

# 110-2 作業研究

## 期末專案 — 公車班次刪減問題

### Group I

李婷穎	林峻佑	吳孟諺	翁如萱	黃郁庭
B07502057	B07703049	B07703079	B07703093	B07703118
施驊軒	沈昱廷	王乙庭	胡濬涵	陳鵬仁
B08303012	B08703015	B08701233	B09201002	B09201013

November 12, 2022

### 摘要

在疫情期間，由於運量下降與人力不足等因素，致使許多客運公司不得不做出減班的決策，在這樣的變動下，部分民衆因等待時間過長而抱怨連連。故本文目的在幫助客運公司提出一個既達成減班目的，又能儘可能降低民衆不滿意度的減班規劃。我們認為客運公司除了以原有需求量、離峰或尖峰作為減班考量之外，應同時將各路段的其他替代方案納入考量。

# 1 緒論

## 1.1 研究動機與目的

根據報導指出，在新冠肺炎的衝擊下，全台公車運量大幅度的下滑，又許多司機確診，致使客運公司不得不做出減班的決策以因應人力短缺問題與節約成本。在這樣的變動下，民衆等待公車的時間拉長，因此怨聲載道。

對於客運公司來說，減少公車班次是個必然，但是民衆的滿意度也是需要亟需考慮的問題。故本專題的目的為提出一個既能夠達成「減少班次」又儘可能降低「民衆不滿意度」的公車班次規劃。

## 1.2 研究方法與流程

本文首先針對問題定義，如：研究對象的選定、不滿意度的定義、為簡化問題提出的相關假設等進行更完整的說明。接著將介紹我們使用的資料集，包含：原始資料集內容還有處理資料的方法。再來則是規劃數學模型。最後則是提出一個解決問題的啟發式演算法 (heuristic algorithm)，並且衡量其表現。

# 2 問題定義與相關假設

我們的目的是在給定「目標縮減班次數量」下，提出一個能夠「最小化民衆不滿意度」的公車班次表，以下將針對時間範圍、探討對象、目標縮減班次數量、不滿意度、需求量估計估計與公車到站時點進行說明：

## 2.1 時間範圍

本專題需考量發車時間點、各時間點的需求人數、站與站之間的旅行時間等資訊，而這些數值將因平日或是假日、離峰或是尖峰時刻等有所不同。本次專案將以 2022/02/18 星期五全日的資料作為基準。

## 2.2 探討對象

本文的探討對象為「首都客運內湖調度站」中的五條路線：204、民生幹線、紅 50、棕 1、藍 10。圖 1 為其路線圖。

一間客運公車通常有多個調度站，每個調度站有各自管理的數條路線。儘管在短期的時間內，不同調度站之間可調度人力、互相支援，但長期而言，各個調度站的人力安排仍應獨立運作。因此在不失一般性的前提之下，我們認為以「一家公司的一個調度站」作為探討對象是合理的選擇。

另外，事實上該調度站還有其他路線的公車，然而其一天的發車數量相當的少，我們認為該路線的存在應有特殊意義，若再砍班將造成巨大衝擊，因此我們僅考慮班次數量相對較多的這五條路線。再來，

這五條公車路線彼此有重疊路段，代表部分乘客有多種路線選擇。若某班次遭刪除，仍有其他路線可替代。因此本專案的困難點即，該如何在路線之間有重疊、班次密集度不同、各路線其他站點的需求量等多重因素之下，找到最佳解。故僅以此五條路線作為探討對象仍不失問題的複雜性。

