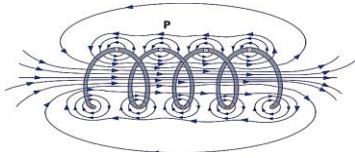


Insper

Engenharia

Eletromagnetismo e Ondulatória

2024-1



“E Deus disse:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \frac{d\vec{E}}{dt} \epsilon_0 \right)$$

E fez-se a luz...”

— Autor desconhecido

“The special theory of relativity owes its origins to Maxwell’s equations of the electromagnetic field.”

— Albert Einstein

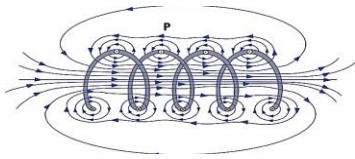
Autores

Fabio S. El Hage

Rodrigo Carareto

Fábio Pelicano B. Vieira

Carlos N. Marmo



AULA 1

ELETRÓSTÁTICA

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM DA AULA

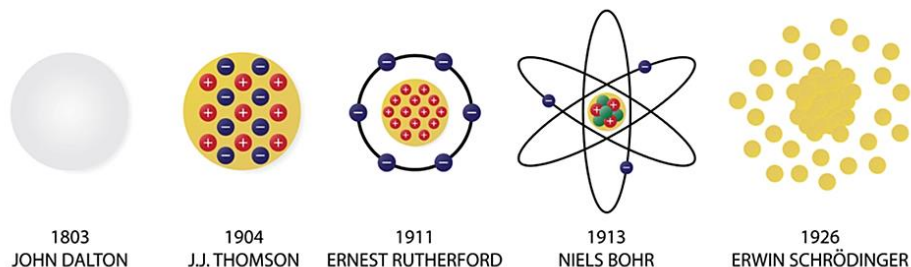
Ao final dessa aula, os alunos serão capazes de:

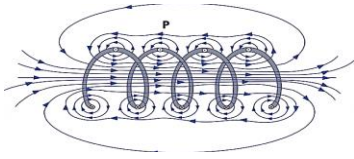
- Rememorar a estrutura da matéria e suas características elétricas;
- Rememorar a distinção entre metais e não metais;
- Rememorar a lei de Coulomb;
- Compreender o conceito de trabalho da força eletrostática;
- Compreender o conceito de indução eletrostática;

A ESTRUTURA ELÉTRICA DA MATÉRIA

Desde o final do século 19, os cientistas sabem que a matéria é constituída de átomos, e que estes são constituídos de cargas elétricas fundamentais: prótons, que são cargas positivas localizadas no núcleo, e os elétrons, cargas negativas localizadas no que se convencionou chamar de eletrosfera do átomo. Os núcleos atômicos também são constituídos de nêutrons, que não possuem carga elétrica. Na verdade, não se sabe exatamente como é um átomo, pois ainda não se dispõe de tecnologia para “fotografar” elétrons ou o núcleo. A propósito, o prêmio Nobel de 2023 foi dado a três cientistas que desenvolveram técnicas que serão utilizadas para melhor definir a “imagem” de um átomo, algo ainda distante no horizonte.

Como regra geral na Ciência, são usados modelos para representar fenômenos físicos complexos e, como sabemos, todo modelo é necessariamente uma simplificação da realidade. Historicamente, o modelo atômico evoluiu, desde o início do século XIX, de um modelo bastante simples (modelo de Dalton) até um modelo bem mais sofisticado, conhecido como Modelo de Schrödinger, no qual os elétrons formam uma espécie de nuvem em torno do núcleo. Observe na figura a seguir a evolução do modelo atômico e as datas em que foram propostos.





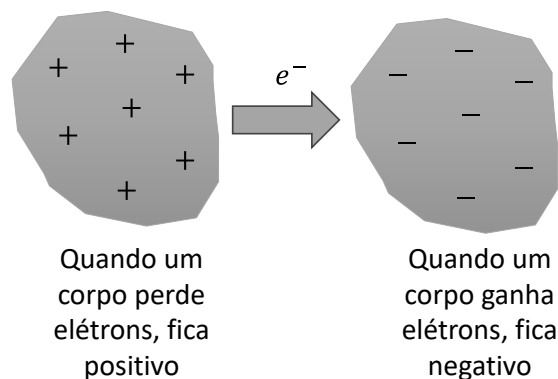
No curso de Eletromagnetismo e Ondulatória, trabalharemos com uma grandeza fundamental na Física: a **carga elétrica**, cuja unidade de medida é o Coulomb (C), em homenagem ao engenheiro e físico francês Charles-Augustin de Coulomb.

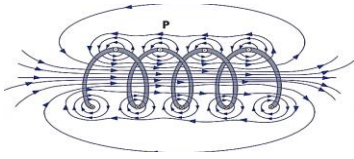
COMO OS CORPOS PODEM SER ELETRIZADOS?

Todos os corpos são constituídos de átomos e, como vimos, cada átomo é constituído de um núcleo positivo, formado por prótons e nêutrons, cercado por uma “nuvem” de elétrons, que são cargas negativas.

1. Como um corpo pode se tornar eletricamente positivo? E eletricamente negativo?

Como os núcleos dos átomos são muito mais estáveis que a eletrosfera, a eletrização de corpos se dá pela troca de elétrons (vem daí a palavra eletricidade). Um corpo que perde elétrons se torna eletricamente positivo, ao passo que um corpo que ganha elétrons se torna negativo. A menor carga elétrica possível que um corpo pode adquirir é a de um elétron, que é igual a $1,60217663 \cdot 10^{-19} C$, mesmo valor, em módulo, da carga de um próton.



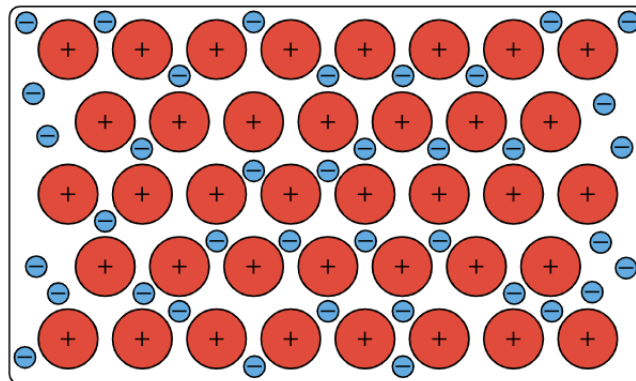


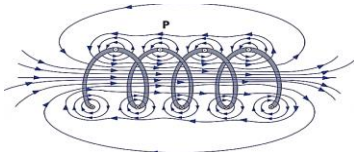
CONDUTORES E NÃO CONDUTORES

Uma característica fundamental dos materiais é a capacidade ou não de conduzir eletricidade, com efeitos práticos muito importantes para as aplicações em engenharia. Conduzir eletricidade significa possibilitar o movimento de elétrons, ordenadamente ou não, através da própria estrutura molecular do material.

2. Com base no que você já sabe, tente descrever o que diferencia um material condutor de um não condutor.

Os metais são naturalmente condutores de eletricidade, pois possuem poucos elétrons na camada de valência, fracamente ligada ao núcleo. Os átomos de um metal permanecem juntos por meio de uma ligação denominada metálica, na qual os elétrons da camada de valência formam uma nuvem de elétrons livres, capazes de se deslocarem livremente quando atraídos por cargas positivas ou repelidos por cargas negativas. A figura a seguir ilustra um diagrama que representa uma ligação metálica entre átomos.





Os metais que conduzem eletricidade com mais facilidade, dentre aqueles usados para construir fios e conectores, em ordem decrescente, são: prata, cobre, ouro, alumínio, cobalto, latão (liga de cobre e zinco), níquel e ferro.

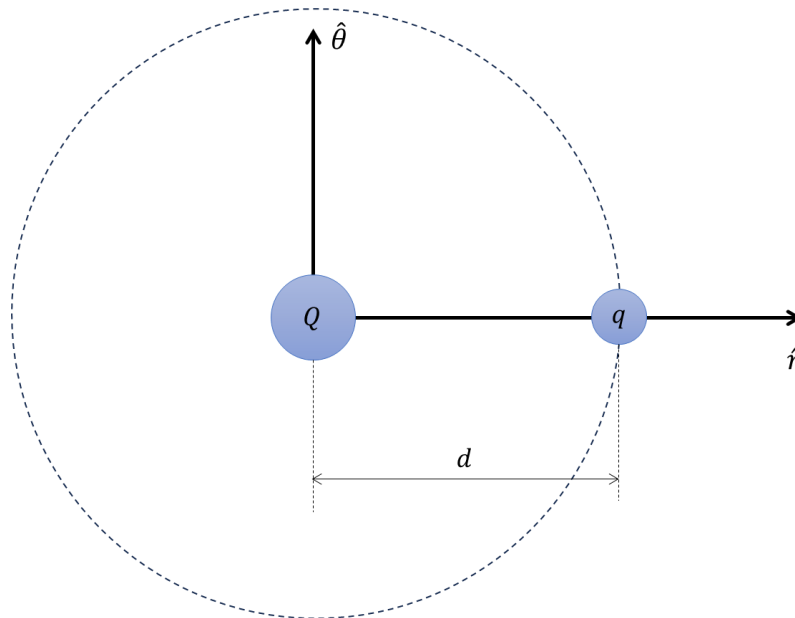
A LEI DE COULOMB

A lei de Coulomb é uma lei experimental (como todas as leis da Física) que determina a quantidade de força entre duas partículas eletricamente carregadas. Esta força elétrica é convencionalmente chamada de força eletrostática ou força de Coulomb. Embora a lei já fosse conhecida, ela foi publicada pela primeira vez em 1785 por Charles-Augustin de Coulomb.

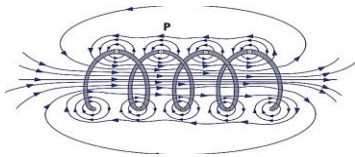
Usando coordenadas polares, dadas duas cargas elétricas Q e q afastadas de uma distância d , a força eletrostática que ambas sofrerão será dada pela lei:

Força sofrida pela carga Q	Força sofrida pela carga q
$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{d^2} \hat{r}$	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{d^2} \hat{r}$

Note que o sistema de coordenadas está centrado em Q tendo \hat{r} a direção radial que liga as cargas Q e q .



Na equação, ϵ_0 é uma constante universal da natureza, conhecida como **permissividade elétrica do vácuo**. Trata-se de uma constante medida em laboratório que ajusta a conversão das unidades *coulomb* e *metro* para *newton*.



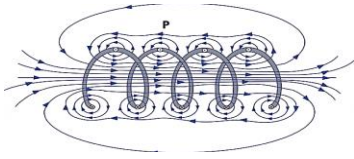
3. Suponha que as cargas Q e q sejam positivas, ou seja, corpos em que há mais prótons do que elétrons. Neste caso, quais seriam as direções e sentidos das forças atuantes nas duas cargas?

4. E se ambas as cargas fossem negativas, quais seriam as direções e sentidos das forças atuantes nas duas cargas?

5. Por fim, e se uma delas fosse positiva e a outra negativa, quais seriam as direções e sentidos das forças atuantes nas duas cargas?

O TRABALHO DA FORÇA ELÉTRICA

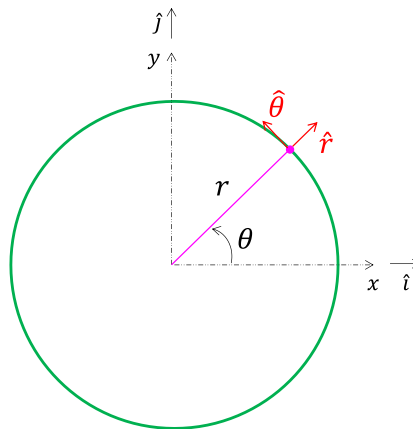
No curso de Física do Movimento, aprendemos que o trabalho de **qualquer força** em uma **trajetória qualquer** é definido por:



$$W_{\vec{F}} = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Na expressão do trabalho, temos uma integral de linha, que é a integral do produto escalar entre a força \vec{F} e o diferencial de deslocamento $d\vec{r}$. Dependendo do sistema de coordenadas adotado, o diferencial de deslocamento é descrito de forma diferente. No curso de Física do Movimento aprendemos que, no sistema cartesiano, o diferencial de deslocamento é dado por $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$.

No sistema polar, que também estudamos em Física do Movimento, o vetor diferencial de deslocamento possui apenas duas dimensões, dado por $d\vec{r} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta}$. Note que a componente $r d\theta$ é um arco de circunferência dado pela variação infinitesimal do ângulo θ .



Um sistema de coordenadas que será muito útil em Eletromagnetismo é o **sistema de coordenadas esféricas**, cujos versores são \hat{r} , $\hat{\theta}$ e $\hat{\phi}$. Observe a figura a seguir.

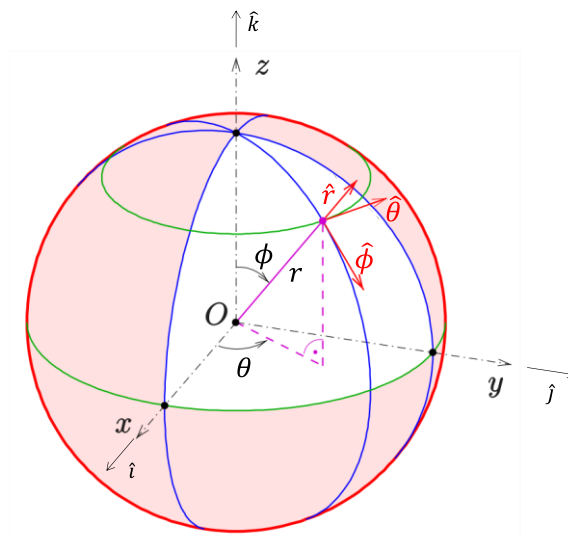
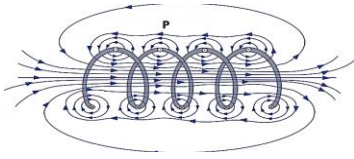


Imagem adaptada da Wikipedia

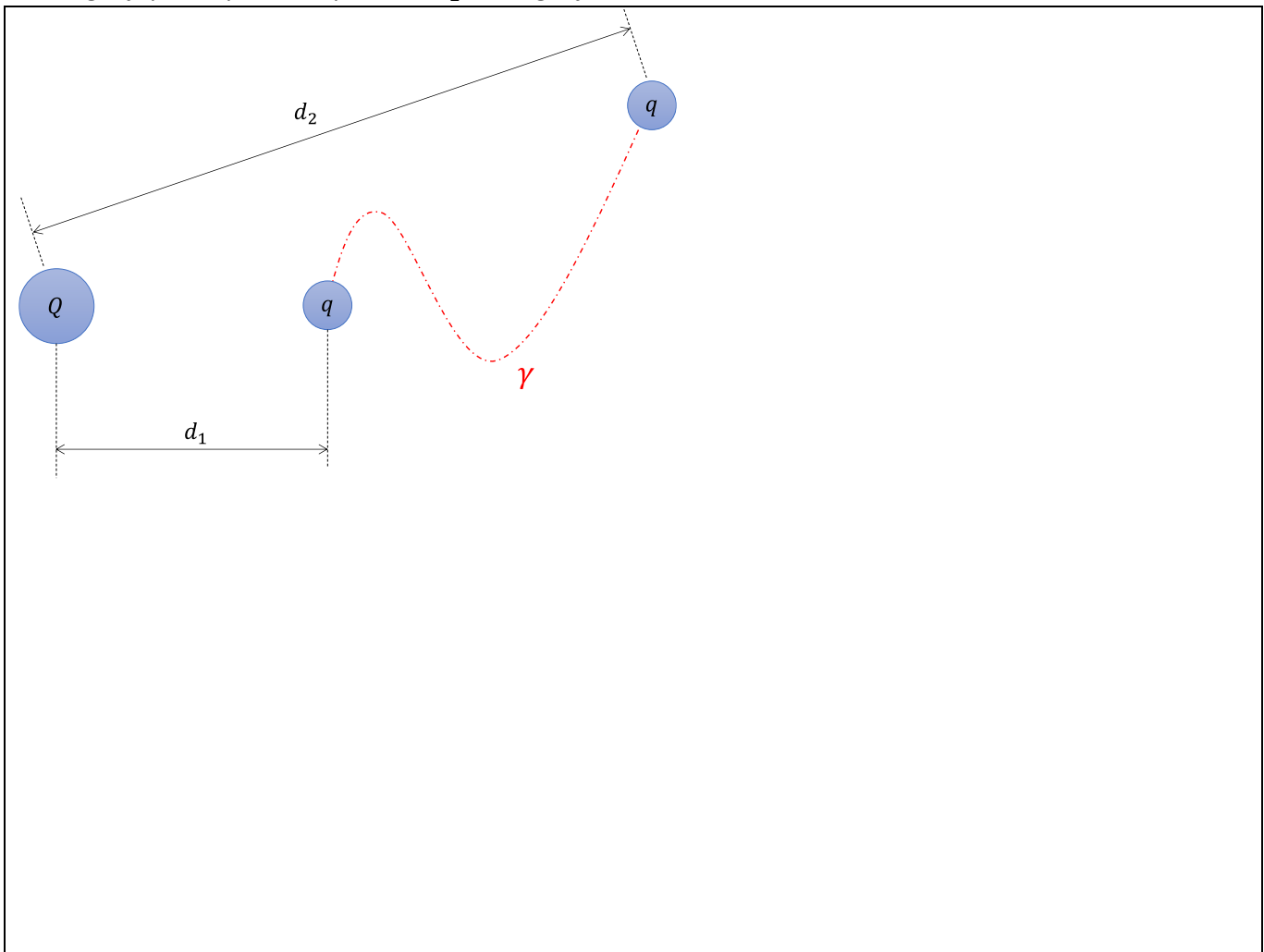


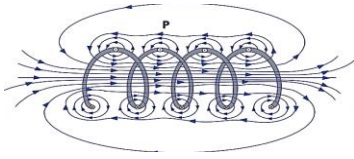
No sistema de coordenadas esféricas, um deslocamento $d\vec{r}$ no espaço terá de conter três componentes, uma em cada direção do sistema de coordenadas. Assim, $d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + r \sin\phi d\theta \hat{\theta}$. Da mesma forma que no sistema polar, o termo $r d\phi$ é um arco de circunferência de raio r , assim como $r \sin\phi d\theta$ é um arco de circunferência de raio $r \sin\phi$, que é a projeção de r no plano paralelo a xy .

Na tabela abaixo, são apresentados os diferenciais de deslocamento nos três sistemas de coordenadas.

Diferencial de deslocamento $d\vec{r}$		
Coordenadas cartesianas	Coordenadas polares	Coordenadas esféricas
$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$	$d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta}$	$d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + r \sin\phi d\theta \hat{\theta}$

6. A partir da definição, calcule o trabalho da força elétrica para se levar uma carga q do ponto A, que dista d_1 da carga Q , para o ponto B, que dista d_2 da carga Q .





Você deve ter chegado a:

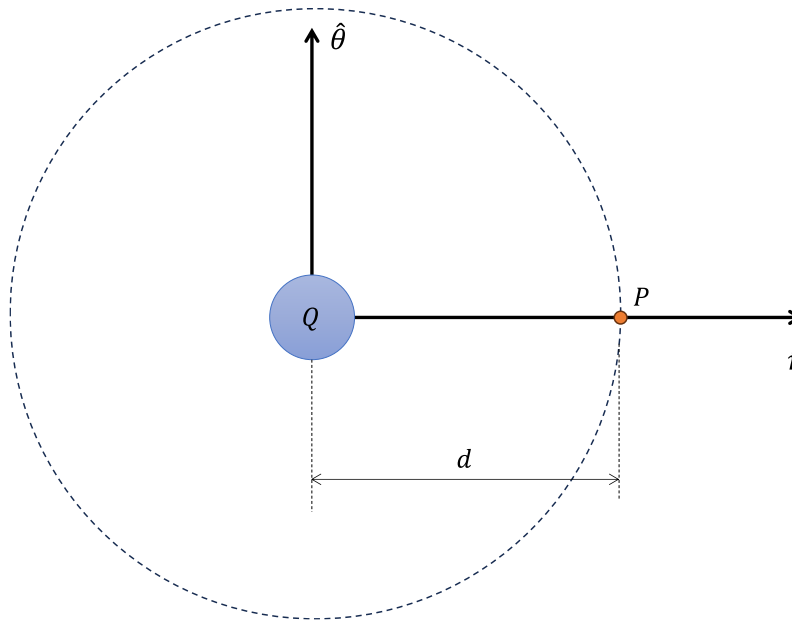
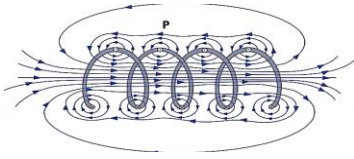
$$W_{\vec{F}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{d_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{d_2}$$

7. No curso de Física do Movimento, aprendemos que havia três forças conservativas na natureza: gravitacional, elástica e elétrica. Você se lembra do Teorema da Energia Potencial (TEP)? Transcreva-o abaixo.

8. Se definirmos o termo $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}$ como sendo a energia potencial elétrica, o TEP é válido para a força eletrostática?

O CAMPO ELÉTRICO

Sabendo que a força elétrica é uma grandeza que pode ser medida, portanto real, iniciaremos um processo de abstração matemática para isolar o efeito de uma carga sobre a outra. Na figura a seguir, imagine que existe apenas a carga da esquerda (Q), e que, no lugar da carga q , não exista nada, apenas a marcação da localização da carga q onde ela existia anteriormente (a essa localização, denominamos ponto P).

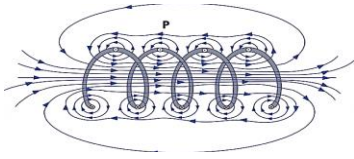


9. Descreva uma grandeza matemática vetorial, a qual denominaremos \vec{E} , e que ainda não sabemos se existe ou não, de tal modo que, quando colocarmos nesse ponto a carga q , surgirá uma força eletrostática $\vec{F} = q\vec{E}$. Determine também a unidade dessa grandeza.

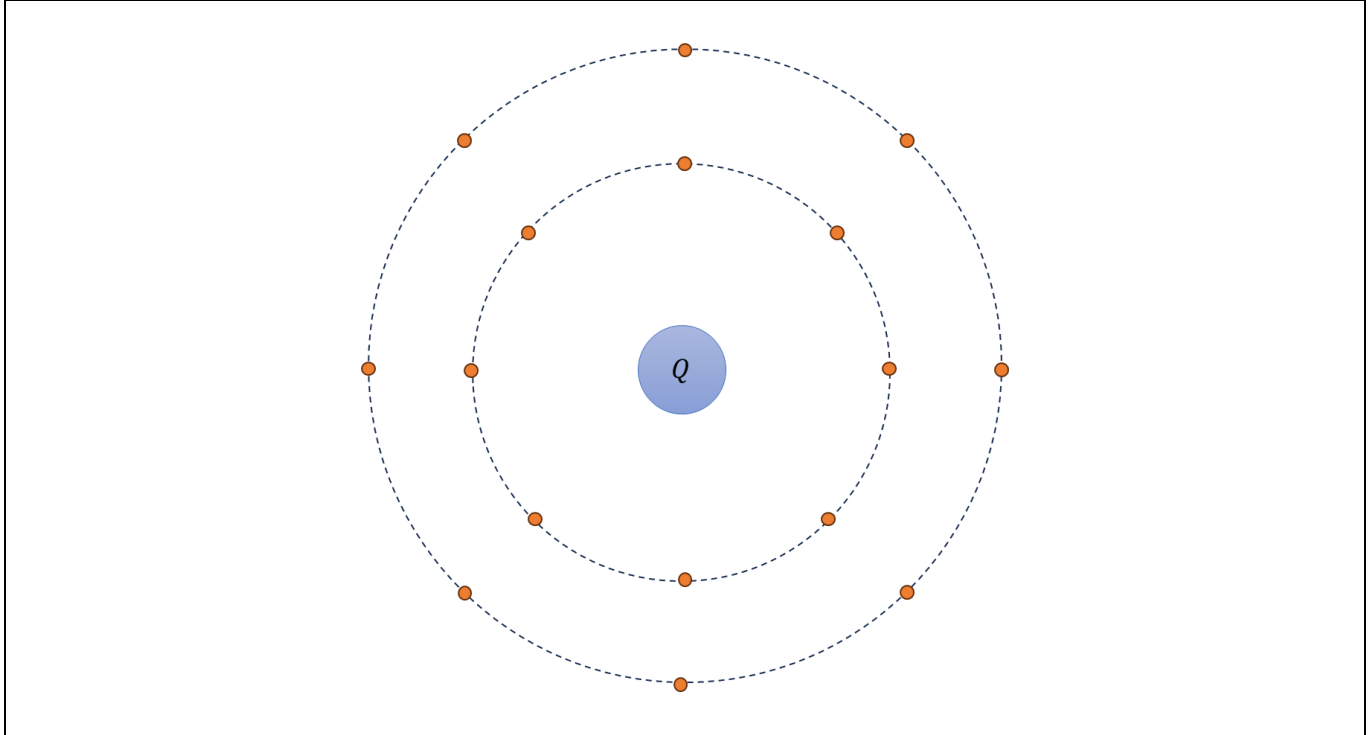
Você deve ter chegado à conclusão que:

$$\vec{E} = k \frac{Q}{d^2} \hat{r}$$

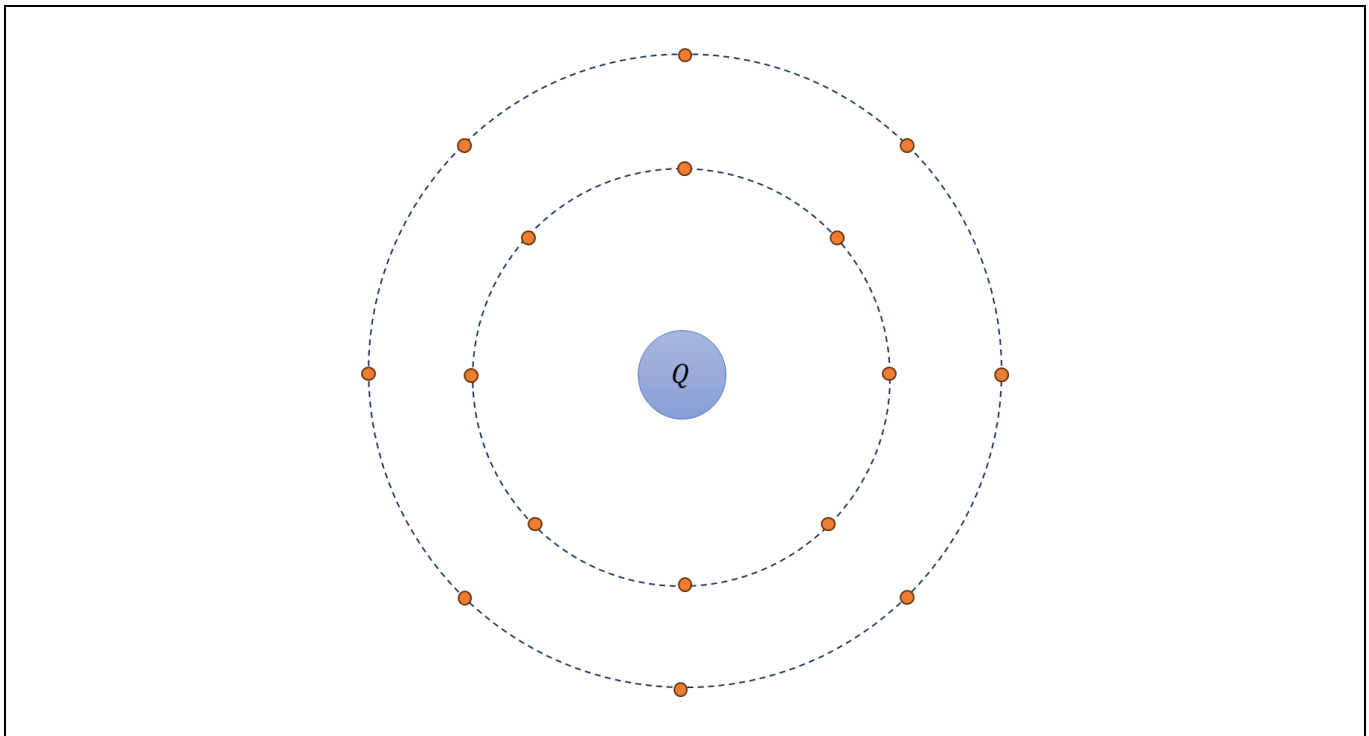
A essa grandeza denominamos **campo elétrico**, medido em N/C ou, como veremos na próxima aula, em V/m .

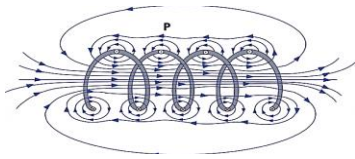


10. Desenhe na figura o campo elétrico \vec{E} nos pontos destacados supondo que a carga Q é positiva. Represente consistentemente o tamanho dos vetores campo elétrico, mesmo que sem escala.



11. Desenhe na figura o campo elétrico \vec{E} nos pontos destacados supondo que a carga Q é negativa.

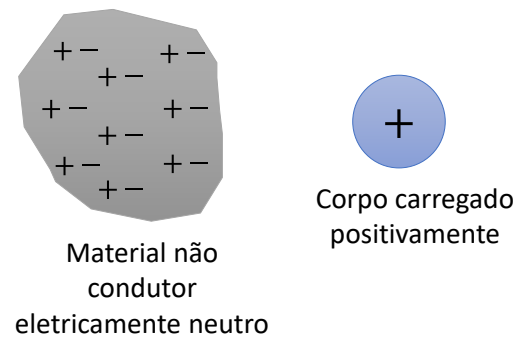




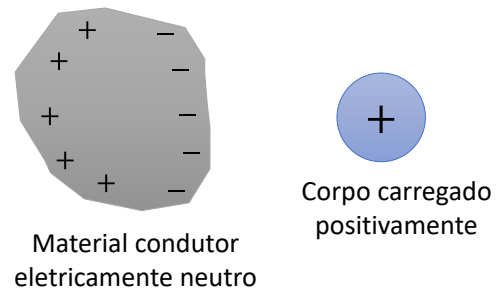
INDUÇÃO ELETROSTÁTICA E POLARIZAÇÃO

Compreendemos que cargas elétricas se atraem ou se repelem a distância, o que nos permite explicar um fenômeno muito comum no dia a dia: a indução eletrostática e a consequente polarização dos materiais quando na presença de um corpo carregado.

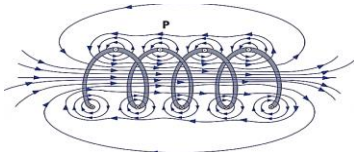
Iniciaremos analisando corpos de materiais **isolantes**, nos quais não há elétrons livres. Na presença de uma carga elétrica positiva, como na figura ao lado, os átomos do material isolante sofrerão a influência da carga positiva (força de Coulomb), atraindo os elétrons das eletrosferas para a direita. Em compensação, o lado esquerdo de cada átomo ficará levemente positivo, resultando assim na polarização do material não condutor, mesmo que nenhum elétron possa se desprender de seu átomo. É importante lembrar que o material polarizado, desde que não esteja em contato com outros corpos, permanecerá eletricamente neutro.



Caso repetíssemos o experimento com um objeto de material **condutor**, uma situação diferente ocorreria: os elétrons livres seriam atraídos pela carga positiva, concentrando-se na superfície direita do material (atraídos pelo corpo carregado). Como resultado, a superfície esquerda do material adquiriria carga positiva, pois teria falta de elétrons. Como no caso do material isolante, o condutor como um todo permaneceria eletricamente neutro.



12. Em qual das duas situações (polarização de um isolante ou de um condutor) a força entre o corpo eletrizado e o corpo neutro é maior? Justifique.

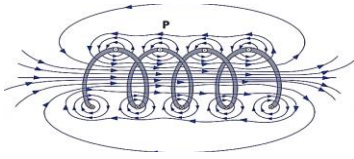


VÍDEO PRÉVIO PARA A AULA 2

ASSISTA AO VÍDEO PRÉVIO PARA A AULA 2 CLICANDO NO LINK:
[HTTPS://WWW.YOUTUBE.COM/WATCH?V=FR15wIsTnew](https://www.youtube.com/watch?v=FR15wIsTnew)

SCAN ME





AULA 2

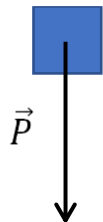
CAMPOS VETORIAIS

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM DA AULA

Ao final dessa aula, os alunos serão capazes de:

- Compreender o conceito de campo vetorial;
- Compreender o conceito de integral de linha em um campo vetorial e sua relação com o trabalho de uma força
- Analisar se um campo é conservativo e calcular o potencial de um ponto;
- Compreender o conceito de fluxo de um campo;
- Aplicar a lei de Gauss para calcular a intensidade de um campo em situações simétricas;

CAMPO GRAVITACIONAL



Você deve se lembrar de que o peso de qualquer objeto próximo à superfície da Terra é uma força de direção vertical, apontando para o centro da Terra (ou seja, para baixo) e de intensidade igual a mg , em que m é a massa do objeto e g é a aceleração local da gravidade, usualmente aproximada para 10 m/s^2 .

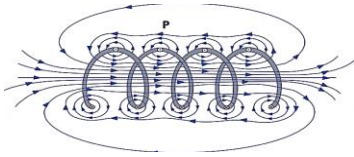
Vamos revisar esse conceito, porém agora nos valendo dos conhecimentos sobre vetores que adquirimos nos últimos 3 semestres. Imagine um ponto acima do solo, próximo à superfície da Terra.

Se nesse ponto colocarmos um objeto de massa 1 kg , ele estará sujeito a uma força de intensidade 10 N ; se o objeto tiver massa 2 kg , a força terá intensidade de 20 N e, se a massa for 30 kg , a força peso terá intensidade de 300 N . Ou seja, massas diferentes, pesos diferentes.

Agora, imagine o mesmo ponto, porém sem nenhum objeto (para facilitar a discussão, vamos desconsiderar as partículas que formam o ar).

1. Existe alguma força aplicada nesse ponto? Justifique.

Você deve ter concluído que só há força se houver alguma massa no ponto, ou seja: sem massa, sem peso. Chegamos a uma conclusão importante: se quisermos detectar o efeito da Terra em termos de força gravitacional,



precisamos colocar um corpo (com alguma massa) no ponto. Esse corpo é conhecido como **corpo de prova**, ou seja, sua função é apenas **provar** que existe uma “atuação gravitacional” do planeta naquele ponto.

Voltemos aos exemplos anteriores, em que foram usados os seguintes corpos de prova:

- massa de 1 kg : peso de 10 N
- massa de 2 kg : peso de 20 N
- massa de 30 kg : peso de 300 N

Note que existe uma proporção entre a intensidade do peso e a massa: 10 N para cada 1 kg . Feita essa observação, vamos criar uma grandeza vetorial que permita descrever o efeito que a Terra gera nos pontos próximos à sua superfície, **mesmo que um corpo de prova não seja colocado nesses pontos**.

Essa grandeza, que chamaremos de **campo gravitacional** e denotaremos por \vec{g} , tem as seguintes características: direção e sentido iguais ao da força que seria aplicada caso houvesse um corpo de prova e intensidade dada pela quantidade de newtons de força que seriam aplicados para cada kg de massa. Temos:

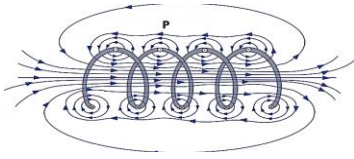
$$\vec{g}: \begin{cases} \text{Direção: vertical} \\ \text{Sentido: para baixo} \\ \text{Intensidade: } 10\text{ N/kg} \end{cases}$$

2. Dada essa descrição, escreva uma equação **vetorial** que relacione o campo gravitacional \vec{g} com o peso \vec{P} de um objeto de massa m colocado naquele ponto do campo gravitacional.

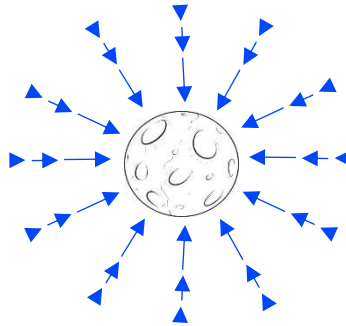
Por mais que igualdades possam ser lidas em ambos os sentidos, é importante entender que a ideia de campo faz sentido apenas se lermos a equação $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ da direita para a esquerda: se, em determinada região, **existir** um campo gravitacional \vec{g} e se, em algum ponto dessa região, for colocado um corpo com massa m , nesse corpo surge uma força \vec{P} , chamada peso. Note que não estamos preocupados com o agente gerador dessa grandeza (no caso, a Terra) e, sim, com o fato de que tal grandeza, simplesmente, **existe** em uma determinada região.

Para ilustrar a diferença entre campo gravitacional e força peso, imagine um planeta sem atmosfera e muito longe de qualquer outro corpo celeste. Se quisermos representar a força peso que atua sobre os pontos ao redor do planeta, teremos:





Ou seja, nenhum vetor seria representado, já que os pontos ao redor do planeta estão no vácuo e, por não terem massa, não sofrem a ação do campo gravitacional. Por outro lado, se representássemos o vetor campo gravitacional em cada um desses pontos, teríamos uma figura como a da próxima página.



O que foi dito nos parágrafos anteriores pode parecer simples, mas talvez não seja tanto. Estamos acostumados a pensar que corpos providos de massa exercem forças gravitacionais entre si, o que não deixa de estar correto; porém, de acordo com essa outra interpretação, passaremos a pensar que cada um dos corpos, quando colocado em uma região do espaço na qual atua um campo gravitacional (cuja identificação do agente gerador não é relevante), sofrerá a ação de uma força peso. Essa força pode ser determinada de maneira exata (intensidade, direção e sentido) se soubermos, também de maneira exata, a massa do corpo e o campo gravitacional (intensidade, direção e sentido) naquele ponto.

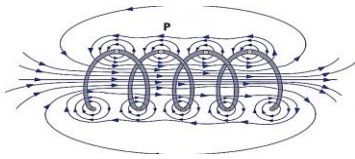
Algumas forças, chamadas de **forças de campo**, admitem esse tipo de interpretação: a partir do campo, que é uma grandeza vetorial que permeia o ambiente, porém não uma força em si, é possível determinar a força que atuará em algum corpo que ali seja colocado, desde que esse corpo tenha alguma “característica especial” em que o campo possa atuar. No caso do campo gravitacional, essa “característica especial” é a massa.

Note que essa ideia não pode ser aplicada a todos os tipos de força: o atrito, por exemplo, não é uma força de campo, já que sua intensidade, direção e sentido são frutos do contato entre corpos, não podendo ser determinados, simplesmente, analisando-se o ambiente.

CAMPO ELÉTRICO

Existem duas outras forças de campo (na realidade, elas são apenas uma, mas isso só ficará claro mais à frente no curso) que estudaremos nesta disciplina: a força elétrica e a força magnética. Para ambas, é possível definir uma grandeza vetorial (respectivamente, o campo elétrico e o campo magnético) que permeia o ambiente e faz com que corpos com “características especiais” sofram a ação de uma força.

3. Qual é a “característica especial” que um corpo deve ter para sofrer a ação de uma força elétrica quando estiver em uma região permeada por um campo elétrico?



4. Qual é a “característica especial” que um corpo deve ter para sofrer a ação de uma força magnética quando estiver em uma região permeada por um campo magnético?

Se você respondeu “ser um ímã” no item 4, entenda que um ímã é um objeto macroscópico, e não uma característica mensurável de um corpo, como a carga elétrica. Um corpo pode ter uma certa quantidade de carga elétrica, mas não uma certa “quantidade de ímãs”.

Por outro lado, se você respondeu “carga magnética”, muitos físicos de antes de 1900 concordariam; alguns deles, inclusive, dedicaram boa parte de suas carreiras a encontrar essa “carga magnética” – todos, sem exceção, falharam.

Mas, se você se lembrou das aulas de Eletromagnetismo do Ensino Médio, é possível que você tenha respondido “carga elétrica em movimento” – e, nesse caso, você estaria absolutamente correto(a)! Esse é o entendimento da Física atual: **campos magnéticos se manifestam (ou seja, produzem força magnética) sobre cargas elétricas em movimento**. Por enquanto, essa afirmação será apenas qualitativa, sendo que a quantificação será feita em uma aula futura.

