Insper

Modelagem e Controle

Aula 07 – Impedâncias

2023–1

Prof. Carlos Novaes

4° Período – ENGENHARIAS

Outline

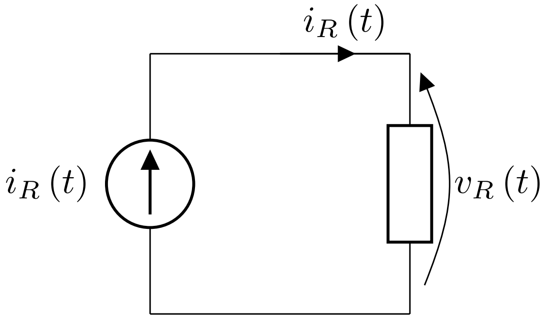
Outline

Determine a Função de Transferência

Enunciado

- No circuito abaixo, qual a função de transferência

$$G(s) = \frac{V_R(s)}{I_R(s)}$$



Solução

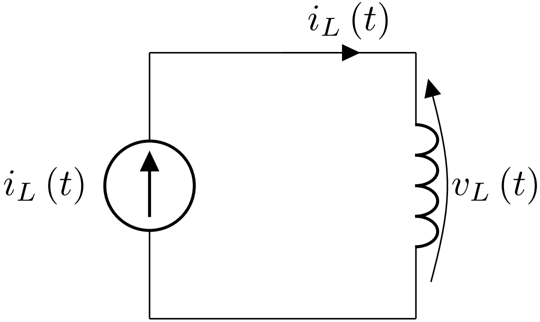
$$V_R(t) = Ri_R(t)$$
$$V_R(s) = RI_R(s)$$
$$G(s) = \frac{V_R(s)}{I_R(s)}$$
$$G(s) = \frac{RI_R(s)}{I_R(s)}$$
$$G(s) = R$$

Determine a Função de Transferência

Enunciado

- No circuito abaixo, qual a função de transferência

$$G\left(s\right) = \frac{V_L\left(s\right)}{I_L\left(s\right)}$$



Solução

$$V_L\left(t\right) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_L\left(t\right)$$