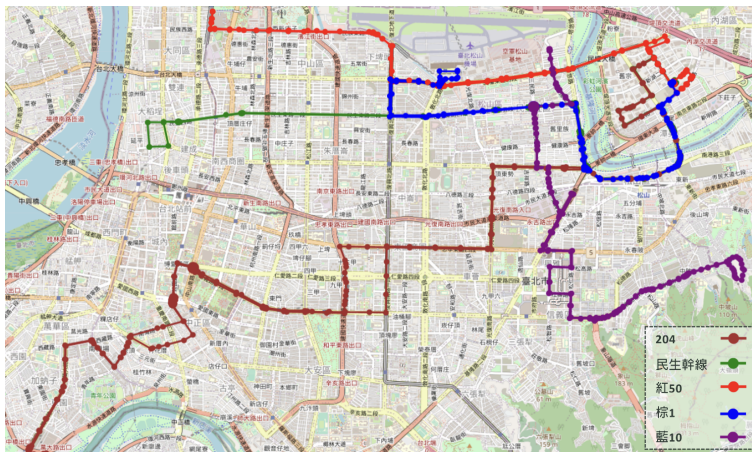


圖 1: 204、民生幹線、紅 50、棕 1、藍 50 路線圖

## 2.3 目標縮減班次數量

直觀上來想，會認為若想使整體不滿意度降為最低，應該砍除需求量最少的班次，但如此一來可能造成以下狀況：

1. 某一路線的乘客從早到晚都無車可搭。
2. 只在尖峰時刻發車。
3. 部分路線的乘客之等待時間過長。

我們認為這並不合乎常理，因為客運公司還是得照顧到非熱門路線與時段的乘客，因此除了要求班次需要減少至一定數量以外，還必須滿足額外限制：

1. 不得砍除各路線的首班車與末班車。
2. 限制各路線前、後兩班的時間間隔差不得大於原班表最長發車間距的一定倍數。本專題假設此倍數為 1.5。
3. 將時間切割為若干區塊，限制各時段的最少發車數量。

## 2.4 不滿意度

我們定義乘客的不滿意度來源為「額外等待的時間」。「額外等待時間」為重新規劃班次後，因原搭乘班次遭刪除，其換乘的公車與原預計搭乘的公車班次到站的「時間差」。舉例來說，在砍班以前某乘客都是搭乘 09:00 的公車，然而受到班次減少的影響，其只得搭乘 09:30 的班次，此時「額外等待時間」即 30 分鐘。

由於不滿意的來源為額外的等待時間，因此我們的不滿意度函數為時間的函數，其設定方式將於章節 4 進行說明。

## 2.5 需求量估計與公車到站時點

由於搭乘人數資料以小時為單位，我們無從得知這一小時內行駛於路線上的所有車輛，各時點的實際搭乘人數。因此藉由以下的方式，估計每班次搭乘人數。

首先針對公車到站時點進行假設，假設起點站與甲站之間之旅行時間為 10 分鐘，則若公車的發車時點為 09:00，其到達的甲站的時間即 09:10。再來，則是針對乘客需求量進行假設：

1. 將每一小時的需求量均分至該時間區段內的所有原有班次。
2. 乘客的需求量發生時間為原搭乘班次之到站時間。
3. 同個班次、同時間、相同起訖站的乘客具有相同的決策行為，因此等待時間也會相同。
4. 公車未有載客量上限，故只要有車子抵達必定可以上車。
5. 只要能夠滿足交通需求(起訖站相同)，無論是否原本預計乘坐的路線公車，乘客都可以搭乘。

## 3 資料集說明

### 3.1 原始資料

我們將所使用的原始資料列於表 1，另外資料來源為中華民國交通部與臺北市交通局。

### 3.2 經處理資料

#### 3.2.1 公車到站時間表

利用「公車路線時刻表」與「公車站間旅行時間資料」，可以得知各路線各班次到達站點的時間表。

表 1: 原始資料集說明

資料集名稱	資料說明
每日各站分時運量資料	各日各個小時，兩站之間的乘客人數。
公車路線站牌資料	各路線經過的站牌名稱與順序。
公車站間旅行時間資料	不同時段下，各路線兩站牌間的旅行時間（分鐘）。
公車路線時刻表	各條路線的發車班次表。

### 3.2.2 各時點的需求量

使用「公車到站時間表」和「每日各站分時運量資料」可產生各時點的需求量。如同段落 2.5 需求量估計與公車到站時點所提到的，均分每小時的需求量至各班次，可得「各班次的需求量」。因此知道各時段的運量與公車到站時間後，即可估計每個班次來往任二站的需求量。