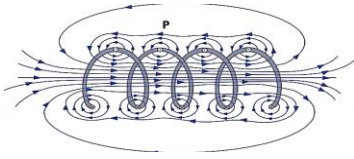
Antes de prosseguir, vamos fazer uma breve descrição do **campo elétrico**. Trata-se de um campo que atua de maneira similar (do ponto de vista quantitativo) à do campo gravitacional, ou seja, produz uma força na mesma direção do campo e de intensidade proporcional à “característica especial” – no caso, a carga elétrica. Porém, como a carga elétrica, ao contrário da massa, é uma grandeza que admite valores negativos, o sentido da força elétrica e do campo elétrico nem sempre coincidem.

5. Dada essa descrição, escreva uma equação **vetorial** que relacione o campo elétrico \vec{E} atuante em um ponto com a carga q de um objeto colocado naquele ponto.

Na figura a seguir, está representado o campo elétrico atuante em uma certa região do espaço.



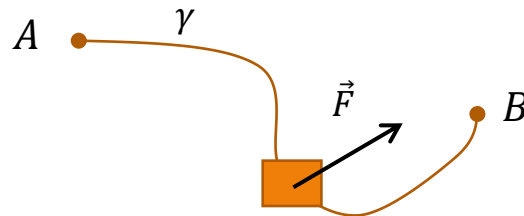
6. Represente na figura anterior o vetor força elétrica sobre dois corpos, um de carga elétrica $q > 0$ e outro de carga elétrica $-q$, em cada um dos 2 pontos destacados.



TRABALHO: RELEMBRANDO A DEFINIÇÃO DE INTEGRAL DE LINHA

De maneira curta e informal, podemos entender o trabalho de uma força como a medida da quantidade de energia transformada ou transferida quando o corpo em que essa força está aplicada se desloca ao longo de uma trajetória. Esse processo só ocorre devido à projeção da força ao longo da direção da trajetória, sendo que qualquer componente normal à trajetória não realiza trabalho.

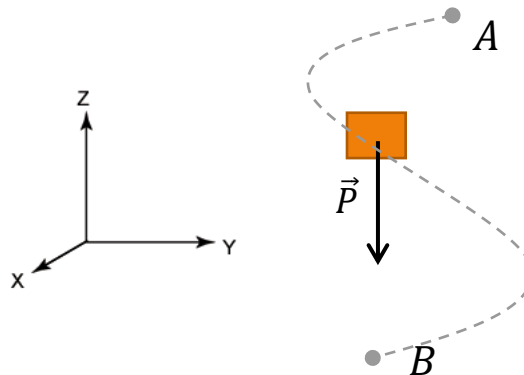
Considere um bloco que se desloca ao longo de uma trajetória qualquer e uma força \vec{F} que atua sobre o corpo ao longo do deslocamento (\vec{F} não é a resultante), com intensidade e direção variáveis, como mostra a figura a seguir:

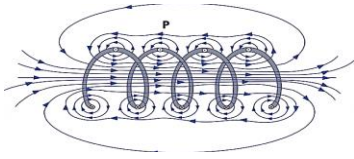


7. Dê uma expressão geral para o cálculo do trabalho W de uma força \vec{F} ao longo de uma trajetória γ qualquer.

TRABALHO DA FORÇA PESO

8. Considere um bloco que se desloca por uma trajetória curva, próximo à superfície da Terra, desde um ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ até um ponto $B(x_B, y_B, z_B)$, como mostra a figura a seguir.





Adotando um sistema de coordenadas tridimensionais em que o eixo z é perpendicular ao solo e a origem se encontra exatamente sobre o solo, escreva o vetor força peso \vec{P} na forma $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$.

$$\vec{P} = (\quad , \quad , \quad)$$

9. Calcule o trabalho W_P da força peso pela definição de trabalho, ou seja, usando uma integral de linha.

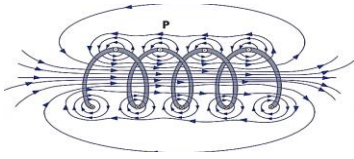
Você deve ter obtido a seguinte expressão para o trabalho do peso:

$$W_P = -(m \cdot g \cdot z_B - m \cdot g \cdot z_A)$$

Você deve se lembrar que vimos em Física do Movimento que o trabalho do peso não depende da trajetória, pois a força gravitacional é uma força **conservativa**. Mas, agora que você possui conhecimentos de Matemática Multivariada, é possível irmos um pouco mais longe nessa observação.

10. Do ponto de vista puramente matemático, o que é um campo vetorial conservativo? Qual é a consequência prática, em termos de integral de linha, de sabermos que um campo vetorial é conservativo?

11. Prove que o campo vetorial \vec{P} que você escreveu no item 8 é conservativo. Além disso, encontre sua **função potencial** Φ_P .



12. Sabendo que o campo vetorial \vec{P} é conservativo, podemos calcular qualquer integral do tipo $\int_{\gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r}$ conhecendo, simplesmente, os pontos inicial e final da curva γ . Se a trajetória γ começa no ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e termina no ponto $B(x_B, y_B, z_B)$, conhecida a função potencial Φ_P , dê uma expressão para calcular $\int_{\gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r}$.

13. Agora, a parte mais delicada (cuidado com os sinais!). A expressão que você obteve para a função potencial Φ_P do campo \vec{P} é **exatamente igual** à que você já conhece há muito tempo como **energia potencial gravitacional**?

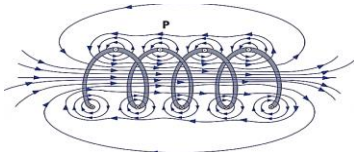
Se sua resposta foi “Não, os sinais são diferentes!”, você acertou (adicionalmente, talvez você tenha mencionado que Φ_P tem uma constante indeterminada, o que não ocorre com a energia potencial gravitacional. Porém, lembre-se de que a expressão mgh só faz sentido depois de **arbitrarmos** que o “solo” é associado à energia potencial gravitacional nula.). A energia potencial gravitacional E_{pg} é definida como o **oposto** da função potencial Φ_P :

$$E_{pg} = -\Phi_P$$

e, consequentemente, o campo vetorial \vec{P} pode ser interpretado como o **oposto do gradiente da energia potencial gravitacional**:

$$\vec{P} = -\vec{\nabla} E_{pg}$$

Essa escolha de sinais tem sentido porque, na Física, convencionou-se que o trabalho de uma força é positivo quando ela atua a favor do deslocamento e negativo caso contrário. Se usássemos a **função potencial Φ_P** em vez da **energia potencial gravitacional**, teríamos mais dificuldade para interpretar os resultados. Por exemplo, numa subida, em que o trabalho da força peso é negativo, a **função potencial** diminui, em vez de aumentar. Porém, estamos acostumados a associar alturas maiores a energias maiores.



Independentemente da convenção de sinais, não podemos perder o foco: se a força peso é conservativa, seu trabalho não depende da trajetória. Além disso, como a energia potencial gravitacional tem sinal contrário à função potencial, podemos escrever:

$$\int_{\gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \Phi_{final} - \Phi_{inicial} \therefore$$

$$\int_{\gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r} = E_{pg,inicial} - E_{pg,final} = -\Delta E_{pg}$$

Note que o conceito de energia potencial gravitacional, por si só, é desprovido de significado (afinal de contas, se podemos arbitrar o ponto em que a energia potencial é nula, seu valor não nos diz muito). Dizer, por exemplo, que o corpo, quando no ponto A , tem uma energia potencial gravitacional de $50 J$, não permite maiores conclusões.

Por outro lado, a afirmação de que a **diferença de energia potencial gravitacional entre as posições A e B** ocupadas pelo corpo é de $50 J$ tem significado: significa que a força peso transformará $50 J$ de energia ao atuar sobre o corpo ao longo de qualquer trajetória que se inicie no ponto A e termine no ponto B .

Da mesma forma que fizemos com a força gravitacional, toda força conservativa pode ser atrelada a uma grandeza chamada **energia potencial**. Essa grandeza, por si só, não admite grandes interpretações, mas se a conhecermos podemos calcular o trabalho ao longo de uma trajetória qualquer fazendo a diferença entre a energia potencial inicial e a final.

Olhando de outra forma, temos que a energia potencial é a descrição **escalar** de uma força, que por sua vez é uma grandeza **vetorial**. Agora, vamos fazer esse mesmo paralelo entre vetorial e escalar para o **campo gravitacional** \vec{g} . Como $\vec{P} = m\vec{g}$, temos:

$$W_P = \int_{\gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r} \therefore$$

$$W_P = \int_{\gamma} m\vec{g} \cdot d\vec{r} \therefore$$

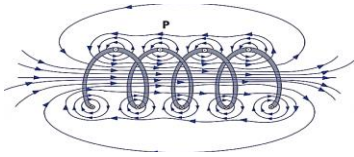
Passando m para fora da integral:

$$W_P = m \int_{\gamma} \vec{g} \cdot d\vec{r} \therefore$$

$$\int_{\gamma} \vec{g} \cdot d\vec{r} = \frac{W_P}{m}$$

Observe atentamente a última igualdade. Temos que a **integral de linha do campo gravitacional ao longo de uma trajetória γ resulta no trabalho da força peso por unidade de massa**.

Pode não saltar aos olhos, mas a equação anterior tem um significado muito importante. Para calcular o trabalho do peso sobre um corpo de massa m , podemos calcular a integral do **campo gravitacional** sobre a trajetória, em vez da integral **do peso** sobre a trajetória. A grande diferença é: a força peso é algo físico, com significado para



todos nós, já que a vivenciamos desde sempre. O campo gravitacional, por sua vez, poderia ser visto como uma abstração matemática conveniente. Não vemos nem ouvimos um campo e, se não houver um corpo de prova, sequer conseguimos detectar a existência de um campo. E, mesmo com essa grande diferença, do ponto de vista de cálculo de trabalho, ambas as abordagens são equivalentes.

Seguindo essa ideia, note que está faltando um par para o conceito de energia, ou seja, assim como a força peso (que depende de um corpo de prova) está para o campo gravitacional (que é uma característica do ponto), a energia potencial (que depende de um corpo de prova) está para qual grandeza característica do ponto?

Bem, definimos o campo gravitacional como uma grandeza que dá a força **por unidade de massa** à qual estaria submetido um corpo de prova. Analogamente, partindo do fato de que a energia potencial gravitacional é um conceito que depende da massa, vamos definir uma grandeza chamada **potencial gravitacional**, que dá a quantidade de energia **por unidade de massa** caso um corpo fosse colocado naquele ponto.

Dessa forma, temos que o trabalho da força peso é dado pela diferença entre as energias potenciais gravitacionais, ao passo que a integral de linha do campo gravitacional é dada pela diferença entre os potenciais gravitacionais, a qual poderíamos chamar de **DDP** (gravitacional).

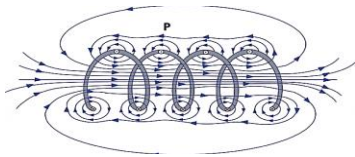
E, uma das conclusões mais importantes da aula: a tal da DDP (gravitacional) nada mais é do que o trabalho da força peso por unidade de massa, caso um corpo de prova fosse deslocado ao longo da trajetória. Assim, se a diferença de potencial gravitacional entre dois pontos for de $100 \text{ J} / \text{kg}$, temos que a força peso realiza um trabalho de 100 J por cada kg deslocado entre os pontos. Guarde isso muito bem. Será fundamental em eletromagnetismo.

Nesse momento, esperamos sinceramente que você esteja confuso(a) e precise da ajuda do seu professor. Se esse for o caso, não hesite em chamá-lo para colocar as ideias no lugar.

TRABALHO DA FORÇA ELÉTRICA

A força elétrica também é conservativa (há um exercício na sugestão de estudo para provar essa informação). Assim, o trabalho por ela realizado sobre o deslocamento de uma carga q ao longo de uma trajetória pode ser calculado pela diferença entre as energias potenciais eletrostáticas nos pontos inicial e final da trajetória. E, assim como a DDP gravitacional pode ser interpretada como o trabalho realizado pela força peso por unidade de massa, podemos fazer uma interpretação análoga para a DDP eletrostática.

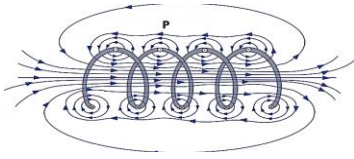
14. O que é a DDP eletrostática? O que significa dizer, em termos de trabalho e energia, que os terminais de uma tomada possuem uma DDP de $110 \text{ J} / \text{C}$, ou, simplesmente, 110 V ?



15. Formalize matematicamente a definição de DDP eletrostática. Novamente, peça ajuda caso julgue necessário.

16. Preencha o quadro a seguir com um resumo do que você entendeu sobre força, campo, energia potencial e potencial de um campo conservativo.

Força	Campo
Energia potencial	Potencial

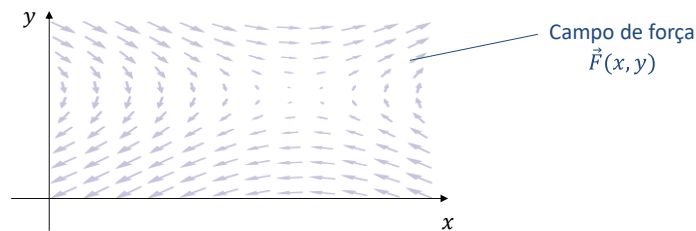


LEITURA COMPLEMENTAR PARA A AULA 2

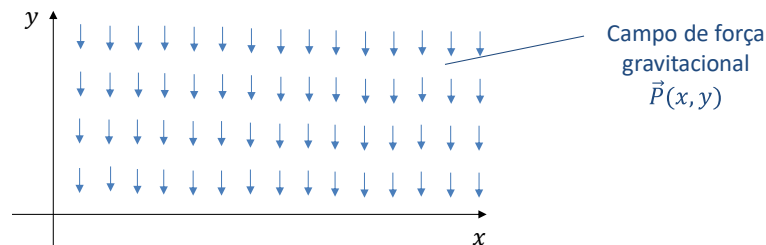
CAMPOS CONSERVATIVOS E A INTEGRAL DE LINHA

CAMPOS VETORIAIS

Em Física, campos vetoriais são relações matemáticas que descrevem um vetor para cada ponto do espaço. Por exemplo, na figura abaixo, temos um campo de força $\vec{F}(x, y)$ qualquer, em duas dimensões. Isso significa que, para cada par de pontos (x, y) , existe um vetor \vec{F} com intensidade, direção e sentido dados pela função $\vec{F}(x, y)$.

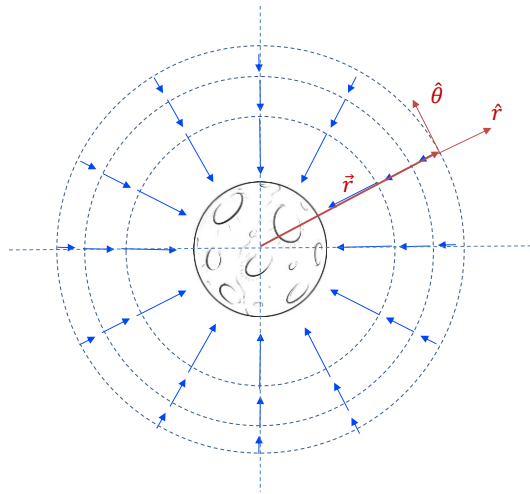
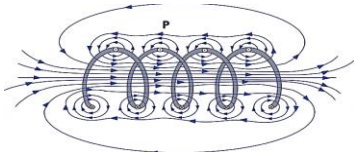


Por exemplo, vamos considerar o campo da força gravitacional próximo à superfície da Terra. Sabemos que a força peso de uma massa m é vertical e para baixo e, portanto, o vetor peso é dado pela expressão $\vec{P} = -mg\hat{j}$. Ou seja, essa força tem intensidade, direção e sentido independentes da posição em que estamos no plano xy . Desse modo, nosso campo de força gravitacional será $\vec{P}(x, y) = -mg\hat{j}$. Observe sua representação na figura abaixo.



Se quisermos ser mais precisos, podemos usar a Lei da Gravitação Universal para descrever o campo de forças gravitacionais de um corpo de massa m ao redor de um planeta qualquer de massa M . Tomando como base o sistema de coordenadas polares, é fácil verificar que o vetor força peso será $\vec{P} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$, conforme a figura a seguir. Veja, nesse caso, que o campo de forças gravitacionais será:

$$\vec{P}(r, \theta) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

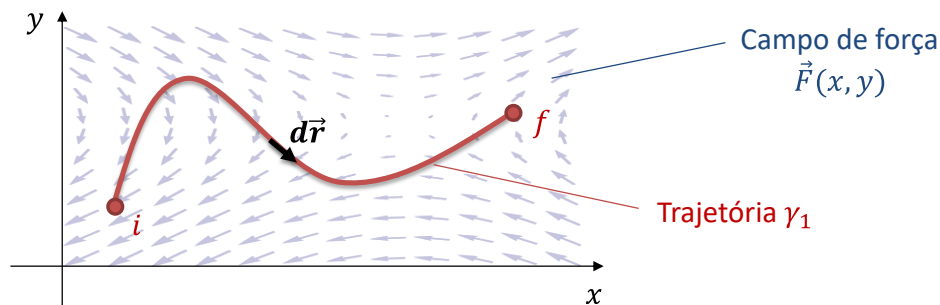


INTEGRAIS DE LINHA EM CAMPOS VETORIAIS

Em Matemática Multivariada, você já aprendeu que a integral de linha de um campo vetorial, ao longo de uma trajetória γ_1 , é dada por:

$$\int_{\gamma_1} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}$$

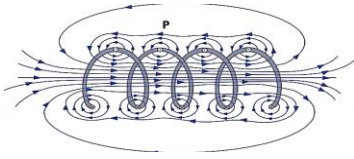
Na equação acima, $d\vec{r}$ é o vetor diferencial de deslocamento. No caso de a trajetória ocorrer no plano xy , $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$. Em Física, se o campo vetorial é um campo de forças, à integral de linha damos o nome de **trabalho da força** entre os pontos inicial (x_i, y_i) e final (x_f, y_f) . É fundamental notar que a integral de linha é a integral de um **produto escalar** entre um campo vetorial (e, portanto, um vetor em função da posição), e um vetor diferencial de deslocamento.



A INTEGRAL DE LINHA EM CAMPOS CONSERVATIVOS

Em Matemática Multivariada, você também aprendeu que um campo vetorial é conservativo se ele é o gradiente de uma função potencial, certo? Matematicamente, se

$$\vec{F}(x, y) = \vec{\nabla}p(x, y)$$



então, $\vec{F}(x, y)$ é um campo conservativo. Para compreender o que significa essa igualdade, vamos recordar um conceito importante: a regra da cadeia multivariada. Dada uma função $p(x, y)$, que depende de um par de pontos (x, y) , podemos parametrizar as coordenadas x e y em função de uma variável t (que, em Física, geralmente é o tempo). Assim, teremos as coordenadas x e y dependentes do instante de tempo t , ou seja: $x(t)$ e $y(t)$. Nossa função potencial seria, então, dada por $p(x(t), y(t))$.

Pois bem, se quisermos saber qual a derivada de p em relação a t , ou seja, dp/dt , precisaremos usar a regra da cadeia multivariada:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Observe a expressão acima. Ela nos diz que, para calcularmos a taxa de variação da função p em relação a t , precisamos somar duas taxas de variações: a taxa de variação em x e a taxa de variação em y . Ocorre que x e y variam em relação a t e, por isso, a taxa de variação em x será $\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$, enquanto em y será $\frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$.

Supondo que nosso campo de forças $\vec{F}(x, y)$ é conservativo, então:

$$\vec{F}(x, y) = \vec{\nabla} p(x, y) = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j}$$

Vamos agora calcular a integral de linha desse campo em uma certa trajetória γ_1 . Assim:

$$\int_{\gamma_1} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}$$

Como $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$, derivando essa expressão, chegando a:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j}$$

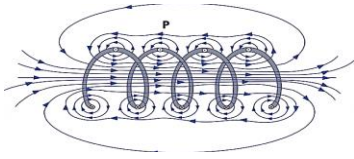
Multiplicando a expressão toda por dt/dt , chegamos a:

$$d\vec{r} = \left(\frac{dx}{dt}\right) dt \hat{i} + \left(\frac{dy}{dt}\right) dt \hat{j}$$

Lembrando que $\vec{F}(x, y) = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j}$, e $d\vec{r} = \left(\frac{dx}{dt}\right) dt \hat{i} + \left(\frac{dy}{dt}\right) dt \hat{j}$, podemos substituir ambos os termos na expressão da integral de linha. Assim:

$$\int_{\gamma_1} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} \right) \cdot \left(\left(\frac{dx}{dt}\right) dt \hat{i} + \left(\frac{dy}{dt}\right) dt \hat{j} \right)$$

Calculado o produto escalar da integral, chegamos a:



$$\int_{\gamma_1} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dt} dt$$

Colocando dt em evidência, obtemos:

$$\int_{\gamma_1} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) dt$$

Mas, dada a regra da cadeia multivariada, sabemos que $\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dp}{dt}$, e por isso nossa integral será:

$$\int_{\gamma_1} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{dp}{dt} dt$$

Ora, qual a primitiva de dp/dt ? É p , não? Assim:

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{dp}{dt} dt = p(x(t_f), y(t_f)) - p(x(t_i), y(t_i))$$

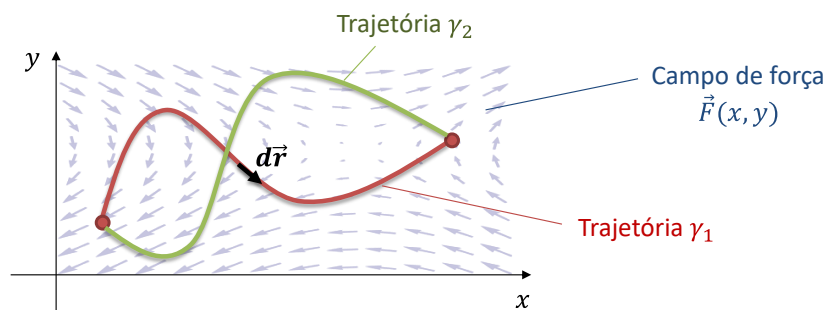
Acabamos de provar a você que, se:

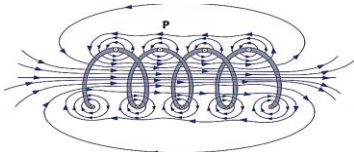
$$\vec{F}(x, y) = \vec{\nabla} p(x, y) = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j}$$

Então:

$$\int_{\gamma_1} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = p(x_f, y_f) - p(x_i, y_i)$$

Ou seja, demonstramos que a integral de linha de um campo de forças conservativo não depende da trajetória, mas apenas dos pontos inicial (x_i, y_i) e final (x_f, y_f) . Se fizéssemos um trajeto diferente, por exemplo, γ_2 (ver figura), chegaríamos ao mesmo resultado ao calcular a integral de linha.



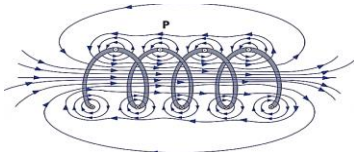


Dois corolários deduzidos do teorema que acabamos de demonstrar, de que a integral de linha de um campo conservativo independe da trajetória, são:

$$\int_{\gamma_1} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_2} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r}$$

E, sendo a trajetória fechada (observe o símbolo na expressão abaixo), a integral de linha de um campo conservativo será sempre nula, ou seja:

$$\oint \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} = 0$$



AULA 3

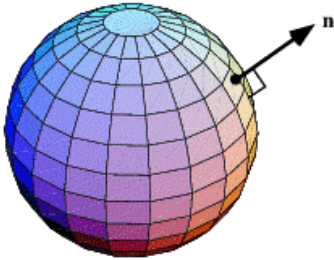
LEIS DE GAUSS

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM DA AULA

Ao final dessa aula, os alunos serão capazes de:

- Compreender o conceito de fluxo de um campo;
- Aplicar a lei de Gauss para calcular a intensidade de um campo em situações simétricas;

FLUXO DE UM CAMPO VETORIAL



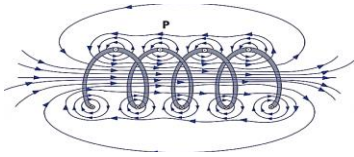
No vídeo sobre campos vetoriais, você revisou alguns conceitos de Matemática Multivariada, essenciais no nosso estudo do Eletromagnetismo. Dentre esses conceitos, um deles foi o de **fluxo de um campo vetorial**.

Uma situação especial para o cálculo do fluxo é quando temos uma superfície fechada, que delimita um volume. Nesse caso, convencionou-se que, em qualquer elemento de área da superfície, a normal \hat{n} aponta **para fora** do volume delimitado pela superfície, como mostra a figura ao lado.

Se uma superfície fechada, com os vetores normais orientados para fora, como a da figura acima, é usada para calcular o fluxo de um campo vetorial, dizemos que essa superfície é uma **superfície gaussiana**.

1. Qual deve ser o sinal do fluxo através de uma superfície fechada se a maior parte do campo vetorial estiver “entrando” nessa superfície? E se a maior parte do campo vetorial estiver “saindo”?

2. De maneira qualitativa, qual é o significado de o fluxo de um campo vetorial através de uma superfície fechada ser nulo?



3. Se o campo vetorial em questão for o campo de velocidades de um fluido incompressível, o que você espera do valor do fluxo desse campo em qualquer superfície fechada que delimite um volume do fluido?

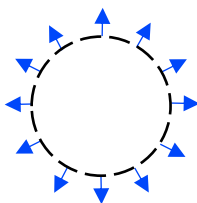
Observação: apenas neste item você deve considerar que o campo vetorial representa as velocidades das partículas de um fluido.

Em um grande número de casos de interesse nesta disciplina, ou o campo vetorial é uniforme (para qualquer instante, os vetores têm mesma intensidade, direção e sentido em todos os pontos do campo vetorial), ou mantém-se perpendicular e com a mesma intensidade em relação a uma determinada superfície.

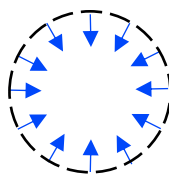
Para ilustrar, considere uma esfera **gaussiana** de raio medindo R imersa em um campo vetorial \vec{F} , de modo que, para qualquer plano que passe pelo seu centro, o campo vetorial \vec{F} tenha a mesma configuração que está exibida na figurada próxima página. Veja três situações distintas que refletem o que foi dito:

Chamamos de superfície **gaussiana** a superfície sobre a qual o campo será integrado. Essa superfície é puramente matemática, não tendo relação direta com materiais ou formatos específicos.

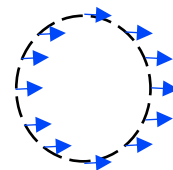
Situação I



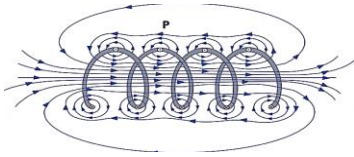
Situação II



Situação III



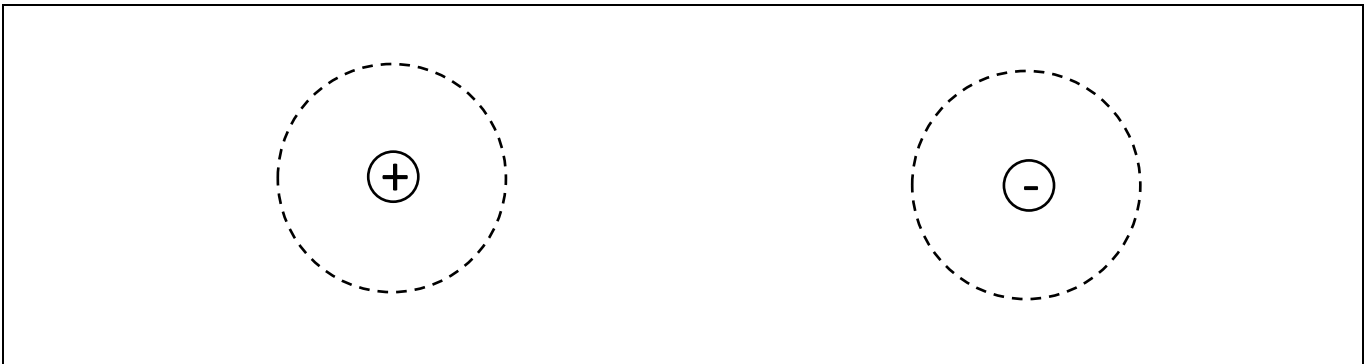
4. Considerando que, nas três situações, a intensidade do campo vetorial \vec{F} em todos os pontos da superfície gaussiana é F , calcule o valor do fluxo através da superfície em cada uma das três situações, dando a resposta em função de F e R .



O FLUXO ELÉTRICO

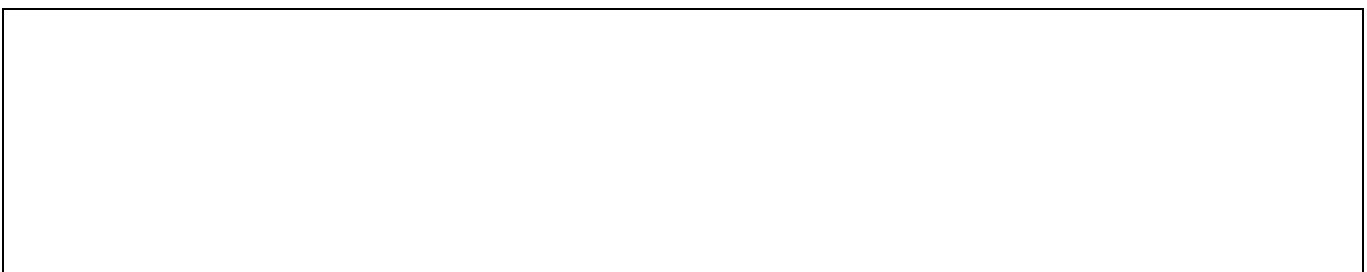
Definimos a grandeza **fluxo** para campos vetoriais quaisquer. Se o campo vetorial em questão for um campo elétrico \vec{E} , tal fluxo é chamado de **fluxo elétrico** e denotado por Φ_E . Antes de entendermos o significado do fluxo elétrico, vamos relembrar alguns conceitos sobre a geração do campo elétrico por uma carga pontual.

5. Considerando uma carga pontual no centro de uma superfície gaussiana e seus conhecimentos prévios sobre a força elétrica, desenhe o campo elétrico gerado pela carga em diversos pontos da superfície (represente apenas uma seção transversal). Considere tanto o caso de uma carga positiva, quanto o caso de uma carga negativa.

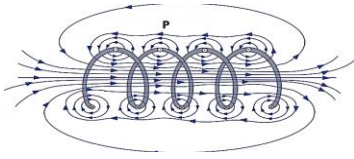


Em 1813, Johann Carl Friedrich Gauss formulou uma lei que, atualmente, é considerada uma das 4 leis fundamentais do Eletromagnetismo. De acordo com a formulação original, essa lei dizia que “... o fluxo elétrico total através de qualquer superfície hipotética fechada imersa no campo elétrico (no vácuo) é proporcional à carga elétrica total contida no volume delimitado por essa superfície”.

6. Expresse matematicamente a lei de Gauss, considerando que a constante de proporcionalidade é igual a $1/\epsilon_0$, sendo ϵ_0 uma constante conhecida como permissividade elétrica do vácuo.



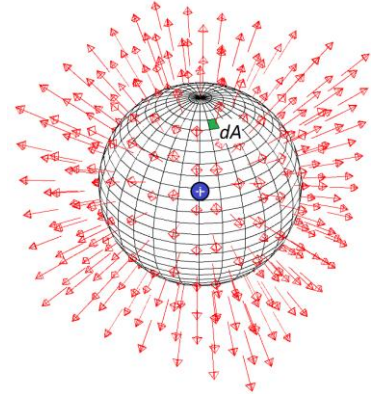
Observação: a Lei de Gauss é uma das 4 equações de Maxwell, as equações suficientes para descrever todos os fenômenos eletromagnéticos.



“LEI” DE COULOMB OU TEOREMA DE COULOMB?

Nesse momento, é importante notar que seguimos um caminho diferente do usualmente adotado no Ensino Médio: em momento algum nos referimos à força elétrica entre duas cargas puntiformes, conhecida como Lei de Coulomb. Por mais que a abordagem do Ensino Médio seja didática, ela não é geral. Como veremos a seguir, a “lei” de Coulomb é apenas um caso particular da lei de Gauss (essa, sim, sem as aspas!).

Vamos considerar uma carga puntiforme carregada positivamente com carga q no centro de uma superfície gaussiana esférica de raio medindo r , imersa em um campo \vec{E} , como mostra a figura ao lado.

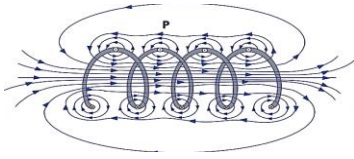


7. O que se pode dizer sobre a intensidade e a direção de \vec{E} em cada ponto dessa superfície gaussiana?

8. Denotando por E a intensidade do campo elétrico em cada ponto da superfície gaussiana, sem usar a lei de Gauss, calcule em função de E e r o fluxo elétrico nesse caso particular.

9. Usando a lei de Gauss dê, em função de Q , de r e da permissividade elétrica do vácuo ϵ_0 , a intensidade E do campo elétrico em qualquer ponto da esfera gaussiana.

10. Por fim, imagine que uma carga q seja colocada sobre um ponto dessa superfície gaussiana. Qual deve ser, em função de Q , de q , de r e da permissividade elétrica no vácuo ϵ_0 , a intensidade da força elétrica entre as cargas Q e q ?



CAMPO MAGNÉTICO

Vimos que o vetor campo elétrico pode ser entendido como o modelo matemático de uma perturbação no espaço gerada por uma carga elétrica. Se num dado ponto o vetor campo elétrico não é nulo, então haverá uma força elétrica aplicada a uma carga posicionada em tal ponto. Tal força é dada pelo produto entre o escalar carga elétrica q e o vetor campo elétrico \vec{E} :

$$\vec{F}_{elet} = q\vec{E}$$

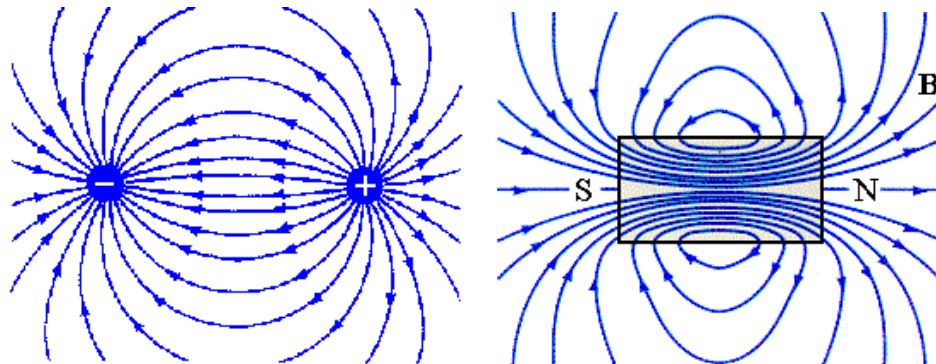
Analogamente, se num dado ponto houver um **vetor campo magnético** \vec{B} não nulo e nesse ponto for colocado um corpo com alguma “característica especial”, então haverá uma força magnética \vec{F}_{mag} aplicada sobre esse corpo. Como vimos, a tal “característica especial” é ter carga elétrica e estar em movimento, de modo que a força magnética pode ser calculada por

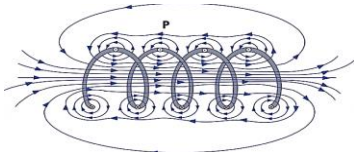
$$\vec{F}_{mag} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Nesse momento, porém, vamos deixar de lado o conceito refinado (voltaremos a ele nas próximas aulas) e vamos nos valer de um conceito mais simples (e menos rigoroso): digamos que a tal “característica especial” possa ser entendida por “ser um ímã”. Ou seja, quando um ímã (por menor que seja) é colocado em uma região em que atua um campo magnético, ele “sente” a atuação de uma força magnética.

FLUXO MAGNÉTICO

Após analisar o fluxo elétrico, é natural que estudemos também o fluxo magnético através de uma superfície fechada imersa em um campo magnético. As linhas de campo de um campo elétrico diferem das de um campo magnético, como mostra a figura a seguir.





11. Considerando a característica peculiar das linhas de um campo magnético \vec{B} , o que você diria sobre o fluxo magnético Φ_B através de **qualquer** superfície fechada imersa nesse campo?

Você deve ter concluído que:

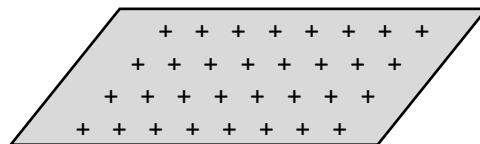
$$\Phi_B = 0$$

A equação acima é conhecida como lei de Gauss para Campos Magnéticos e também é a 2ª equação de Maxwell. Basicamente, ela atesta que **não existem monopólos magnéticos**, ou seja, não é possível separar os pólos de um ímã.

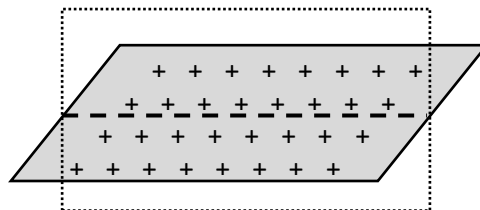
12. (Exercício) A lei de Gauss pode ser aplicada para determinar a intensidade do campo elétrico em algumas situações em que ocorre simetria, como em uma placa infinita com carga homogeneamente distribuída. Nessa questão, usando a lei de Gauss para campos elétricos, você irá provar que o campo elétrico gerado por uma placa infinita no vácuo pode ser aproximado por

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} ,$$

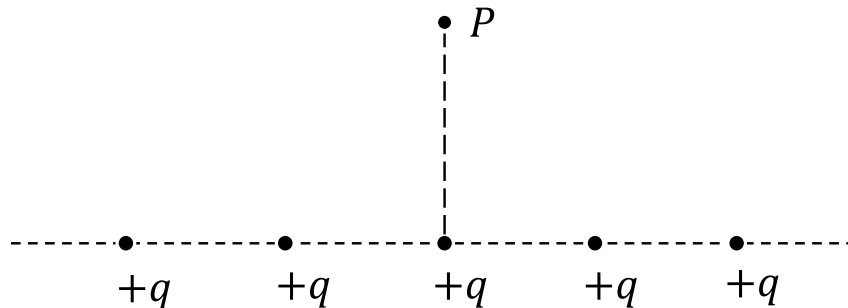
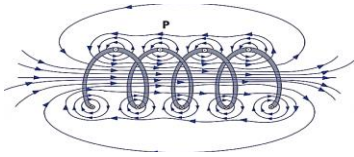
sendo σ a densidade superficial de carga na placa e ϵ_0 a permissividade eletrostática do vácuo. Para fazer isso, vamos considerar uma placa de espessura desprezível e área infinita, carregada com uma densidade superficial de carga σ positiva, como mostra a figura a seguir.



Agora, vamos analisar apenas o que ocorre no plano perpendicular à placa e que passa pela linha tracejada:



Podemos considerar o pedaço da placa que ficou nesse plano (representado pela linha tracejada na figura anterior) como uma linha de pequenas cargas puntiformes $+q$ igualmente espaçadas, como mostra a figura a seguir:

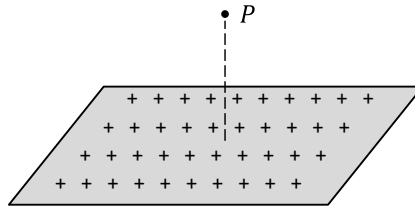
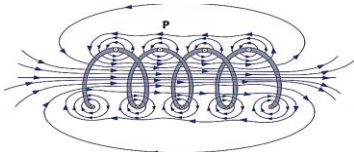


- a)** Desenhe no ponto P os 5 vetores campo elétrico devidos a cada uma das 5 cargas exibidas na figura. Seja cuidadoso(a) ao representar o tamanho de cada vetor!
- b)** Fazendo a soma vetorial dos 5 vetores campo elétrico que você representou, o que você pode concluir sobre a direção e o sentido do campo elétrico resultante no ponto P , devido apenas a essas 5 cargas?

- c)** Considerando que essa linha é infinita, se levarmos em conta as outras infinitas cargas $+q$ da linha, o que se pode dizer sobre a direção e o sentido do campo elétrico resultante no ponto P , devido a essa linha infinita de cargas?

