航天器轨道理论

1.二体问题

1.1基本方程

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{G(M+m)}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{1}$$

> 其中 $\hat{r}=\boldsymbol{r}/r$ 其 M 到 m 方向 (径向) 的单位矢量

1. 有心力的角动量守恒——确定轨道平面

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=h\mathbf{R} \tag{2}$$

   其中 $h=|r\times\dot{r}|$ 为面积速度常数。上式不随时间改变，显然, 天体 m 相对 M 的运动为 一平面运动,表示面积速度方向的单位矢量 $\hat{R}$ 是该运动平面的法向单位矢量。

   用角度信息表示出 $\hat{R}$

$$\hat{\mathbf{R}}=\begin{pmatrix}\sin i\sin\Omega\\-\sin i\cos\Omega\\\cos i\end{pmatrix} \tag{3}$$

   具体角度含义是什么先不管，但是肯定需要**两个角度**来表示（参考球坐标）

2. 平面内的轨道形状确定

解出平面的椭圆方程为

$$r=\frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos(\theta-\omega)} \tag{4}$$

> 积分常数 h 由 a 代替。 p 是椭圆半通径, a 是半长径, e 是离心率, 对椭圆而言, 有 $a>0, 0\leqslant e<1$ 。

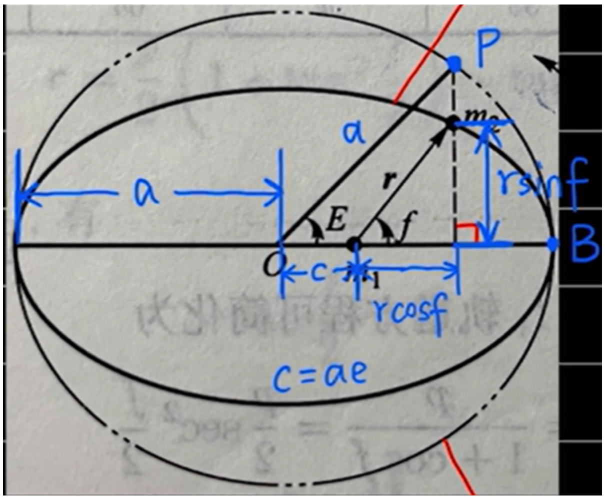
其中a和e是大小形状，ω 代表着图形的旋转的角度。

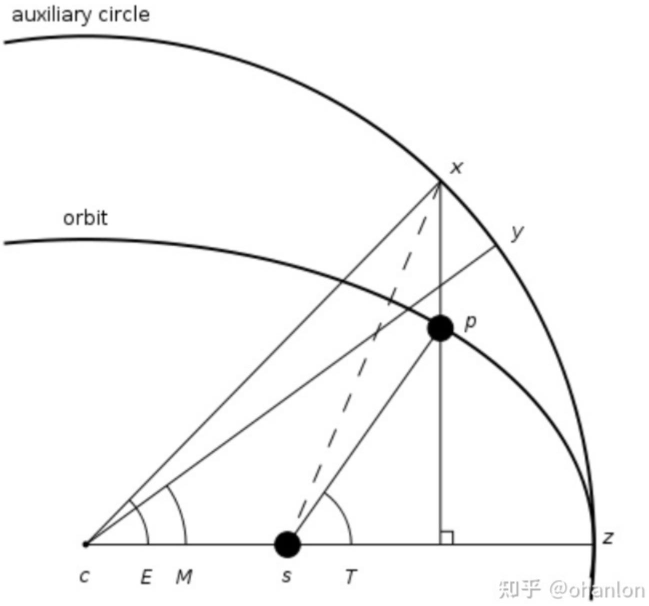
3. 轨道确定位置

由1，2轨道已经确定，还需要一个量来确定位置

$$E-e\sin E=h(t-\tau) \tag{5}$$

> 这又称为**开普勒方程**， τ 是第六个积分常数, 当 $t=\tau$ 时, $E=0$, 相应的 $r=a(1-e)=r_{\min}$, 故 τ 就是天体 m 过近星点的时刻。





$f=\theta-\omega$，称为真近点角，E为偏近点角，$M=h(t-\tau)$,为平近点角

$r=a(1-e\cos E)$

上述六个独立积分常数又称为**轨道根数**, 只要初始条件给定, 它们就完全被确定,而且几何意义很明确。a, e 是确定轨道大小和形状的根数; i, Ω 种 ω 是轨道平面和半长轴的空间定向根数.第六个根数 τ 往往被三种近点角之一所代替,特别是平近点角 M 常被引用。三种近点角本身并不是常数, 它们均随 t 变化,故也被称作时间系数。

1.2椭圆基本关系式

上述六个积分已完全确定了二体问题意义下天体的运动, 但这六个积分的表达形式有时使用不便, 有必要在它们的基础上导出一些常用关系式。这些关系式所涉及的量, 不外平六个根数, 时间 t, 各种**近点角**, 向径和速度等。

1.

$$r=\frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos f}=a(1-e\cos E) \tag{6}$$

$$E-e\sin E=M \tag{7}$$

导出:

$$\begin{aligned} r\sin f&=a\sqrt{1-e^2}\sin E\\ \operatorname{tg}\frac{f}{2}&=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2} \end{aligned} \tag{8}$$

2.位置矢量$\boldsymbol{r}$和速度矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}$的表达式

$$\boldsymbol{r} = r\hat{r} = r\cos f\hat{P} + r\sin f\hat{Q} = a(\cos E - e)\hat{P} + a\sqrt{1-e^2}\sin E\hat{Q} \tag{9}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}}[\sin f\hat{P} - (\cos f + e)\hat{Q}] = -\frac{\sqrt{\mu a}}{r}\left(\sin E\hat{P} - \sqrt{1-e^2}\cos E\hat{Q}\right) \tag{10}$$