### 3.2.3 站牌資訊整合

在段落 2.5 需求量估計與公車到站時點中，我們提到只要能夠滿足乘客的交通需求，乘客可以轉搭其他路線的公車。因此我們需要知道各路線之間究竟有哪些共同行經的站點，藉此得知是否可以透過改搭其他路線滿足各族群乘客的需求。此時透過「公車路線站牌資料」即可得知路線的重疊情況與站牌間的順序關係，如此便可達成章節 4 的站牌編碼需求。

## 4 數學模型

### 4.1 函數定義

#### 4.1.1 時間函數: $H(h, m)$

將 24 小時制的時間映射至  $[0, 1440)$ 。其中  $h$  時  $m$  分（24 小時制）將被記為  $(h, m)$ ，則

$$H : (h, m) \mapsto 60 \times h + m.$$

#### 4.1.2 不滿意度函數: $Q(t)$

目標為衡量單一乘客的不滿意程度，其中  $t \in [0, 1440)$  為該乘客的額外等待時間（以分鐘計），所謂的等待時間即重新安排的公車與原本預計搭乘的班次之抵達時間差。而我們設定的  $Q(t)$  為

$$Q(t) = \frac{a}{b + e^{-c(t-d)}} - f + \sqrt{\frac{t+g}{h}}.$$

其中  $a = 50, b = 5, c = 0.25, d = 5, f = 1.57, g = 5, h = 3$ 。函數的形式是根據問卷調查結果而定。問卷中大多數人認為其等待公車時間與不滿意程度之關係為乙狀函數 (sigmoid function)，還有一部分人則認為屬於隨時間遞增的非線性函數；另外係數的制定則是根據大家提供的忍耐時間限度數值而定。

## 4.2 參數定義

1.  $X$  為一個給定倍率， $0.5 \leq X \leq 1$ ，表示班次目標縮減的倍數。
2.  $J$  為給定的所有公車路線的集合。以此專案為例： $J = \{204 \text{ (TPE11212)}, \text{民生幹線 (TPE10293)}, \text{紅 50 (TPE16166)}, \text{棕 1 (TPE10291)}, \text{藍 10 (TPE10292)}\}$ 。
3.  $D_j$  為對於所有公車路線  $j \in J$ ，其所有班次的編號集合。假設一天之中，公車路線  $j \in J$  總共會發出  $r_j$  班車次，則  $D_j = \{1, 2, \dots, r_j\}$ 。
4.  $K_j$  為對於所有公車路線  $j \in J$ ，其所有站點的編號集合，另外視不同方向、同站名的站為相異二站。假設  $|K_j| = n_j$ ，則  $K_j = \{1, 2, \dots, n_j\}$ 。
5.  $N_j$  為對於所有公車路線  $j \in J$ ，其所經過站點的名稱集合。
6.  $N$  為所有  $N_j$  的聯集，對於所有  $j \in J$ 。意即  $N = \bigcup_{j \in J} N_j$ 。
7.  $K$  為  $N$  內的所有站牌編號，假設有一路線同時具有某二站牌，則其編號大小代表其先後順序；另外不同路線的同站名站牌又或是同路線不同方向的同名站牌會擁有不同的編號。
8.  $T_{jdk}$  為路線  $j \in J$  的班次  $d \in D_j$  經過  $k \in K_j$  的時間點。其中時間將透過  $H(h, m)$  轉換。
9.  $I = \{[0 : 00, 6 : 00), [6 : 00, 8 : 00), [8 : 00, 15 : 30), [15 : 30, 17 : 30), [17 : 30, 24 : 00)\}$  為根據臺北市公車公開資料，所制定的時段區間集合。
10.  $F_j$  為公車路線  $j \in J$  中相鄰兩班次的發車時間限制的最長間隔（分鐘）。
11.  $L_i$  為對於時段區間  $i \in I$  內所有公車路線  $j \in J$  的發車數總和的最低要求。
12.  $M$  為一個夠大的數字，取  $M = 1440$ 。
13.  $y_{ijd}$  為一二元變數。如果公車路線  $j \in J$  的班次  $d \in D_j$  的發車時間屬於時段區間  $i \in I$ ，則  $y_{ijd} = 1$ ；否則  $y_{ijd} = 0$ 。
14.  $z_{jkq}$  為一二元變數。如果公車路線  $j \in J$  會經過站點  $k \in K$  以及站點  $q \in K$ （意即  $k, q \in K_j$ ），則  $z_{jkq} = 1$ ；否則  $z_{jkq} = 0$ 。
15.  $s_{jdkq}$  為預計在站點  $k \in K$  搭乘公車路線  $j \in J$  的班次  $d \in D_j$  以到達站點  $q \in K$  的人數。