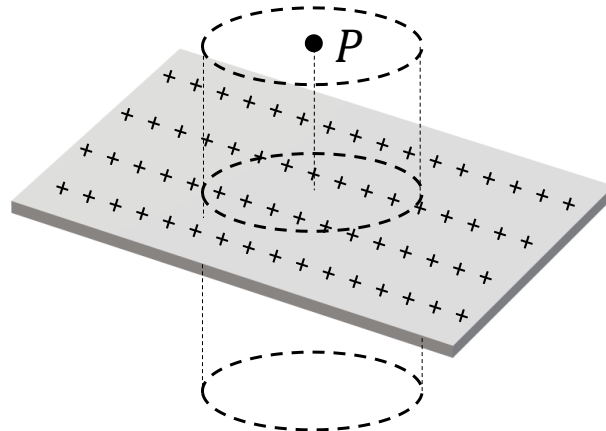
- d)** Se, em vez do ponto P , tomássemos qualquer outro ponto na reta horizontal que passa por P , a direção, o sentido e a intensidade do campo elétrico mudariam? Justifique.

Agora, vamos considerar, novamente, o plano infinito:



e) A partir da análise que você fez nos itens anteriores, o que se pode dizer sobre a direção e o sentido do campo elétrico no ponto P , qualquer que seja esse ponto?

Agora, considere uma superfície gaussiana cilíndrica que atravessa a placa, com eixo perpendicular a ela e com as bases equidistantes da placa, como mostra a figura a seguir.

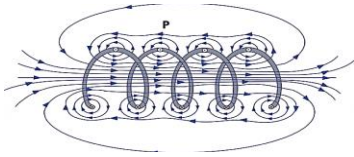


Digamos que esse cilindro tem raio medindo R e altura medindo $2H$ (H para cima e H para baixo da placa).

f) O que se pode dizer sobre a direção e o sentido do campo elétrico, relativamente à:

- base superior do cilindro?

- base inferior do cilindro?



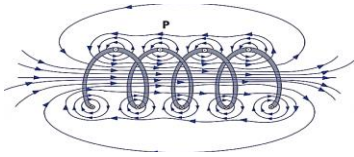
- superfície lateral do cilindro?

g) Se a densidade superficial de carga (ou seja, a razão entre a carga e a área) for σ , qual será a carga contida no interior do cilindro gaussiano? Dê sua resposta em função de σ e R .

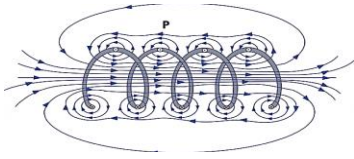
h) Aplique a lei de Gauss a esse cilindro e prove que o campo elétrico no ponto P tem intensidade

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} .$$

i) Imagine agora um capacitor com duas placas planas de área A , mesma densidade superficial σ , porém com polaridades opostas (positiva em cima e negativa embaixo). Considere que as placas estão a uma pequena distância d uma da outra, de tal modo que possam ser modeladas como placas infinitas. Determine o campo elétrico nas regiões interior e exterior ao capacitor.



j) Lembrando da definição de diferença de potencial que aprendemos na aula passada, determine a equação da capacitância em função de d , A e ϵ_0 . Lembre-se que capacitância é igual à carga acumulada Q no capacitor ($+Q$ na placa superior e $-Q$ na placa inferior) dividida pela diferença de potencial entre as placas.

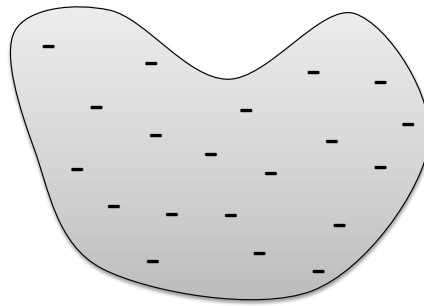


LEITURA COMPLEMENTAR PARA A AULA 3

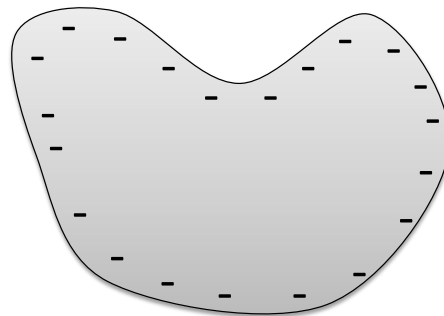
USANDO A LEI DE GAUSS PARA COMPREENDER A CHAMADA “GAIOLA DE FARADAY”

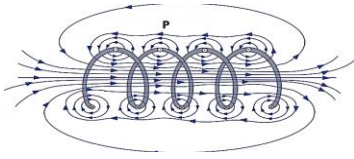
CONDUTORES CARREGADOS ELETRICAMENTE

Vamos começar imaginando um pedaço de material condutor maciço, por exemplo, o cobre, carregado com uma carga elétrica negativa. Essa eletrificação acontece quando atritamos borracha na superfície do condutor, o que faz com que elétrons passem da borracha para o cobre, deixando-o carregado negativamente. Pois bem, a primeira pergunta que surge é: como se distribuirá a carga elétrica negativa dentro do material condutor maciço? Seria ela distribuída uniformemente por todo o material?



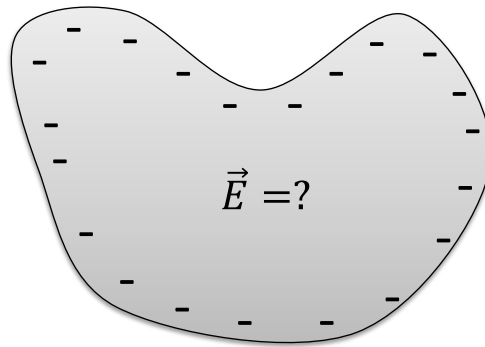
Bom, você deve se lembrar que os materiais condutores (metais), têm uma propriedade muito interessante: eles possuem elétrons livres! Essa propriedade faz com que seja muito fácil o deslocamento de cargas elétricas (elétrons) dentro da estrutura molecular do material. Dada essa característica, o que você acha que deve acontecer com as cargas elétricas adquiridas pelo objeto acima? Bom, tendo todos os elétrons que adentraram o condutor carga negativa, eles devem se repelir, certo? Podendo se locomover dentro do condutor, esses elétrons, por repulsão, se afastariam o máximo possível, localizando-se na superfície do material condutor, conforme ilustra a figura abaixo.





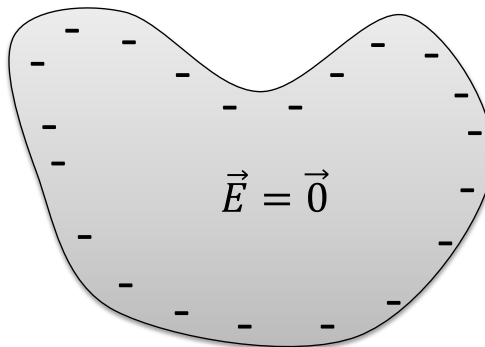
CAMPO ELÉTRICO DENTRO DE UM CONDUTOR MACIÇO

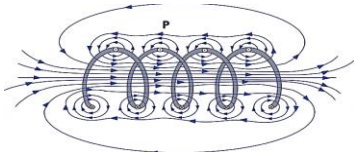
A próxima pergunta que faremos sobre a situação do condutor carregado é: existe campo elétrico dentro do condutor maciço? Bom, para responder, vamos iniciar lembrando que, passado algum tempo desde que ele foi carregado, não deve mais haver movimento de elétrons dentro do condutor, certo? Ou seja, os elétrons devem chegar a algum equilíbrio, caso contrário teríamos corrente elétrica indefinidamente percorrendo o condutor.



Pois bem, a característica de um condutor, como dissemos, é possuir elétrons livres em sua estrutura molecular. No entanto, o número de elétrons adquiridos pelo condutor quando o eletrificamos é muito pequeno comparado ao número total de elétrons existentes do material. Antes de se tornar negativamente carregado, já havia um número imenso de elétrons livres flutuando pela estrutura molecular desse metal, mas sua carga total permanecia nula porque o número de prótons se igualava ao número de elétrons.

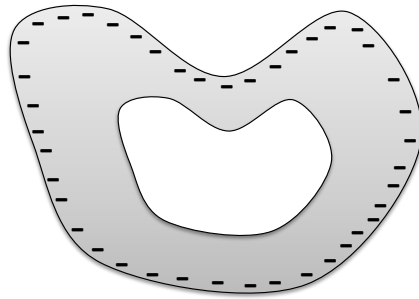
Com a eletrificação por atrito, temos excesso de elétrons, e é exatamente esse excesso que caminha para a superfície do material, chegando a uma situação de equilíbrio. Ocorre que, se não há mais movimento de carga no condutor, e ele está repleto de elétrons livres, não pode haver campo elétrico no interior do material condutor. Por que mesmo? Ora, como a força elétrica em uma carga é $\vec{F}_{el} = q\vec{E}$, se houvesse campo elétrico no interior desse metal, haveria elétrons se deslocando, e isso não acontece, certo? Desse modo, concluímos que $\vec{E} = \vec{0}$ em qualquer ponto do interior do nosso sólido condutor. Importante notar que essa conclusão só é válida para materiais **condutores**, e não vale para materiais isolantes.



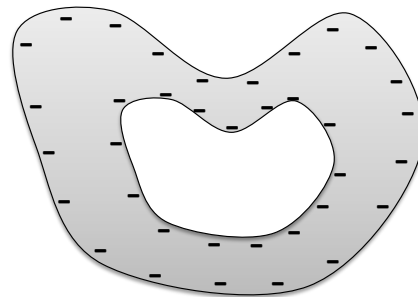


CAMPO ELÉTRICO DENTRO DE UM CONDUTOR OCO

Para entendermos o que é uma Gaiola de Faraday, vamos imaginar o mesmo processo de eletrificação por atrito de um material condutor, mas agora oco (com ar no seu interior). Observe as duas figuras abaixo e tente pensar sobre qual a configuração de carga que você acha mais razoável nesse caso. Como já sabemos que as cargas se repelem e caminham em direção à superfície do material condutor, parece razoável imaginar as duas situações.

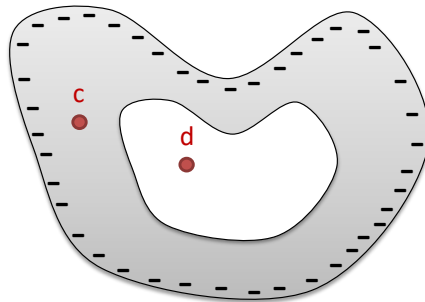


Situação A

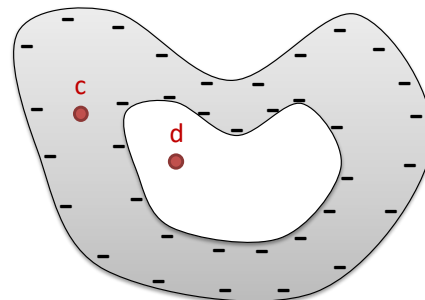


Situação B

Já compreendemos, por conta dos elétrons livres nos condutores e da configuração de equilíbrio final, que não pode haver campo elétrico no interior de um material condutor eletrizado, e por isso, seja na situação A ou B, o campo elétrico no ponto **c**, por exemplo, deve ser nulo. Mas, o que dizer do campo elétrico no ponto **d**?



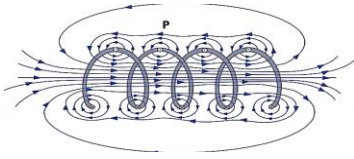
Situação A



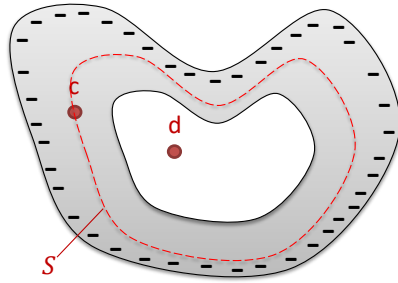
Situação B

Vamos usar a Lei de Gauss (1ª Lei de Maxwell ou Gauss-Maxwell) para concluir, primeiramente, qual das situações é consistente com a teoria, e qual o campo elétrico em **d**. Pois bem, sabemos que, para qualquer superfície fechada:

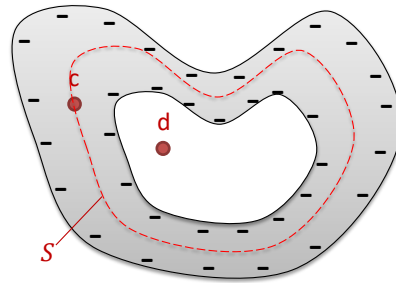
$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



Se podemos escolher qualquer superfície para aplicar a Lei de Gauss, parece razoável escolher a superfície fechada S representada a seguir.



Situação A



Situação B

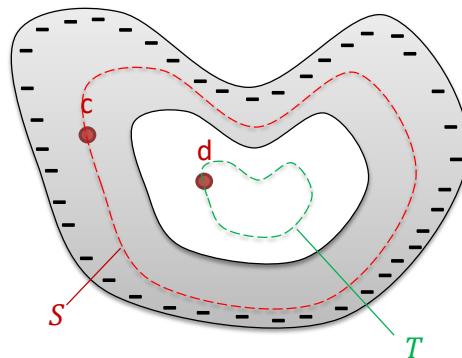
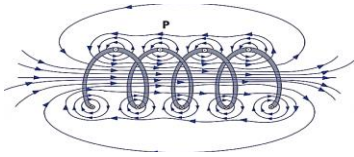
Como a superfície S passa por dentro da estrutura maciça do condutor, já sabemos que não pode haver campo elétrico em nenhum ponto que coincida com sua fronteira. Assim, se $\vec{E} = \vec{0}$ em toda a superfície S , então

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{\epsilon_0} = 0$$

E, portanto, não pode haver carga dentro da superfície S ($Q = 0$), o que exclui a situação B! Ou seja, toda a carga elétrica deve estar na superfície externa do material condutor, conforme figura abaixo. Vamos, agora, imaginar uma outra superfície fechada, T , que passa pelo ponto d , na parte oca do nosso objeto. Como não existe carga elétrica no interior da superfície T , então

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = 0$$

Há, basicamente, duas possibilidades para que o fluxo do campo elétrico seja nulo na superfície T , quais sejam: ou \vec{E} é nulo em qualquer ponto da superfície T , ou o fluxo que entra por um lado sai por outro. Se a segunda possibilidade estivesse correta, deveria haver campo elétrico em algum ponto da superfície S , mas já sabemos que nela $\vec{E} = \vec{0}$ em **toda a superfície**, o que nos faz concluir que $\vec{E} = \vec{0}$ também em qualquer ponto da superfície T . Como as superfícies S e T são escolhidas arbitrariamente, teremos que concluir que $\vec{E} = \vec{0}$ em qualquer ponto localizado no interior do objeto.



Acabamos de concluir que, dentro de qualquer objeto fechado de material condutor (ou seja, de metal), não **pode haver campo elétrico** em nenhum ponto localizado em seu interior. Esses dispositivos são chamados de Gaiolas de Faraday, e possuem usos científicos e tecnológicos. Por exemplo, um celular que esteja localizado dentro de uma Gaiola de Faraday não pode detectar campos elétricos que estejam presentes no exterior da gaiola, impedindo a recepção de sinais eletromagnéticos.

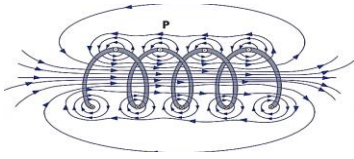


Ainda, como não há campo elétrico no interior de uma Gaiola de Faraday, e sabemos que

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = U_A - U_B = ddp$$

também não pode haver diferença de potencial (em Volts) entre quaisquer pontos em seu interior (e sem ddp, não há choque elétrico, certo?). Talvez agora você consiga convencer seu sobrinho a ser voluntário num desses shows malucos que usam bobinas de Tesla gigantes.





AULA 4

CAMPO MAGNÉTICO E FORÇA DE LORENTZ

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM DA AULA

Ao final dessa aula, os alunos serão capazes de:

- Compreender a natureza do campo magnético e da força magnética (cargas em movimento).
- Calcular a força de *Lorentz* usando a equação $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$.
- Compreender as forças aplicadas sobre uma espira percorrida por corrente em um campo magnético.
- Calcular a força resultante sobre fio retilíneo percorrido por corrente em um campo magnético.
- Rememorar o cálculo do fluxo do campo magnético através de superfícies fechadas: a 2ª equação de Maxwell (lei de Gauss para campos magnéticos).
- Compreender como os campos magnéticos são gerados: compreensão qualitativa e lei de Biot-Savart
- Interpretar o fenômeno do alinhamento dos campos magnéticos.

A FORÇA MAGNÉTICA

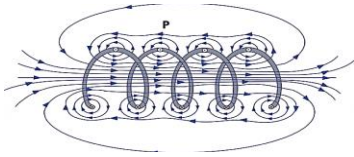
Vimos nas aulas passadas que o vetor campo elétrico pode ser entendido como o modelo matemático de uma perturbação no espaço gerada por uma carga elétrica. Se num dado ponto o vetor campo elétrico não é nulo, então haverá uma força elétrica aplicada a uma carga posicionada em tal ponto. Tal força é dada pelo produto entre o escalar carga elétrica q e o vetor campo elétrico \vec{E} :

$$\vec{F}_{elet} = q\vec{E}$$

Analogamente, se num dado ponto houver um **vetor campo magnético** \vec{B} não nulo e nesse ponto for colocado um corpo com alguma “característica especial”, então haverá uma força magnética \vec{F}_{mag} aplicada sobre esse corpo. Como vimos, a tal “característica especial” é ter carga elétrica e estar em movimento, de modo que a força magnética pode ser calculada por

$$\vec{F}_{mag} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

No sistema internacional de unidades (SI), se temos uma carga de 1 C , movendo-se com velocidade de 1 m/s perpendicularmente a um campo magnético e sujeita a uma força magnética de 1 N , então o campo magnético

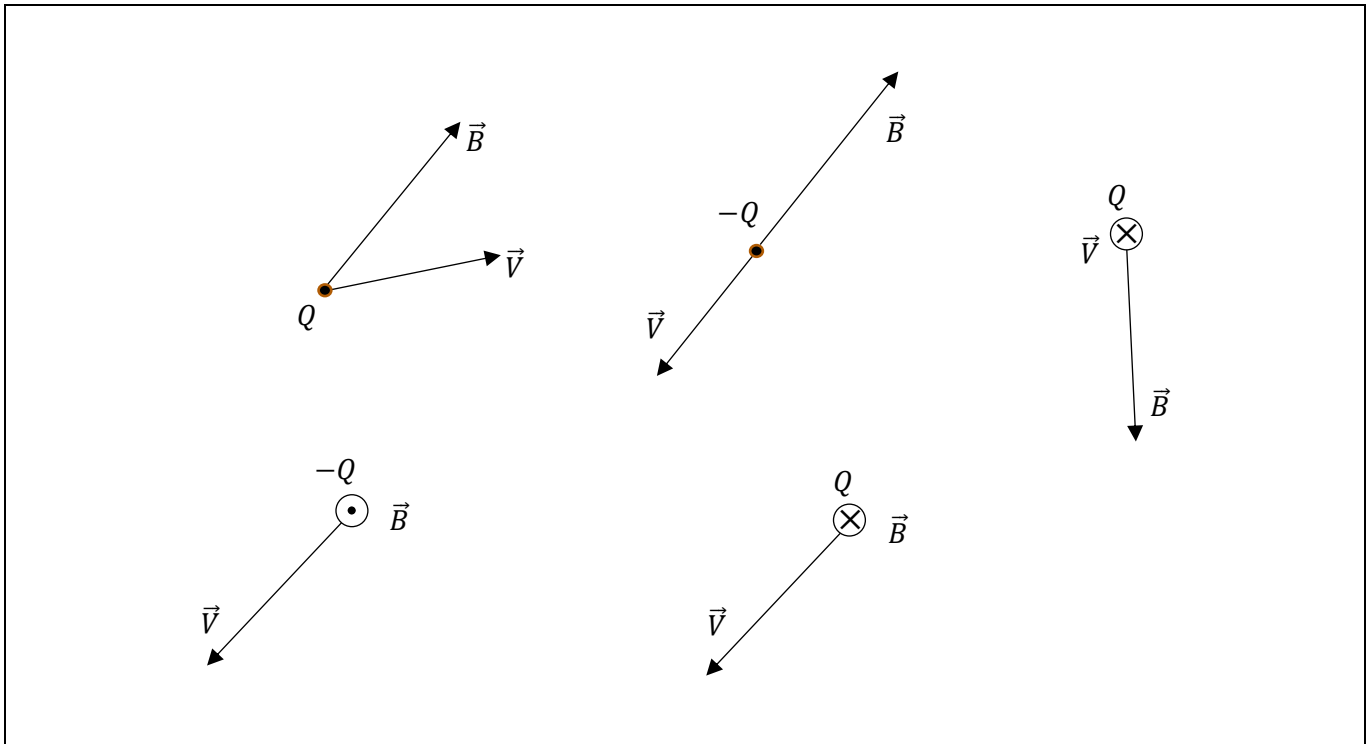


no ponto onde a carga se encontra é de $1 \frac{N}{m \cdot C} = 1 T$ (Tesla). $1 T$ é um campo muito intenso, de modo que em diversas ocasiões se utiliza outra unidade menor, o G (Gauss), sendo $1 G = 10^{-4} T$.

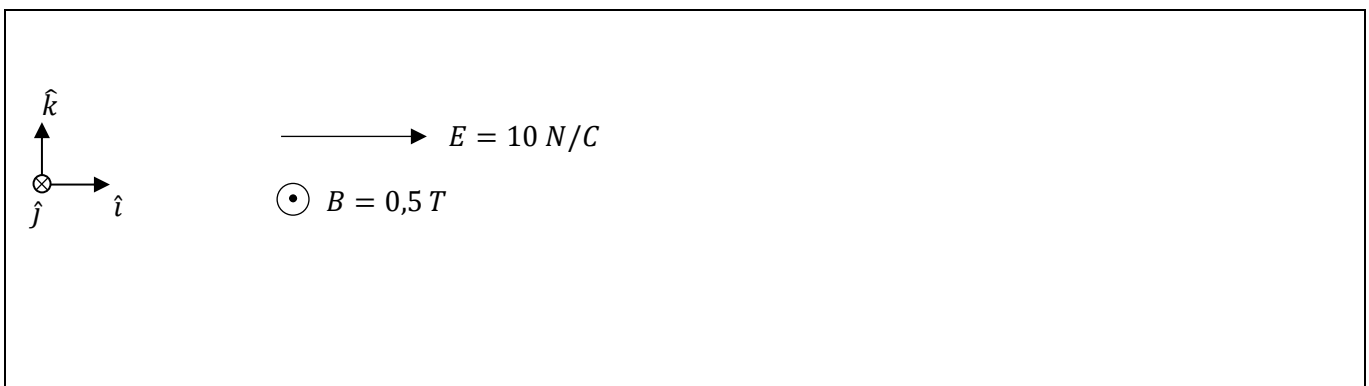
À soma da força elétrica com a força magnética damos o nome de força de *Lorentz*:

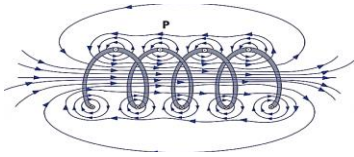
$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

1. Descreva a direção e sentido da força magnética atuante nas cargas puntiformes representadas abaixo, considerando $Q > 0$.



2. Calcule o vetor força resultante em uma carga de $-2 mC$ e velocidade $\vec{v} = (3,0,0)$ numa região do espaço onde existam os campos elétrico e magnético uniformes representados abaixo.





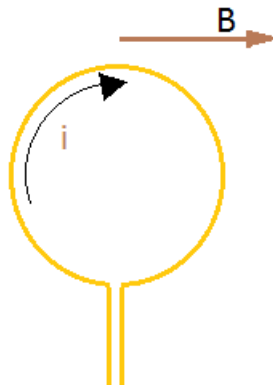
A força magnética aplicada a cargas elétricas em movimento pode ser útil para a construção de sensores como medidores de vazão por efeito Hall. Assista ao seguinte vídeo publicado no Youtube.

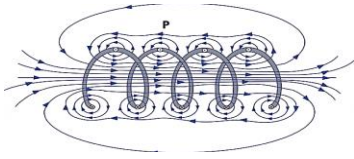
<https://www.youtube.com/watch?v=f949gpKdCl4>



3. Explique com suas palavras o funcionamento desse sensor.

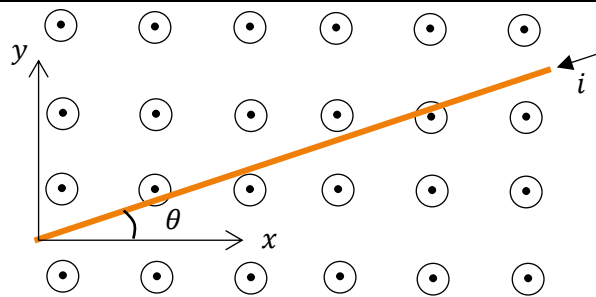
4. Se um fio condutor circular é colocado em um meio onde exista um campo magnético horizontal para a direita, uniforme e constante no tempo, o que deve acontecer com esse circuito quando nele é estabelecida uma corrente no sentido horário? Tente marcar a força magnética em alguns pontos do condutor, lembrando-se de que a corrente elétrica pode ser entendida como o movimento de cargas positivas.

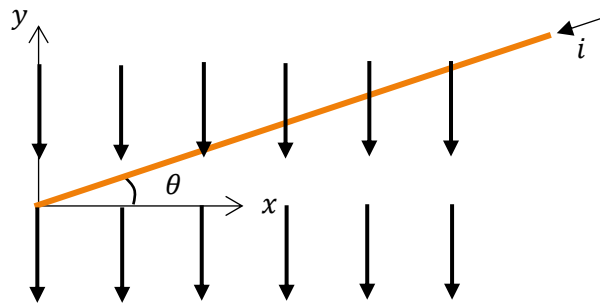
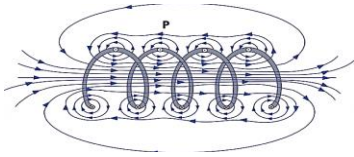




5. O princípio físico de que mecanismo utilizado em nosso dia a dia pode ser explicado com a situação acima?

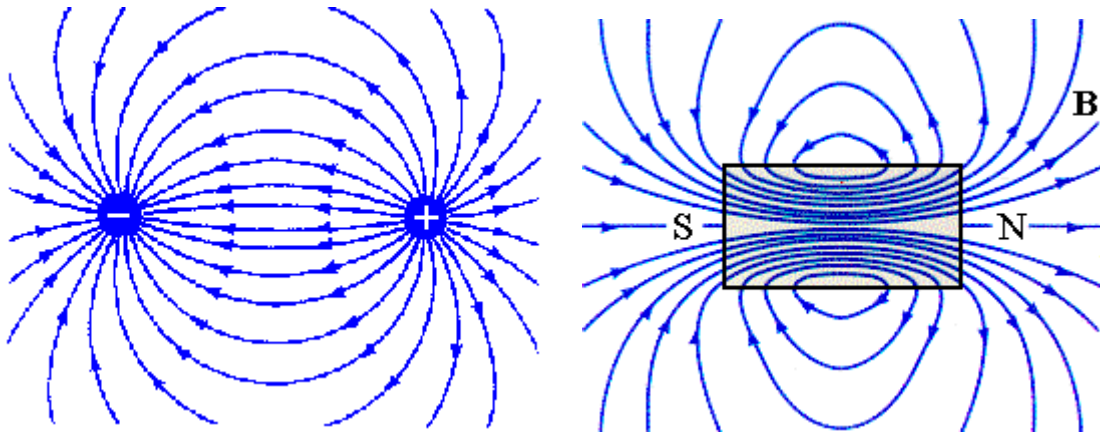
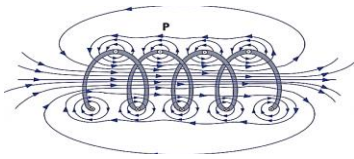
6. Considere um fio condutor retilíneo percorrido por uma corrente i imerso em um campo magnético uniforme e constante no tempo, como mostram as figuras a seguir. Considerando que a parte do fio imersa no campo tem comprimento L e que a intensidade do campo magnético é B , determine a força magnética (intensidade, direção e sentido) que age sobre o fio em cada uma das duas situações exibidas.





FLUXO MAGNÉTICO

Após analisar o fluxo elétrico, é natural que estudemos também o fluxo magnético através de uma superfície fechada imersa em um campo magnético. De acordo com o que seu professor explicou, as linhas de campo de um campo elétrico diferem das de um campo magnético, como mostra a figura a seguir.



7. Considerando a característica peculiar das linhas de um campo magnético \vec{B} , o que você diria sobre o fluxo magnético Φ_B através de **qualquer** superfície fechada imersa nesse campo?

Você deve ter concluído que:

$$\Phi_B = 0$$

A equação acima é conhecida como lei de Gauss para Campos Magnéticos e também é a 2ª equação de Maxwell.

Basicamente, ela atesta que **não existem monopólos magnéticos**, ou seja, não é possível separar os polos de um ímã.

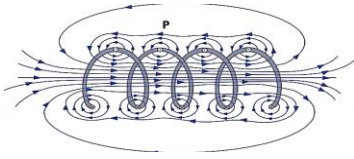
GERAÇÃO DE UM CAMPO MAGNÉTICO

Massas “sentem” campos gravitacionais e também geram campos gravitacionais; da mesma forma, cargas elétricas “sentem” campos elétricos e também geram campos elétricos. Dado que cargas elétricas em movimento “sentem” campos magnéticos, seria razoável esperarmos que cargas elétricas em movimento também gerassem campos magnéticos, e é exatamente isso que ocorre.

Apesar dos fenômenos elétricos e magnéticos já serem conhecidos pela humanidade há muitos séculos, apenas em 1819 a primeira conexão entre eles foi evidenciada: o cientista dinamarquês Hans Oersted percebeu que, ao aproximar uma agulha imantada de um condutor percorrido por uma corrente, ela se defletia de maneira a formar um ângulo reto com o condutor. Veja uma reprodução desse experimento em <https://www.youtube.com/watch?v=-w-1-4Xnjuw>.

SCAN ME

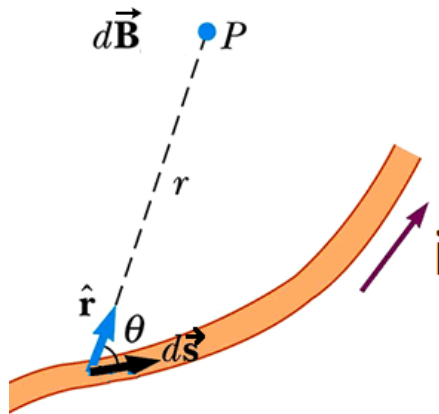




Em alguns experimentos semelhantes, o ímã pode não chegar a ficar totalmente perpendicular ao fio. Isso acontece porque, mesmo na ausência da corrente, existe um campo magnético devido à própria Terra. Quando a corrente flui, os campos magnéticos gerados por essa última e pela Terra se somam.

Após essa descoberta, em 1820, os cientistas franceses Jean-Baptiste Biot e Félix Savart chegaram empiricamente a uma relação quantitativa entre a corrente que percorria o condutor, seu formato e o campo magnético em um ponto qualquer perto do condutor. Essa relação ficou conhecida como “Lei” de Biot-Savart (consegue imaginar por que usamos as aspas? Lembre-se da discussão da aula passada sobre “Lei” de Coulomb ou Teorema de Coulomb).

A Lei de Biot-Savart dá o campo magnético $d\vec{B}$ em um ponto P a uma distância r de um elemento infinitesimal de fio de comprimento $d\vec{s}$, quando este é percorrido por uma corrente i . Veja a figura:



Note que, na figura, \hat{r} é o versor que tem origem no elemento de fio e que aponta para o ponto P . De acordo com a lei de Biot-Savart, temos:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{r^2} d\vec{s} \times \hat{r}$$

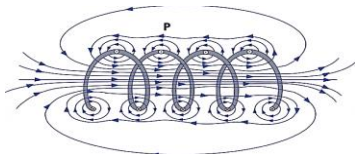
A constante μ_0 é conhecida como **permeabilidade magnética** no vácuo e, de certa forma, é análoga à constante ϵ_0 , a permissividade elétrica no vácuo.

Dado que sabemos calcular o campo produzido por um elemento de fio, temos que o campo total produzido pela corrente que percorre o fio no ponto P pode ser obtido por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int \frac{1}{r^2} d\vec{s} \times \hat{r}$$

Só de olhar para essa lei, você deve perceber que ela não é muito confortável para fazer contas. Porém, o nosso interesse nela será qualitativo: com alguns passos de raciocínio, chegaremos a um método prático para determinar a direção e o sentido (mas não a intensidade) do campo magnético produzido por um condutor percorrido por corrente.

8. Marque na figura da página anterior a direção e o sentido de $d\vec{B}$.

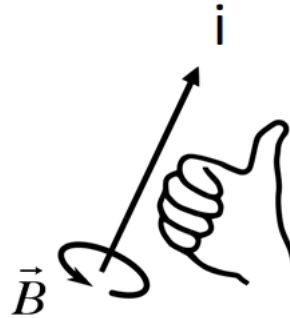
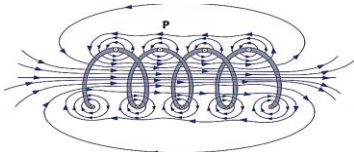


9. Repita o raciocínio do item anterior para outros elementos infinitesimais $d\vec{s}$ da figura. O que você observa?

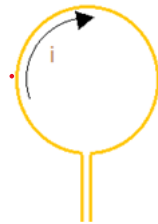
10. E se fizermos os passos anteriores para algum outro ponto que esteja acima do fio na figura? E se o ponto estiver abaixo?

11. A partir das observações feitas no item anterior, tente desenhar as linhas de campo magnético ao redor de um condutor retilíneo percorrido por uma corrente. Para facilitar seu desenho, considere que o fio esteja perpendicular à folha e que a corrente esteja “saindo” dela, em direção ao leitor.

As conclusões anteriores sugerem a criação de um método prático para determinar a direção e o sentido do campo magnético. Veja a figura a seguir, que ilustra a “regra da mão direita” (péssimo nome, já que não tem relação com o produto vetorial da força de *Lorentz*):



12. Determine a direção e o sentido do campo magnético que atua no plano da espira a seguir. Analise tanto pontos interiores, quanto exteriores à espira.



13. Dispondo de mais fio, como você poderia aumentar a intensidade do campo no interior da espira, mantendo a corrente inalterada?

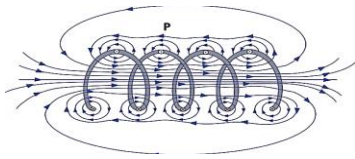
14. (DESAFIO – Para casa) Usando a lei de Biot-Savart, determine o campo magnético gerado por um condutor percorrido por uma corrente i nas seguintes situações:

- a) condutor retilíneo e longo / campo gerado a uma distância d do condutor
- b) bobina circular de N espiras / campo gerado no centro da bobina

15. Sabendo que o campo magnético gerado por um condutor retilíneo longo percorrido por uma corrente i , a uma distância r do condutor, tem intensidade

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} ,$$

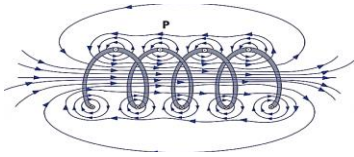
determine a força (intensidade, direção e sentido) que surge quando dois condutores retilíneos de comprimento L , ambos percorridos por uma corrente i , são dispostos paralelamente, a uma distância D um do outro ($D \ll L$).



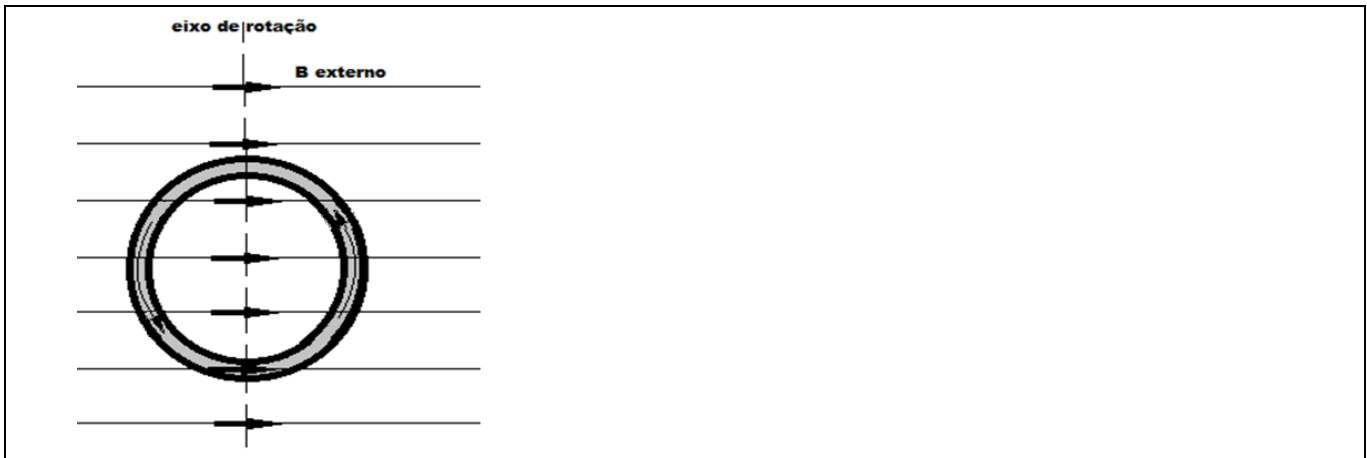
Considere tanto o caso em que as correntes fluem no mesmo sentido, quanto em sentidos opostos, e dê sua resposta em função de μ_0 , i , D e L .

O ALINHAMENTO DOS CAMPOS

16. Devido à sua própria natureza, a força magnética pode gerar torques em estruturas vinculadas a circuitos elétricos. Consequentemente, tais estruturas podem rotacionar, o que leva ao princípio do motor elétrico de corrente contínua. Em situações práticas, algumas vezes queremos prever o sentido de rotação (provocada pelo torque devido às forças magnéticas) de uma estrutura. No exemplo a seguir, com seus conhecimentos de força magnética, como você poderia prever o sentido de rotação do anel devido ao torque gerado pelas forças magnéticas nas cargas em movimento? A corrente elétrica tem sentido indicado pela seta (horário).

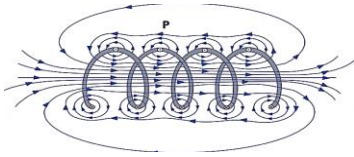


17. Invertendo-se o sentido da corrente, qual o novo sentido de rotação?



18. Agora, o anel está, inicialmente, num plano perpendicular ao da página, como representado abaixo. Nesse caso, qual é o ângulo entre a direção do campo externo e o campo no interior do anel, gerado pela corrente? Qual seria o sentido do torque?

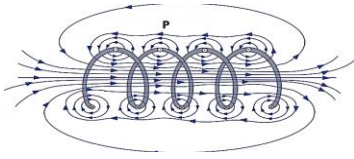




19. Você deve ter percebido que, nesse último caso, não existe um torque resultante e os campos estão alinhados, ou seja, o campo do interior do anel e o externo têm a mesma direção e sentido! Essa posição é chamada de posição de equilíbrio estável, atingida para qualquer situação inicial (a menos que haja outros pontos de equilíbrio). Descreva, então, uma maneira, baseada na direção e sentido dos campos, de prever o sentido de rotação de uma estrutura como o anel para uma dada posição inicial diferente da do equilíbrio descrito.

20. Se o anel fosse rotacionado 180 graus a partir da posição da última figura, teríamos um novo ponto de equilíbrio? Se sim, então há 2 pontos de equilíbrio! Qual seria a diferença entre eles?

21. Para que um motor elétrico funcione, temos que evitar que o anel ou qualquer outra estrutura atinja e permaneça no ponto de equilíbrio estável. Pense a respeito. Isso será assunto do nosso primeiro laboratório de eletromagnetismo.



AULA 5

INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA E LEI DE FARADAY

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM DA AULA

Ao final da aula, os alunos serão capazes de:

- Relembrar as características da força magnética e do campo magnético gerado por uma corrente.
- Relembrar o conceito de DDP.
- Relembrar o conceito de fluxo.
- Apresentar o fenômeno da indução eletromagnética e descrevê-lo quantitativamente.