暂略

1.3开普勒方程的解法

在二体问题意义下,由已知的椭圆轨道计算天体的历表时, 关键的一步是由轨道根数计算天体的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 和速度矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 。如果轨道根数中第六个时间根数采用真近点角 f 或偏近点角 E,则由1.2可以轻易计算出位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 和速度矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}$，实际上一般第六个根数一般是M，则要解出超越方程$E - e\sin E = M$，一般采用迭代法和牛顿法数值求解出E。

1. 迭代法
   由于 $e < 1$, 下述迭代过程是收敛的

$$E_{k+1} = M + e\sin E_k, k = 0, 1, \cdots \tag{11}$$

2. 牛顿法记
   $f(E) = (E - e\sin E) - M$
   根据

$$\begin{cases} f(E_{k+1}) = f(E_k) + f'(E_k)(E_{k+1} - E_k) + \cdots \\ f'(E_k) = 1 - e\cos E_k \end{cases} \tag{12}$$

且只取到一阶导数, 有

$$E_{k+1} = E_k - \frac{f(E_k)}{f'(E_k)}, k = 0, 1, \cdots \tag{13}$$

这种简单的牛顿法也就是微分改正法。

1.4抛物线与双曲线

暂略

2.轨道计算

从原理上看, 基本上可以归结为两大类,一类是通过三次观测首先确定历元时刻的 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$, 继而给出相应的轨道根数 σ; 另一类则是通过三次观测计算相应的位置矢量 $r_j(j = 1, 2, 3)$, 从而确定某一历元的轨道根数 σ 。前者是是**拉普拉斯方法**, 后一类即**高斯 (Gauss) 方法**。即使用多点 (即多次 观测) 进行定轨, 只要仍在二体问题意义下, 相应的定轨方法也不 会发生根本性的改变, 只是可以利用多资料的统计特性提高定轨的精度而已。
从微分方程初值问题的角度来看, 初轨计算就是根据观测来 确定二体问题的六个积分常数, 即六个椭圆轨道根数: $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0$, 也可以是 $\boldsymbol{r}_0, \dot{r}_0$ 。如果能由观测直接给出 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$, 那么 就不存在初轨计算问题。然而, 对于光学观测而言, 通常无法直接得到 $\boldsymbol{r}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 或两个时刻 $(t_1$ 和 $t_2)$ 的位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$, 只能获得天体的方位, 如赤经赤纬 (α, δ), 或方位角、高度角 (A, h) 。 因此,初轨计算问题实际上就归结为由观测值 (α, δ) 或 (A, h) 计算某一历元 t_0 的 $\boldsymbol{r_0}$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_0$, 或两个时刻的位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$。

后续补具体计算

3.摄动问题

之前的六个轨道根数c1-c6不再是常值，应为t的函数。

根据1.2可知

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}\left(c_{1}, c_{2}, \cdots, c_{6}, t\right) \tag{14}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{g}\left(c_{1}, c_{2}, \cdots, c_{6}, t\right) \tag{15}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}=\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial t} \tag{16}$$

对$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}\left(c_{1}, c_{2}, \cdots, c_{6}, t\right)$求导

$$\frac{\mathrm{d} \boldsymbol{r}}{\mathrm{d} t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial f}{\partial c_{j}} \frac{\mathrm{d} c_{j}}{\mathrm{d} t} \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d} \boldsymbol{r}}{\mathrm{d} t}=\frac{\partial f}{\partial t}=g\left(c_{1}, c_{2}, \cdots, c_{6}, t\right) \tag{18}$$

也就是说上式的右边不应该显含$\frac{\mathrm{d} c_{j}}{\mathrm{d} t}$的项，所以

$$\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial f}{\partial c_{j}} \frac{\mathrm{d} c_{j}}{\mathrm{d} t}=0 \tag{19}$$

对$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}\left(c_{1}, c_{2}, \cdots, c_{6}, t\right)$求两次导

$$\frac{\mathrm{d}^{2} \boldsymbol{r}}{\mathrm{d} t^{2}}=\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial c_{j}} \frac{\mathrm{d} c_{j}}{\mathrm{d} t}=\boldsymbol{F}_{0}+\boldsymbol{F}_{\varepsilon} \tag{20}$$

其中$\frac{\partial g}{\partial t}=\boldsymbol{F}_{0}$,$F_{\varepsilon}$为摄动力

于是得到了摄动方程

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{6} \frac{\partial f}{\partial c_{j}} \frac{\mathrm{d} c_{j}}{\mathrm{d} t}=0 \\ \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial g}{\partial c_{j}} \frac{\mathrm{d} c_{j}}{\mathrm{d} t}=F_{\varepsilon}\end{array}\right. \tag{21}$$

其中 $\partial f / \partial c_{j}$ 和 $\partial g / \partial c_{j}$ 都是 c_{j} 和 t 的已知函数,这毕作导数中除 $\partial f / \partial \tau$ 利 $\partial g / \partial \tau$ 外, 在书的第二章中均已给出。原则上可由这一方程组导出 $\mathrm{d} c_{j} / \mathrm{d} t$ 的显形式:

$$\frac{\mathrm{d} c_{j}}{\mathrm{d} t}=f_{j}\left(c_{1}, c_{2}, \cdots, c_{6}, t ; \varepsilon\right), \quad j=1,2, \cdots, 6 \tag{22}$$

此即我们所需要的**摄动运动方程**。