### 4.3 變數定義

1.  $x_{jd}$  為一二元變數。若在新規劃裡，有安排公車路線  $j \in J$  的班次  $d \in D_j$ ，則  $x_{jd} = 1$ ；否則， $x_{jd} = 0$ 。
2.  $a_{jdkqmn}$  為一二元變數。若原先預計在站點  $k$  搭乘公車路線  $j$  的班次  $d$  以到達站點  $q$  的乘客最後搭乘的是公車路線  $m$  的班次  $n$ ，則  $a_{jdkqmn} = 1$ ；否則， $a_{jdkqmn} = 0$ 。
3.  $t_{jdkq}$  為原預計搭乘路線  $j \in J$  的班次  $d \in D_j$  由  $k \in K_j$  站搭乘至  $q \in K_j$  站的乘客，受班次縮減影響，需額外等待的時間。

### 4.4 數學式

$$\min \sum_{j \in J} \sum_{d \in D_j} \sum_{\substack{q > k \\ q, k \in K}} Q(t_{jdkq}) s_{jdkq}$$

$$\text{s.t. } t_{jdkq} \geq (T_{mnk} - T_{jdk}) \cdot a_{jdkqmn} \quad \forall j, m \in J, d \in D_j, n \in D_m, k, q \in K, q > k \quad (1)$$

$$a_{jdkqmn} \leq z_{mkq} \quad \forall j, m \in J, d \in D_j, n \in D_m, k, q \in K, q > k \quad (2)$$

$$a_{jdkqmn} \leq x_{mn} \quad \forall j, m \in J, d \in D_j, n \in D_m, k, q \in K, q > k \quad (3)$$

$$\sum_{\substack{m \in J \\ n \in D_m}} a_{jdkqmn} = 1 \quad \forall j \in J, d \in D_j, k, q \in K, q > k \quad (4)$$

$$T_{mnk} - a_{jdkqmn} T_{jdk} \geq 0 \quad \forall j, m \in J, d \in D_j, n \in D_m, k, q \in K, q > k \quad (5)$$

$$x_{j,d_2} T_{j,d_2,0} - x_{j,d_1} T_{j,d_1,0} \leq M(2 - x_{j,d_1} - x_{j,d_2}) + F_j \sum_{d=d_1+1}^{d_2} x_{jd} \quad \forall j \in J, d_1, d_2 \in D_j, d_2 > d_1 \quad (6)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{d \in D_j} x_{jd} \leq X \cdot \sum_{j \in J} \sum_{d \in D_j} 1 \quad (7)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{d \in D_j} x_{jd} \cdot y_{ijd} \geq L_i \quad \forall i \in I \quad (8)$$

$$x_{j,1} = 1, x_{j,r_j} = 1 \quad \forall j \in J \quad (9)$$

$$x_{jd} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, d \in D_j \quad (10)$$

$$a_{jdkqmn} \in \{0, 1\} \quad \forall j, m \in J, d \in D_j, n \in D_m, k, q \in K, q > k \quad (11)$$

$$t_{jdkq} \geq 0 \quad \forall j \in J, d \in D_j, k, q \in K, q > k. \quad (12)$$