INTRODUÇÃO

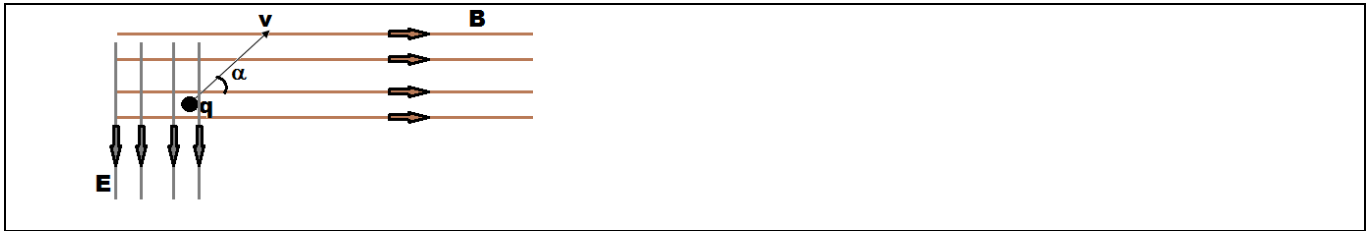
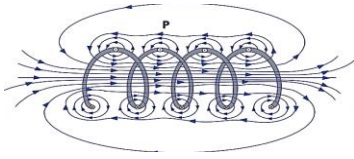
O objetivo da aula de hoje é descrevermos matematicamente o fenômeno de transformação de energia mecânica em elétrica, cujos conceitos a humanidade levou muitos anos para dominar e modelar. Isso apenas aconteceu aproximadamente 2 séculos após Newton formular os princípios da dinâmica. As descobertas feitas em meados do século XIX mudaram nossas vidas de maneira significativa: ainda hoje, somos cada vez mais dependentes da energia na modalidade elétrica e, como principal forma de obtenção dessa energia, nos valem dos movimentos de corpos existentes na natureza ou movimentos produzidos por meio da queima de combustíveis. Esses movimentos são então transformados em energia na forma elétrica através do fenômeno eletromagnético que estudaremos na aula de hoje: a **indução eletromagnética**.

Antes de entrarmos nos princípios e modelos que estão envolvidos nessa transformação de energia, você precisará relembrar alguns conceitos.

CONCEITOS PRÉVIOS

FORÇA ELETROMAGNÉTICA

1. Vimos que cargas elétricas trocam forças eletromagnéticas quando em movimento. Para relembrarmos e “aquecermos”, marque as forças eletromagnéticas e dê a expressão de suas intensidades (em termos de q , E , B , α e v) na carga mostrada abaixo supondo a existência de um campo elétrico \vec{E} e um magnético \vec{B} , ambos uniformes e constantes, como indicado na figura.



TRABALHO DA FORÇA ELÉTRICA POR UNIDADE DE CARGA DESLOCADA

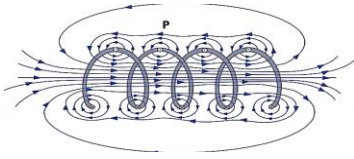
Dentro de um condutor elétrico as cargas elétricas se movem devido à existência de uma força, a qual existe porque dentro do condutor há um campo elétrico. Vimos nas primeiras aulas que, quando integramos essa força ao longo do condutor, temos como resultado seu trabalho, que está relacionado à variação de energia nesse processo. Como o vetor campo elétrico é a força elétrica dividida pela carga elétrica, então a integral do campo elétrico ao longo do condutor nos dá o trabalho por unidade de carga, ou seja, a variação de energia por unidade de carga, ou ainda, o que chamamos de **ddp**.

2. Como podemos relacionar a **ddp** nos terminais de um condutor com o campo elétrico presente nesse condutor? Considere que a **ddp** tenha intensidade U , que o campo elétrico ao longo do condutor seja uniforme de intensidade E e que o condutor tenha comprimento d .

FLUXO MAGNÉTICO

Nas aulas passadas, conversamos sobre fluxo magnético, um conceito muito importante para nosso curso.

3. Escreva no espaço abaixo a definição de fluxo magnético através de uma superfície de área A .

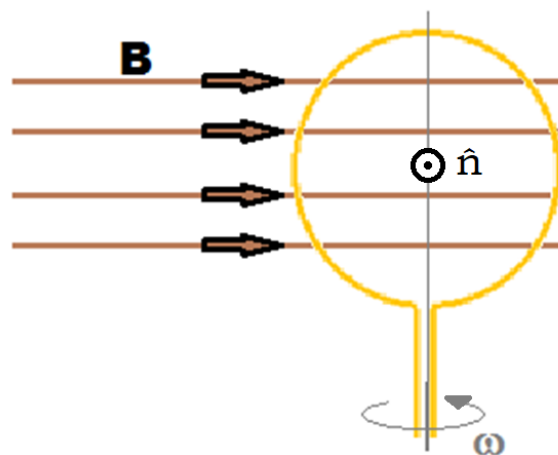


4. Para o caso de uma bobina chata, formada por N espiras, como ficaria a expressão para o fluxo magnético em seu interior?

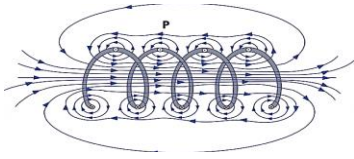
5. Observando a expressão que você escreveu no item anterior, de que formas podemos variar o fluxo magnético através de uma superfície qualquer?

A VARIAÇÃO DO FLUXO MAGNÉTICO

Sabemos que se o campo, a área ou a orientação da superfície variam, o fluxo também irá variar. Vamos imaginar que uma bobina com N voltas e área A esteja posicionada numa região onde há um campo magnético uniforme e constante, como representado abaixo. Considere que a bobina esteja girando, devido à atuação de um agente externo, com velocidade angular constante ω , de modo que, no instante representado na figura ($t = 0$), a metade à esquerda da bobina esteja se aproximando do leitor e, a metade à direita, se afastando.



6. Para esse caso, considere que o verso normal à superfície seja dado pela figura no instante descrito anteriormente e obtenha uma expressão analítica para o fluxo magnético através da bobina em função do tempo. Tente construir o gráfico da variação temporal do fluxo magnético na espira, ou seja, $\frac{d\Phi}{dt}$.

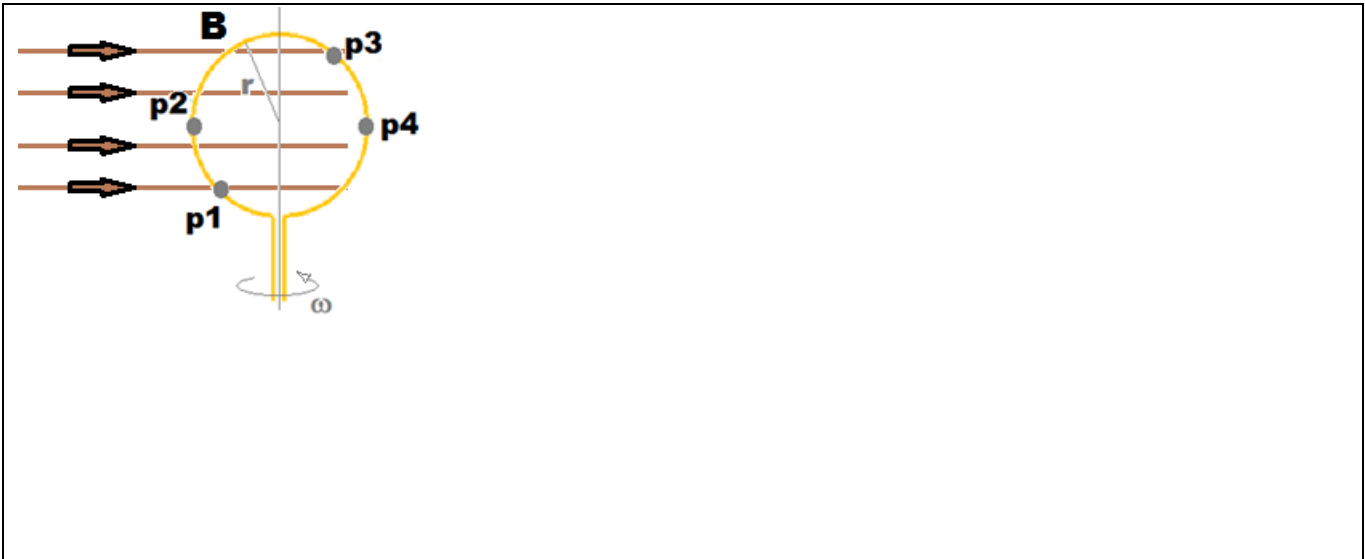
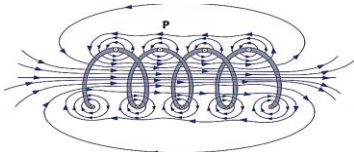


A INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA

FORÇAS E FLUXOS

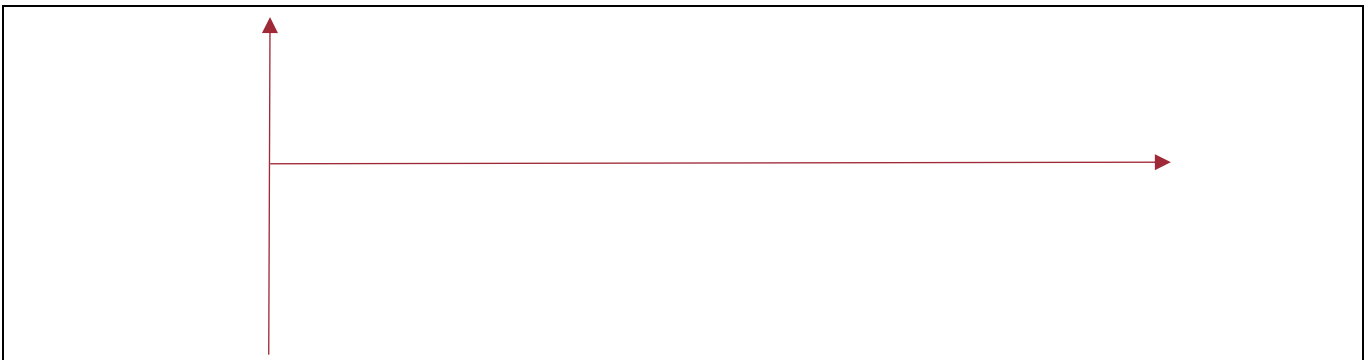
Na situação estudada no item anterior, um agente externo foi responsável pela rotação da espira (por exemplo, uma manivela) e outro pelo campo magnético (por exemplo, um ímã permanente). Vamos tentar analisar algumas forças eletromagnéticas nas cargas do condutor nos pontos mostrados abaixo, devido à rotação, num instante t qualquer.

7. Marque as forças sobre as cargas nos pontos destacados (imagine que as cargas livres no fio são positivas).

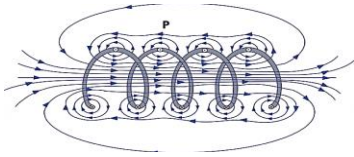


Você deve ter percebido que as forças nas cargas elétricas do condutor atuam no sentido de movê-las ao longo do condutor. Essa força varia de intensidade uma vez que o vetor velocidade (devido à rotação da espira) muda de direção.

8. Tente traçar o gráfico da força magnética atuando ao longo do tempo em cargas presentes no ponto **p2** da espira indicado na figura quando esta gira com velocidade angular ω . Considere que a força é positiva quando atua na direção vertical para cima (em relação à folha) e negativa no sentido contrário.



9. Comparando os gráficos, como as forças de natureza eletromagnética se relacionam qualitativamente com a variação do fluxo no interior da espira?



INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA

Essa relação foi exatamente o que o cientista experimental Michael Faraday percebeu em seu laboratório em 1840. Faraday percebeu que forças de natureza eletrostática em um condutor surgiam quando um fluxo magnético variava em seu interior, fenômeno chamado de indução eletromagnética. A partir de então, cientistas se debruçaram sobre essa descoberta e em 1845 o alemão Franz Ernst Neumann formulou a lei de indução matematicamente. A correlação direta entre variação de fluxo e a força nas cargas pode ser escrita em termos matemáticos correlacionando tal variação com o trabalho das forças num caminho fechado que delimita a superfície usada para cálculo do fluxo. Seu professor acabou de mostrar essa expressão matemática, e chamamos essa quantidade de trabalho por unidade de carga de **força eletromotriz**. E como esse trabalho por unidade de carga equivale à integração de um campo elétrico ao longo do caminho, a expressão obtida foi

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} \propto \frac{d\Phi_B}{dt}$$

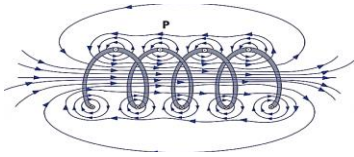
Para transformar a proporcionalidade em uma igualdade, o físico russo Heinrich Lenz estudou os sinais dessa expressão e fez uma contribuição, chegando à conclusão de que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

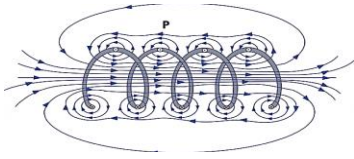
Note que essa equação traz duas integrais: uma integral de linha e uma integral de superfície. Pare para refletir e responda: qual é a relação entre o caminho da integral de linha e a área da integral de superfície? Após essa reflexão, seu professor conduzirá uma discussão sobre orientação de superfícies, a qual será fundamental para a compreensão das leis de Maxwell. Somente após se certificar de que entendeu o que foi discutido, continue fazendo os itens a seguir.

10. O que Lenz percebeu foi que, quando o fluxo aumenta, a força eletromotriz originada tem o sentido de criar uma corrente que gera um campo de modo a _____ o fluxo. Quando o fluxo diminui, surge uma força eletromotriz no sentido de gerar uma corrente que gere um campo de modo a _____ o fluxo.

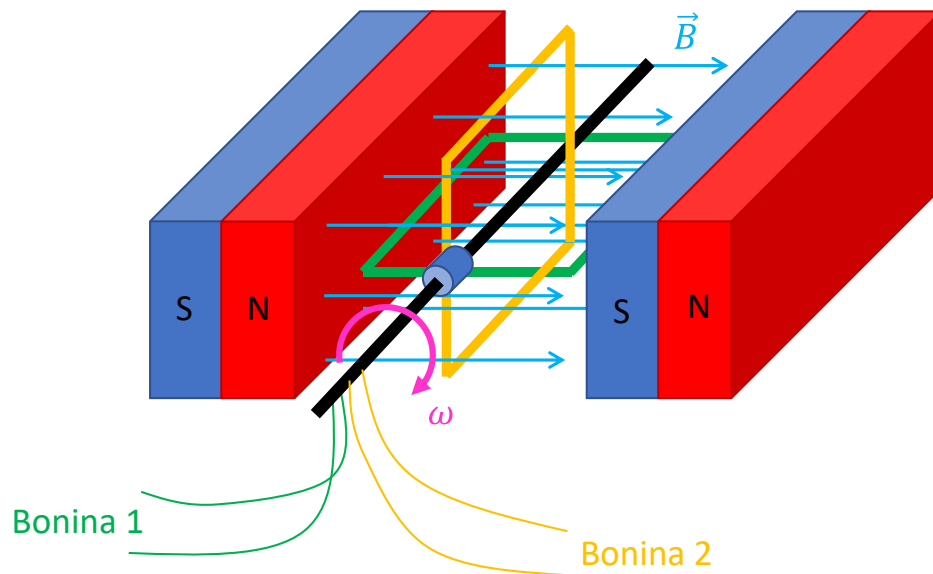
11. Tente mostrar o “sentido” (por que as aspas?) da força eletromotriz nos condutores circulares (não são seções transversais, e sim espiras fechadas) abaixo em cada uma das situações.



12. Sabemos que a integração do campo elétrico ao longo de um caminho é igual à diferença de potencial entre as extremidades desse caminho. Dessa forma, se abríssemos o condutor circular em um certo ponto, como seria a relação entre a diferença de potencial nos terminais do condutor e a variação do fluxo magnético em seu interior?



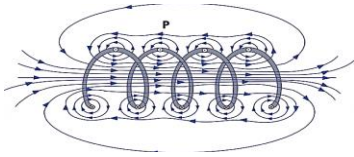
13 (Exercício). Considere um **gerador bifásico** formado por duas bobinas idênticas, porém dispostas em planos perpendiculares entre si e eletricamente isoladas uma da outra, compartilhando o mesmo eixo de rotação. Cada bobina tem N voltas e delimita uma área A . Esse arranjo, que é forçado a girar com uma velocidade angular ω (rad/s), conforme indicado na figura, fica localizado entre dois ímãs permanentes muito grandes, capazes de produzir um campo magnético praticamente uniforme de intensidade B .



Considere que o instante representado na figura é $t = 0$. Vamos denominar de bobina 1 a que está paralela (em verde) às linhas do campo magnético nesse instante, e de bobina 2 a que lhes é perpendicular (em amarelo).

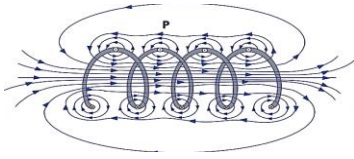
a) Deduza as leis $e_1(t)$ e $e_2(t)$ das forças eletromotrizes (FEM) induzidas, respectivamente, nas bobinas 1 e 2.

*Observação: nesse item, o objetivo é mostrar a aplicação **cuidadosa** das leis físicas relevantes, e não transcrever uma fórmula memorizada. Lembre-se de que a lei de Faraday (3ª lei de Maxwell) sempre envolve uma superfície e um contorno, os quais exigem a definição de ângulos, caminhos de integração e versores normais; se esses elementos não estiverem claramente descritos na resolução, ela estará incompleta. Note, também, que a posição de cada bobina no instante $t = 0$ foi estabelecida no enunciado.*



Engenharia
Eletromagnetismo e ondas

Insper

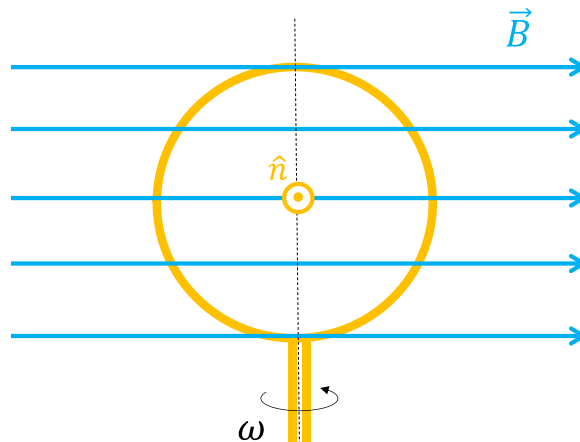


LEITURA COMPLEMENTAR PARA A AULA 5

APROFUNDANDO O CONCEITO DE “FORÇA ELETROMOTRIZ” E CAMPO INDUZIDO

RETOMANDO A ESPIRA DA AULA 5

Vamos retomar a espira que estudamos na aula 5, mas agora considerando que ela tem apenas 1 volta. Como na aula, ela está girando com velocidade angular ω , imersa em um campo magnético \vec{B} , conforme a figura abaixo.



Qualquer material condutor (em sua maioria os metais) possuem elétrons livres, que podem se deslocar livremente na estrutura cristalina do material. Como você já sabe, tratamos a “corrente convencional” como a corrente fictícia de cargas positivas em um condutor e, por isso, vamos considerar, apenas para facilitar nossas deduções, que as cargas livres no material condutor da espira sejam também positivas.

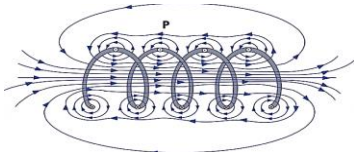
Pois bem, cargas positivas livres em movimento e imersas em um campo magnético sofrerão força magnética. Precisamos lembrar que a força de Lorentz é dada por:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

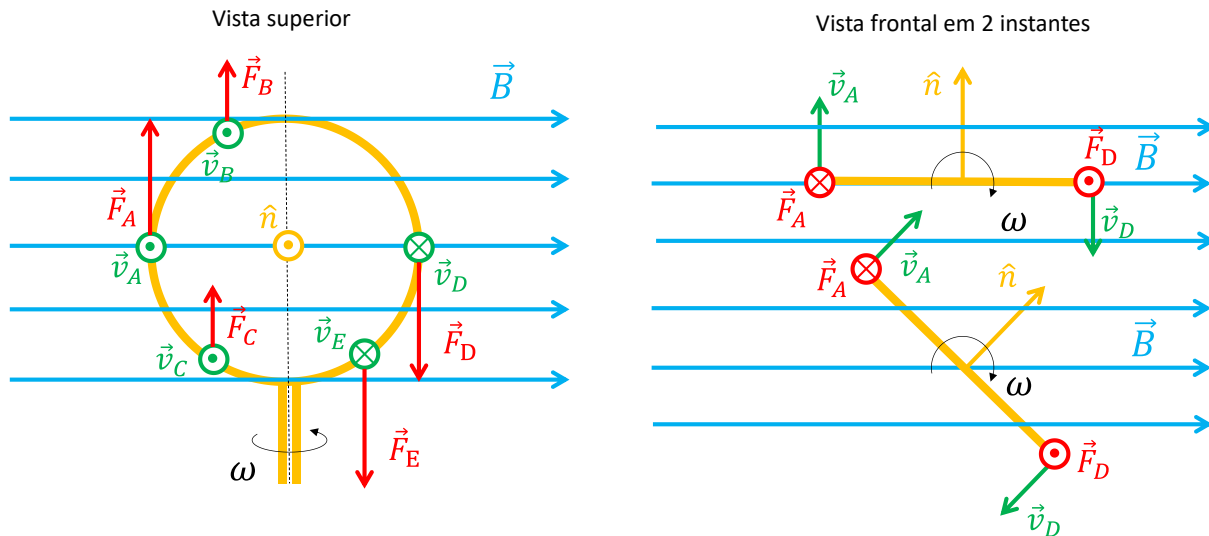
No caso que estamos analisando, não há campo elétrico na região onde as cargas se encontram. Talvez você pensasse que as cargas livres presentes no material condutor poderiam produzir campo elétrico na região da espira. Contudo, lembre-se que o material condutor, apesar de ter cargas livres, é eletricamente neutro, o que significa que a soma de cargas positivas e negativas em sua estrutura molecular é nula.

Sendo assim, a força de Lorentz se reduz a:

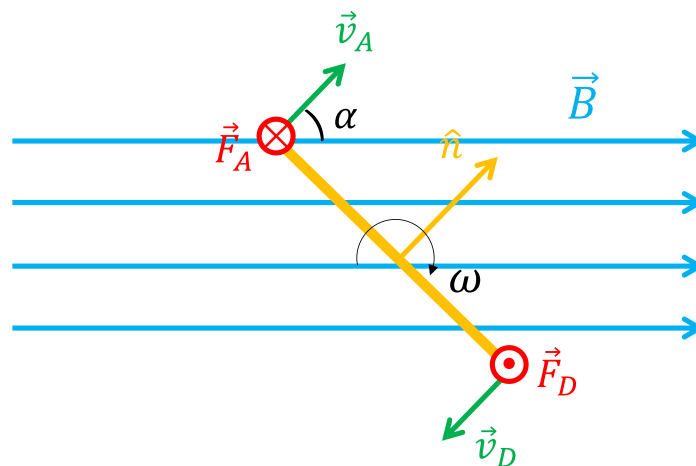
$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$



A figura a seguir mostra, em duas vistas (superior e frontal), a velocidade das cargas livres do fio condutor que constitui a espira em alguns pontos. Observe que o produto vetorial $\vec{v} \times \vec{B}$, multiplicado por cada carga, resulta nas forças magnéticas representadas nos pontos A, B, C, D e E .



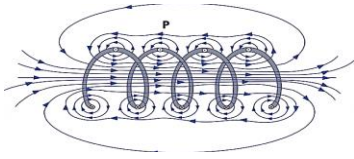
Note que as forças em cada ponto são diferentes porque as velocidades em cada ponto também são diferentes. Vamos iniciar nossa análise pelo ponto A . A figura a seguir ilustra uma determinada posição da espira na qual o ângulo entre \vec{v}_A e \vec{B} é α , um ângulo variável no tempo, cuja expressão é $\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \omega t$, desde que consideremos que a posição inicial da espira é aquela em que o plano da espira é paralelo a \vec{B} .



Para o ponto A , podemos escrever:

$$\vec{F}_A = q(\vec{v}_A \times \vec{B})$$

Sendo o módulo dessa força igual a:



$$F_A = qv_A B \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right)$$

Usando a identidade trigonométrica:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

Chegamos a:

$$F_A = qv_A B \cos(\omega t)$$

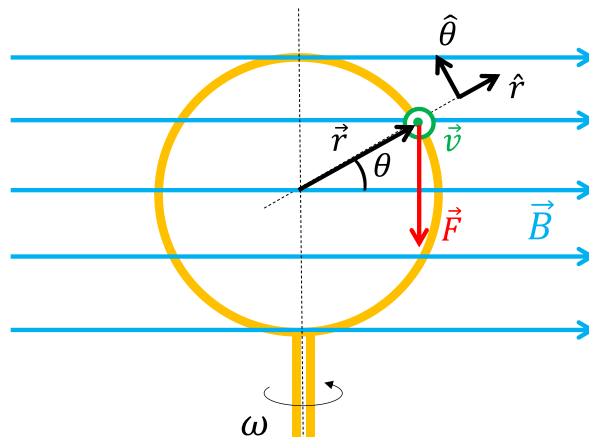
Tomando a vista superior, podemos usar o versor \hat{j} vertical e para cima, o que nos permite escrever:

$$\vec{F}_A = qv_A B \cos(\omega t) \hat{j}$$

Mas, se quisermos encontrar uma equação que descreve a força em qualquer ponto da espira, podemos adotar um sistema de coordenadas solidário a ela (ou seja, que gira juntamente com a espira). Adotando um sistema de coordenadas polares, conforme ilustra a figura a seguir, podemos deduzir que a velocidade de cada ponto é:

$$v = \omega r \cos(\theta)$$

Sendo $r \cos(\theta)$ a distância de cada ponto até o eixo de giro da espira.

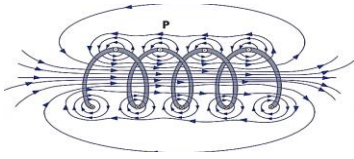


Assim, podemos generalizar a força em qualquer ponto da espira usando a lei:

$$\vec{F} = -q \omega r \cos(\theta) B \cos(\omega t) \hat{j}$$

Note que, quando $\theta = \pi$, então $\vec{F} = -q \omega r \cos(\pi) B \cos(\omega t) \hat{j} = q \omega r B \cos(\omega t) \hat{j}$, exatamente a força \vec{F}_A . Observe outros pontos e tente verificar por você mesmo(a) que a equação acima descreve a força em qualquer ponto da espira. Estamos considerando que a carga de cada ponto é igual a q , o que é razoável, já que a carga elétrica livre em um fio é uniformemente distribuída.

Você deve ter percebido que as forças que surgem ao longo do fio da espira tendem a **movimentar as cargas** positivas no sentido anti-horário. Como essas forças são aplicadas em todas as cargas livres ao longo no caminho formado pela espira (seu contorno), seria razoável que calculássemos o **trabalho** dessas forças ao longo do contorno da espira. Assim, podemos escrever:



$$W = \int_{\text{contorno}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Adotando o sistema polar solidário à espira, podemos escrever:

$$W = \int_{\text{contorno}} -q \omega r \cos(\theta) B \cos(\omega t) \hat{j} \cdot (r d\theta \hat{\theta})$$

Sabendo que $\hat{\theta} = -\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j}$ e, substituindo na equação acima, temos:

$$W = \int_{\text{contorno}} -q \omega r \cos(\theta) B \cos(\omega t) \hat{j} \cdot (-r d\theta \sin(\theta)\hat{i} + r d\theta \cos(\theta)\hat{j})$$

O que resulta em:

$$W = \int_0^{2\pi} -q B \omega r^2 \cos(\omega t) \cos^2(\theta) d\theta$$

Como o termo $q B \omega r^2 \cos(\omega t)$ não varia ao longo do contorno para um certo instante t , podemos colocá-lo em evidência, chegando a:

$$W = -q B \omega r^2 \cos(\omega t) \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta$$

O resultado da integral é conhecido:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \theta + \frac{\sin(2\theta)}{4} = \pi$$

O que resulta em:

$$W = -q B \omega \pi r^2 \cos(\omega t)$$

O termo que acabamos de encontrar é o **resultado do trabalho da força magnética ao longo de todo o contorno da espira**, medido em *joules*. Quando dividimos a expressão acima por q , que é a carga elétrica em cada ponto, encontramos o potencial elétrico relacionado a esse trabalho (energia disponível por carga), medido em volts. Essa energia disponível por carga ao longo do contorno da espira é o que denominamos **força eletromotriz (ou F.E.M.)**.

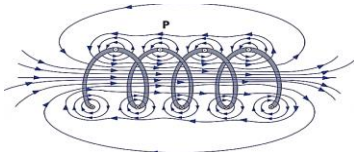
Note que o nome “força eletromotriz” não é muito feliz, pois trata-se, em verdade, de potencial elétrico, **medido em volts**. Assim, podemos escrever:

$$F.E.M. = -B \omega \pi r^2 \cos(\omega t)$$

Lembrando que πr^2 é a área da espira, a qual denominaremos A , podemos escrever:

$$F.E.M. = -B A \omega \cos(\omega t)$$

Por fim, retomando a lei de Faraday, descrita abaixo:



$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Já vimos na aula 5 que:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA = BA \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = BA \sin(\omega t)$$

E, assim,

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = BA\omega \cos(\omega t)$$

O que significa que:

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = F.E.M. = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r}$$

Ou seja, demonstramos que a força eletromotriz é igual a $\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r}$, que nada mais é do que o trabalho da força magnética por coulomb de carga. Como a força magnética que realizou esse trabalho, a partir da qual iniciamos essa leitura, é dada por $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$, ao dividirmos a força pela carga transportada, chegamos a:

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$$

Como já concluímos que:

$$\frac{W}{q} = \frac{\int_{\text{contorno}} \vec{F} \cdot d\vec{r}}{q} = F.E.M.$$

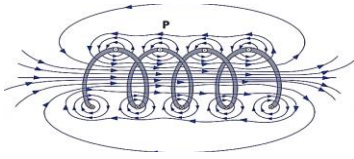
Poderíamos, portanto, reescrever a lei de Faraday como sendo:

$$\oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Ou seja, o campo elétrico denominado “induzido” nada mais é do que a força magnética disponível para cada coulomb de carga, ou seja:

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}$$

Esse campo elétrico é diferente do campo eletrostático, embora tenha a mesma unidade e o mesmo efeito sobre cargas elétricas: produzir força para movimentá-las!



AULA 6

CONVERSÃO ELETROMECÂNICA DE ENERGIA

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM DA AULA

Ao final da aula, os alunos serão capazes de:

- Relembrar o fenômeno da indução eletromagnética e descrevê-lo quantitativamente.
- Compreender o conceito da conversão eletromecânica de energia.

RELEMBRANDO A LEI DE FARADAY

Vimos na aula passada que a lei de Faraday, também conhecida por 3ª lei de Maxwell, pode ser descrita matematicamente por:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Na leitura complementar da aula 5, discutimos a natureza do campo elétrico \vec{E} expresso na 3ª lei, que às vezes é representado por " \vec{E}_i " e denominado campo induzido. Em verdade, poderíamos reescrever a lei de Faraday da seguinte forma:

$$\frac{\oint \vec{F}_{mag} \cdot d\vec{r}}{q} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

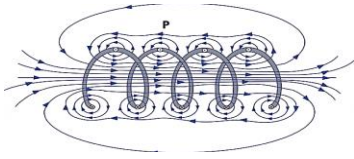
Perceba que, agora, estamos falando do trabalho executado pela força magnética, por coulomb de carga, ao longo da trajetória em que é definida a integral de linha. Como a força magnética, que é uma das componentes da força de Lorentz, é $\vec{F}_{mag} = q(\vec{v} \times \vec{B})$, podemos reescrever a lei de Faraday como:

$$\oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Novamente, note que essa equação traz duas integrais: uma integral de linha e uma integral de superfície. Pare novamente para refletir e responda: qual é a relação entre o caminho da integral de linha e a área da integral de superfície?

CONVERSÃO DE ENERGIA

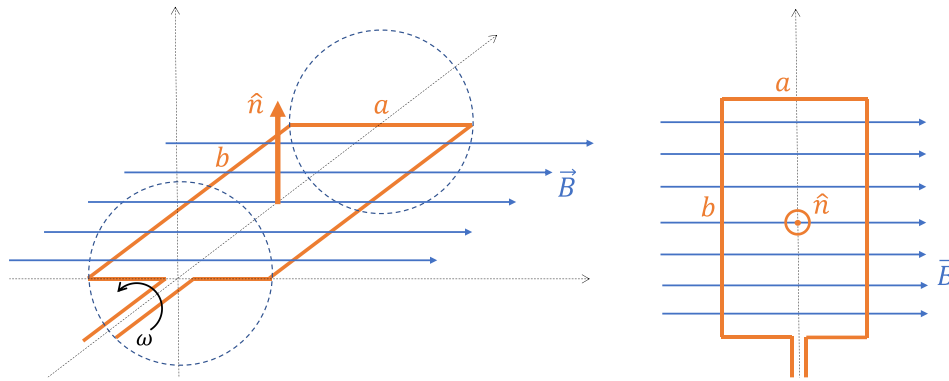
Até agora, compreendemos que fluxo magnético variando no tempo, em uma dada superfície, causa diferença de potencial no caminho fechado que delimita essa mesma superfície. Quando fazemos um enrolamento de fio



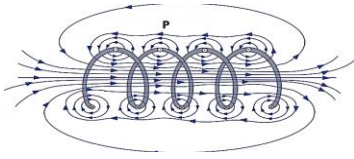
girar em torno de um de seus eixos de simetria, imerso em uma região onde há campo magnético, temos um **gerador elétrico**. Gerar tensão não garante que tenhamos energia elétrica (lembre-se que ddp é energia potencial disponível por carga, mas se a carga não se movimenta, não há trabalho), pois, para isso, precisamos de corrente elétrica também.

Vamos retomar o exemplo da aula passada, mas agora com uma bobina rotativa chata e retangular de N voltas, que está girando com velocidade angular ω (no sentido indicado na figura), imersa em um campo magnético \vec{B} uniforme e constante no tempo, gerado por ímãs permanentes. Considere que a bobina retangular tem lados medindo a e b , e que as suas extremidades são conectadas a contadores que mantêm o contato elétrico enquanto a bobina gira.

São mostradas a seguir uma perspectiva e a vista superior da bobina, com o versor normal à superfície plana, delimitada pela bobina, adotado no sentido indicado.

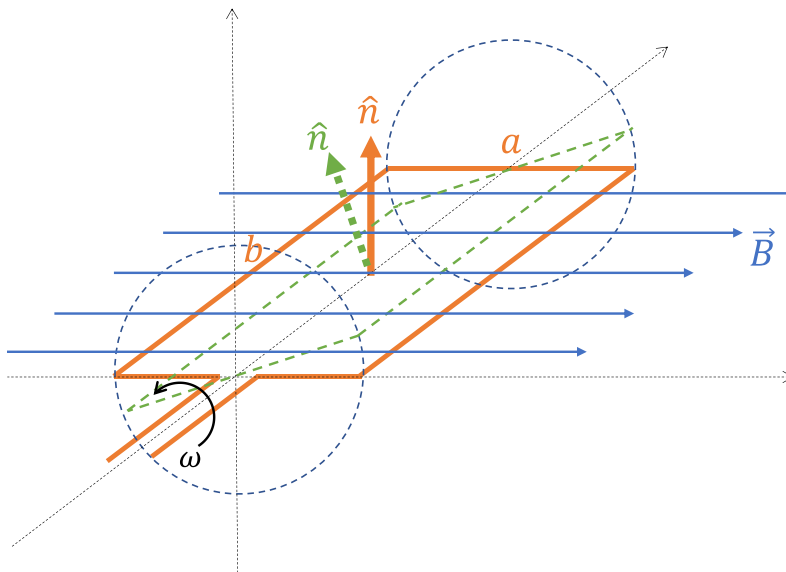


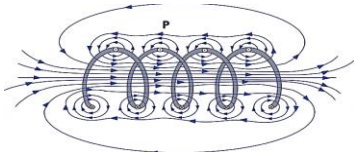
1. Escreva a expressão do fluxo magnético Φ_B na espira em função de B , das dimensões a e b , do número de espiras N e da velocidade angular ω . Admita que, no instante retratado na figura, $t = 0$, o versor normal faça um ângulo de 90° com o campo \vec{B} .



2. Suponha que uma lâmpada de resistência R constante seja ligada aos contatores da bobina. Qual a tensão e a corrente na lâmpada? Elas são constantes ou variáveis no tempo? Nesse item, vamos desconsiderar o campo magnético gerado pela corrente que circula na bobina (você vai entender logo mais no curso que isso significa desprezar a indutância da bobina).

3. Indique, na figura abaixo, o sentido da corrente induzida quando o plano da bobina coincide com o plano que contém as linhas do campo \vec{B} . Perceba que ela não está parada, e por isso adicionamos uma perspectiva da bobina em um instante subsequente (vetor \hat{n} tracejado). Tente compreender se o fluxo magnético irá aumentar ou diminuir à medida que a bobina gira a partir da condição inicial.





4. A corrente gerada pela força eletromotriz estará imersa em um campo magnético e, portanto, deverá surgir uma força eletromagnética (Lorentz) nos fios da bobina, certo? Marque na figura anterior qual o sentido da força eletromagnética \vec{F}_e em cada lado da bobina. As forças que surgem são no sentido de acelerar ou desacelerar a bobina? Essas forças permanecem constantes à medida que a bobina gira?

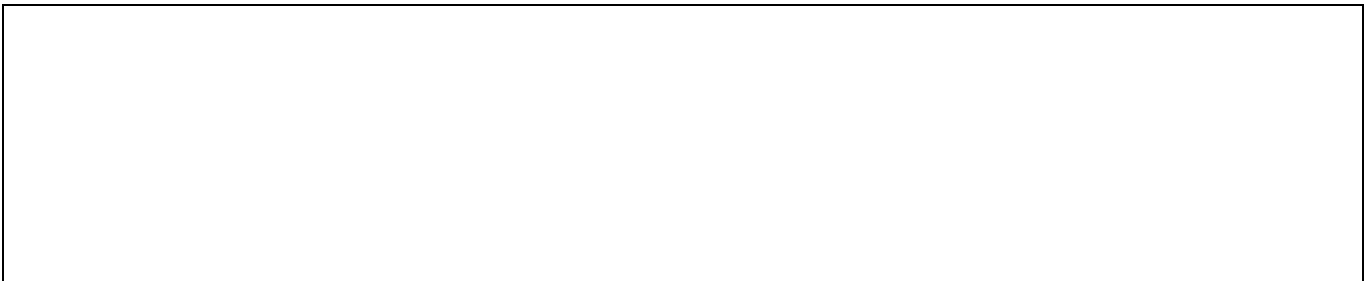


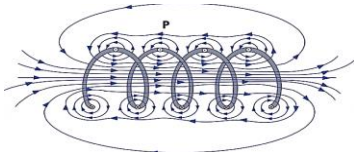
5. Calcule a intensidade da força eletromagnética em função da corrente i , da intensidade B do campo magnético, do número N de espiras e da medida b da bobina.



6. Calcule, em função de N , a , b , i , B , ω e t , a intensidade τ_e do torque causado pelas forças eletromagnéticas que agem na bobina em relação ao eixo de rotação. O torque é constante à medida que a bobina gira?

Lembre-se de que a definição de torque é $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, sendo \vec{r} o vetor que parte do eixo de rotação, perpendicular a ele, com extremidade no ponto em que a força \vec{F} é aplicada.





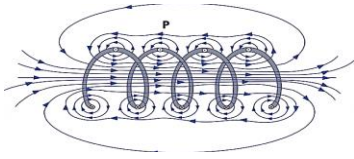
Você deve ter obtido a seguinte expressão para a intensidade τ_e do torque causado pelas forças eletromagnéticas:

$$\tau_e = N \cdot B \cdot i \cdot a \cdot b \cdot \cos(\omega t)$$

Dividindo ambos os membros da igualdade anterior por i e multiplicando por ω , chegamos a:

$$\frac{\tau_e \cdot \omega}{i} = N \cdot B \cdot \omega \cdot a \cdot b \cdot \cos(\omega t)$$

7. Observe o lado direito dessa última igualdade e compare com a expressão que você obteve no item **2** para a F.E.M. induzida do gerador, a qual vamos denotar por e . Em seguida, escreva uma igualdade que relacione τ_e , ω , i e e .



