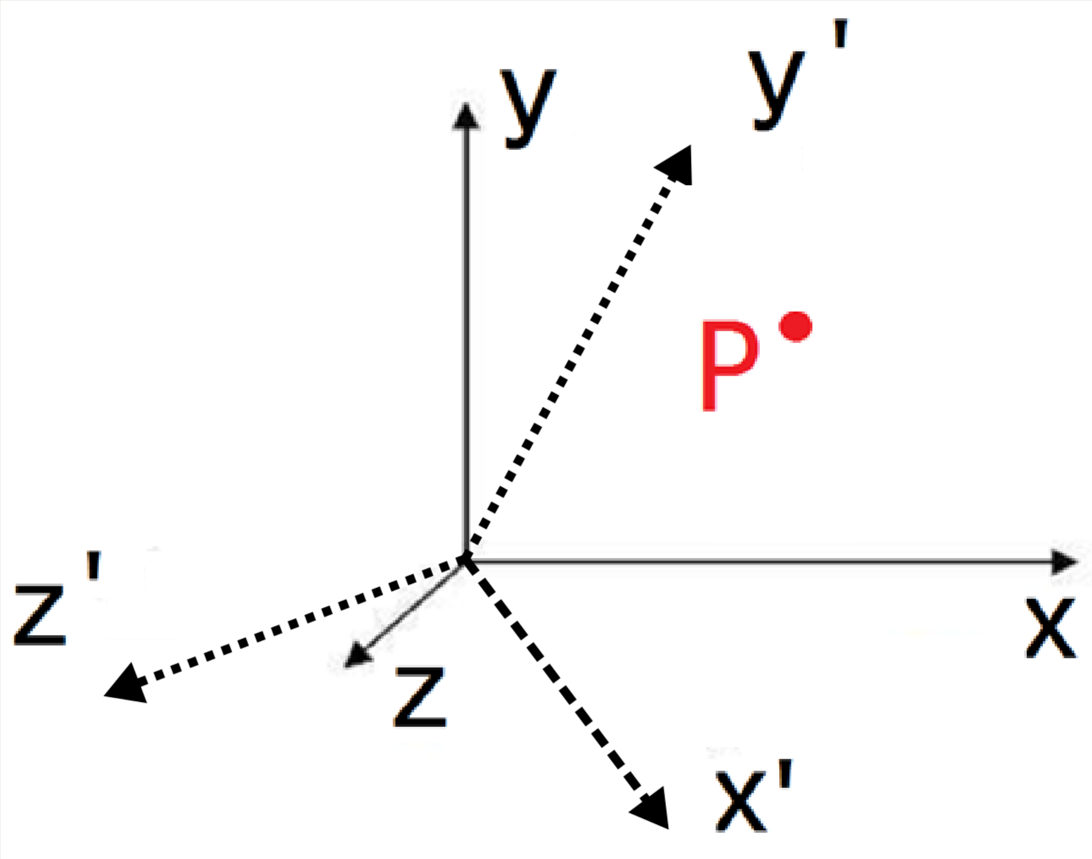
三维坐标系转换

设一点p在原坐标系x-y-z中坐标(x, y, z)，求其在新坐标系x’-y’-z’中的坐标？

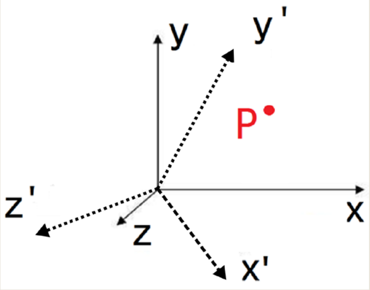


三维坐标系转换

假设两个坐标系的原点重合。



三维坐标系转换



假设两个坐标系的原点重合。

➢ 设新的坐标系的轴x’，y’，z’的单位方向矢量在原坐标系中的表示为：

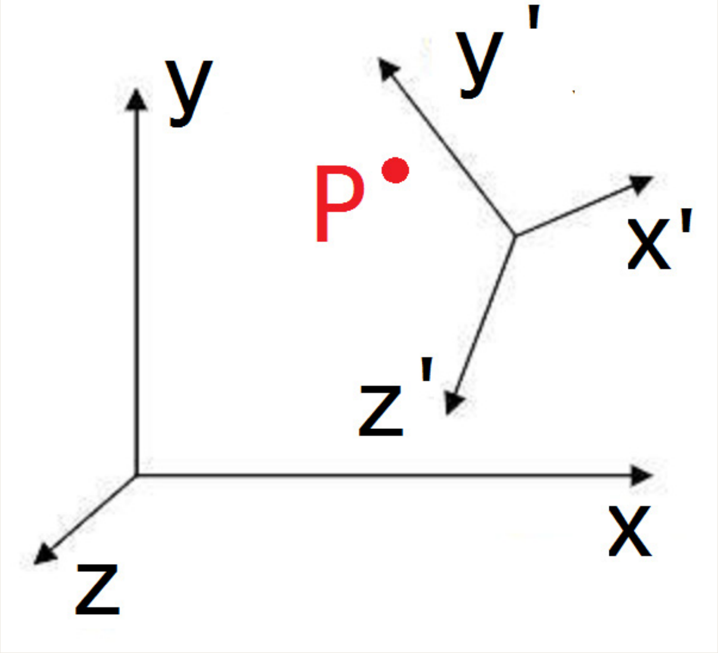
$$\begin{bmatrix} u_x \\ v_x \\ w_x \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_y \\ v_y \\ w_y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_z \\ v_z \\ w_z \end{bmatrix}$$

➢ 设一点p在原坐标系中坐标(x, y, z)，在新坐标系中坐标是：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

三维坐标系转换

思考：如果两个坐标系的原点不重合，如何计算坐标系的变换？。



- 本章结束