$$V_L\left(s\right) = LsI_L\left(s\right)$$

$$G\left(s\right) = \frac{V_L\left(s\right)}{I_L\left(s\right)}$$

$$G\left(s\right) = \frac{LsI_L\left(s\right)}{I_L\left(s\right)}$$

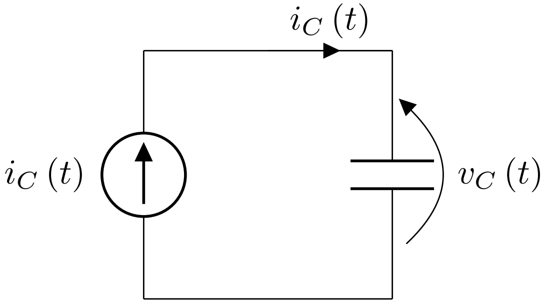
$$G\left(s\right) = sL$$

Determine a Função de Transferência

Enunciado

- No circuito abaixo, qual a função de transferência

$$G(s) = \frac{V_C(s)}{I_C(s)}$$



Solução

$$V_C(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)\,\mathrm{d}t$$

$$V_C(s) = \frac{1}{sC} \times I_C(s)$$

$$G(s) = \frac{V_C(s)}{I_C(s)}$$

$$G(s) = \frac{\frac{1}{sC} \times I_C(s)}{I_C(s)}$$

$$G(s) = \frac{1}{sC}$$

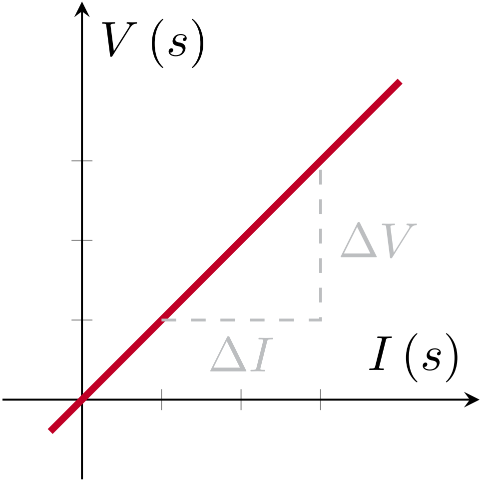
Definição

- Em um elemento elétrico linear, como o resistor, o capacitor ou o indutor, a tensão no domínio da frequência complexa (transformada de Laplace da tensão) é proporcional à corrente no domínio da frequência complexa

$$V(s) = Z(s)\,I(s)$$

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)}$$

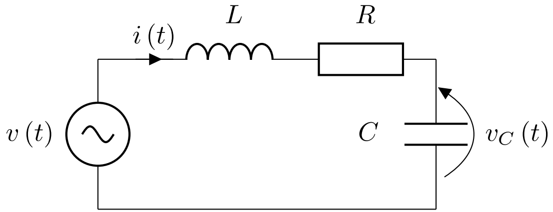
- $Z(s)$ tem dimensão de resistência e é medida em ohms (Ω)



Exercício 01

Enunciado

- Utilizando o conceito de impedâncias, calcule a função de transferência $\dfrac{V_C(s)}{V(s)}$ para o circuito elétrico abaixo



Solução

- Trata-se de um circuito série, então:

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z_L(s) + Z_R(s) + Z_C(s)}$$

$$V_C(s) = I(s)\, Z_C(s) = \frac{V(s)\, Z_C(s)}{Z_L(s) + Z_R(s) + Z_C(s)}$$

$$= \frac{V(s)\, \dfrac{1}{sC}}{sL + R + \dfrac{1}{sC}}$$

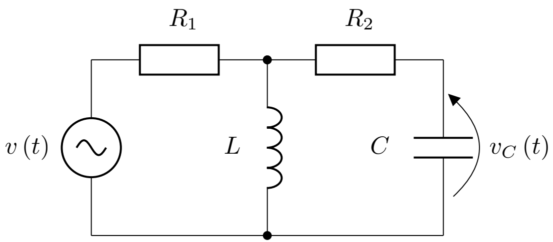
$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{\dfrac{1}{sC}}{sL + R + \dfrac{1}{sC}} = \frac{1}{s^2 LC + sRC + 1}$$

$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = G(s) = \frac{\dfrac{1}{LC}}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{LC}}$$

Exercício 02

Enunciado

- Utilizando o conceito de impedâncias, calcule a função de transferência $\frac{V_C(s)}{V(s)}$ para o circuito elétrico abaixo



Solução

- Na malha I:

$$(R_1 + sL)I_1 - sLI_2 = V(s)$$

$$\frac{sL}{R_1 + sL} I_2 + \frac{V(s)}{R_1 + sL} = I_1$$

- Na malha II:

$$-sLI_1 + (sL + R_2 + \frac{1}{sC})I_2 = 0$$

$$\frac{sL + R_2 + \frac{1}{sC}}{sL} I_2 = I_1$$

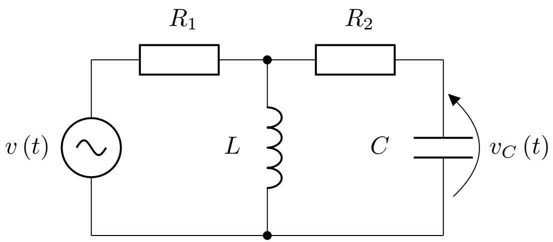
- Igualando I_1:

$$\frac{sL}{R_1 + sL} I_2 + \frac{V(s)}{R_1 + sL} = \frac{sL + R_2 + \frac{1}{sC}}{sL} I_2$$