8. Você deve ter concluído que $\tau_e \cdot \omega = e \cdot i$. Tente explicar o que essa equação significa.

Dicas: observe o lado direito. O que é o produto entre tensão e corrente? E, no lado esquerdo, o que é o produto entre torque e velocidade angular? Fazendo o contraste entre fenômenos elétricos e fenômenos mecânicos, o que cada membro da igualdade representa?

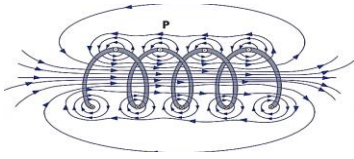
Agora, vamos parar de fazer contas por alguns instantes e pensar na realidade. OK, a bobina gira com uma velocidade angular ω , mas **quem faz** a bobina girar? Talvez alguém pudesse responder: “basta colocar o eixo em rolamentos de modo a tornar o atrito quase nulo e, em seguida, dar um impulso inicial. Aí, é só se sentar numa poltrona confortável, relaxar e contemplar a magia da geração de energia!”. Mas, por mais que os avanços tecnológicos proporcionem rolamentos cada vez melhores, uma lei fundamental da Física se mantém intocada: energia não é gerada, apenas transformada. Então, essa “máquina” não deve funcionar por inércia, certo? Vamos voltar ao mundo das contas para confirmar isso. Como você certamente se lembra das aulas de Física do Movimento (se lembra, né?), se um torque resultante de intensidade τ_R atua em torno de um eixo de rotação de um corpo cujo momento de inércia é I , então a aceleração angular adquirida por esse corpo é:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\tau_R}{I}$$

9. Considerando que o torque τ_e causado pelas forças eletromagnéticas seja o único a atuar na bobina, e lembrando que ele é contrário ao sentido da velocidade angular ω , o que deve acontecer com a velocidade angular à medida que o tempo passa?

Ou seja, se não houver algo forçando a bobina a girar, ela irá parar! Isso não é tão surpreendente, certo?

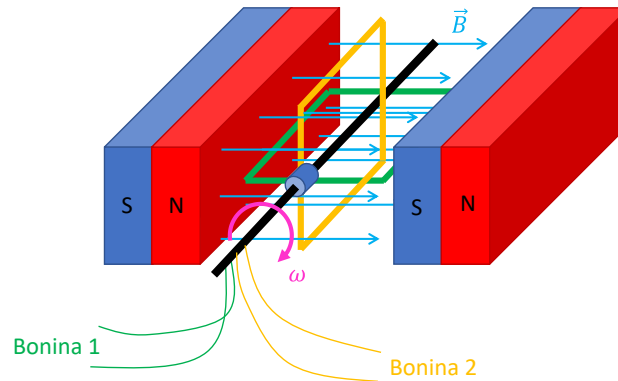
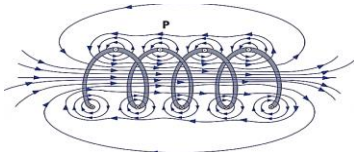
10. Qual deve ser a intensidade de um torque τ_M , externo, aplicado mecanicamente para que a bobina permaneça girando com uma velocidade angular ω constante? E qual deve ser a potência mecânica fornecida ao sistema para garantir que isso aconteça?



11. Numa situação em que temos uma carga conectada à bobina, que gira com velocidade angular constante, dada a presença de um torque externo, o que deve ocorrer se trocarmos o resistor conectado por outro, de resistência **menor**, sem alterar o torque externo?

12. Para manter a velocidade angular mesmo com a troca da carga, o que deve ser feito com o torque mecânico externo? Nesse caso, a potência mecânica fornecida aumenta ou diminui? Por quê?

13. Vamos retomar o **gerador bifásico** que estudamos na aula passada. Lembre-se que ele é formado por duas bobinas idênticas, porém dispostas em planos perpendiculares entre si e eletricamente isoladas uma da outra, compartilhando o mesmo eixo de rotação. Cada bobina tem N voltas e delimita uma área A . Esse arranjo, que é forçado a girar com uma velocidade angular ω (rad/s), conforme indicado na figura, fica localizado entre dois ímãs permanentes muito grandes, capazes de produzir um campo magnético praticamente uniforme de intensidade B .



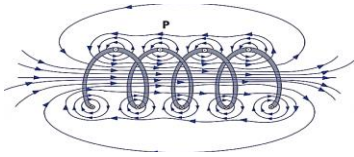
Deduzimos, a partir da aplicação da lei de Faraday às duas bobinas, que:

$$e_1(t) = -NBA\omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$e_2(t) = NBA\omega \cdot \sin(\omega t)$$

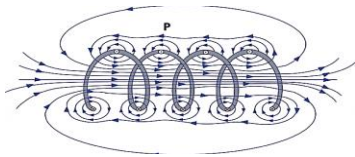
b) Se medíssemos as tensões nos fios das bobinas 1 e 2 com um osciloscópio, mediríamos as tensões calculadas por você no item **a)** da aula passada. Considerando que apenas o osciloscópio (considerado ideal) está conectado aos dois fios de cada bobina, haveria torque elétrico resistente em alguma delas?

c) Considere que os enrolamentos desse gerador produzem um torque de atrito resistente proporcional à velocidade angular, ou seja, $\tau_a = b \cdot \omega$, sendo b uma constante de proporcionalidade dada em $[N \cdot m \cdot s]$. Mostre que, para a situação do gerador em aberto, a potência mecânica imposta por um agente externo para fazer as bobinas 1 e 2 girarem com velocidade ω constante é igual à potência dissipada por atrito, dada por $b\omega^2$ (faça a análise dimensional dessa expressão).

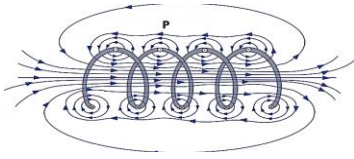


d) Vamos considerar que a autoindutância dessas bobinas é desprezível (ou seja, elas têm baixa capacidade de produzir fluxo magnético interno), assim como sua resistência interna (ou seja, elas têm baixa perda por efeito *Joule*). Se conectássemos apenas a bobina 2 a um resistor de resistência R , quanto deveria ser o novo torque mecânico externo de modo a manter o gerador girando com velocidade angular constante? Qual a relação entre a resistência elétrica conectada na bobina 2 e a potência mecânica externa necessária a manter ω constante?

e) Se as bobinas tivessem um formato circular, em vez de retangular, mas tivessem a mesma área A e o mesmo número de espiras N , as forças eletromotrizes produzidas seriam diferentes daquelas que você obteve no item **a**? Justifique.



f) Sabe-se que, dentre todas as figuras geométricas planas, o círculo é a que possui a maior razão entre área e perímetro. Considerando que os fios que formam as bobinas não sejam ideais, qual seria uma vantagem de se usar bobinas circulares em vez de retangulares, considerando a mesma área e o mesmo número de espiras?



AULA 7

CAPACITÂNCIA E INDUTÂNCIA

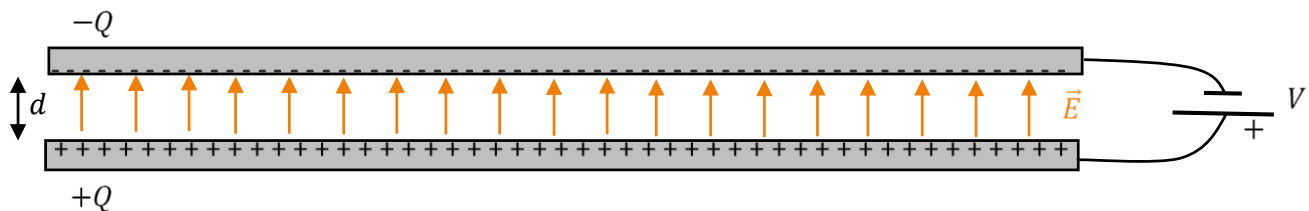
OBJETIVOS

Ao final da aula, os alunos serão capazes de:

- Relembrar o conceito de capacitância
- Compreender os conceitos de indutância e seu circuito equivalente.
- Compreender o conceito da energia armazenada nos campos elétrico e magnético.

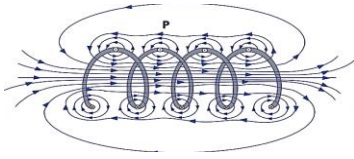
RELEMBRANDO O CAMPO ELÉTRICO ENTRE DUAS PLACAS PLANAS E O CONCEITO DE CAPACITÂNCIA

Um capacitor é um dispositivo capaz de armazenar cargas elétricas e, portanto, capaz de armazenar energia elétrica na forma de um **campo elétrico**. O capacitor mais típico é aquele formado por duas placas metálicas isoladas uma da outra, cujo comprimento é muito maior que a distância que as separa. A figura a seguir ilustra duas placas metálicas que foram conectadas aos polos de uma bateria de tensão contínua V . Assim que a bateria é conectada às placas, elétrons da placa inferior são atraídos pelo polo positivo da bateria, tornando essa placa carregada positivamente. Do mesmo modo, elétrons da bateria são repelidos pelo seu polo negativo em direção à placa superior, eletricamente neutra no instante inicial. O resultado é que a fonte fornecerá o mesmo número de elétrons à placa superior em relação aos que foram absorvidos pela placa inferior, de modo que as placas fiquem carregadas com cargas elétricas iguais, $-Q$ e $+Q$, respectivamente.



Como já deduzimos na aula sobre **lei de Gauss**, o campo elétrico resultante entre as placas, considerando que na região entre elas **não existe matéria** (apenas vácuo), e que o versor \hat{j} aponta na direção vertical para cima, é dado, aproximadamente (desconsiderando o efeito das bordas), por:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{j} \text{ [V/m]}$$



Na equação anterior, σ é a densidade superficial de carga nas placas, que têm mesma área A , ou seja:

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

Ao calcularmos a integral de linha do campo elétrico de um ponto qualquer localizado na placa inferior (positiva) até um ponto qualquer localizado na placa superior (negativa), teremos:

$$\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{r} = U_i - U_f = V$$

Resolvendo a integral, chegamos a:

$$\int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dy = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{Qd}{A\epsilon_0} = V$$

Definimos, então, a **capacitância desse componente** como a razão entre a carga acumulada Q e a diferença de potencial V entre as placas. Assim:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

Note que a capacitância depende dos parâmetros construtivos do capacitor, **e não de Q e V** . Os parâmetros são: a área A das placas, a distância d entre elas e o meio que as separa (que tem permissividade ϵ_0). Para o caso de termos matéria entre as placas, a análise pode ficar bastante complexa, pois a estrutura molecular do material (chamado de dielétrico) irá se polarizar sob a influência do campo \vec{E} , gerando um campo elétrico resultante menor que \vec{E} na região. Contudo, se o campo elétrico gerado internamente pelo material for proporcional a \vec{E} , podemos escrever:

$$C = \frac{A\epsilon}{d}$$

Sendo ϵ a permissividade elétrica do material entre as placas.

Por fim, vamos calcular a energia elétrica armazenada em um capacitor. Como sabemos, a energia é a integral no tempo da potência elétrica, ou seja:

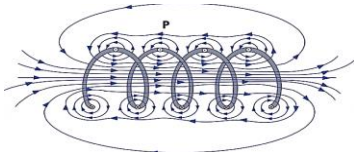
$$E = \int_0^t V \cdot i \, dt$$

Como $i = \frac{dQ}{dt}$, podemos escrever:

$$E = \int_0^t V \cdot \frac{dQ}{dt} \, dt$$

Como $V = \frac{Q}{C}$, chegamos a:

$$E = \int_0^Q \frac{Q}{C} \cdot dQ = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C^2 V^2}{2C}$$



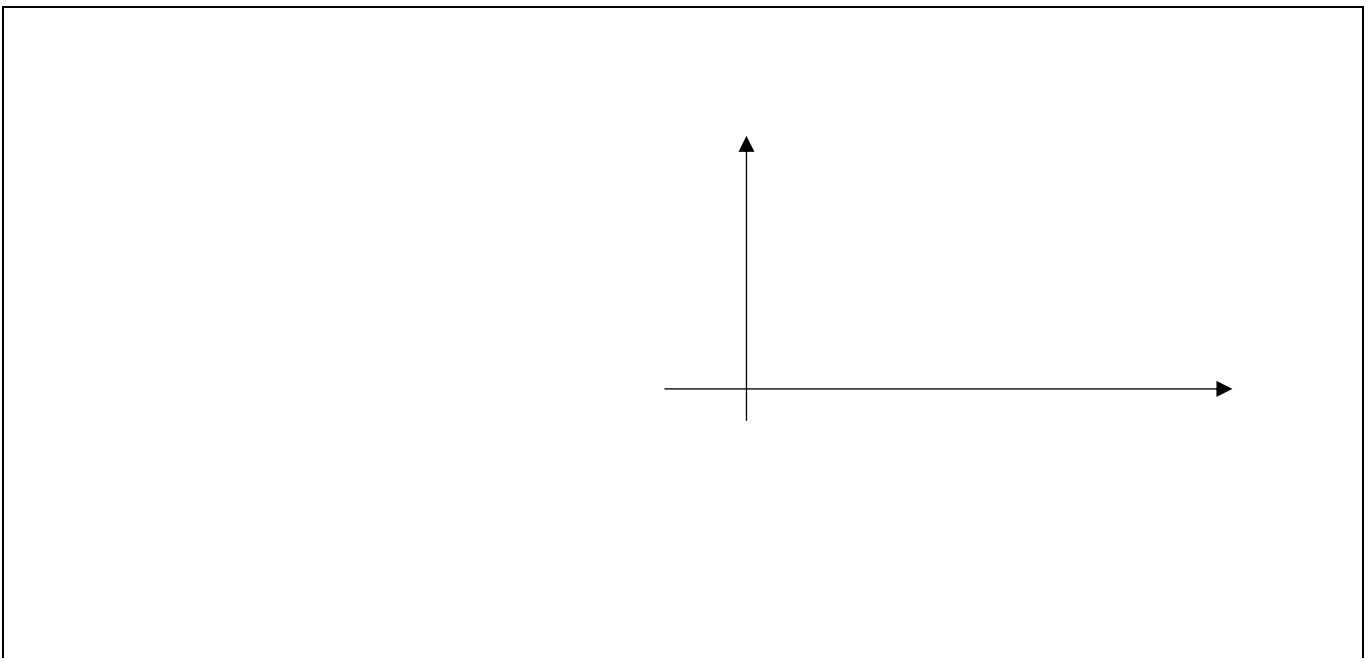
Assim, concluímos que a energia armazenada em um capacitor é:

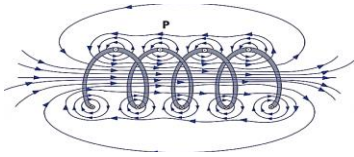
$$E = \frac{CV^2}{2}$$

1. Vamos considerar que conectamos um capacitor a uma fonte com tensão contínua U_f usando um par de fios. Como você sabe, todo fio tem resistência elétrica, mesmo que muito baixa, e por isso vamos considerar que a resistência total dos fios é igual a R . Desenhe o circuito que representa a conexão do capacitor à fonte e escreva a 2ª lei de Kircchoff para esse circuito. Considere que a tensão no capacitor é V .



2. Supondo que a conexão da fonte ao capacitor foi realizada por uma chave, fechada no instante $t = 0$, esboce o gráfico da tensão no capacitor em função do tempo. Sugestão: analise a equação diferencial que você obteve no item **1**.

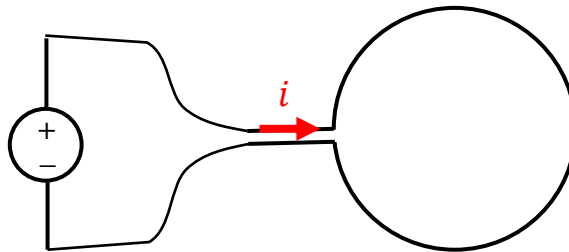




INDUTÂNCIA OU AUTOINDUTÂNCIA

Vamos iniciar agora a dedução do conceito de indutância (ou autoindutância) de uma bobina, que é mais complicado que o conceito de capacitância. Para os itens a seguir, vamos imaginar uma bobina de N espiras, percorrida por corrente elétrica, conectada a uma fonte de tensão controlável (que pode ser constante ou variável no tempo), conforme a figura abaixo.

3. Marque na figura o campo magnético produzido pela corrente no interior da bobina.



4. O que você acha que vai acontecer com o fluxo magnético na área delimitada pelo enrolamento de fios que constitui a bobina quando a corrente dobrar? Use a Lei de Biot-Savart e a definição de fluxo magnético para chegar a uma conclusão.

Sendo a área da bobina constante, sabemos que o fluxo magnético Φ_B na área delimitada pelo enrolamento será diretamente proporcional à intensidade do campo magnético que a atravessa. Por sua vez, sendo o campo magnético diretamente proporcional à corrente que circula na bobina (pois, pela Lei de Biot-Savart, o campo magnético nas proximidades de um fio é diretamente proporcional à corrente que o percorre), concluímos que o fluxo Φ_B será diretamente proporcional à corrente que o produz. Ou seja:

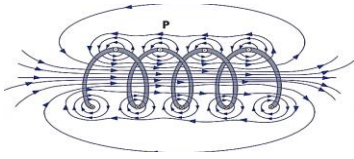
$$\Phi_B \propto i$$

À constante de proporcionalidade entre o fluxo magnético e a corrente elétrica que o produz, damos o nome de **indutância** (ou autoindutância). Matematicamente:

$$\Phi_B = L \cdot i$$

A unidade de indutância é o Henry (H), dado por:

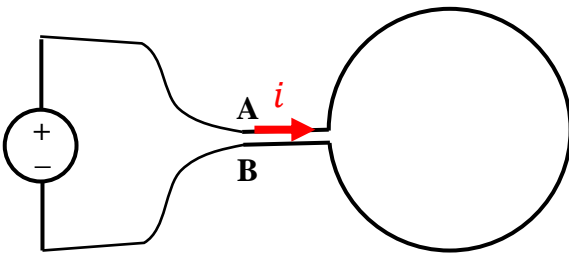
$$H = \frac{Wb}{A}$$



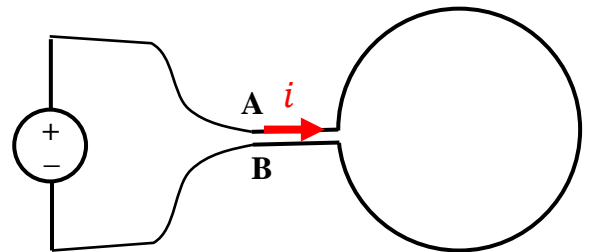
5. Se a corrente i for constante no tempo, o fluxo magnético no interior da bobina será constante ou variável no tempo? Nesse caso, pode-se dizer que haverá uma força eletromotriz induzida na bobina?

6. E se a corrente i variar no tempo, o fluxo magnético através das espiras será constante ou variável no tempo? Nesse caso, pode-se dizer que haverá uma força eletromotriz induzida nas espiras?

7. Considere que, num dado instante, a corrente flui do terminal A para o terminal B da bobina. Em dois casos distintos, quando a taxa de variação da corrente é positiva (figura da esquerda) e negativa (figura da direita), desenhe o sentido do campo elétrico induzido na bobina.

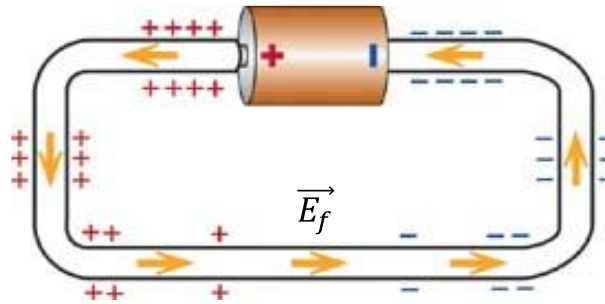
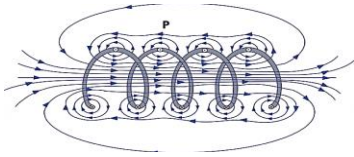


$$\frac{di}{dt} > 0$$



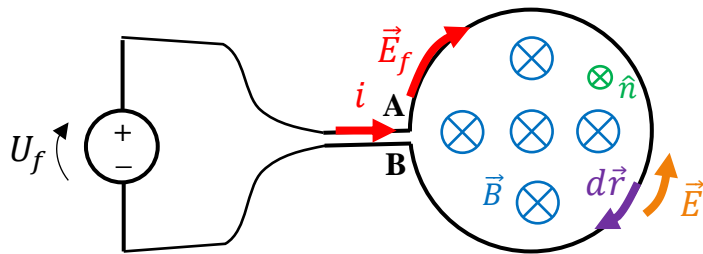
$$\frac{di}{dt} < 0$$

Você deve ter notado que o campo elétrico induzido surge no sentido de manter a corrente estável (sendo a corrente convencional de cargas positivas, o campo elétrico estará no mesmo sentido da força elétrica). Ou seja, quando a corrente aumenta, o campo elétrico induzido surge no sentido de diminuí-la, assim como, quando ela diminui, o campo elétrico induzido surge no sentido de aumentá-la. Trata-se de mais uma interpretação da Lei de Lenz! Contudo, precisamos analisar esse caso com mais cuidado, pois, se existe corrente elétrica nessa espira, é porque uma fonte externa aplica uma diferença de potencial a ela, não? Observe a figura a seguir.



Quando conectamos um fio condutor entre dois polos de potenciais elétricos diferentes, a densidade **superficial** de carga no fio, que é repleto de elétrons livres, se distribui de forma a ir, gradativamente, de uma densidade maior, positiva, para uma densidade menor, negativa. Essa distribuição de carga elétrica na superfície do fio faz com que surja um campo elétrico aproximadamente **uniforme no seu interior**, o qual acompanha a linha longitudinal do fio, sempre paralelo a ele. Resumindo: o campo elétrico é causado pela distribuição superficial de carga que, por sua vez, surge devido à diferença de potencial imposta pela fonte. O resultado é o surgimento de corrente elétrica convencional no sentido de \vec{E}_f , o campo elétrico causado pela fonte no interior do fio.

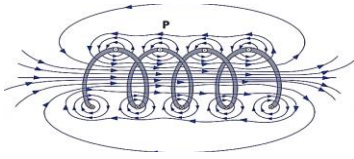
Pois bem, vamos voltar à nossa espira. Quando, devido à tensão (ddp) da fonte U_f , surge corrente elétrica na espira, surgirá também um campo magnético \vec{B} na área delimitada pelo seu enrolamento. Se considerarmos que a fonte tem tensão variável no tempo, a corrente também será variável no tempo. Para compreendermos o que acontece na bobina, vamos assumir que, em certo instante, $\frac{di}{dt} > 0$, ou seja, a corrente aumenta em intensidade no sentido horário. Se $\frac{di}{dt} > 0$, e se adotarmos o versor normal (observe a figura abaixo) da superfície plana delimitada pelas espiras no mesmo sentido de \vec{B} , então a derivada do fluxo magnético também será positiva, ou seja, $\frac{d\Phi_B}{dt} > 0$.



Pela Lei de Faraday, sabemos que a variação do fluxo magnético causa um campo elétrico **induzido** \vec{E}_i ao longo da espira, ou seja:

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Como $\frac{d\Phi_B}{dt} > 0$, o campo elétrico induzido surge no sentido contrário ao de $d\vec{s}$, pois $\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r} < 0$. Mas, neste caso, temos dois campos elétricos ao longo da espira, não?



8. Qual seria o campo elétrico resultante \vec{E}_R ao longo do fio? Qual dos dois campos, \vec{E}_f ou \vec{E}_i , efetivamente causa a corrente elétrica no condutor que forma as espiras?

Você deve ter chegado à conclusão de que o campo elétrico resultante, que é o campo que efetivamente causa corrente elétrica, é a soma vetorial do campo produzido pela fonte, \vec{E}_f , e do campo induzido pela variação temporal do fluxo magnético, \vec{E}_i . Ou seja, o campo elétrico resultante será:

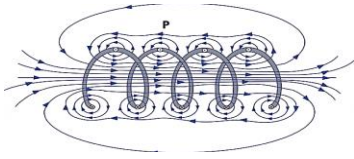
$$\vec{E}_R = \vec{E}_f + \vec{E}_i$$

Fazendo a integral de linha do campo elétrico resultante, entre os terminais A e B, temos:

$$\int_A^B \vec{E}_R \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E}_f \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{r}$$

$\int_A^B \vec{E}_R \cdot d\vec{r}$ é a integral de linha do campo resultante, cujo resultado é a diferença de potencial responsável pela corrente elétrica produzida no condutor. Aplicando a Lei de Ohm, temos que $\int_A^B \vec{E}_R \cdot d\vec{r} = R \cdot i$, sendo R a resistência total das N espiras da bobina. Por sua vez, $\int_A^B \vec{E}_f \cdot d\vec{r}$ é a diferença de potencial imposta pela fonte, U_f .

9. Agora, como calcular $\int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{r}$? Pense primeiro na integral de linha fechada de \vec{E}_i **em cada espira** da bobina.



Considerando ϕ_{1e} o fluxo em uma única espira da bobina, sabemos que, em cada espira, $\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = -\frac{d\phi_{1e}}{dt}$.
Para N espiras:

$$N \cdot \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = -N \cdot \frac{d\phi_{1e}}{dt} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

$\int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{r}$ representa a diferença de potencial acumulada em todas as N espiras. Assim:

$$\int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = N \cdot \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

10. Lembrando a definição da indutância de uma bobina – a constante de proporcionalidade entre o fluxo magnético produzido na bobina e a corrente que a percorre, ou seja, $\phi_B = L \cdot i$, qual seria a expressão de $\frac{d\phi_B}{dt}$ em função da indutância da bobina?

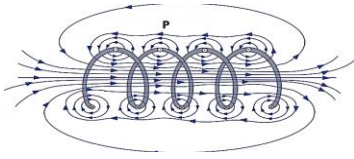
Substituindo todos os termos na equação $\int_A^B \vec{E}_R \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E}_f \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{r}$, chegamos a:

$$R \cdot i = U_f - L \cdot \frac{di}{dt}$$

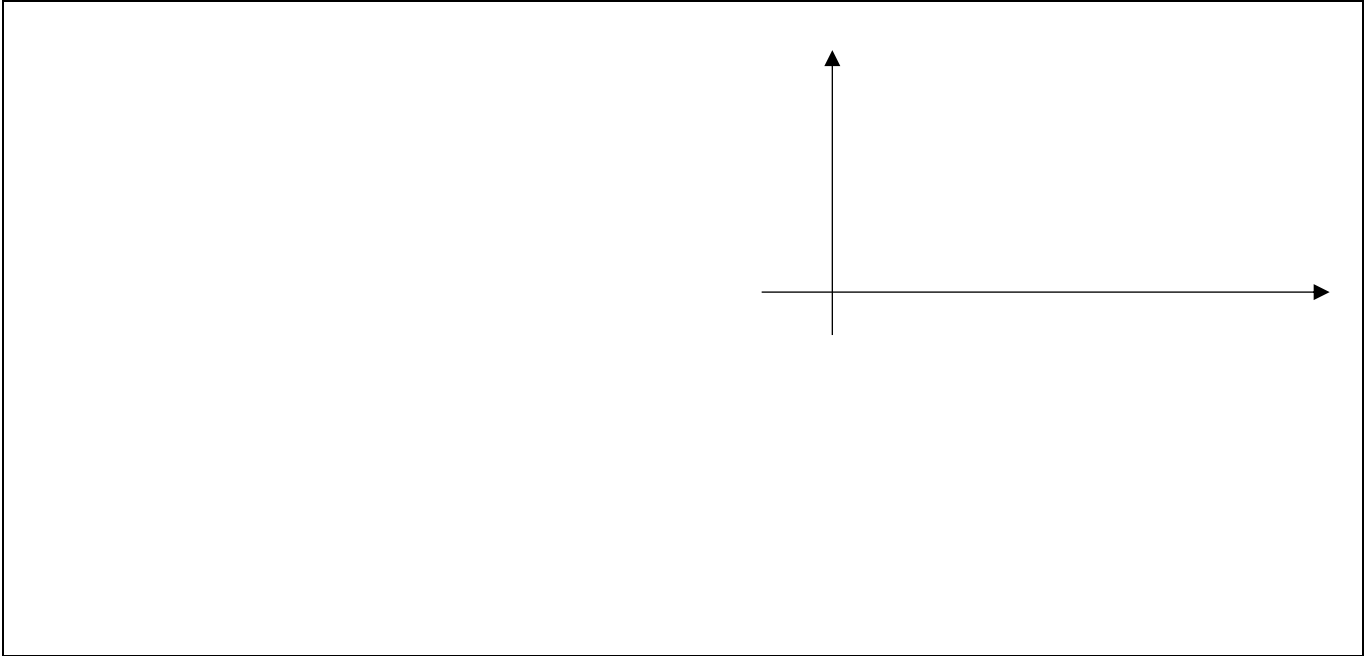
Ou seja:

$$U_f = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$$

11. Então, observando a equação de tensões acima, qual modelo de circuito eletrodinâmico pode ser usado para compreender o comportamento de uma bobina? Atente para o fato de o termo $L \cdot \frac{di}{dt}$ representar a tensão induzida em um **indutor ideal**, como você aprendeu em Acionamentos Elétricos. Use a 2ª Lei de Kirchhoff para propor um circuito que atenda à equação acima.



12. Observando a equação do circuito equivalente da bobina, explique o que deve acontecer quando aplicamos a ela uma tensão contínua a partir do fechamento de uma chave, em $t = 0$. Tente esboçar um gráfico da corrente pelo tempo a partir do momento que conectamos a bobina a uma fonte DC.

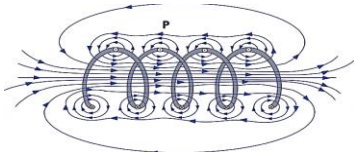


13. Considere agora que a resistência do indutor possa ser **desconsiderada**, o que constitui um **indutor ideal**. Como ficaria o circuito equivalente do indutor e a equação da tensão no circuito?

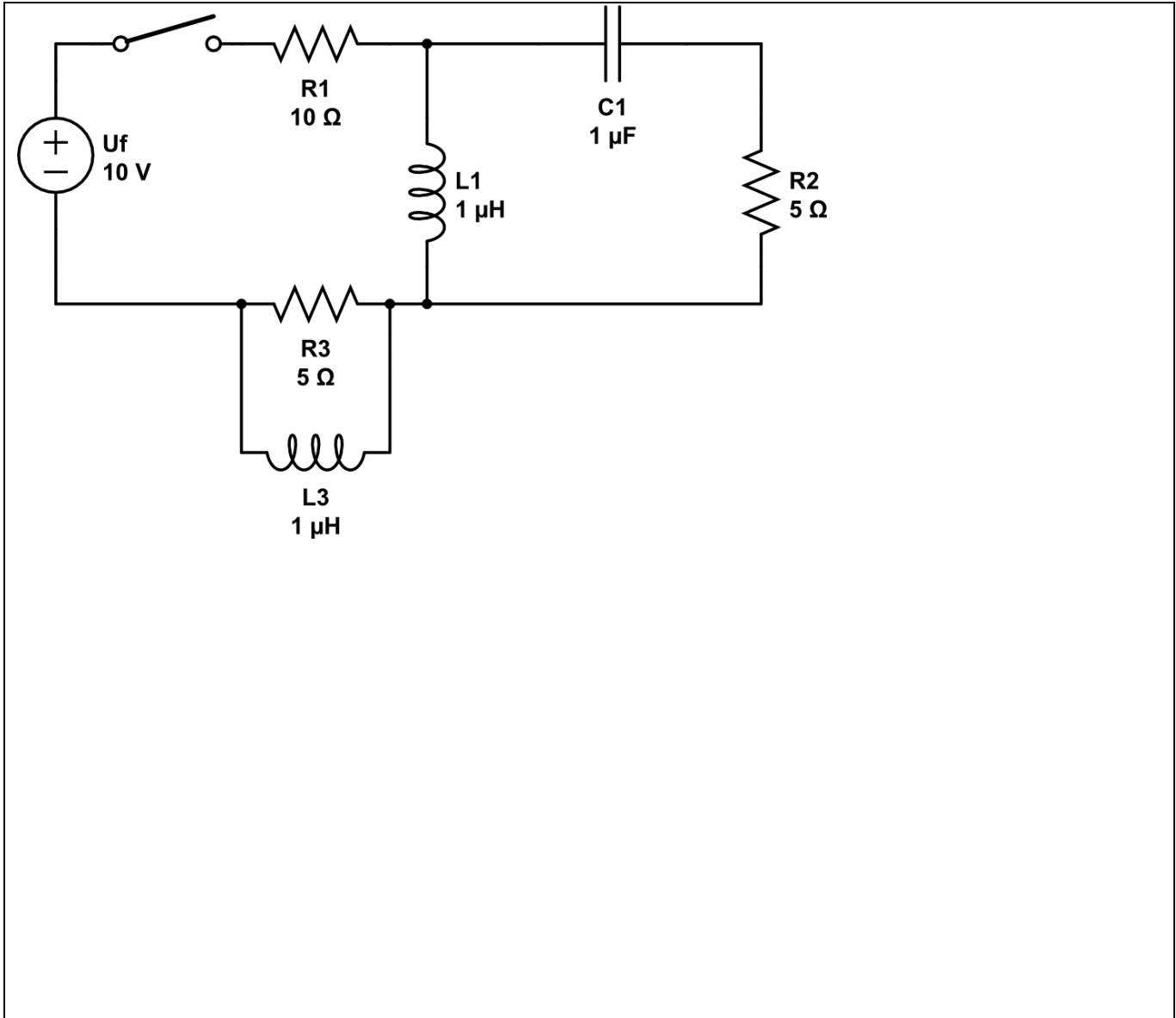
Área em branco para o circuito equivalente do indutor e a equação da tensão no circuito.

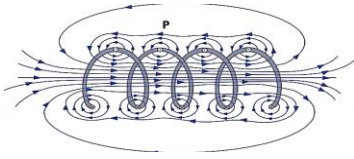
14. Para o circuito equivalente que você construiu no item **13**, calcule a energia armazenada no indutor a partir do cálculo da potência elétrica do circuito.

Área em branco para o cálculo da energia armazenada no indutor.



15. Exercício: para o circuito abaixo, calcule a corrente inicial da fonte ao fechar a chave e a energia total acumulada nos indutores e capacitores após passado o período transitório.





LEITURA PRÉVIA PARA A AULA 8

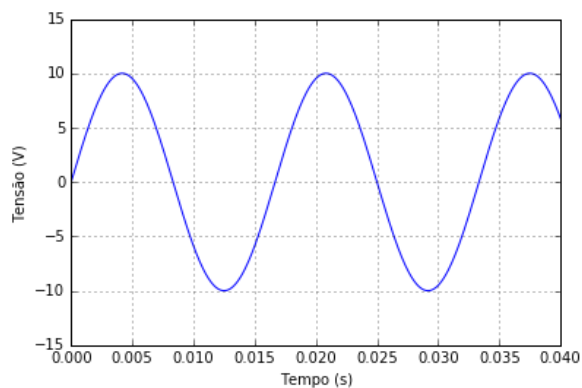
REGIME PERMANENTE SENOIDAL E FASORES

Vamos retomar nessa leitura o que já vimos em Acionamentos Elétricos: o conceito de fasor como ferramenta para o tratamento de tensões e correntes senoidais.

RELEMBRANDO O QUE É UMA TENSÃO SENOIDAL

Vamos retomar os conceitos atrelados ao regime permanente senoidal (quando um circuito passivo é submetido a uma tensão senoidal, após um período transitório, tensões e correntes serão senoidais), inicialmente vistos na disciplina de Acionamentos Elétricos. Retomemos uma função que descreve a tensão senoidal a ser aplicada em algum componente, por exemplo um resistor. Para uma função senoidal de tensão de pico $V_p = 10V$, sua expressão no tempo será:

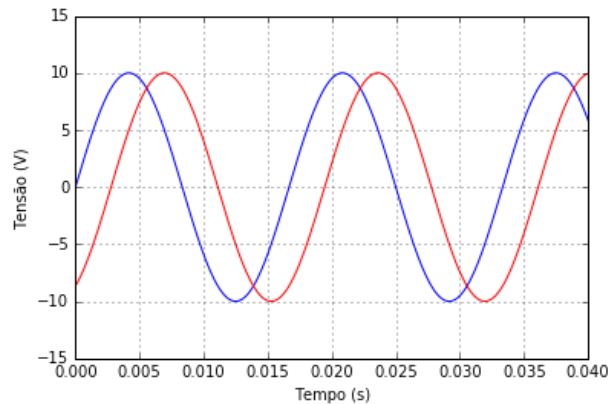
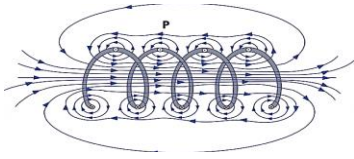
$$V(t) = V_p \cdot \text{sen}(\omega t)$$



Nessa equação, ω é a frequência angular, que, por sua vez, pode ser escrita como $\omega = 2\pi f$, sendo f a frequência de oscilação, neste caso igual a 60Hz. O gráfico dessa função pode ser visualizado na figura ao lado.

O CONCEITO DE FASOR E A UTILIZAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

A figura seguinte mostra o gráfico de duas medições de tensão senoidais com frequência de 60 Hz, que poderiam ser facilmente visualizadas em um osciloscópio a partir de um gerador de sinais (que é uma fonte de tensão alternada), ou, como fizemos aqui, produzidas matematicamente a partir de uma série temporal. Em princípio, o que difere a tensão azul da tensão vermelha? Podemos tentar responder a essa pergunta da maneira mais simples possível, dizendo que a tensão vermelha está atrasada em relação à tensão azul, uma vez que a progressão temporal dos valores da tensão é da esquerda para a direita.



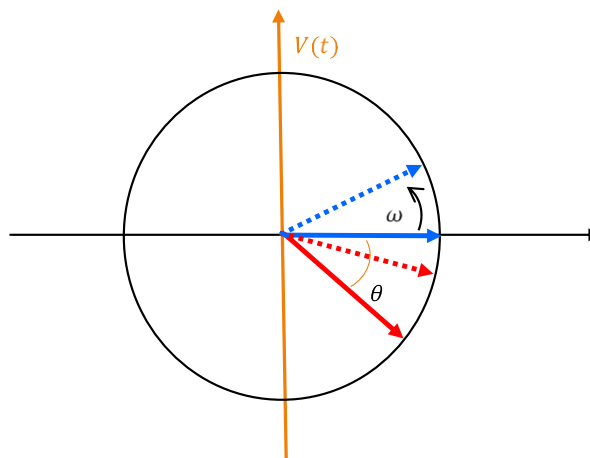
Se quiséssemos escrever a equação que descreve as tensões azul (V_a) e vermelha (V_v) em função do tempo, teríamos:

$$V_a(t) = 10 \cdot \text{sen}(\omega t)$$

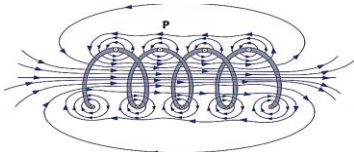
$$V_v(t) = 10 \cdot \text{sen}(\omega t - \theta)$$

Nessas equações, ω é a frequência angular e θ o ângulo de defasagem entre uma tensão e outra.

Você deve se lembrar que a definição de seno de um ângulo é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa em um triângulo retângulo, mas também que o círculo trigonométrico é uma das interpretações geométricas mais interessantes para compreendermos a função senoidal. Para o caso das funções das tensões azul e vermelha acima descritas, teríamos como boa interpretação gráfica aquela apresentada na figura a seguir **Erro! Fonte de referência não encontrada..**



Suponha que o **vetor posição** (lembra dele?) azul tem comprimento igual a 10 e que ele gira em sentido anti-horário em uma trajetória circular com velocidade angular ω constante, partindo da posição horizontal. Do mesmo modo, o vetor vermelho, com mesmo tamanho que o azul, também gira no mesmo sentido e com a mesma velocidade ω , porém defasado de um ângulo θ . Talvez seja fácil entender que, a cada instante t , o ângulo que o vetor azul faz com o eixo horizontal será $\omega \cdot t$, e que o valor do cateto oposto, na direção do eixo vertical



$V(t)$, será, para a tensão azul, $10 \cdot \sin(\omega t)$. Ou seja, enquanto a primeira figura da página anterior ilustra as funções $V(t)$ no tempo, a segunda nada mais é do que uma **interpretação geométrica** dessas funções, permitindo que façamos uma **analogia** entre **tensão senoidal** e um **vetor girante**. Difícil?

