

Pràctica 7: Pèndol simple

Objectius: Resolució de EDOs, Mètode d'Euler, predictor/corrector, convergència

— Nom del programa **P7-18P-b.f**.

Considera la dinàmica d'un pèndol simple de massa 0.95 kg i longitud $\ell = 1.05 \text{ m}$, que ve descrita per l'equació diferencial,

$$\ell \ddot{\theta} = -g \sin \theta \quad (0.12)$$

amb $g = 1.66 \text{ ms}^{-2}$ (situat a la Lluna). Considera $t \in (0, 6T_N)$, amb $T_N = 2\pi/\omega_N$ i $\omega_N = \sqrt{g/\ell}$. Programa mètodes d'Euler normal i el predictor/corrector senzill per calcular $\theta(t)$ i $\dot{\theta}(t)$.

El predictor/corrector ve definit per l'algorisme,

$$\begin{aligned} \vec{y}_1^p &= \vec{y}_0 + h\vec{f}(x_0, \vec{y}_0) \\ \vec{y}_1 &= \vec{y}_0 + (h/2)(\vec{f}(x_0, \vec{y}_0) + \vec{f}(x_1, \vec{y}_1^p)) \end{aligned} \quad (0.13)$$

- a) **Petites oscil·lacions.** Estudia la dinàmica del pèndol per a $\theta(0) = 0.15 \text{ rad}$ amb $\dot{\theta}(0) = 0 \text{ rad/s}$. Fes una figura **P7-18P-b-fig1.png** amb $\theta(t)$ vs. t , comparant els dos mètodes amb la predicció obtinguda aproximant $\sin \theta \simeq \theta$. Fes servir **1500** passos de temps.
- b) **Oscil·lacions grans.** Estudia la dinàmica del pèndol per $\theta(0) = \pi - 0.15 \text{ rad}$ amb $\dot{\theta}(0) = 0 \text{ rad/s}$. Fes una figura **P7-18P-b-fig2.png** amb $\theta(t)$ vs. t , comparant els resultats obtinguts amb els dos mètodes. Genera una figura **P7-18P-b-fig3.png** comparant les trajectòries a l'espai fàsic, $(\theta, \dot{\theta})$. Fes servir **1500** passos de temps.
- c) **Energia.** Calcula l'energia cinètica, $K(t) = (1/2)m(\dot{\theta}(t))^2\ell^2$, potencial $V(t) = -mg\ell \cos(\theta(t))$ i total $E_{\text{total}}(t) = K(t) + V(t)$ del pèndol (fes dues funcions, **EKIN**($\theta, \dot{\theta}$) i **EPOT**($\theta, \dot{\theta}$)). Pel cas $\theta(0) = \pi - 0.015 \text{ rad}$, amb $\dot{\theta}(0) = 0.1 \text{ rad/s}$ estudia l'evolució d' $K(t)$ i $V(t)$. Genera una figura **P7-18P-b-fig4.png** comparant l'evolució de l'energia cinètica i total amb el temps calculades amb els dos mètodes. Fes servir **1500** passos de temps.

Pels apartats d),e),extra) fes servir només el mètode predictor/corrector.

- d) **Transició.** Considera la dinàmica a partir de $\theta(0) = 0$ amb $\dot{\theta}(0) = 2\sqrt{g/\ell} \pm 0.1 \text{ rad/s}$. Compara la dinàmica del dos casos i fes una figura mostrant les trajectòries a l'espai fàsic **P7-18P-b-fig5.png**. A què es correspon la transició observada? Fes servir **5000** passos de temps i un $t \in (0, 12T_N)$.
- e) **Convergència del mètode.** Per $\theta(0) = 3 \text{ rad}$ i $\dot{\theta}(0) = 0 \text{ rad/s}$ i $t \in [0, 10T_N]$ estudia l'evolució de l'energia total del sistema com a funció del temps fent servir **200, 600, 4000 i 50000** passos de temps. Genera una figura **P7-18P-b-fig6.png** amb la comparació.
- Extra) **Animació.** Treballa amb un nombre de passos adient. Genera una animació **gif** del moviment del pèndol en un cas d'oscil·lacions grans, mostrant $\theta(t)$ i $\dot{\theta}(t)$ i el moviment a l'espai fàsic, **P7-ani-b.gif**.

Entregable: **P7-18P-b.f, P7-18P-b-fig1.png, P7-18P-b-fig2.png, P7-18P-b-fig3.png, P7-18P-b-fig4.png, P7-18P-b-fig5.png, P7-18P-b-fig6.png, P7-18P-b-resf.dat, scripts de gnuplot, P7-ani-b.gif**