Exercício 02

Enunciado

- Utilizando o conceito de impedâncias, calcule a função de transferência $\dfrac{V_C(s)}{V(s)}$ para o circuito elé–trico abaixo



Solução (2/3)

$$\left(\frac{sL + R_2 + \dfrac{1}{sC}}{sL} - \frac{sL}{R_1 + sL}\right) I_2 = \frac{V(s)}{R_1 + sL}$$

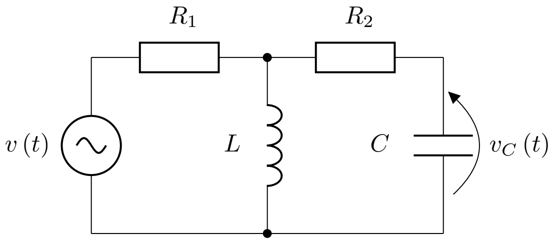
$$\left(\frac{sL + R_2 + \dfrac{1}{sC}}{sL} - \frac{sL}{R_1 + sL}\right) \frac{V_C}{\dfrac{1}{sC}} = \frac{V(s)}{R_1 + sL}$$

$$\left(\frac{s^2 LC + sR_2 C + 1}{sL} - \frac{s^2 LC}{R_1 + sL}\right) V_C = \frac{V(s)}{R_1 + sL}$$

Exercício 02

Enunciado

- Utilizando o conceito de impedâncias, calcule a função de transferência $\dfrac{V_C(s)}{V(s)}$ para o circuito elé- trico abaixo



Solução (3/3)

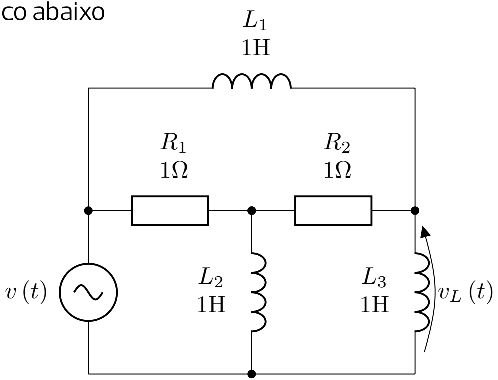
$$\frac{V_C}{V} = \frac{1}{(R_1 + sL)\left(\dfrac{s^2LC + sR_2C + 1}{sL} - \dfrac{s^2LC}{R_1 + sL}\right)}$$

$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = G(s) = \frac{sL}{LC(R_1 + R_2)s^2 + (CR_1R_2 + L)s + R_1}$$

Exercício 03

Enunciado

- Utilizando o conceito de impedâncias, calcule a função de transferência $\dfrac{V_L(s)}{V(s)}$ para o circuito elé- trico abaixo



Solução

- Pela análise de malhas:

$$(2+s)I_1 - I_2 - I_3 = 0 \qquad (M1)$$

$$-I_1 + (1+s)I_2 - sI_3 = V(s) \qquad (M2)$$

$$-I_1 - sI_2 + (1+2s)I_3 = 0 \qquad (M3)$$

- Resolvendo o Sistema:

$$\frac{V_L(s)}{V(s)} = \frac{(s+1)^2}{s^2+5s+2}$$

Outline

Associação de Impedancias

Série	Paralelo

- A impedância equivalente de qualquer número de elementos conectados em série é igual ao somatório das impedâncias individuais

$$Z_{eq}\left(s\right) = \sum_{i=1}^{N} Z_i\left(s\right)$$

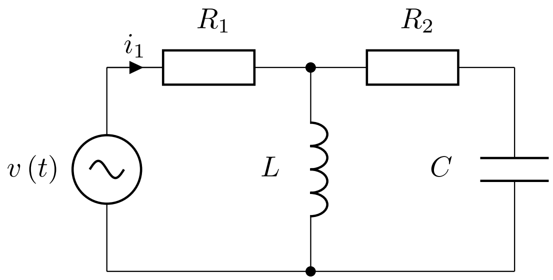
- A admitância (inverso da impedância) equivalente de qualquer número de elementos conectados em paralelo é igual ao somatório das admitâncias individuais

$$\frac{1}{Z_{eq}\left(s\right)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{Z_i\left(s\right)}$$