Se soubéssemos que todas as tensões em um determinado circuito estão variando com a mesma frequência (o que equivaleria dizer que todos os vetores no nosso círculo trigonométrico giram com a mesma velocidade angular), o que as diferenciaria seria apenas a amplitude (ou o tamanho do vetor correspondente) e o ângulo de defasagem entre elas.

Estamos muito próximos do conceito de fasor, mas antes precisamos entender um pouco uma famosa equação: a chamada **fórmula de Euler** que, segundo o físico Richard Feynman é a "*mais extraordinária fórmula da matemática*".

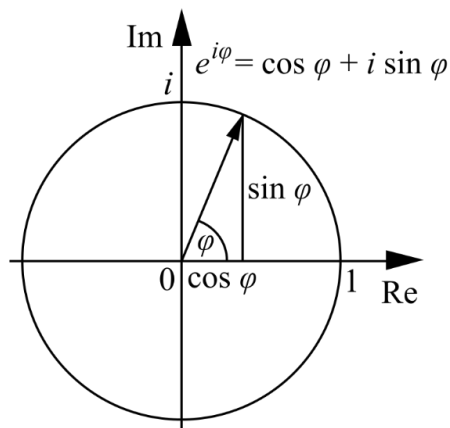
A saber, a fórmula de Euler é:

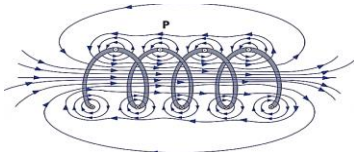
$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

Na qual $j = \sqrt{-1}$, ou seja, um número complexo.

Talvez você tenha pavor de números complexos, principalmente porque no ensino médio você aprendeu a álgebra dos números complexos sem, talvez, entender bem sua aplicação. Pois bem, chegou a hora, novamente, de entender uma de suas aplicações: a **representação** de tensões, correntes e impedâncias elétricas! Veja bem, dissemos que você iria entender a aplicação, pois entender a fórmula de Euler está um pouco fora de nossas pretensões. Nas palavras do matemático Benjamin Peirce, brilhante professor de Harvard do século XIX, "*It is absolutely paradoxical; we cannot understand it, and we don't know what it means, but we have proved it, and therefore we know it must be the truth*".

Magicamente, ou matematicamente, podemos entender a aplicação da fórmula de Euler a partir de sua representação geométrica, conforme a figura a seguir. Na verdade, umas das aplicações dos números complexos é a representação de uma variável em duas dimensões, e aqui vamos usar essa representação para simplificar a álgebra das variáveis elétricas em regime permanente senoidal. A tática para conviver com tamanho mistério é entender que se trata de uma **representação**.





Primeiramente, dado que o raio do círculo trigonométrico apresentado na figura acima é igual a 1, ao multiplicarmos a fórmula de Euler por uma certa constante, por exemplo A , teremos:

$$Ae^{j\theta} = A\cos(\theta) + jA\sin(\theta)$$

Cuja representação seria muito parecida com a da figura acima, excetuando-se o tamanho do vetor que liga o centro do sistema de coordenadas complexas à extremidade do círculo. Pois bem, vamos ligar os pontos! Lembre-se que a tensão elétrica de uma fonte senoidal pode ser escrita por¹:

$$V(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

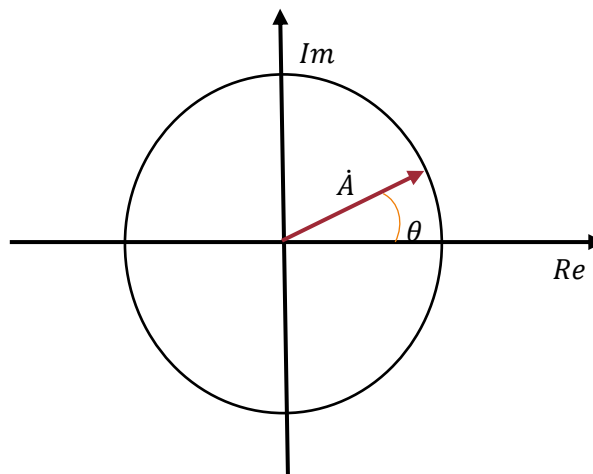
E que, pela fórmula de Euler, a tensão $V(t)$ poderia ser escrita da seguinte forma:

$$V(t) = \text{Re}\{Ae^{j(\omega t + \theta)}\}$$

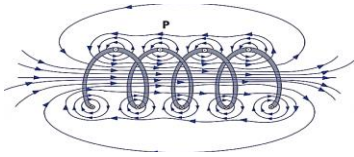
Ou seja, a tensão $V(t)$ seria a **parte real** da representação complexa da fórmula de Euler. Como em circuitos elétricos com componentes passivos não há possibilidade de alteração da frequência de oscilação das tensões e correntes, podemos “esquecer”, de certo modo, que o vetor complexo está girando e considerá-lo parado, importando apenas seu comprimento (amplitude) e o ângulo em relação ao eixo real. Deste modo, chegamos ao conceito de fasor, que é representado por:

$$\dot{A} = Ae^{j\theta} = A\angle\theta$$

Nessa equação, o fasor \dot{A} nada mais é do que um **vetor** no sistema de **coordenadas complexas**. Basicamente, um fasor (ilustrado na figura a seguir **Erro! Fonte de referência não encontrada.**) pode ser escrito na forma chamada **polar**, determinada pela amplitude e pelo ângulo, $A\angle\theta$, ou na sua forma **trigonométrica**, $A\cos(\theta) + jA\sin(\theta)$, como já vimos.

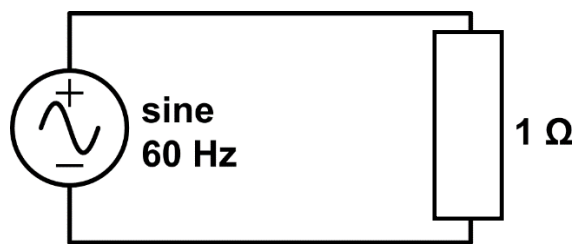


¹ Até aqui escrevemos uma função seno, porém agora vamos usar a função cosseno por conta da fórmula de Euler. Não se esqueça que a diferença entre a função seno e cosseno é apenas uma defasagem de 90°.



Podemos definir o módulo do fasor como a amplitude de pico de uma tensão ou corrente senoidal, ou também como o valor eficaz dessa tensão ou corrente. Como estamos introduzindo agora esse tema a você, vamos deixar de lado um pouco a tensão eficaz e compreender o fasor a partir de sua amplitude de pico.

Lembre-se que o conceito de fasor se reduz a uma representação, ou seja, em vez de trabalharmos com equações de tensão e corrente em função do tempo, vamos utilizar uma representação das informações que realmente mudam dependendo das características do circuito elétrico, e a frequência não é uma delas. Para finalizar, vamos considerar que temos um circuito com um bipolo desconhecido alimentado por uma fonte de tensão alternada senoidal de 60 Hz, conforme a figura seguinte.



Se a tensão aplicada ao circuito for:

$$V(t) = 10\cos(\omega t)$$

Podemos representá-la por um fasor que será:

$$\dot{V} = 10e^{j\theta}$$

Mas, sendo o ângulo θ da tensão igual a zero, podemos escrever:

$$\dot{V} = 10\angle 0^\circ$$

Ou:

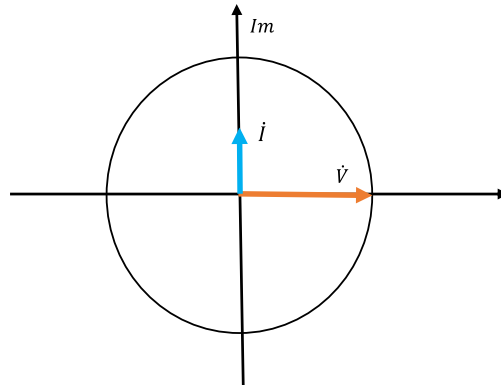
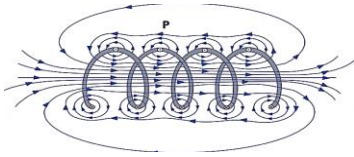
$$\dot{V} = 10 + 0j$$

Suponha agora que meçamos a corrente elétrica com um osciloscópio e descobrimos que sua expressão temporal é:

$$I(t) = 5\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Ou seja, a corrente está adiantada de 90° em relação à tensão e tem amplitude de 5 ampères. Como fizemos com a tensão, vamos representá-la por um fasor. Assim:

$$\dot{I} = 5\angle 90^\circ = 0 + 5j$$



Você deve estar se perguntando que tipo de bipolo é esse que, quando excitado com uma tensão senoidal, é atravessado por uma corrente também senoidal, porém adiantada de 90° em relação à tensão. Bom, veremos na aula que esse bipolo é um capacitor, e que tanto capacitores quanto indutores têm a propriedade de defasar a corrente em relação à tensão. Mas, antes de estudarmos de modo mais aprofundado capacitores e indutores, vamos introduzir, já finalizando nossa leitura, o conceito de **impedância**.

Como você já sabe, a resistência em corrente contínua é a razão constante entre tensão e corrente elétricas em um bipolo, diretamente derivada da Lei de Ohm. No caso do circuito da figura da página anterior, é mais do que razoável inferir que a “resistência” do bipolo desconhecido (mas agora nem tanto) deve ser dada pela razão entre tensão e corrente, só que nesse caso ambos os valores são descritos como fasores. Pois bem, ao dividir \dot{V} por \dot{I} , teremos:

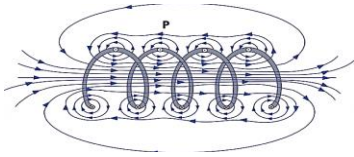
$$\frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{10 + 0j}{0 + 5j} = 0 - 2j = 2 \angle -90^\circ = \dot{Z}$$

Ou seja, a “resistência” do bipolo alimentado com tensão senoidal será também representada por um fasor (um número complexo, com um módulo e um ângulo), e a denominaremos impedância, cuja unidade também é Ohm. A impedância, então, advém de uma definição mais abrangente da Lei de Ohm, sendo que toda resistência é uma impedância, porém a maioria das impedâncias não são resistências.

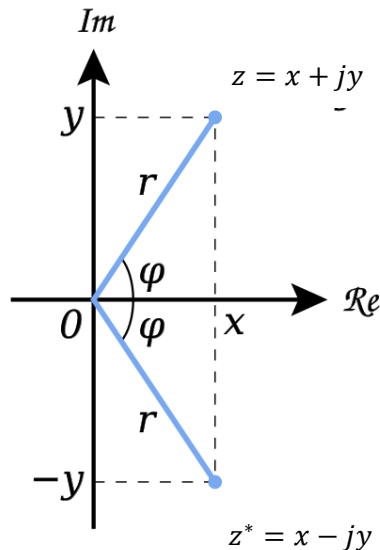
Poderíamos calcular também a **potência elétrica** consumida por esse bipolo. Como você se lembra, em circuitos DC a multiplicação da tensão pela corrente é igual à potência. No caso do regime permanente senoidal, para o qual estamos usando o conceito de fasor complexo, seria razoável aceitar que a potência também é representada por um fasor complexo. Formalmente, temos que:

$$\dot{S} = \dot{V}_{ef} \cdot \dot{I}_{ef}^*$$

Nessa equação, \dot{I}^* é o **conjugado complexo** da corrente elétrica eficaz. Se você não se lembra do conceito de conjugado complexo, basta lembrar que “conjugar” um número complexo é trocar o sinal de sua parcela imaginária na forma trigonométrica, o que é equivalente a trocar o sinal de seu ângulo da forma polar, conforme ilustrado na figura da página seguinte. Agora, por que devemos multiplicar a tensão complexa pela corrente complexa conjugada em vez de multiplicá-la apenas pela corrente complexa? É simples: quando multiplicamos dois números complexos, por exemplo $A \angle \alpha$ e $B \angle \theta$, teremos como resultado $A \cdot B \angle \alpha + \theta$. Conduto, o que



interessa para o cálculo da potência é a diferença entre os ângulos da tensão e da corrente, e por isso a multiplicação de $A\angle\alpha$ por $(B\angle\theta)^*$ resultaria em $A \cdot B \angle \alpha - \theta$, sendo $\alpha - \theta$ o ângulo entre \vec{A} e \vec{B} .



Por fim, precisamos falar de um último conceito importante: o **fator de potência**. Em regimes permanentes senoidais, como é o caso das redes elétricas de todo o mundo, usaremos a representação complexa para a potência, a qual terá uma parte real e outra imaginária. Como a potência elétrica complexa é um fasor, ela terá também um módulo e um ângulo, exatamente como a tensão e corrente. Assim:

$$\dot{S} = S\angle\theta = P + jQ$$

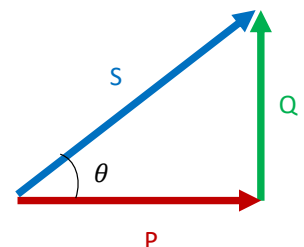
Nessa equação:

- S é a potência aparente (trata-se do módulo do fasor \dot{S})
- P é a potência ativa (também conhecida como potência real)
- Q é a potência reativa (ou potência imaginária)

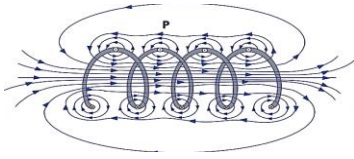
Pela própria definição geométrica do fasor, você haverá de concordar que:

$$P = S \cdot \cos(\theta)$$

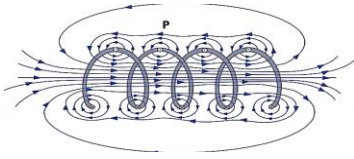
Sendo $\cos(\theta)$ o famoso e conhecido **fator de potência**! Além dele, tão famoso quanto é o Triângulo de Potências, ilustrado ao lado, que nada mais é do que a representação geométrica do fasor potência complexa, composto por uma parte real e outra imaginária.



Bom, talvez você precise ler novamente alguns pontos discutidos acima. Antes disso, vamos fixar alguns conceitos gerais:



- i) em regime permanente senoidal, os fasores são boas **representações** para amplitudes e defasagens de ângulos;
- ii) como os fasores são números complexos, podemos fazer contas com módulos e ângulos (ou com partes reais e imaginárias), de modo a usufruir dos milagres da matemática (lembre-se que todas as propriedades dos números complexos que você aprendeu no ensino médio continuam válidas);
- iii) como tensões e correntes são representadas por números complexos, a potência também será representada por um número complexo, com uma parte real e outra imaginária e, por fim,
- iv) potência imaginária não existe! Trata-se apenas de uma **abstração matemática** para que possamos entender as defasagens entre a potência, tensão e corrente senoidais. A potência efetivamente consumida por um equipamento, ou bipolo, é a **parte real de \hat{S}** , responsável pelas conversões energéticas efetivamente realizadas (energia elétrica em calor, luz ou movimento).



AULA 8

CAPACITORES E INDUTORES EM AC

OBJETIVOS

Ao final da aula, os alunos serão capazes de:

- Compreender o funcionamento de capacitores e indutores em AC.
- Compreender o conceito de potência aparente, reativa e real.

CAPACITORES EM CORRENTE ALTERNADA

Na aula passada, analisamos a relação constante entre carga elétrica armazenada e a tensão aplicada às placas de um capacitor. Precisamos estudar agora o que acontece quando há movimento de carga elétrica no tempo, por exemplo, quando o capacitor está se carregando ou descarregando. Se retomarmos a equação da capacitância isolando do lado esquerdo a carga acumulada, teremos:

$$Q = C \cdot V$$

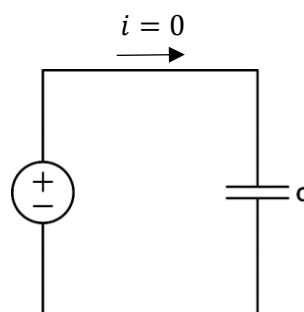
Ao derivar essa equação em ambos os lados, como a capacitância é constante, teremos:

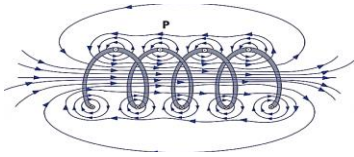
$$\frac{dQ}{dt} = C \cdot \frac{dV}{dt}$$

Ou seja, como vimos na aula passada:

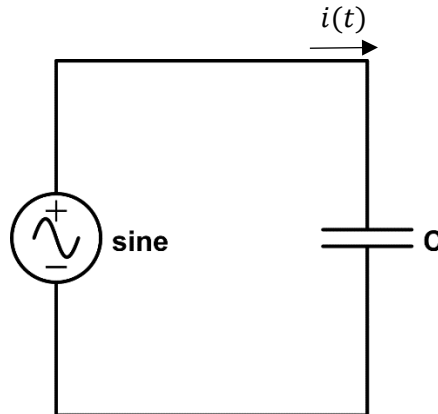
$$i = C \cdot \frac{dV}{dt}$$

Assim, a corrente no capacitor depende da capacitância e da taxa de variação temporal da tensão do capacitor. Isso significa que, se a tensão não variar, a corrente elétrica no capacitor será nula! Talvez você consiga responder qual seria a corrente elétrica num capacitor conectado, por algum tempo, a uma fonte de tensão contínua. Sim, ela será nula e o capacitor se comportará como uma chave aberta.





Vamos analisar agora o que acontece quando conectamos um capacitor diretamente a uma fonte de tensão senoidal. Bom, você já deve estar imaginando que, sendo uma fonte de tensão senoidal, a corrente elétrica no capacitor não poderá ser mais nula, pois, agora, a tensão varia no tempo.



Imagine que a tensão da fonte seja dada pela função temporal: $V(t) = V_p \cos(\omega t)$.

1. Determine a expressão da corrente do capacitor nesse caso.

Sabemos, no entanto, que a função seno tem a mesma forma de uma função cosseno, porém defasada no tempo. Usando a identidade trigonométrica $-\sin(\theta) = \cos(\theta + \frac{\pi}{2})$, podemos reescrever a equação da corrente como:

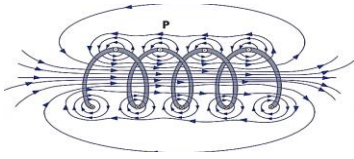
$i(t) = CV_p \omega \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$. Ou seja, a corrente tem forma senoidal e está adiantada de 90° em relação à tensão!

INDUTORES EM CORRENTE ALTERNADA

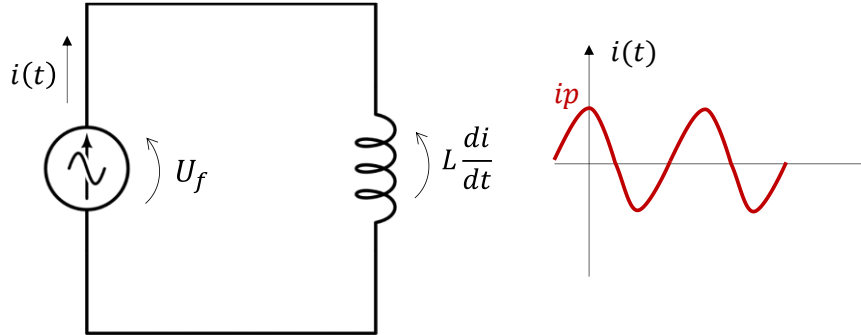
Na aula passada, definimos indutância como sendo a relação entre o fluxo magnético e a corrente que circula em uma bobina, ou seja:

$$L = \frac{\phi_B}{i}$$

Deduzimos na aula passada o circuito equivalente de uma bobina. No circuito da figura a seguir consideramos, por simplificação, que a resistência da bobina é nula (ou seja, $R = 0$), e que nossa fonte é capaz de controlar a



corrente elétrica que é fornecida ao circuito (é o que chamamos de fonte de corrente). Suponha, então, que $i(t) = i_p \cos(\omega t)$, sendo i_p o valor de pico da corrente (valor máximo da corrente) e ω a sua frequência angular.



2. Calcule a tensão $V(t)$, que é a tensão no indutor de indutância L . Nesse circuito, $U_f = V$, certo?

Você deve ter concluído que $V_L(t) = -Li_p\omega \sin(\omega t)$. Usando a identidade trigonométrica

$$-\sin(\theta) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

a tensão no indutor ficaria $V_L(t) = Li_p\omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$.

USANDO A MATEMÁTICA: O CONCEITO DE FASOR

Para prosseguirmos, precisamos lembrar um conceito fundamental que você aprendeu em Acionamentos Elétricos: o **fasor**! Antes que você comece a tremer, vamos lembrar que um fasor nada mais é do que uma representação matemática de uma função senoidal. Por exemplo, a função:

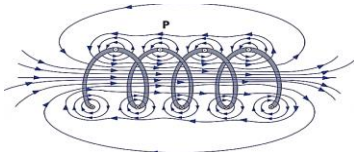
$$X(t) = 5 \cos(120\pi t + 30^\circ)$$

pode ser representada por um fasor (um número complexo), o qual pode ser escrito em sua forma trigonométrica,

$$\hat{X} = 5 \cos(30^\circ) + 5 \sin(30^\circ) j$$

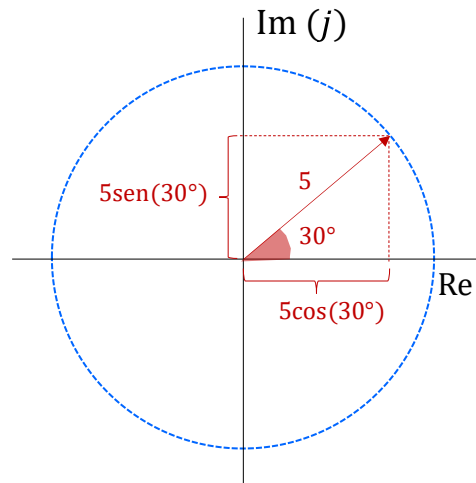
(os matemáticos ficam incomodados, mas neste contexto é usual denotar a unidade imaginária por j , para não confundir com a corrente i)

ou na sua forma polar,



$$\hat{X} = 5\angle 30^\circ,$$

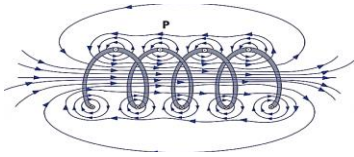
cuja representação geométrica é a de um vetor no plano complexo, conforme ilustra a figura abaixo.



Perceba que, para representar uma função senoidal no tempo por um fasor, precisamos sempre partir de uma função do tipo $f(t) = A \cos(\omega t + \theta)$, representada por $\hat{f} = A\angle\theta$. Se partirmos de, por exemplo, $f_1(t) = A \sin(\omega t + \theta)$, precisaremos lembrar que $\sin \alpha = -\cos(\alpha + 90^\circ)$ e, portanto, $f_1(t) = -A \cos(\omega t + \theta + 90^\circ)$, o que nos dá a representação complexa $\hat{f}_1 = -A\angle(\theta + 90^\circ)$.

3. Represente na forma fasorial a corrente senoidal e a tensão senoidal no capacitor, conforme item 1.

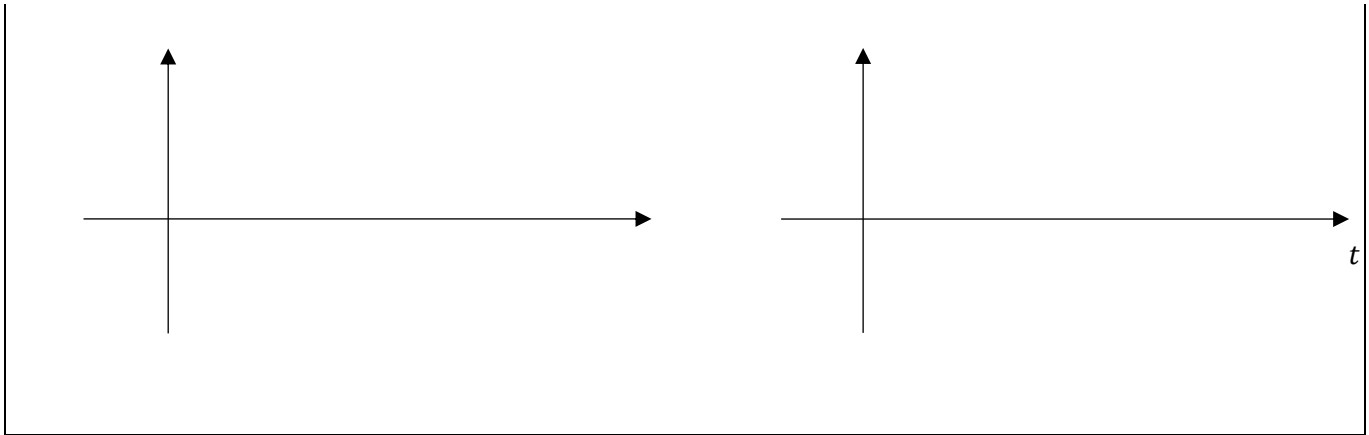
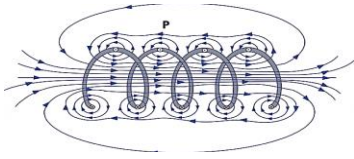
4. Se temos a tensão e a corrente no capacitor representadas por fasores complexos, podemos calcular a razão entre tensão e corrente, certo? Em circuitos em corrente contínua, fazemos isso a todo momento e sabemos que o resultado dessa razão é o que chamamos de resistência elétrica. Quando essa “resistência” surge da razão entre tensão e corrente que variam no tempo, ela resulta em um número imaginário denominado **reatância**. Para o caso do capacitor, qual a reatância capacitiva \hat{X}_C ?



5. Do mesmo modo, a partir do resultado do item 2, calcule a reatância indutiva do indutor.

6. Você deve se lembrar, de Acionamentos Elétricos, que podemos associar reatâncias e resistência em série e paralelo como se fossem resistores, mas usando números complexos. Imagine agora que tenhamos uma bobina de indutância 100mH , com resistência de enrolamento de 4Ω , conectada em série com um capacitor de $100\mu\text{F}$. O conjunto é, então, conectado a uma fonte de tensão senoidal de 50 V de pico e 60 Hz de frequência. Desenhe o circuito equivalente desse arranjo e calcule a corrente de pico da fonte. Faça também o esboço dos gráficos da tensão e da corrente da fonte.

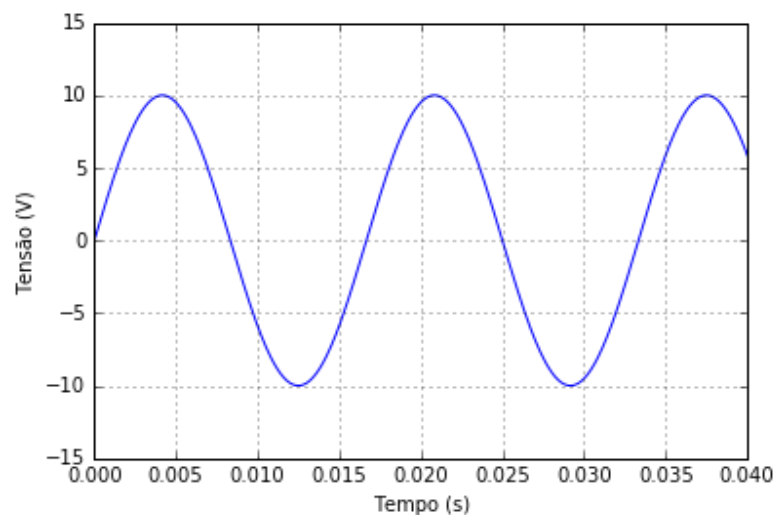
Dica: use o módulo `cmath` do Python para fazer esse cálculo. Lembre-se que “ $1j$ ” é reconhecido como o número complexo j em Python. Além disso, a função “`rect`” pode ser usada para escrever um número complexo na forma polar, bem como as funções “`abs`” e “`phase`” para obter, respectivamente, o módulo e a fase (em radianos) de um número complexo.



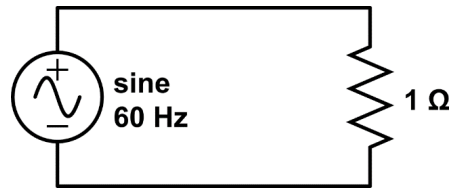
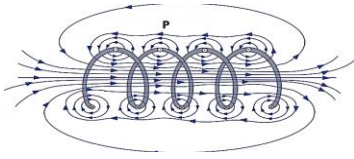
TENSÃO SENOIDAL E VALOR EFICAZ

Embora as fontes de tensão alternadas - que são aquelas cujo valor da tensão varia no tempo - possam ser de vários tipos (formato quadrado, triangular, rampa, trapezoidal, PWM etc.), o formato senoidal tem aplicação muito frequente na engenharia, como no caso da tensão que recebemos nas tomadas elétricas de nossa residência. Seu formato é senoidal com frequência de 60 Hz, e sua **tensão eficaz** é igual a 127V. Assim, vamos discutir um pouco os conceitos atrelados ao formato senoidal.

O primeiro conceito a ser discutido é o de **valor eficaz** da tensão ou corrente elétricas em um circuito. Para compreender o que significa valor eficaz, inicialmente vamos nos lembrar que, sendo variável no tempo, o valor da tensão aplicada a um determinado bipolo, por exemplo um resistor, varia entre valores positivos e negativos várias vezes por segundo, conforme observado no gráfico da figura a seguir, cuja função da tensão é dada por $V(t) = 10 \text{ sen}(\omega t)$.



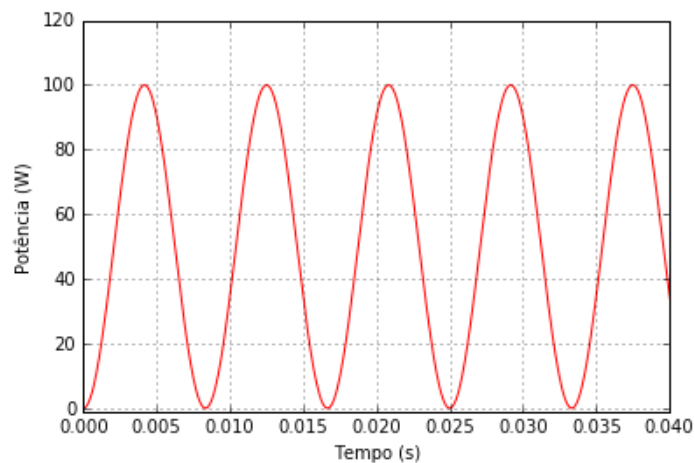
Vamos supor que conectemos essa fonte de tensão a um resistor de 1Ω , conforme ilustrado na figura a seguir.



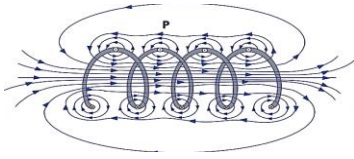
7. Escreva a expressão temporal da corrente que circularia nesse resistor.

8. Determine a expressão temporal da potência elétrica consumida no resistor.

Você deve ter observado que a potência também é variável no tempo, mas que sua frequência é o dobro da frequência da tensão ou da corrente, além de ser sempre positiva. Observe o gráfico da potência na figura a seguir.



Como a potência elétrica neste caso é variável no tempo, e a potência diz respeito à taxa de conversão de energia elétrica em energia térmica no resistor, é razoável que nos perguntemos qual seria a **taxa média** de conversão de energia nesse caso, ou seja, qual seria a potência média. Pois bem, para esse circuito, podemos escrever:



$$P(t) = \frac{V(t)^2}{R} = \frac{[V_p \sin(\omega t)]^2}{R} = \frac{V_p^2 \sin^2(\omega t)}{R}$$

Como determinar, então, a potência média $\overline{P(t)}$? Como V_p^2 é constante, o valor médio $\overline{P(t)}$ será dado por:

$$\overline{P(t)} = \frac{V_p^2}{R} \cdot \overline{\sin^2(\omega t)}$$

Sabemos que uma das mais famosas relações trigonométricas (o teorema de Pitágoras) é:

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Válida para qualquer θ , inclusive aqueles que variam no tempo, como é o nosso caso, podemos reescrevê-la como:

$$\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$$

Cujo valor médio é, necessariamente:

$$\overline{\sin^2(\omega t)} + \overline{\cos^2(\omega t)} = 1$$

Ora, se as funções seno e cosseno são funções idênticas, com a única diferença que são defasadas de 90° entre si, podemos deduzir que:

$$\overline{\sin^2(\omega t)} = \frac{1}{2}$$

E assim escrever que:

$$\overline{P(t)} = \frac{V_p^2}{R} \cdot \frac{1}{2}$$

Por fim, seria muito interessante que a potência média pudesse ser escrita a partir da mesma equação que utilizamos para descrever a potência em regime de corrente contínua. Para isso, vamos imaginar que exista um valor de tensão V_e , de tal forma que:

$$\overline{P(t)} = \frac{V_e^2}{R}$$

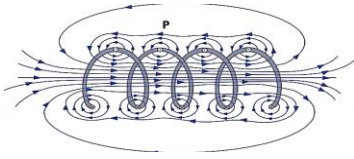
Para que ambas as equações se equivalham, é preciso escrever:

$$\overline{P(t)} = \frac{V_p^2}{R} \cdot \frac{1}{2} = \frac{V_e^2}{R}$$

O que resulta em:

$$V_e = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$$

Essa é a chamada **tensão eficaz**, cuja interpretação é bastante direta: trata-se da tensão em corrente alternada equivalente à tensão em corrente contínua que dissipa a mesma potência elétrica média. Por exemplo, sabemos



que a tensão eficaz que a Enel fornece ao Insper nas tomadas elétricas de todo o prédio é de 220 V, o que significa que a tensão de pico da rede elétrica é igual a 311,13 V.

Contudo, para calcularmos a potência elétrica fornecida a um aquecedor elétrico, por exemplo, utilizamos na equação da potência a tensão eficaz em vez da tensão de pico, pois queremos utilizar a mesma equação para a potência independentemente do sistema ser DC ou AC.

Relembrando, nessa leitura você aprendeu que:

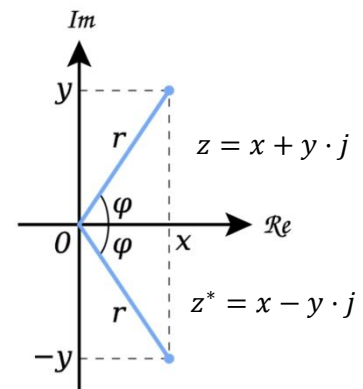
- A potência média é igual à energia total consumida dividida pelo período analisado;
- A potência média é aproximadamente a média aritmética das potências instantâneas discretizadas, e o resultado será mais preciso quanto mais intervalos tivermos.
- A tensão eficaz é o valor que usamos para calcular a potência média a partir das mesmas equações dos circuitos DC. Ou seja, dado um sinal senoidal com tensão de pico V_p , qual o valor de tensão que usamos para calcular a potência média? Não será V_p , mas sim $V_p/\sqrt{2}$!

POTÊNCIA ELÉTRICA EM AC

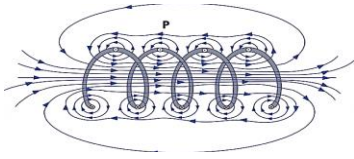
Você já deve ter percebido que a reatância indutiva varia com a indutância e com a frequência ($\hat{X}_L = j\omega L$). Ao contrário do capacitor (como você viu em Acionamentos Elétricos), quanto maior a frequência, maior será a reatância indutiva, e maior será a “resistência”, ou impedância elétrica de uma bobina. Precisamos nos perguntar agora como calcular a potência elétrica em elementos que não são puramente resistivos, como é o caso de uma bobina. Como você se lembra que, em circuitos DC, a multiplicação da tensão pela corrente é igual à potência elétrica transformada em calor (dissipada por efeito Joule). No caso do regime permanente senoidal, para o qual estamos usando fasores, seria razoável aceitar que a potência **também é representada por um fasor**, certo? Formalmente, definimos o fasor potência elétrica por:

$$\hat{S} = \hat{V}_{ef} \cdot \hat{I}_{ef}^*,$$

sendo \hat{I}_{ef}^* o **conjugado** complexo (o número complexo obtido ao se trocar o sinal da parte imaginária, como pode ser visto na figura ao lado) da corrente eficaz.



Mas, por que devemos multiplicar a tensão complexa pela corrente complexa conjugada, em vez de multiplicá-la, apenas, pela corrente complexa? Isso ocorre porque o que importa no cálculo da potência complexa é a diferença entre os ângulos da tensão e da corrente, e não seus valores absolutos. Quando usamos o conjugado da corrente complexa, obteremos como resultado um fasor cujo ângulo é o ângulo entre a tensão e a corrente. Milagres da matemática! Por ora, lembre-se apenas de que a equação da potência complexa utiliza os valores eficazes da tensão e do conjugado da corrente.



Finalmente, precisamos falar de um último conceito importante quando falamos de potência: **o fator de potência**. Em regimes permanentes senoidais, como é o caso das redes elétricas em todo o mundo, usamos a representação complexa para a potência, que também terá uma parte real e outra imaginária. Como a potência elétrica complexa é um fasor, ela terá um módulo e um ângulo, exatamente como a tensão e corrente. Assim:

$$\hat{S} = S \angle \theta = P + j \cdot Q$$

Sendo:

S : Potência aparente (trata-se do módulo do fasor \hat{S})

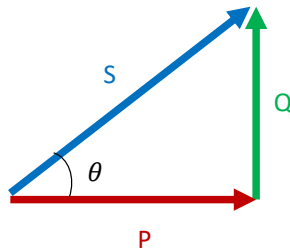
P : Potência ativa (também conhecida como potência real)

Q : Potência reativa (ou potência que não é consumida, mas armazenada e devolvida à fonte)

Pela própria definição geométrica do fasor, você haverá de concordar que:

$$P = S \cdot \cos(\theta)$$

Sendo $\cos(\theta)$ o famoso (pelo menos para o(s) a(s) engenheiro(as) elétricos(as)...) fator de potência! Tão famoso quanto ele é o triângulo de potências, ilustrado na figura abaixo, que nada mais é do que a representação geométrica de um fasor composto por uma parte real e outra imaginária.



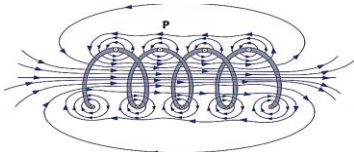
Talvez você esteja bem confuso(a) com tudo isso, o que é esperado. Para ajudar a organizar as ideias, vamos destacar alguns conceitos fundamentais:

i) em regime permanente senoidal, os fasores são boas representações para amplitudes e defasagens de ângulos;

ii) como os fasores são números complexos, podemos fazer contas com módulos e ângulos (ou com partes reais e imaginárias), de modo a usufruir das belezas da matemática;

iii) como tensões e correntes são representadas por números complexos, a potência também será representada por um número complexo, com uma parte real e outra imaginária;

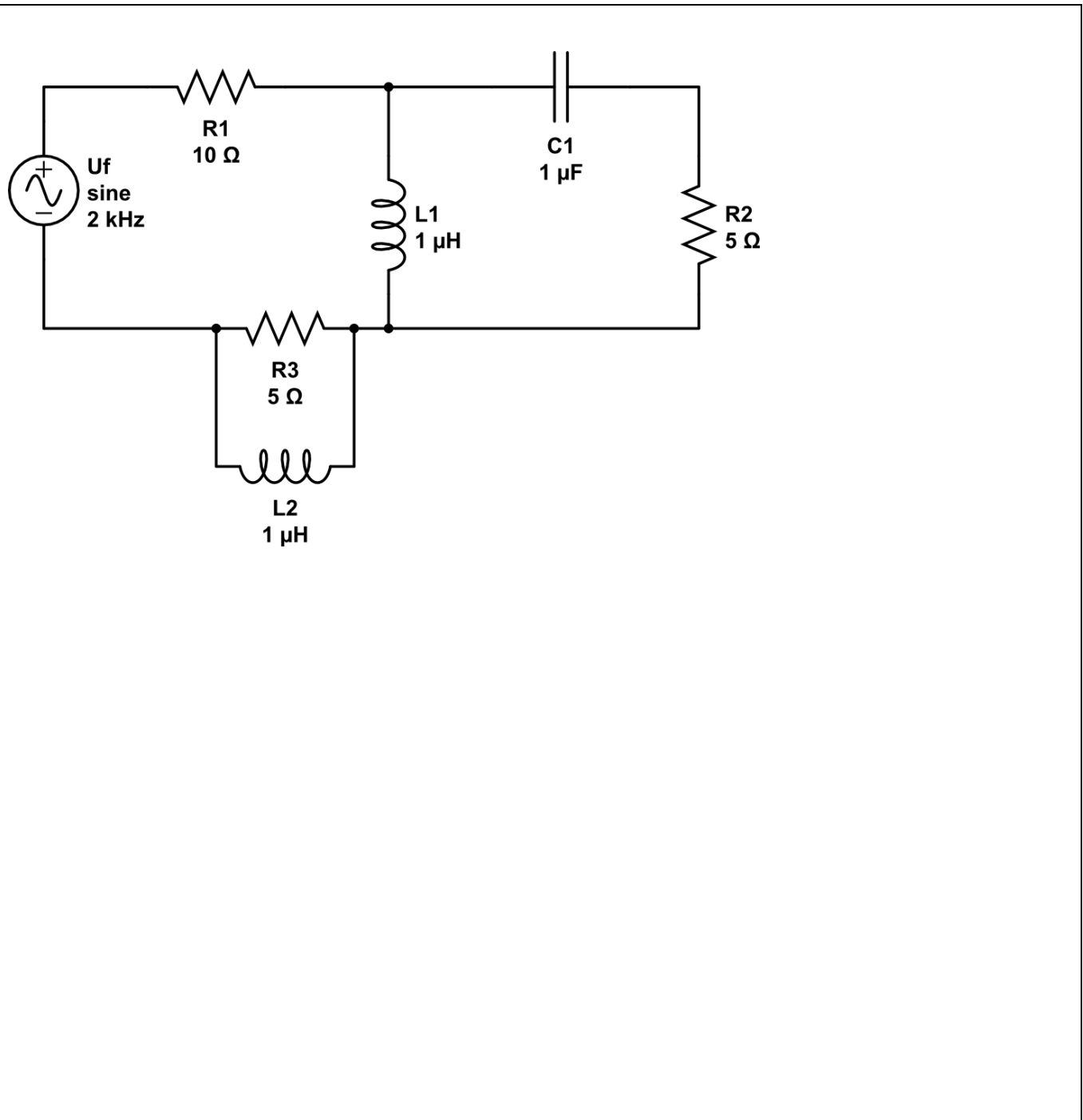
iv) potência imaginária não existe! Trata-se apenas de uma abstração matemática para que possamos entender as defasagens entre a potência, tensão e corrente senoidais. A potência efetivamente consumida por um equipamento, ou bipolo, é a parte real de \hat{S} , responsável pelas conversões energéticas (elétrica em calor ou movimento). A potência reativa (parte imaginária) não é efetivamente consumida pelo circuito, sendo armazenada e devolvida sucessivas vezes ao longo do tempo.