## 4.5 數學模型說明

### 4.5.1 目標式說明

由於我們假設公車沒有人數上限，另外定義原本預計搭乘同路線、班次、起訖點的乘客為同一族群，且其具有相同決策，也因此等待時間也會相同。故若要計算整體的「不滿意度」可以族群為單位計算。

### 4.5.2 限制式說明

1. 式 (1)：等待時間不小於「規劃後搭乘的班次」與「原先預計搭乘班次」的到達時間差。
2. 式 (2)： $a_{jdkqmn} = 1$  的前提是  $z_{mkq} = 1$ ，其意義是需求起訖站為  $k, q$  的民衆選擇搭乘  $m$  路線的前提是，該路線亦有經過  $k, q \in K$ 。
3. 式 (3)：只有在路線  $m \in J$  的  $n \in D_m$  有發車的情況下，民衆可以透過該路線班次達成需求。
4. 式 (4)：同一族群的乘客必然是透過一種方法達成其需求。
5. 式 (5)：經過重新規劃以後，乘客的搭乘時間必不早於原預計的搭乘時間。
6. 式 (6)：確保各路線上的發車間距時長在限制之內。
7. 式 (7)：經重新規劃後的班次數量必須達成目標縮減班次數量。
8. 式 (8)：每個時段的發車數量要滿足最低發車數要求。
9. 式 (9)：必定發出首班車與末班車。
10. 式 (10) 至 (12)：限制時間不為負與二元變數的範圍。



## 5 啟發式演算法 (Heuristic Algorithm)

由於我們變數、限制式太多，Gurobi 沒辦法在合理時間內跑出結果，所以我們設計了一個貪婪演算法 (greedy algorithm) 來計算要刪除哪些班次。

### 5.1 概念說明

我們的演算法核心概念是在數個限制條件下，找到刪除後造成「衝擊量」最小的班次進行刪減。

首先針對 5.2 演算法執行步驟中的步驟 2 進行說明，設立這些限制的旨在於避免最後刪減的全是需求量最少的班次，如此一來便可能有某路線的乘客無車可搭的情形。

接著則是關於步驟 3 的詳細說明。此步驟的旨在於評估若刪減該班次會造成多少衝擊量。我們將針對兩個族群討論：原本就是預計搭乘此班次的乘客，還有原先不是想搭乘此班次但因為重新分配而改搭此班的乘客。

1. 原本就是預計搭乘此班次的乘客：若此班次被刪除，則其必須選擇較晚到達的同路線或是同樣可以滿足需求的其他路線公車。由於上車時間延後，其不滿意度必然增加，我們的目的即找到傷害最小的安排，也就是最早到達的班次。
2. 原先不是想搭乘此班次的乘客：因為其原預計搭乘的班次被砍班，才迫不得已改搭此班，若現在又要移除此班車，他又被迫延後上車時間，如此必然增加其更多的不滿意度。我們的目標即找到不滿意度增量最小的班次。

值得注意的是我們是以同班車同一組上、下車站的民眾作為分配單位，由於每個人上、下車需求不同，因此可以考量的路線也會有所差異，故經重新分配後此班次上的乘客未必還會是搭上同一班車。

最後，步驟 4 的目的就是挑選出衝擊最小的班次。而以上步驟將重複執行至達成要求或是發現無解。演算法的執行步驟如下所示：

### 5.2 演算法執行步驟

1. 當目前預計發車的班次數量不超過目標班次數量時，結束演算法並回傳結果。
2. 檢視各路線的所有班次，並以「一條路線的一個班次」作為檢查單位，針對符合下述「所有」條件的班次，依序執行步驟 3：
  - (a) 該班次尚未被刪除。
  - (b) 刪掉該班次，不會使得其前一班次與後一班次的發車時間間隔超過限制。
  - (c) 前一班車與後一班車皆尚未被刪減。