Exercício 04

Enunciado

- Utilizando o conceito de associação de impedâncias, calcule a função de transferência da fonte para a corrente na malha, $\frac{I_1(s)}{V(s)}$, para o circuito elétrico abaixo



Solução

$$Z_{eq1} = R_2 + \frac{1}{sC} = \frac{sCR_2 + 1}{sC}$$

$$\frac{1}{Z_{eq2}} = \frac{1}{sL} + \frac{1}{Z_{eq1}} = \frac{1}{sL} + \frac{sC}{sCR_2 + 1}$$

$$= \frac{s^2 LC + sCR_2 + 1}{s^2 CLR_2 + sL}$$

$$Z_{eq2} = \frac{s^2 CLR_2 + sL}{s^2 LC + sCR_2 + 1}$$

$$Z_{eq} = Z_{eq2} + R_1 = \frac{s^2 CLR_2 + sL}{s^2 LC + sCR_2 + 1} + R_1$$

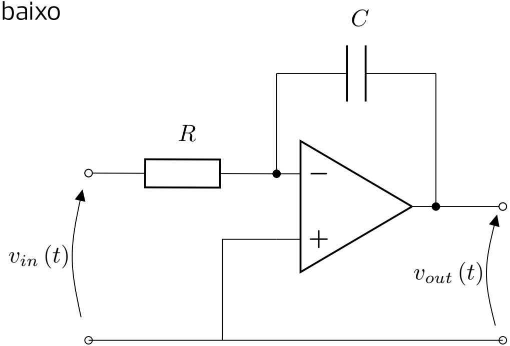
$$\frac{I_1}{V} = \frac{1}{Zeq}$$

$$= \frac{s^2 LC + sCR_2 + 1}{LC(R_2 + R_1)s^2 + (L + CR_2 R_1)s + R_1}$$

Exercício 05

Enunciado

- Utilizando o conceito de associação de impedâncias, calcule a função de transferência da saída para a entrada, $\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$, para o circuito elétrico abaixo



Solução

- O ganho de saída para a entrada dessa configuração (amplificador inversor) é dado por:

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{Z_C}{Z_R} = -\frac{\frac{1}{sC}}{R} = -\frac{1}{sRC} = -\frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s}$$

Outline

Resolvendo simbolicamente o exercício 03

Enunciado	Resultado
syms s A = [s+2 -1 -1; -1 s+1 -s; -1 -s 2*s +1]; B = [0; 1; 0]; G = inv (A)*B GL = simplify (s*G (3))	G = (3* s + 1) /(s*(s^2 + 5*s + 2)) (2* s^2 + 5*s + 1) /(s^3 + 5*s^2 + 2*s) (s^2 + 2*s + 1) /(s^3 + 5*s^2 + 2*s) GL = (s + 1) ^2/(s^2 + 5*s + 2)

Resolvendo simbolicamente o exercício 04

Enunciado

```
syms s R1 R2 L C
Z_R1 = R1;
Z_R2 = R2;
Z_L = s*L;
Z_C = 1/( s*C);

Z_eq = Z_R1 + ...
( Z_L *( Z_R2 + Z_C )) /( Z_L +( Z_R2 + Z_C
))

collect ( 1/Z_eq )
```

Resultado

```
Z_eq =
R1 + (L*s*( R2 + 1/( C*s)) ) /( R2 + L*s + 1/(C*s))

ans =
(C*L*s^2 + C*R2*s + 1) / ( (C*L*R1 + C*L*R2)*s^2
+ (L + C*R1*R2)*s + R1)
```