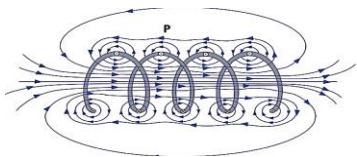


9. Exercício: calcule todas as correntes e tensões do circuito, considerando que a tensão da fonte é dada por:

$$U_f(t) = 20 \cos(4 \cdot 10^5 \pi t)$$

Calcule também a potência complexa fornecida pela fonte e compare-a à potência consumida pelos resistores. O que você conclui?





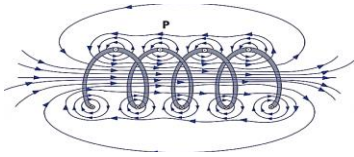
VÍDEO PRÉVIO PARA A AULA 9

ASSISTA AO VÍDEO PRÉVIO PARA A AULA 9 CLICANDO NO LINK:

[HTTPS://WWW.YOUTUBE.COM/WATCH?V=-MTyKNHiiZg](https://www.youtube.com/watch?v=-MTyKNHiiZg)

SCAN ME





AULA 9

INDUTÂNCIA MÚTUA E TRANSFORMADORES

OBJETIVOS

Ao final da aula, os alunos serão capazes de:

- Recordar o conceito de indutância e compreender o conceito de indutância mútua
- Compreender o funcionamento dos transformadores monofásicos
- Usar o modelo de um transformador em Python para calcular tensões e correntes nos enrolamentos primário e secundário.

RECORDANDO O CONCEITO DE AUTOINDUTÂNCIA

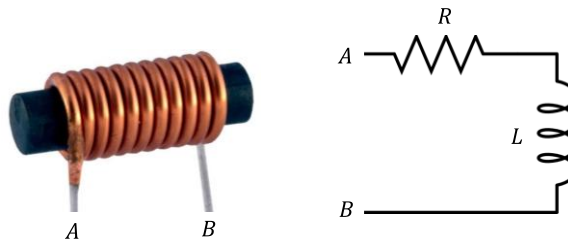
Na aula passada, definimos o conceito de indutância, também conhecida como autoindutância, que nada mais é do que a relação entre o fluxo magnético em um bipolo (por exemplo, uma bobina) gerado por uma corrente, e a própria corrente que o gerou. Ou seja:

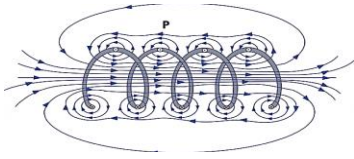
$$L = \frac{\Phi_B}{i}$$

A unidade de indutância é o Henry (H), dado por:

$$H = \frac{Wb}{A}$$

Também na aula passada, concluímos, a partir da Lei de Faraday, que uma bobina pode ser modelada por um circuito RL , no qual R representa a resistência total do fio que a constitui e L representa a indutância da bobina. Assim, compreendemos que, quando ligamos uma bobina a uma fonte de tensão, podemos usar o modelo elétrico abaixo para saber o que acontecerá com a corrente ao longo do tempo.





TRANSFORMADORES DE TENSÃO

Um dos equipamentos elétricos mais utilizados em redes de geração, transmissão e distribuição de energia elétrica, há mais de 120 anos, é o transformador de tensão. Inventado por Nikola Tesla no final do século XIX, o transformador possibilitou o desenvolvimento descomunal da indústria de energia elétrica em corrente alternada. Naquela época, havia uma “guerra das correntes” entre personagens eminentes da ciência: de um lado, Thomas Edison, defensor do sistema de corrente contínua, com geradores e motores bem parecidos com os que estudaremos no laboratório 1 e, de outro, George Westinghouse, empresário e sócio de Nicola Tesla, o icônico cientista que mudou a história da indústria de energia e da sociedade como ninguém. Se quiser saber um pouco mais sobre a história, acesse: https://en.wikipedia.org/wiki/War_of_the_currents.

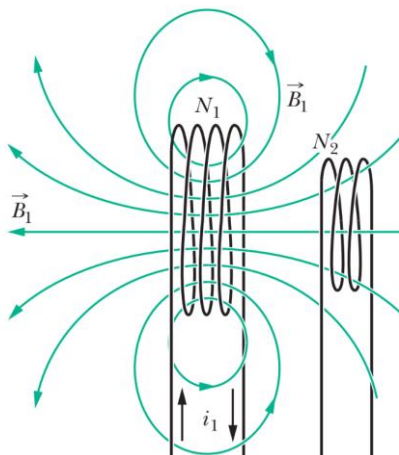
Vamos começar do início. Um transformador nada mais é do que um conjunto de duas bobinas enroladas em um mesmo material ferromagnético. Preparado(a)?

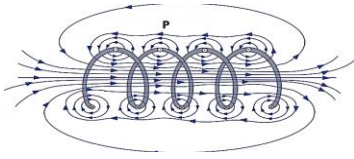
FLUXO MAGNÉTICO EM DUAS BOBINAS ACOPLADAS

Considere uma bobina de N_1 espiras que delimitam uma área A que, ao ser percorrida por uma corrente i_1 , gere em seu interior um campo magnético \vec{B}_1 uniforme.

1. Qual será o fluxo magnético total $\Phi_{Tot\ 1}$ que atravessa a bobina? Dê sua resposta em função de B_1 , N_1 e A .

Uma segunda bobina, de N_2 espiras, é posicionada de modo a ser atravessada por boa parte das linhas do campo magnético \vec{B}_1 gerado pela primeira, como mostra a figura abaixo.





2. Admitindo que o campo \vec{B}_1 também é uniforme no interior da bobina 2 e que suas espiras também delimitam uma área A , qual será o fluxo magnético total Φ_{Tot2} que atravessa a bobina 2? Dê sua resposta em função de B_1 , N_2 e A .

3. Usando as igualdades estabelecidas nos itens 1 e 2, estabeleça uma relação entre Φ_{Tot1} , Φ_{Tot2} , N_1 e N_2 .

Você deve ter chegado à seguinte igualdade:

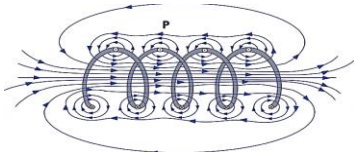
$$\frac{\Phi_{Tot1}}{N_1} = \frac{\Phi_{Tot2}}{N_2}$$

Agora, considere que a corrente i_1 é variável no tempo, de modo que o campo \vec{B}_1 também seja variável no tempo e, conseqüentemente, os fluxos Φ_{Tot1} e Φ_{Tot2} também sejam variáveis no tempo.

4. Derive ambos os lados da igualdade anterior com relação ao tempo e aplique a lei de Faraday, obtendo uma relação entre a F.E.M. induzida e_1 na bobina 1 e a F.E.M. induzida e_2 na bobina 2.

Acabamos de descrever o princípio de funcionamento de um transformador de tensão alternada e concluímos que a razão entre as tensões induzidas no primário (bobina 1) e no secundário (bobina 2) é proporcional à razão entre os números de voltas nas bobinas! Ou seja:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2}$$



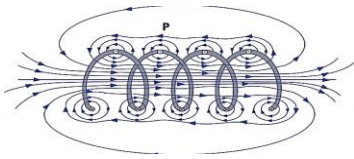
Simples, não?

5. Para tudo isso funcionar, fizemos uma hipótese fundamental sobre o comportamento do campo magnético no interior da bobina 2. Qual?

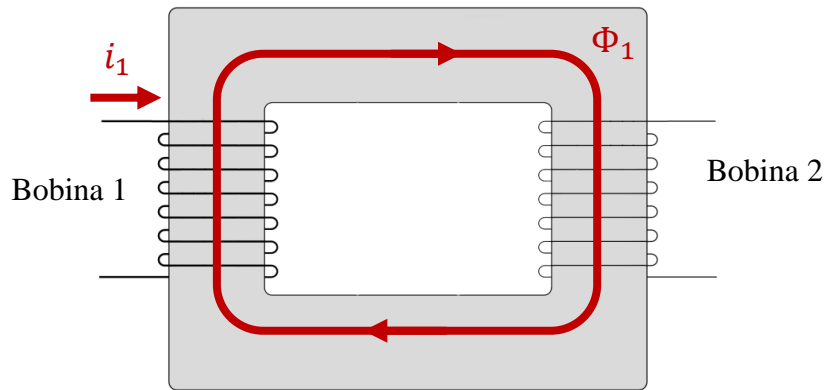
6. O que poderia ser feito para que a maior parte do campo gerado pela bobina do circuito primário também fosse estabelecida dentro da bobina do circuito secundário? Procure na Web a diferença entre materiais ferromagnéticos, diamagnéticos e paramagnéticos. A partir dessas definições, tente compreender qual tipo de material se encaixaria melhor na hipótese que fizemos no item 5. Use o espaço abaixo para anotações.

INDUTÂNCIA MÚTUA E A RELAÇÃO ENTRE TENSÃO, CORRENTE E POTÊNCIA EM UM TRANSFORMADOR

Você deve ter concluído que precisamos de um núcleo de material ferromagnético para adensar as linhas de campo produzidas pelas bobinas, de tal modo a fazer com que o campo magnético seja uniforme em qualquer seção transversal do núcleo de um transformador. No caso do transformador em aberto, ou seja, sem corrente circulando na segunda bobina (a qual denominamos circuito secundário), sabemos que, quando uma tensão variável no tempo é aplicada por um gerador aos terminais do primário, surgirá uma F.E.M. induzida (também variável no tempo) nos terminais do secundário, proporcional à relação de espiras (a qual denominamos relação



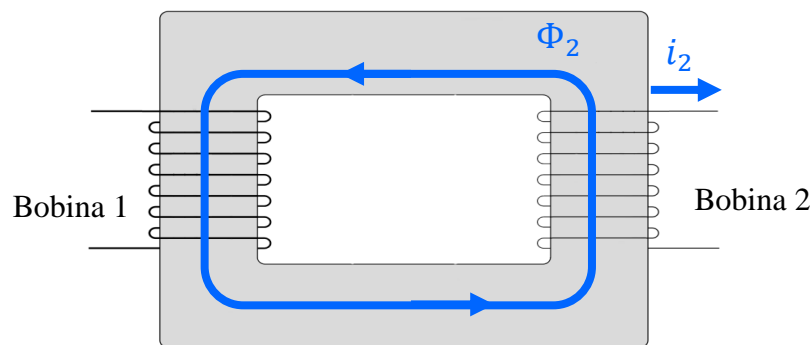
de transformação). No exemplo que usamos até aqui, não há corrente na bobina do secundário porque ela está em aberto. O que será que acontece quando há correntes no primário e no secundário ao mesmo tempo? Para responder a esta pergunta, vamos precisar pensar no conceito de **indutância mútua**. Observe a figura a seguir.



Definimos **indutância mútua** (não é a **autoindutância**!) como sendo a relação entre o fluxo magnético em **uma bobina** e a corrente que circula **em outra**, geradora do fluxo magnético. Na figura acima, Φ_1 é o fluxo magnético **no núcleo ferromagnético**, causado pela corrente que circula na bobina 1 (sendo B uniforme, $\Phi_1 = B \cdot A$, sendo A a área da seção transversal do ferro). Se Φ_1 é o fluxo no interior do material ferromagnético, o fluxo total na bobina 2 será $N_2 \cdot \Phi_1$, certo? Assim, a indutância mútua M_{21} é definida por:

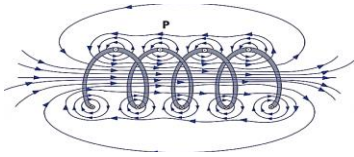
$$M_{21} = \frac{N_2 \cdot \Phi_1}{i_1}$$

Da mesma forma, como ilustrado na figura a seguir, podemos definir a indutância mútua M_{12} como a razão entre o fluxo total na bobina 1 e a corrente que o produziu, na bobina 2.



Ou seja, a indutância mútua M_{12} será:

$$M_{12} = \frac{N_1 \cdot \Phi_2}{i_2}$$



Em algumas aulas, teremos condições de demonstrar a você que, aplicando a Lei de Ampère-Maxwell (a última das quatro equações de Maxwell) a um solenoide de N espiras, em um núcleo ferromagnético de permeabilidade magnética μ e comprimento médio l , a intensidade do campo magnético será:

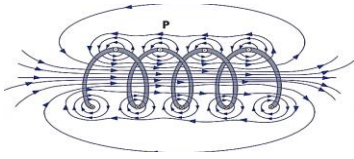
$$B = \frac{\mu \cdot N \cdot i}{l}$$

7. Usando a equação acima e considerado que o campo magnético \vec{B} seja uniforme na área A do núcleo ferromagnético, determine as expressões dos fluxos magnéticos Φ_1 e Φ_2 , considerando que o comprimento médio do material ferromagnético e a permeabilidade do núcleo sejam, respectivamente, l e μ . Denomine B_1 a intensidade do campo magnético produzido por i_1 , assim como B_2 a intensidade do campo magnético produzido por i_2 .

Você deve ter chegado a:

$$\Phi_1 = \frac{\mu \cdot N_1 \cdot i_1 \cdot A}{l}$$
$$\Phi_2 = \frac{\mu \cdot N_2 \cdot i_2 \cdot A}{l}$$

8. Obtenha as expressões das (**auto**)indutâncias L_1 e L_2 dos enrolamentos primário e secundário. Lembre-se de que Φ_1 e Φ_2 são fluxos produzidos em uma seção transversal do material ferromagnético!



9. Substitua as expressões de Φ_1 e Φ_2 nas equações das indutâncias mútuas M_{12} e M_{21} . O que é possível concluir?

Você deve ter concluído que:

$$M_{12} = \frac{N_1 \cdot \frac{\mu \cdot N_2 \cdot i_2 \cdot A}{l}}{i_2} = \frac{N_1 \cdot N_2 \cdot \mu \cdot A}{l}$$

$$M_{21} = \frac{N_2 \cdot \frac{\mu \cdot N_1 \cdot i_1 \cdot A}{l}}{i_1} = \frac{N_2 \cdot N_1 \cdot \mu \cdot A}{l}$$

Ou seja, $M_{12} = M_{21}$. Isso quer dizer que a indutância mútua é uma **propriedade do transformador**, e não de apenas uma das bobinas. Vamos, a partir de agora, denominar $M_{12} = M_{21} = M$, a indutância mútua do transformador. Assim, também concluímos que:

$$M \cdot i_2 = N_1 \cdot \Phi_2 \quad \text{e} \quad M \cdot i_1 = N_2 \cdot \Phi_1$$

No item 8, você deve ter concluído que L_1 e L_2 são:

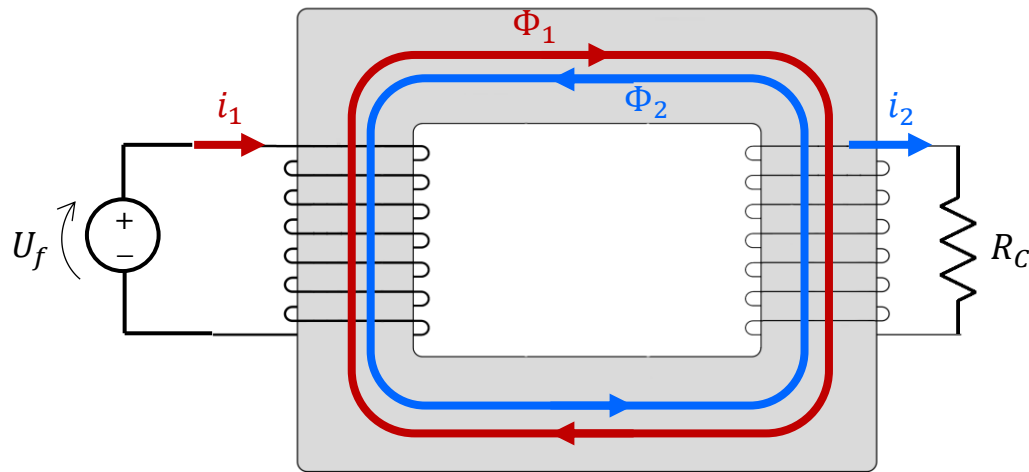
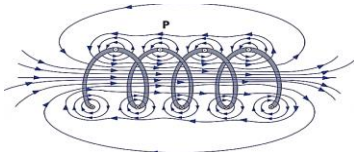
$$L_1 = \frac{N_1^2 \cdot \mu \cdot A}{l} \quad \text{e} \quad L_2 = \frac{N_2^2 \cdot \mu \cdot A}{l} ,$$

fica fácil demonstrar que:

$$M = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

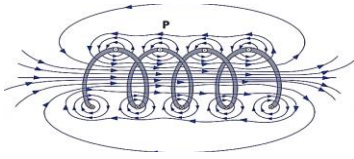
CONECTANDO O TRANSFORMADOR A UMA “CARGA”

Pronto, já temos condições de compreender o que acontecerá quando conectarmos ao secundário de nosso transformador um resistor de resistência R_C , conforme a figura a seguir. Já sabemos que o primário, quando conectado a uma fonte de tensão U_f , produzirá a corrente i_1 que, por sua vez, produzirá o fluxo Φ_1 em cada espira de ambos os enrolamentos. Também sabemos que, se o fluxo magnético for variável no tempo, haverá tensão induzida na bobina do secundário e, se a ela conectarmos um resistor, surgirá a corrente i_2 , a qual, por sua vez, causará o fluxo magnético Φ_2 . Complexo, não?



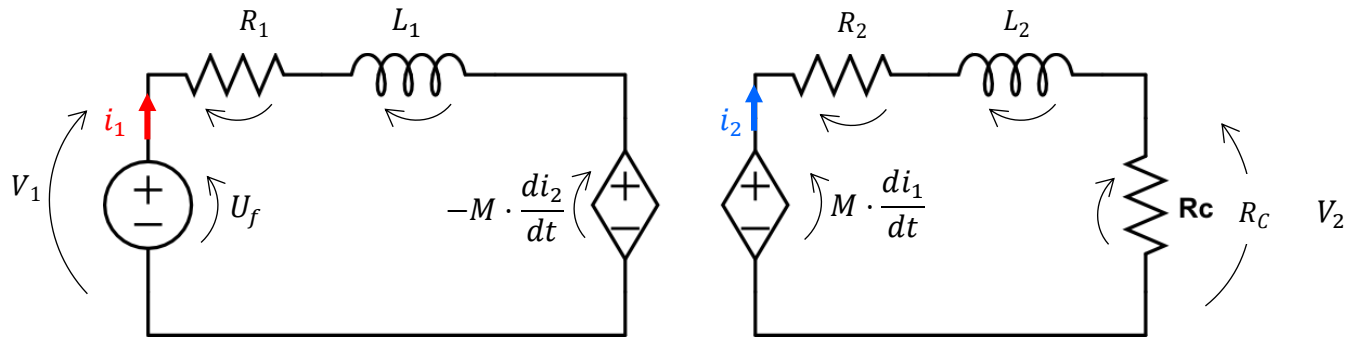
10. Observando a figura anterior, podemos dizer que a corrente i_1 depende da tensão da fonte (U_f) e da F.E.M. na bobina 1. Ocorre que, diferentemente do que estudamos anteriormente, a F.E.M. na bobina 1 agora é a derivada de um fluxo resultante, pois agora há dois, certo? Sabendo que quando temos em um circuito duas pilhas em paralelo, a corrente no circuito será tanto maior quanto maior for a diferença de potencial entre os polos positivos das pilhas. Tente explicar, com base nessa analogia, porque a corrente i_1 teria de aumentar quando conectamos o resistor R_C no secundário do transformador.

11. Se, estando R_C conectado ao circuito secundário, o desconectássemos, deixando o secundário em aberto, por que a corrente i_1 diminuiria? O que você pode dizer sobre o balanço de energia no transformador?



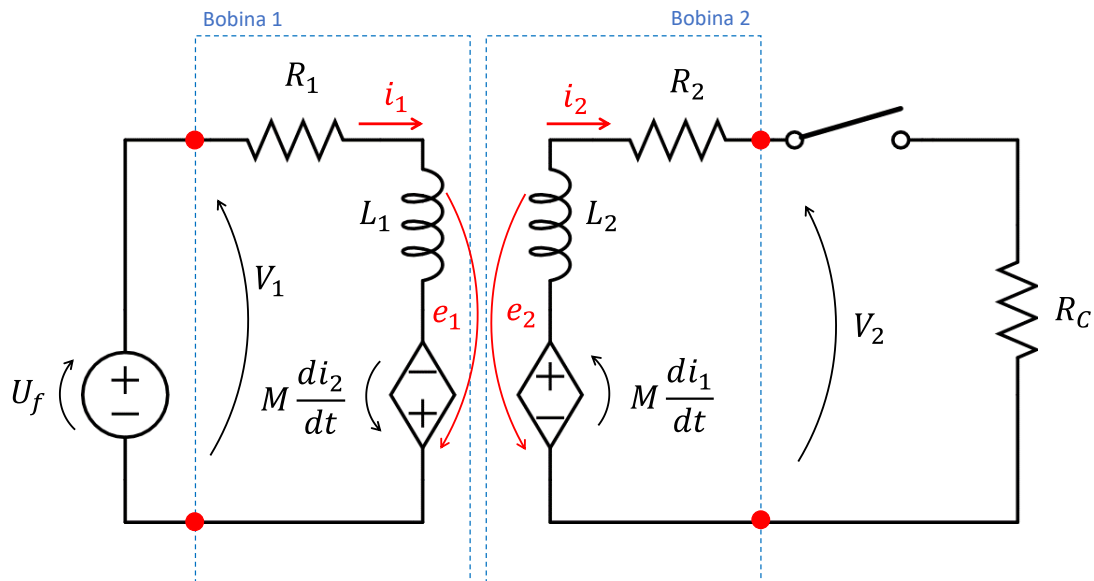
CIRCUITO EQUIVALENTE DE UM TRANSFORMADOR MONOFÁSICO

Na leitura complementar a esta aula, provamos que um transformador monofásico pode ser representado pelo circuito elétrico da figura a seguir.

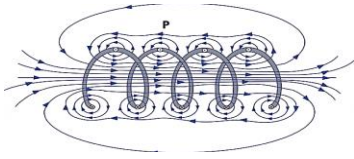


Nesse circuito, L_1 e L_2 são as autoindutâncias, R_1 e R_2 as resistências das bobinas do primário e secundário, respectivamente, e M é a indutância mútua do transformador.

O circuito também pode ser redesenhado da seguinte maneira:



Note que cada bobina é representada por uma resistência, uma autoindutância e uma fonte controlada pela intensidade de $\frac{di_2}{dt}$ no caso do primário e de $\frac{di_1}{dt}$ no caso do secundário. As tensões V_1 e V_2 são as tensões no primário e no secundário, respectivamente, tomadas nos terminais de cada uma das bobinas (tensões que podem ser medidas fisicamente).



Note que, nesse modelo, a F.E.M. no primário (e_1) é igual à F.E.M. que i_1 causa na bobina 1 ($L_1 \frac{di_1}{dt}$), menos a F.E.M. que i_2 causa na mesma bobina. Na bobina 2, e_2 também depende das correntes i_1 e i_2 . Analisando-se as tensões e_1 e e_2 do circuito, podemos escrever:

$$e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$e_2 = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

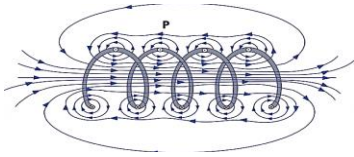
12. A partir das equações que você obteve nos itens **8** e **9**, prove que $\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2}$.

Ou seja, demonstramos que a relação e_1/e_2 continua sendo igual a N_1/N_2 , mesmo quando há correntes no primário e no secundário. A relação V_1/V_2 (a única que podemos medir), contudo, não é igual a N_1/N_2 , e dependerá dos valores de R_1 e R_2 .

Quando aplicamos a segunda Lei de *Kirchhoff* a cada uma das malhas do circuito equivalente do transformador, chegamos às seguintes equações:

$$U_f = R_1 \cdot i_1 + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - M \cdot \frac{di_2}{dt}$$

$$M \cdot \frac{di_1}{dt} = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + (R_2 + R_C) \cdot i_2$$



Para o caso de conectarmos o transformador a uma fonte de tensão senoidal, poderemos recorrer à **notação fasorial** para reescrever as equações acima. Somente no caso de estarmos em regime permanente senoidal, a uma frequência ω , teremos:

$$\hat{U}_f = R_1 \cdot \hat{i}_1 + j\omega L_1 \cdot \hat{i}_1 - j\omega M \cdot \hat{i}_2$$

$$j\omega M \cdot \hat{i}_1 = j\omega L_2 \cdot \hat{i}_2 + (R_2 + R_C) \cdot \hat{i}_2$$

Note que essa equação pode ser escrita na forma matricial:

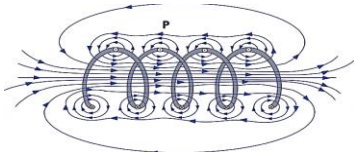
$$\begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & -j\omega M \\ -j\omega M & R_2 + R_C + j\omega L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{U}_f \\ 0 \end{bmatrix}$$

À matriz de impedâncias, damos o nome de \hat{Z} , assim como denominamos \hat{I} a matriz de correntes e \hat{V} a matriz de tensões, e isso nos permite reescrever a equação matricial acima na forma compacta $\hat{Z} \cdot \hat{I} = \hat{V}$ (alguma semelhança com a lei de Ohm?). Usando as propriedades da Álgebra Linear, você já sabe que podemos determinar \hat{I} usando:

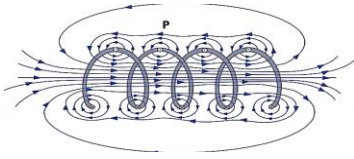
$$\hat{I} = \hat{Z}^{-1} \cdot \hat{V}$$

A equação matricial do transformador nos permite calcular as correntes \hat{i}_1 e \hat{i}_2 , assim como as tensões \hat{V}_1 e \hat{V}_2 , para qualquer R_C e para qualquer tensão da fonte em um transformador.

13. Vamos considerar um transformador com $R_1 = 4,5\Omega$, $L_1 = 300\text{ mH}$, $R_2 = 1,5\Omega$ e $L_2 = 30\text{ mH}$. Usando o modelo elétrico do transformador, calcule a corrente no enrolamento primário, i_1 , e a tensão e corrente no secundário, V_2 e i_2 , quando $U_f = 20\text{ V (DC)}$. O que você conclui sobre o funcionamento de um transformador em DC?



14. Acesse o *Blackboard* e baixe o arquivo *Jupyter Notebook* que está no diretório dessa aula. Implemente o código que lhe é pedido. Use o espaço abaixo para anotações.

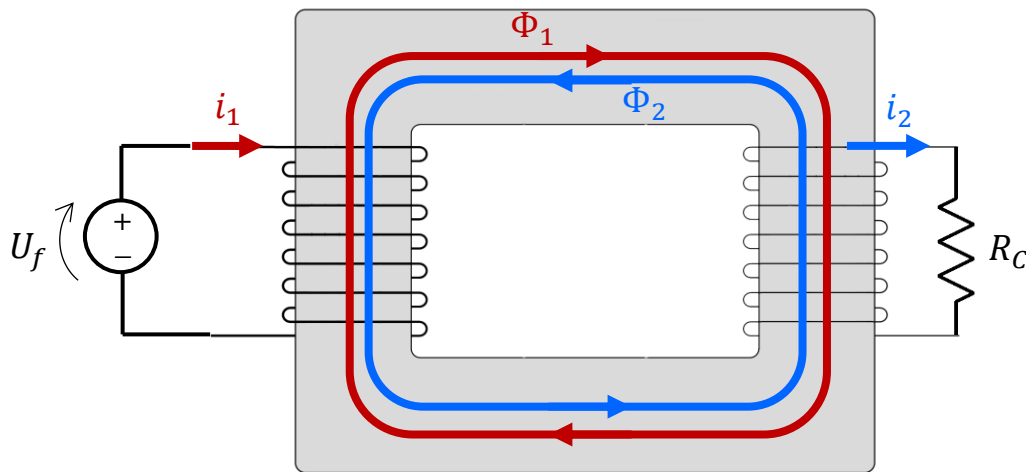


LEITURA COMPLEMENTAR PARA A AULA 9

TRANSFORMADORES

DERIVAÇÃO DO CIRCUITO EQUIVALENTE DO TRANSFORMADOR MONOFÁSICO

Na figura do transformador que aparece abaixo, há dois fluxos no material ferromagnético, certo? Considerando uma seção transversal dentro da bobina do secundário, podemos escrever que o fluxo resultante é $\Phi_R = \Phi_1 - \Phi_2$, já que os fluxos têm sinais opostos.



Perceba que tomamos como positivo o fluxo produzido pela corrente que circula na bobina do secundário, como fizemos quando definimos indutância. Se quisermos saber qual o fluxo total em todas as N_2 espiras da bobina do secundário do transformador, bastaria multiplicar o fluxo resultante por N_2 , não? Assim:

$$N_2 \cdot \Phi_R = N_2 \cdot \Phi_2 - N_2 \cdot \Phi_1$$

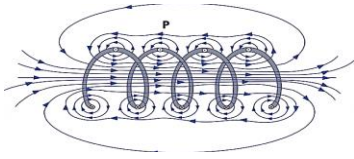
Já deduzimos que a indutância mútua do transformador é:

$$M = \frac{N_1 \cdot \Phi_2}{i_2} = \frac{N_2 \cdot \Phi_1}{i_1}$$

Consequentemente, $N_2 \cdot \Phi_1 = M \cdot i_1$. O termo $N_2 \cdot \Phi_2$, por sua vez, é o fluxo total na bobina do secundário produzido pela própria corrente no secundário. Como a relação entre a corrente e o fluxo produzido na própria bobina é a autoindutância, podemos escrever $N_2 \cdot \Phi_2 = L_2 \cdot i_2$. Substituindo os termos, chegamos a:

$$N_2 \cdot \Phi_R = L_2 \cdot i_2 - M \cdot i_1$$

Derivando ambos os membros dessa igualdade em relação ao tempo, chegamos a:



$$N_2 \cdot \frac{d\Phi_R}{dt} = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} - M \cdot \frac{di_1}{dt}$$

O que seria o termo $N_2 \cdot \frac{d\Phi_R}{dt}$? Pela lei de Faraday, $N_2 \cdot \frac{d\Phi_R}{dt} = -N_2 \cdot \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r}$, lembrando que $\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r}$ é a tensão induzida em apenas uma espira. Como no secundário não há outro campo elétrico além do induzido, sabemos, aplicando a Lei de Ohm, que:

$$N_2 \cdot \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = i_2 \cdot (R_2 + R_C)$$

Nessa equação, R_2 é a resistência do enrolamento da bobina do secundário. Substituindo esse termo na equação anterior, chegamos a:

$$-i_2 \cdot (R_2 + R_C) = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} - M \cdot \frac{di_1}{dt}$$

Ou

$$M \cdot \frac{di_1}{dt} = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + i_2 \cdot (R_2 + R_C)$$

Consegue imaginar um circuito eletrodinâmico que seja usado como modelo para descrever essa equação? Já chegaremos nele, mas, antes, vamos à bobina do enrolamento primário. Da mesma forma que fizemos para o secundário, se quisermos o fluxo resultante na bobina do primário do transformador, tomando o fluxo gerado pela corrente i_1 como positivo, partiremos de:

$$N_1 \cdot \Phi_R = N_1 \cdot \Phi_1 - N_1 \cdot \Phi_2$$

E chegaremos a:

$$N_1 \cdot \Phi_R = L_1 \cdot i_1 - M \cdot i_2$$

Derivando ambos os membros dessa igualdade em relação ao tempo, obtemos:

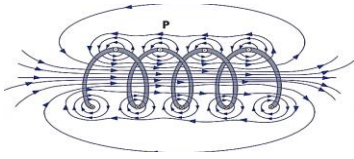
$$N_1 \cdot \frac{d\Phi_R}{dt} = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - M \cdot \frac{di_2}{dt}$$

Agora, atenção. Diferentemente do secundário, no primário temos dois campos elétricos: o campo induzido \vec{E}_i e o campo elétrico imposto pela fonte, \vec{E}_f . Como fizemos no item 7, sabemos que o campo elétrico resultante no condutor da bobina, que é o responsável pela existência da corrente elétrica, será $\vec{E}_R = \vec{E}_f + \vec{E}_i$. Lembrando que $\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r}$ representa a ddp induzida em uma espira da bobina, e supondo que seus terminais sejam A e B , sabemos que a diferença de potencial induzida na **bobina toda** será igual a:

$$-N_1 \frac{d\Phi_R}{dt} = N_1 \cdot \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{r}$$

Fazendo as integrais de linha dos campos elétricos no fio, entre os terminais A e B , chegamos a:

$$\int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E}_R \cdot d\vec{r} - \int_A^B \vec{E}_f \cdot d\vec{r}$$



Substituindo $-\int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{r}$ por $N_1 \frac{d\Phi_R}{dt}$ na equação do primário do transformador, chegamos a:

$$-\int_A^B \vec{E}_R \cdot d\vec{r} + \int_A^B \vec{E}_f \cdot d\vec{r} = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - M \cdot \frac{di_2}{dt}$$

Sendo R_1 a resistência elétrica do enrolamento primário, a Lei de Ohm, aplicada ao primeiro termo da equação do fluxo resultante no enrolamento primário, resulta em:

$$\int_A^B \vec{E}_R \cdot d\vec{r} = R_1 \cdot i_1$$

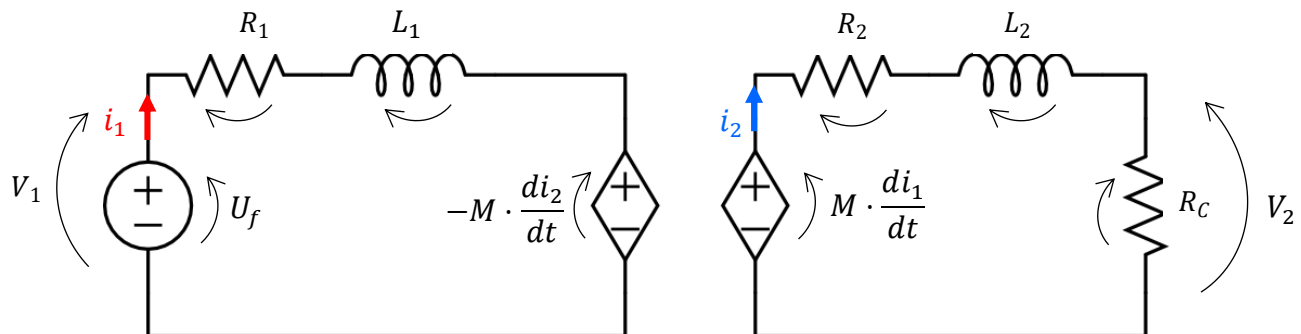
Com relação ao campo elétrico provocado pela fonte, sabemos que:

$$\int_A^B \vec{E}_f \cdot d\vec{r} = U_f$$

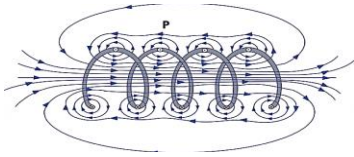
E, assim:

$$U_f = R_1 \cdot i_1 + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - M \cdot \frac{di_2}{dt}$$

Consegue pensar num modelo de circuito eletrodinâmico que seja condizente com a equação acima para o circuito primário do transformador? O circuito abaixo é um modelo eletrodinâmico que contempla **as duas equações** ao mesmo tempo, a do secundário e a do primário. Perceba que $M \cdot \frac{di_2}{dt}$ e $M \cdot \frac{di_1}{dt}$ são forças eletromotrizes causadas pela taxa de variação temporal das correntes i_2 e i_1 , respectivamente. No modelo eletrodinâmico, representamos essas F.E.M. por fontes controladas (nas quais a tensão depende de parâmetros e variáveis do próprio circuito, no caso, a indutância mútua e as derivadas das correntes). Perceba que, dada a indutância mútua, quanto maior a taxa de variação da corrente i_2 , menor será a tensão $-M \cdot \frac{di_2}{dt}$ (porém, maior em módulo), resultando no aumento da corrente i_1 no circuito primário. Ao mesmo tempo, no secundário, quanto maior a taxa de variação da corrente i_1 , maior a tensão induzida no secundário, e, conseqüentemente, maior a corrente i_2 .



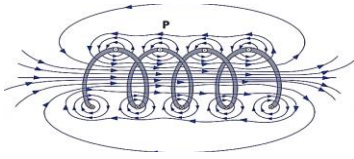
Aplicando a segunda Lei de Kirchhoff (a lei das tensões) a cada uma das malhas, chegamos às mesmas equações:



$$U_f = R_1 \cdot i_1 + L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} - M \cdot \frac{di_2}{dt}$$

$$M \cdot \frac{di_1}{dt} = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + i_2 \cdot (R_2 + R_C)$$

Note que, ao deixarmos o circuito secundário em aberto, por exemplo, retirando o resistor R_C , a corrente i_2 será nula, bem como di_2/dt , fazendo com que a tensão $-M \cdot \frac{di_2}{dt}$ também seja nula, o que equivale a um fio (ddp nula). Essa condição fará com que haja corrente no primário, dependente apenas da resistência desse enrolamento e de sua autoindutância. Esta é a condição de transformador em aberto, na qual i_1 é mínima. Use o modelo para pensar em outras situações (como um curto-circuito no secundário) de funcionamento do transformador.



AULA 10

LEI DE AMPÈRE

CORRENTES PRODUZEM CAMPOS MAGNÉTICOS: A LEI DE AMPÈRE

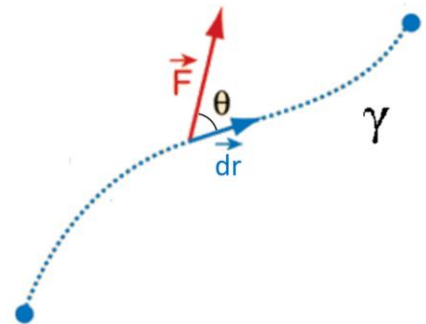
De acordo com a lei de Gauss para campos magnéticos, não existem monopolos magnéticos, ou seja, não há um análogo da carga elétrica que gere um campo magnético. Já vimos que condutores percorridos por correntes produzem campos magnéticos (lembra da “lei” de Biot-Savart?), mas na ocasião enfatizamos que as aspas usadas na palavra “lei” seriam justificadas mais à frente. Hoje, vamos aprender qual é a verdadeira lei que explica a geração de campos magnéticos por cargas em movimento.