若找不到任何一個符合條件的班次，結束演算法，並回傳無解。

3. 定義某班次的「衝擊量」，即下述兩個數值的總和：

- (a) 若刪除該班次，則「最初預計」搭乘這班次的乘客將被迫搭乘更晚到達的同路線的其他班次或是別條路線的公車，此時「至少」會擁有的「不滿意度數值」。
- (b) 這個班次的公車上可能載有其他「原本不是預計」搭乘該班的民衆，因此當此班次被刪除後，我們也得重新分配他們至其他較晚到達的公車上，此時又將造成他們擁有「額外的不滿意值」，求此數值「至少」為何。

4. 當執行完步驟 2 與 3 時，找到擁有「最小衝擊量」的班次，並執行：

- (a) 刪除此班次，因為會帶來的衝擊最小。
- (b) 紀錄該班次在步驟 3 中重新規劃乘客的結果。

5. 回到步驟 1。

## 6 結果分析

本章節將透過我們取得的真實資料，以及我們自行生成的測試資料來評估 heuristic algorithm 的結果，比較基準則是基線演算法 (baseline algorithm) 的產生結果，比較數值則是該規劃下造成的不滿意數值。

### 6.1 評價方法

#### 6.1.1 Baseline Algorithm

我們設計了另一個簡單的演算法「刪除總需求量最少的班次」作為對照組，演算法步驟如下：

- 1. 當目前預計發車的班次數量不超過目標班次數量時，結束演算法並回傳結果，反之執行以下步驟。
- 2. 檢視各路線的所有尚未被刪除的班次，加總其在各個站牌搭車的乘客人數。
- 3. 由載客數最少的公車班次檢視起，若刪除該班次尚在發車時間限制間隔內，則刪除之；反之，檢視載客數第二少的班次，以此類推。回到步驟 1。

#### 6.1.2 測試資料

除了現實生活中的資料，我們也設計了三個「路線的重疊程度」不同的測試資料，此三組資料皆包含三條路線，各資料的重疊程度列於表 2。

表 2: 測試資料描述

測資編號	路線重疊狀況
1	三條公車路線獨立，彼此之間沒有站點重疊
2	其中兩條公車路線有重疊站點，一條路線獨立
3	三條公車路線彼此的站點都有重疊

## 6.2 結果

我們將 heuristic algorithm 與 baseline algorithm 的結果列於表 3。可以觀察到不論是在真實資料還是測試資料，我們提出的演算法皆讓乘客擁有較低的不滿意值。特別可以注意到，我們提出的演算法在路線重疊度高時表現尤佳，原因在於 baseline algorithm 僅以該班次的原載客量作為刪減班次的考量，而我們的演算法則有額外考慮到民衆可以「改搭」其他路線滿足需求的情況，以及所有乘客的等待時間。

圖 2 是在使用真實資料的情況下，baseline algorithm 與 heuristic algorithm 得到的班表結果，其中路線名稱列於最左方，而每一條路線上方的實心線段為 baseline algorithm 的結果、下方的虛線線段則是 heuristic algorithm 的班表結果，另外在兩條線段中可以看到實心圓圈與空心圓圈，實心代表有發出該班次，空心則是砍掉該班次。我們可以發現到 baseline algorithm 傾向針對班次數量較少的路線進行砍班，推測原因在於這些路線之所以班次少就是因為需求量較少，然而如此一來便會造成民衆等候時間從久到超久，致使不滿意度遽增；反之，我們提出的 heuristic algorithm 也會針對班次密集的路線進行砍班，我們推測原因有：班次密集意味著本來就不需要等太久，因此減少當中幾班並不會對民衆造成太大衝擊、這些路線和其他路線具有重疊性，具有替代作用，故不需要全部保留。

表 3: 目標數值（不滿意度）結果

	真實資料	測資 1	測資 2	測資 3
Baseline algorithm	82.09	63054.08	252495.29	113192.45
Heuristic algorithm	58.42	43951.65	107244.06	38920.30
差距	-28.83%	-30.30%	-57.53%	-65.62%

## 7 結論

### 7.1 建議

業者在進行刪減班次規劃，除了考量到各路線的原有需求量與尖峰抑或離峰之外，也應將各路段是否有其他替代方案考量還有民衆整體的等待時間考慮在內。

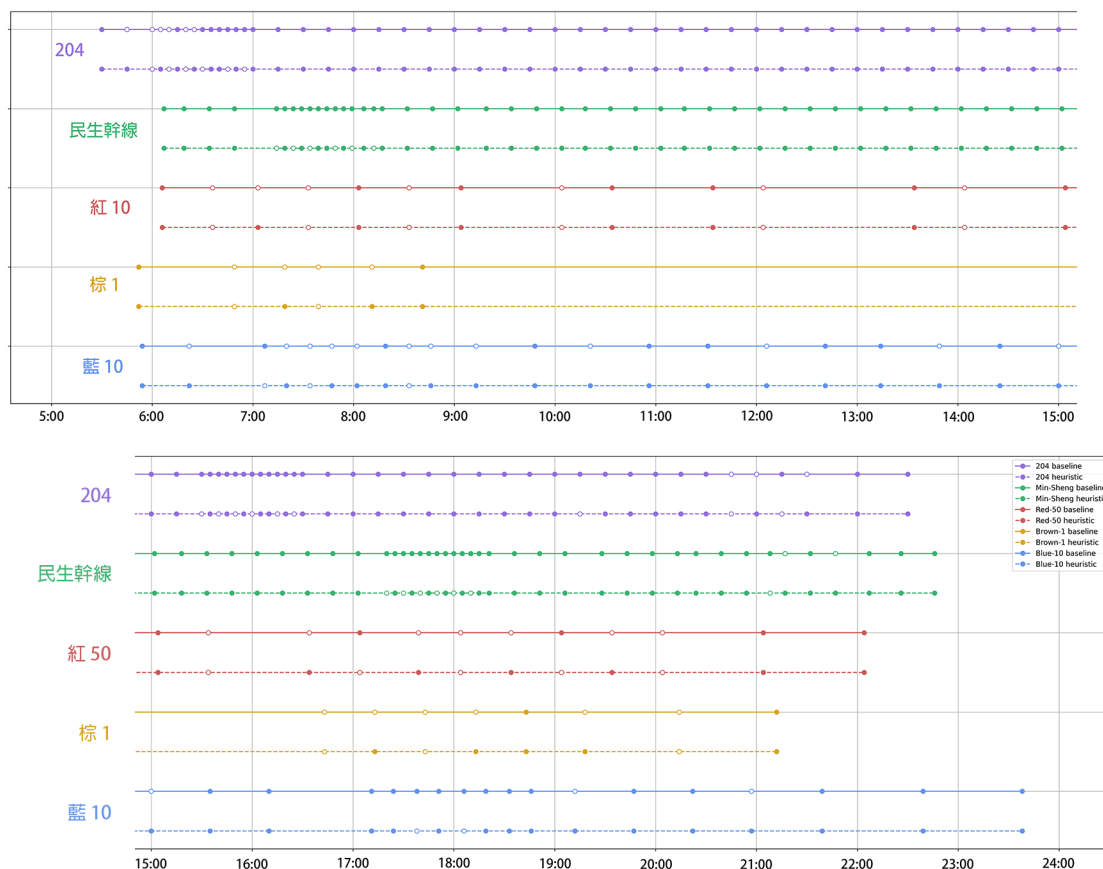


圖 2: Baseline algorithm 和 heuristic algorithm 使用真實資料所產生的發車班表

## 7.2 未來展望

### 1. 不滿意度函數

- (a) 因應不同時段與路線制定不滿意度函數，像是對於通勤尖峰時段，每多等一分鐘帶來的不滿意度可能較高。
- (b) 不滿意度來源不只有等待時間，乘車的舒適度 (是否過度擁擠) 也可以是因素之一。

### 2. 額外考慮公車人數上限問題。

### 3. 放寬同一族群需要有相同決策的假設。

### 4. 目前是以均分需求量的方式處理運量資料，若有更精細單位的資料勢必能更貼近現實狀況。