Antes, vamos apresentar um nome novo para algo que já conhecíamos: vamos chamar de **circuitação** a integral de linha em um caminho fechado. Para ajudar a visualizar, vamos usar o exemplo do trabalho: o trabalho W de uma força \vec{F} ao longo de uma trajetória γ é dado por uma integral de linha:

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Se os pontos inicial e final da trajetória γ coincidirem, é usual colocar um símbolo na integral:

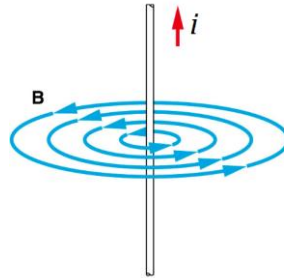
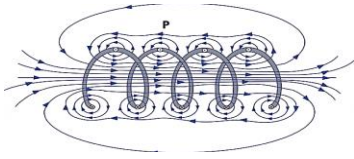
$$W = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Nesse caso particular em que a curva γ é fechada, dizemos que o trabalho W é a **circuitação** da força \vec{F} ao longo da trajetória γ . Outro exemplo: a circuitação do campo elétrico induzido ao longo de um circuito fechado é a força eletromotriz nesse circuito.

Generalizando, a circuitação de um campo vetorial ao longo de uma trajetória fechada é simplesmente a integral da componente tangencial do campo ao longo dessa trajetória, com relação ao elemento de deslocamento.

Agora, vamos analisar a circuitação de um campo magnético \vec{B} . Empiricamente, Oersted observou que o campo magnético produzido por uma carga em movimento sempre atuava em uma direção ortogonal à direção da velocidade da carga. Em particular, por simetria, no caso de um fio longo percorrido por uma corrente, as linhas de campo são como as exibidas a seguir:



1. Considere uma trajetória coincidente com uma dessas linhas de campo, todas circulares. Se orientarmos essa trajetória no mesmo sentido das linhas de campo, qual será o sinal da circulação do campo magnético ao longo da trajetória?

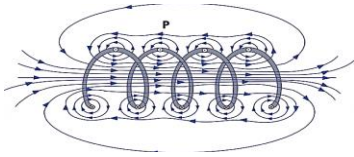
2. Justifique porque alguns físicos chamam a circulação do campo magnético de “força magnetomotriz”.

Em 1820, após assistir a uma apresentação sobre os resultados encontrados por Oersted, um homem chamado André Marie Ampère ficou muito curioso e passou a conduzir uma série de experimentos, os quais o levaram a concluir que essa “força magnetomotriz” era proporcional à intensidade da corrente total i que atravessa a superfície delimitada pela curva fechada γ . A constante de proporcionalidade é a permeabilidade magnética, denotada por μ_0 no caso do vácuo, cujo valor é:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

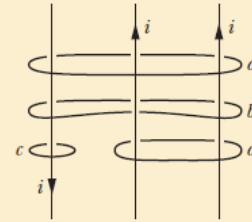
3. Escreva matematicamente essa conclusão, que ficou conhecida como lei de Ampère.

4. Resolva o exercício a seguir, extraído do livro Fundamentos de Física (Halliday & Resnick):



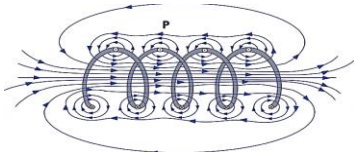
Checkpoint 2

The figure here shows three equal currents i (two parallel and one antiparallel) and four Amperian loops. Rank the loops according to the magnitude of $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ along each, greatest first.



A lei de Ampère é útil para calcular o campo magnético gerado em alguns casos em que há simetria. Por exemplo, no caso do condutor retilíneo mostrado na figura da folha anterior, é possível obter com poucas linhas uma expressão para o campo magnético em um ponto a uma distância r do fio, desde que a curva γ seja escolhida de maneira adequada.

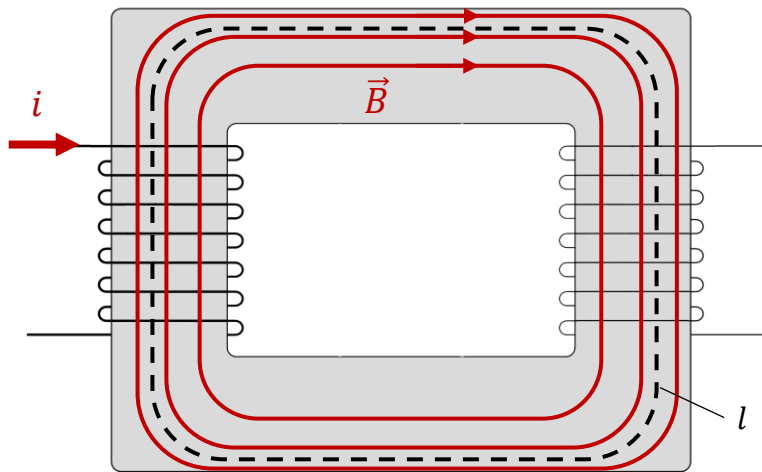
5. Obtenha essa expressão.



Na aula sobre transformadores, dissemos a você que demonstraríamos a equação do campo magnético no interior de um solenoide, lembra? Pois bem, chegou a hora! Considere o enrolamento primário do transformador que estudamos na aula passada. Dissemos a você que a intensidade do campo magnético \vec{B} , no interior do material ferromagnético, era dada por

$$B = \frac{\mu \cdot N \cdot i}{l} ,$$

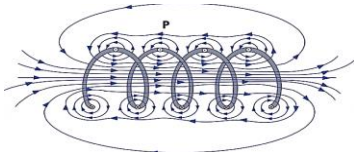
sendo μ a permeabilidade magnética do meio, N o número de espiras da bobina, i a corrente que circula no condutor do solenoide e, por fim, l o comprimento médio do material ferromagnético.



6. Usando a Lei de Ampère, obtenha a expressão da intensidade de \vec{B} no interior do solenoide. Para isso, considere que o campo magnético é uniforme em qualquer seção transversal no núcleo, o que é uma premissa razoável, considerando a propriedade magnética dos materiais ferromagnéticos, discutida na aula passada.

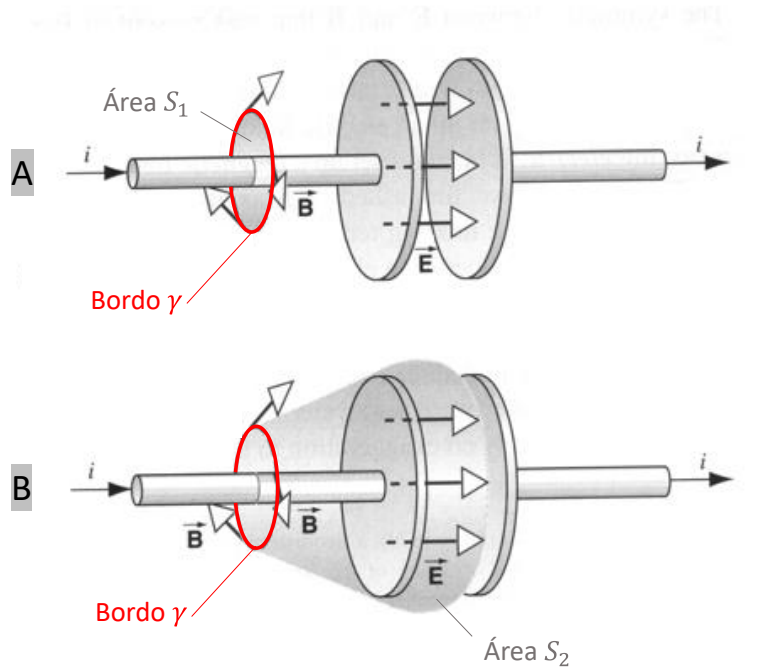
“FALHA” NA LEI DE AMPÈRE: AS CORRENTES DE DESLOCAMENTO

Considere um capacitor de placas planas de área A , próximas o suficiente uma da outra para que possam ser consideradas infinitas em relação à distância que as separa. Imagine que o capacitor está sendo carregado, ou



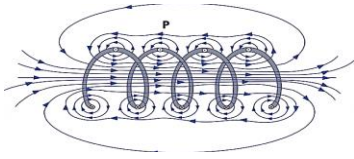
seja, nesse instante passa uma corrente i pelo fio conectado às suas placas. Como vimos, essa corrente produzirá um campo magnético \vec{B} ao redor do fio e, de acordo com a lei de Ampère, a circulação de \vec{B} ao longo de qualquer trajetória fechada γ será proporcional à corrente que atravessa a superfície S delimitada por essa curva fechada.

Porém, ainda de acordo com a lei de Ampère, a superfície S é arbitrária, desde que seu contorno seja exatamente a curva fechada ao longo da qual se está integrando o campo magnético. Assim, considere as duas situações exibidas na figura a seguir.



Em ambas as situações, a curva γ ao longo da qual integraremos o campo magnético é a mesma, mas as superfícies por ela delimitadas diferem: em A, o fio que alimenta as placas atravessa a superfície S_1 , mas em B essa superfície, S_2 , passa entre as placas do capacitor, não sendo atravessada pela corrente.

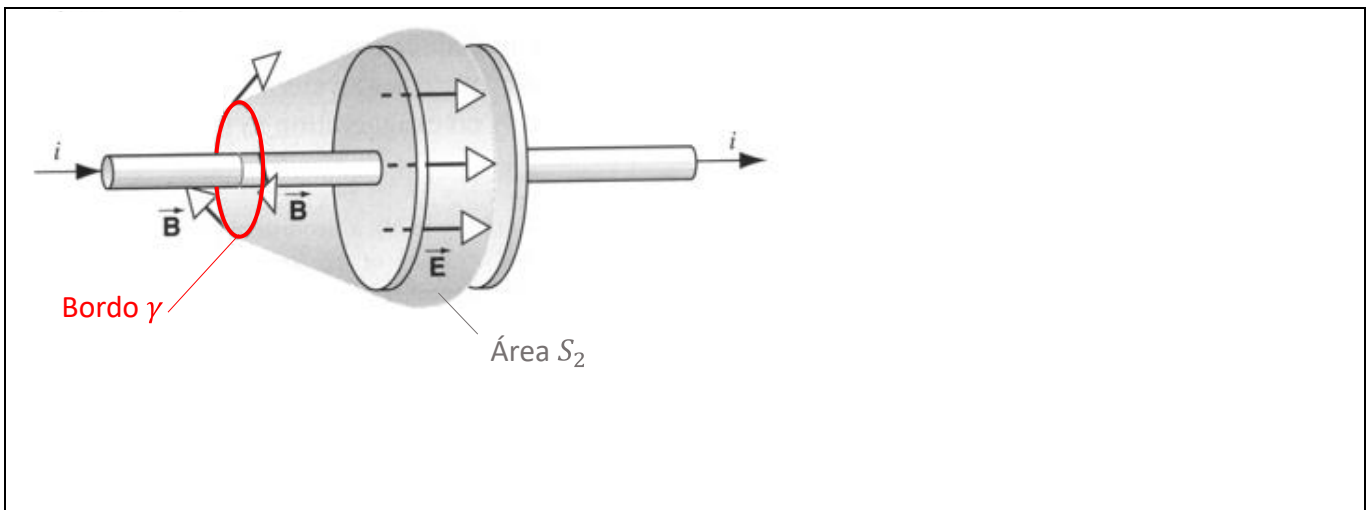
7. Usando a lei de Ampère, obtenha uma expressão para o campo magnético produzido pela corrente i a uma distância r do fio em cada uma das situações A e B.



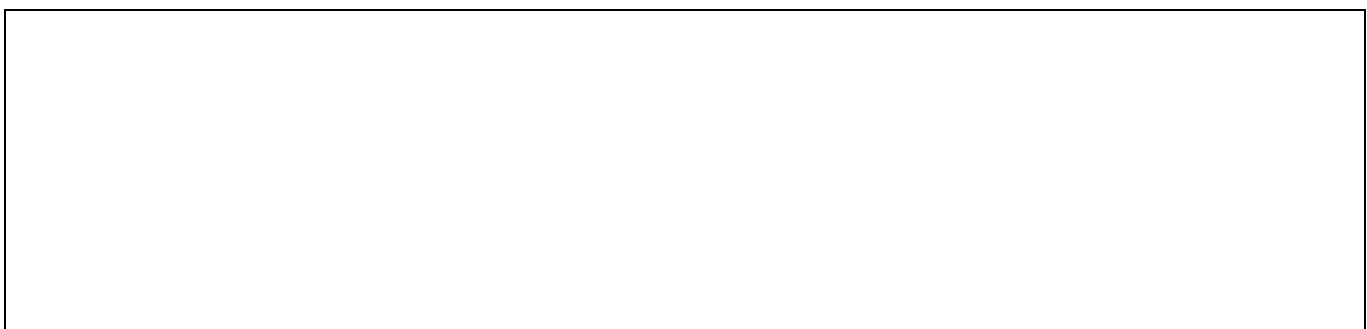
Provavelmente, você deve ter obtido resultados contraditórios: na situação B, o campo magnético obtido tem intensidade nula! Obviamente, as leis da Física não dependem de superfícies imaginárias para funcionar, o que nos leva a uma conclusão: há alguma “falha” na lei de Ampère. Usamos as aspas porque, na verdade, a lei é totalmente válida quando não há variação do fluxo do campo elétrico no tempo. Note que esse não é o caso do capacitor que acabamos de descrever.

8. Vamos obter a intensidade do campo magnético na situação B de outra forma: primeiramente, obtenha uma expressão para o fluxo elétrico total Φ_E que atravessa a superfície S_2 em função da carga Q com a qual o capacitor está carregado naquele instante.

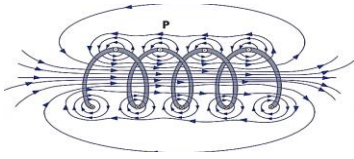
Dica: use a lei de Gauss.



9. A carga no capacitor é proveniente da corrente no fio, de modo que a derivada $\frac{dQ}{dt}$ é exatamente a corrente i . Obtenha, então, uma expressão para a corrente i em função de Φ_E . Analise dimensionalmente a expressão obtida.



Por mais que a intensidade dessa corrente seja igual à derivada $\frac{dQ}{dt}$, fisicamente a interpretação é bem diferente: na situação A, a corrente que atravessa a superfície S_1 de fato é o que conhecemos como corrente: elétrons fluindo ao longo de um condutor. Mas, na situação B, não há um fluxo de elétrons ao longo do dielétrico entre as placas, ou seja, não se trata de uma corrente no sentido usual da palavra. Essa corrente “diferente” foi



batizada por James Clark Maxwell de **corrente de deslocamento**, e tem sido motivo de debates há mais de um século: trata-se de uma corrente de fato, ou apenas de algo matematicamente equivalente?

Feynman diria: não importa! Se o modelo passou a explicar o que antes não explicava, é um bom modelo. A verdade é que essa tal da corrente de deslocamento não tem análogo mecânico, sendo algo difícil (senão impossível) de “enxergar”. O próprio Maxwell passou por esse drama e tentou, em dois trabalhos publicados em 1861 e 1862, explicar esse fenômeno mecanicamente: imaginou que o vácuo fosse preenchido por um tipo de *éter*, algo similar a um meio elástico.

Porém, quanto mais ele tentava usar esse modelo mecânico, menos ele conseguia entender o fenômeno. Finalmente, em 1864, em seu trabalho “Uma Teoria Dinâmica do Campo Eletromagnético”, ele abandona totalmente esse modelo e diz:

“Tentei anteriormente descrever um tipo particular de movimento e de tensões mecânicas, combinados de tal forma que explicassem os fenômenos. Na presente memória, evito qualquer hipótese desse gênero... Entretanto, quando falo da energia do campo, é literalmente com esse significado... A questão que se coloca é: *onde se localiza essa energia?* Em nossa teoria, ela reside no campo eletromagnético...” (Nussenzveig, H. M., *Curso de Física Básica*, vol. 3)

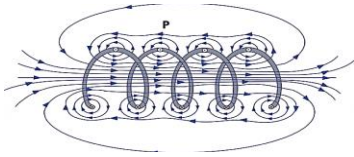
Ocorre que esse conceito é considerado um marco histórico da Física, já que estabelece, basicamente, que **campos elétricos que variam no tempo produzem campos magnéticos**, e o nome que damos a um trecho de uma expressão matemática é muito, muito menos relevante do que a conclusão destacada. Juntando esse fato a outro que já conhecíamos, de que campos magnéticos que variam no tempo produzem campos elétricos, três teorias da física foram unificadas sob uma só: eletricidade, magnetismo e óptica passaram a fazer parte de uma única teoria, chamada eletromagnetismo. E essa observação fez com que Maxwell fosse considerado pelo próprio Einstein como o maior físico desde Newton.

Maxwell corrigiu a lei de Ampère, que passou a ser escrita como:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \cdot \left(i + \epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$$

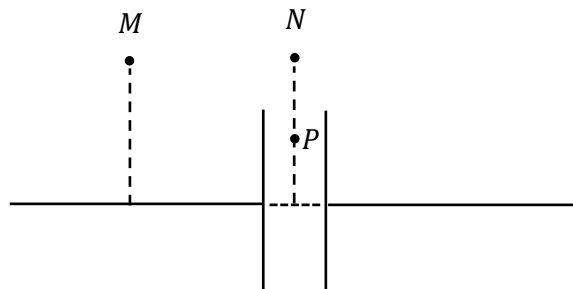
Sendo que a quantidade $\epsilon_0 \cdot \frac{d\Phi_E}{dt}$ é conhecida como **corrente de deslocamento**.

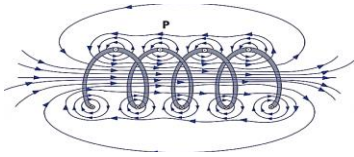
10. (Exercício) Considere um capacitor de placas planas e circulares, de raio medindo 3 mm. A uma distância radial de 6 mm do eixo central do capacitor, o campo magnético induzido tem intensidade de $2 \cdot 10^{-7} \text{ T}$. Com que intensidade o campo elétrico entre as placas está variando no tempo, ou seja, qual é a intensidade de dE/dt ?



11. (Exercício) Um capacitor, no vácuo, de capacitância igual a C é conectado a uma fonte de DDP U até ser completamente carregado. Em seguida, ele é desconectado da fonte e conectado a um resistor, até que fique completamente descarregado.

Esse capacitor, ao contrário dos tradicionais, tem uma característica peculiar: a velocidade com que descarrega é constante. A figura a seguir traz uma representação esquemática do capacitor, cujas placas são paralelas e circulares de raio medindo ρ , próximas o suficiente uma da outra para que possam ser consideradas infinitas.



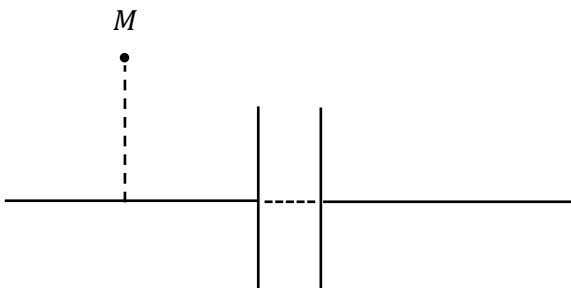


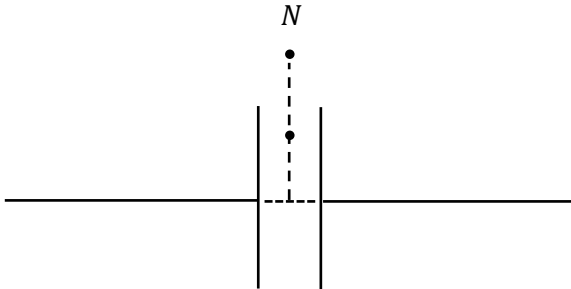
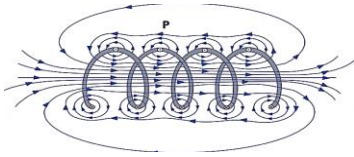
Os pontos M e N estão a uma mesma distância $L > \rho$ do eixo do capacitor e o ponto P está a uma distância $l < \rho$ do eixo do capacitor.

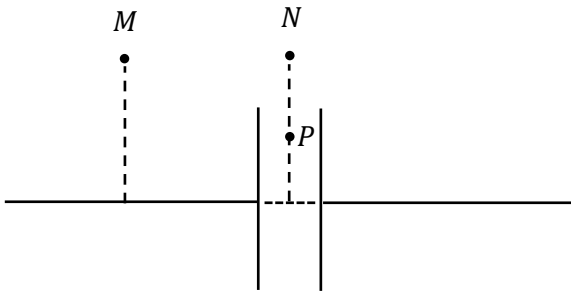
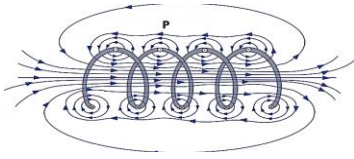
a) Calcule a corrente que flui no resistor quando o capacitor está descarregando, supondo que a descarga completa leve um intervalo de tempo Δt .

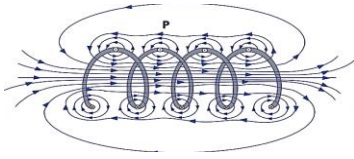
Observação: a relação entre a DDP U , a carga Q e a capacitância C é $Q = U \cdot C$.

b) Calcule a intensidade do campo magnético nos pontos M , N e P em dois momentos distintos: **(I)** quando o capacitor está completamente carregado e **(II)** enquanto o capacitor descarrega. Caso necessite de dados não fornecidos, como μ_0 e ϵ_0 , deixe-os na forma literal. O mesmo vale para as distâncias L e l e para o raio ρ .









LEITURA PRÉVIA PARA A AULA 11

DIVERGENTE E ROTACIONAL DE UM CAMPO

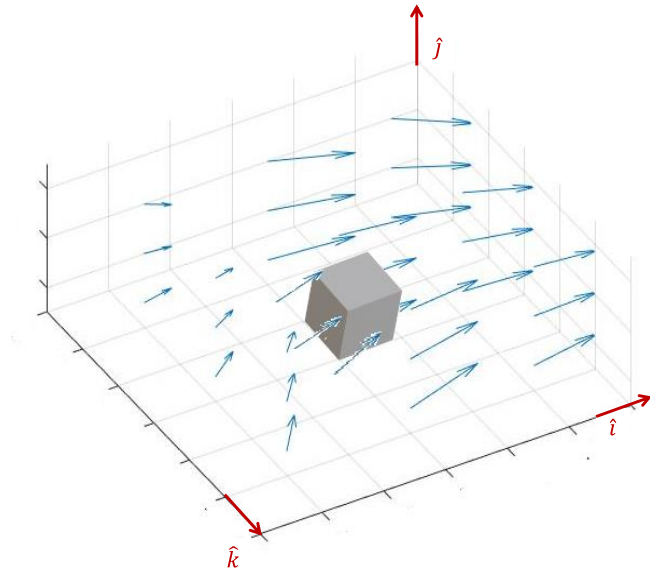
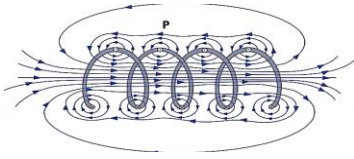
O DIVERGENTE DE UM CAMPO

Talvez você já tenha ouvido antes o termo “divergente de um campo vetorial”, mas provavelmente não deve estar familiarizado(a) com seu significado. Primeiramente, o que chamamos de divergente é uma grandeza escalar, ou seja, um número. Esse número é uma propriedade de qualquer **ponto** de um campo vetorial (lembre-se que um campo vetorial é uma região do espaço onde, associado a cada ponto, há um vetor). De maneira pouco precisa, a propriedade (de um ponto) que estamos chamando de divergente mede o fluxo vetorial em um ponto. Já sei, você deve estar se perguntando: “Como é possível haver fluxo em um ponto? Fluxos vetoriais são calculados para superfícies, abertas ou fechadas!”. Você tem razão! O Divergente não é exatamente o fluxo no ponto, mas sim o limite de uma divisão: o divergente em um ponto é o limite da divisão entre o fluxo **em uma superfície fechada** muito pequena, a qual envolve o ponto, e o **volume dessa superfície**. Matematicamente, o definimos como:

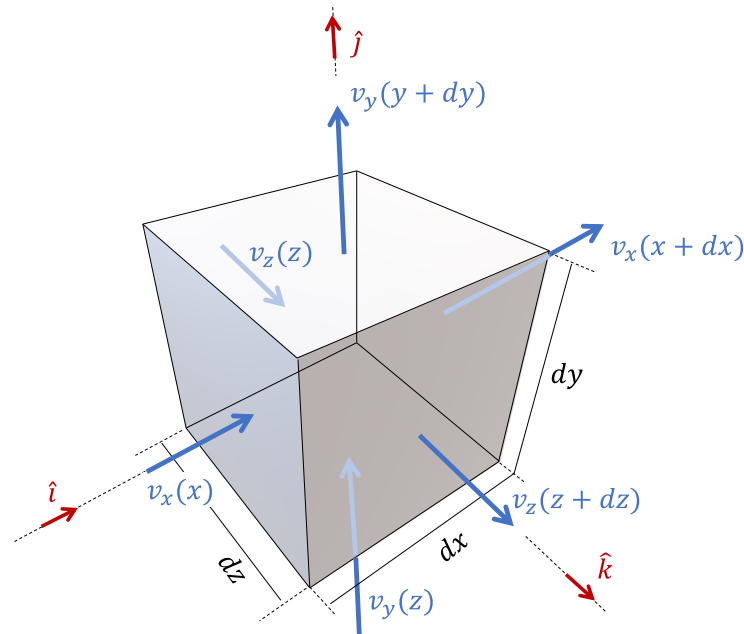
$$\text{Divergente} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi(V)}{V}$$

Se um ponto tem divergente positivo, significa que o fluxo em uma superfície fechada qualquer, de volume infinitesimal e que envolve o ponto, é positivo (campo vetorial predominantemente para fora da superfície). Se o divergente de um ponto é nulo, o fluxo através de qualquer superfície infinitesimal que o envolve é nulo (o que entra é igual ao que sai, ou simplesmente nada entra ou sai). Se o divergente é negativo, o fluxo vetorial deve ser predominantemente “entrando” na superfície que envolve o ponto.

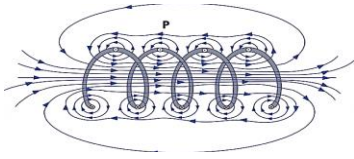
Agora que temos uma ideia a respeito do que significa o valor divergente de um ponto, podemos tentar encontrar uma maneira de calculá-lo. Para isso vamos imaginar uma superfície fechada cúbica em um campo vetorial. Queremos calcular o valor do divergente em um ponto licalizado no centro do cubo. Para isso, precisamos calcular o fluxo total nas superfícies do cubo. Vamos considerar que a superfície cúbica está posicionada de maneira a ter as arestas paralelas às direções \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} , como mostra a figura a seguir.



Considere que o campo vetorial da figura acima é dado por $\vec{V}(x, y, z) = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$. Como o cubo está alinhado com as direções \hat{i}, \hat{j} e \hat{k} , sabemos que o fluxo em cada uma das faces é causado por apenas uma das componentes de \vec{V} , como ilustra a figura abaixo.



Percebemos que nas faces laterais, que são perpendiculares ao vetor \hat{i} , apenas a componente \vec{v}_x produz fluxo, ao passo que nas faces superior e inferior, fluxo é produzido apenas pela componente \vec{v}_y . Por fim, nas faces da frente e de trás do cubo, apenas a componente \vec{v}_z gera fluxo.



Se analisarmos a figura acima, considerando o cubo com dimensões dx , dy , dz e a área de cada face como sendo A , o fluxo total através do cubo pode então ser dado por:

$$d\phi = (\vec{v}_x(x+dx) + \vec{v}_x(x)) \cdot \hat{n}_x \cdot A + (\vec{v}_y(y+dy) + \vec{v}_y(y)) \cdot \hat{n}_y \cdot A + (\vec{v}_z(z+dz) + \vec{v}_z(z)) \cdot \hat{n}_z \cdot A$$

Todas as normais estão na mesma direção das componentes em cada face. Além disso, a área de cada face pode ser dada por $A = dxdy = dydz = dzdx$. Calculando os produtos escalares, o fluxo total será:

$$d\phi = (v_x(x+dx) - v_x(x))dydz + (v_y(y+dy) - v_y(y))dxdz + (v_z(z+dz) - v_z(z))dydx$$

Lembrando do conceito da derivada parcial em relação a x , temos que $\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{v_x(x+dx) - v_x(x)}{dx}$, e disso decorre que a variação $v_x(x+dx) - v_x(x) = \frac{\partial v_x}{\partial x} dx$. Do mesmo modo, a variação $v_y(y+dy) - v_y(y) = \frac{\partial v_y}{\partial y} dy$ e $v_z(y+dy) - v_z(y) = \frac{\partial v_z}{\partial z} dz$. Vamos considerar que o ponto pertencente ao centro do cubo, para qual estamos calculando o valor do divergente, possui coordenadas (x_0, y_0, z_0) . A equação do fluxo passa a ser, então:

$$d\phi = \left. \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|_{x_0} dxdydz + \left. \frac{\partial v_y}{\partial y} \right|_{y_0} dxdydz + \left. \frac{\partial v_z}{\partial z} \right|_{z_0} dxdydz$$

Lembre-se que no início dessa atividade definimos o divergente como o limite da razão entre o fluxo numa pequena superfície fechada (tendendo a um ponto) e o volume dessa superfície. Aplicando esse conceito e observando que o volume do cubo $dv = dxdydz$, temos:

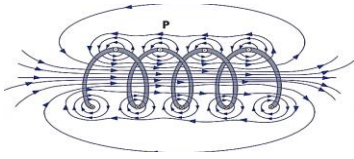
$$\text{Divergente} = \frac{d\phi}{dv} = \frac{\left. \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|_{x_0} dxdydz + \left. \frac{\partial v_y}{\partial y} \right|_{y_0} dxdydz + \left. \frac{\partial v_z}{\partial z} \right|_{z_0} dxdydz}{dxdydz} = \left. \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|_{x_0} + \left. \frac{\partial v_y}{\partial y} \right|_{y_0} + \left. \frac{\partial v_z}{\partial z} \right|_{z_0}$$

Assim, o divergente em um ponto genérico de um campo vetorial é sempre dado pelo escalar que é a soma das derivadas parciais no ponto! Podemos representar essa operação com o operador *nabla*, que é um vetor definido por:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

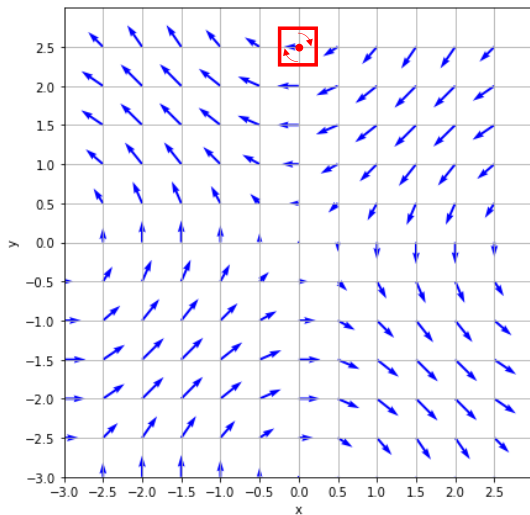
Como o campo vetorial é dado por $\vec{V}(x, y, z) = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$, o cálculo do divergente em um ponto não passaria de um produto escalar (cujo resultado é um escalar) entre o operador *nabla* e o campo vetorial. Ou seja, o divergente de qualquer ponto x, y, z de um campo vetorial é dado por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}(x, y, z) = \left. \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|_x + \left. \frac{\partial v_y}{\partial y} \right|_y + \left. \frac{\partial v_z}{\partial z} \right|_z$$



O ROTACIONAL DE UM CAMPO

Assim como o divergente, o **rotacional** é uma função de ponto, ou seja, para um dado campo **vetorial**, podemos calcular o rotacional em um ponto. Entretanto, diferentemente do divergente, o resultado para o cálculo do rotacional é um **vetor**. Assim, o rotacional de um campo vetorial é uma função que atribui um vetor a cada ponto



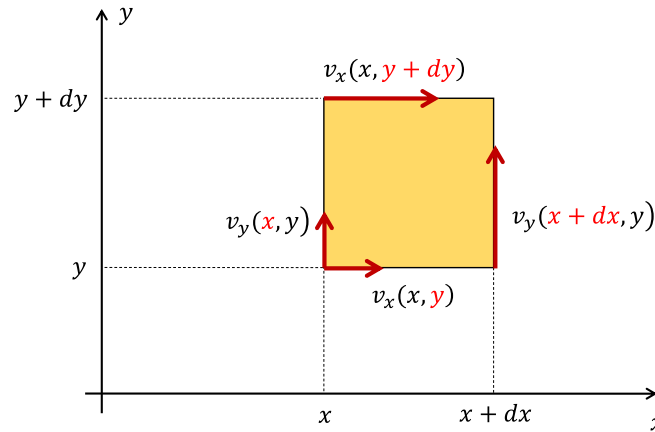
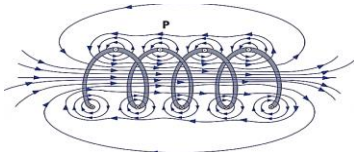
de um campo vetorial. Para simplificar um pouco nossa aula, vamos começar por um caso particular: vamos definir o rotacional de um campo vetorial de apenas duas dimensões, dado por $\vec{V} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$ (depois generalizaremos para o caso tridimensional). Considere o campo vetorial mostrado ao lado e vamos supor que desejamos calcular o rotacional para o ponto $(0, 2.5)$ da figura ao lado. Para obtermos a intensidade do rotacional nesse ponto, vamos considerar uma pequena área cujo centro coincide com o ponto (uma área infinitesimal). A intensidade (o módulo) do rotacional do ponto em questão é então dada pela integral de linha ao longo da borda dessa área (retângulo vermelho), dividida pela própria área. Como estamos nos referindo a uma área infinitesimal, a intensidade do rotacional do ponto será dada por:

$$|\text{rot } \vec{V}| = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{V} \cdot d\vec{r}}{A}$$

Devemos considerar que o rotacional para o campo vetorial $\vec{V} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$ aponta na direção da normal da superfície formada pelo caminho de integração, tendo como orientação o sentido anti-horário. Nesse caso, teríamos o rotacional na direção \hat{k} :

$$\text{rot } \vec{V} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{V} \cdot d\vec{r}}{A} \hat{n} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{V} \cdot d\vec{r}}{A} \hat{k}$$

Então, o rotacional de um ponto no campo vetorial bidimensional é dado pelo limite da razão entre uma integração ao longo de um caminho com comprimento tendendo a zero e a área formada por esse caminho no plano (x, y) . A seguir, tentaremos encontrar esse limite. Vamos considerar um retângulo infinitesimal no plano (x, y) em torno do ponto para o qual queremos calcular o rotacional. Vamos considerar ainda que os lados desse retângulo estejam alinhados com as direções \hat{i} e \hat{j} , e tenham dimensões dx e dy . Dessa maneira, a integral fechada ao longo das laterais do retângulo pode ser feita considerando separadamente as componentes v_x e v_y . Observe a figura abaixo.



Como as componentes estão alinhadas com os lados do retângulo, a integração no sentido anti-horário nos dá:

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{r} = v_x(x, y)dx + v_y(x+dx, y)dy - v_x(x, y+dy)dx - v_y(x, y)dy$$

Pela definição da derivada parcial, sabemos que, para qualquer ponto x , $v_x(x, y+dy) = v_x(x, y) + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy$ e, para qualquer ponto y , $v_y(x+dx, y) = v_y(x, y) + \frac{\partial v_y}{\partial x}dx$. Substituindo ambos os termos na equação anterior, temos:

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{r} = v_x(x, y)dx + \left[v_y(x, y) + \frac{\partial v_y}{\partial x}dx \right]dy - \left[v_x(x, y) + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy \right]dx - v_y(x, y)dy$$

Nessa expressão, as derivadas parciais $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ e $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ são calculadas no ponto para o qual estamos calculando o rotacional. Aplicando a distributiva com dy e dx , chegamos a:

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}dydx + \frac{\partial v_y}{\partial x}dxdy$$

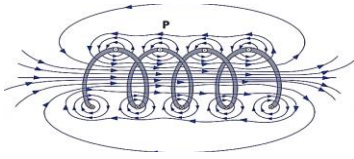
E assim, podemos calcular o rotacional:

$$\text{rot } \vec{V} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{V} \cdot d\vec{r}}{A} \hat{n} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{V} \cdot d\vec{r}}{A} \hat{k} = \lim_{dxdy \rightarrow 0} \frac{\left(-\frac{\partial v_x}{\partial y}dydx + \frac{\partial v_y}{\partial x}dxdy \right)}{dxdy} \hat{k} = \left(-\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \hat{k}$$

Ou seja:

$$\text{rot } \vec{V}_k = \left(-\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \hat{k}$$

Vamos analisar essa expressão. O que faria o rotacional em um ponto ter um valor alto? Precisaríamos ter a componente v_x variando fortemente com a coordenada y , e a componente v_y variando fortemente com a coordenada x . Isso mesmo, o rotacional mede essa tendência de uma componente variar em relação a uma

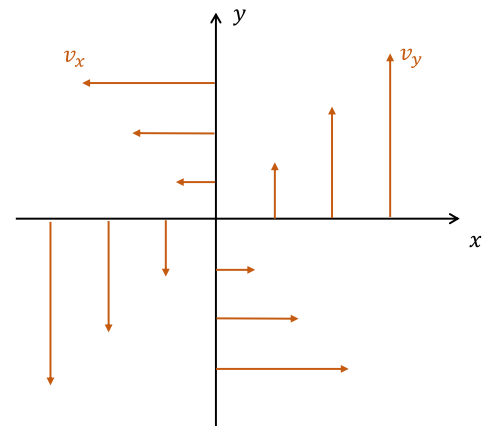


direção perpendicular a ela. Além disso, como temos um sinal negativo em uma das derivadas, um rotacional elevado deve apresentar as derivadas com sinais opostos. Em suma, um rotacional é elevado quando:

- Os valores das componentes do vetor variam de acordo com a variação da coordenada na direção perpendicular à da própria componente. Ou seja, v_y variando com x , e v_x variando com y !
- A taxa de variação de v_y em relação à x deve ter sinal oposto à taxa de variação de v_x em relação a y .

INTERPRETAÇÃO DO ROTACIONAL

Você deve estar se perguntando o significado do rotacional, ou ainda, o porquê desse nome. Concluímos que maior será o rotacional quanto mais as componentes de um campo variarem em relação a uma direção perpendicular a elas, e com sinais trocados. Um campo vetorial com rotacionais altos para seus pontos deve apresentar as componentes v_x decaindo fortemente conforme y aumenta, enquanto a componente v_y deve crescer fortemente quando aumentamos x , como ocorre no exemplo da figura ao lado.



Vamos imaginar que o campo vetorial $\vec{V} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$, ilustrado na figura, represente a velocidade dos pontos em um fluido. Para esse perfil de velocidade, o que deve estar acontecendo com o fluido? Deve estar rotacionando, certo? Essa é a razão da nomenclatura. O fato de existir um rotacional elevado em um ponto do campo vetorial implica uma tendência de rotação do campo entorno desse ponto!

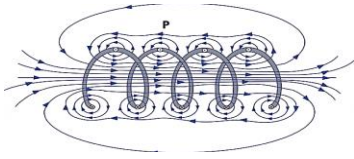
Repare ainda que, nesse exemplo, o rotacional teria direção \hat{k} , indicando uma rotação no sentido anti-horário. Se tivéssemos um campo vetorial com as componentes em sentidos opostos, a rotação seria no sentido horário. Nesse caso as derivadas também teriam sinais opostos e o rotacional estaria então na direção $-\hat{k}$.

CASO TRIDIMENSIONAL

Calculamos e analisamos o rotacional num caso em que o campo vetorial se dava no plano (x, y) . Como poderíamos proceder para um caso de campo vetorial tridimensional $\vec{V}(x, y, z) = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$? A resposta é simples. No caso tridimensional, o vetor rotacional para um ponto (x, y, z) **terá 3 componentes**, uma na direção \hat{i} , uma na direção \hat{j} e uma na direção \hat{k} . Cada uma delas pode ser calculada separadamente, como sendo um caso bidimensional.

Componente do rotacional em \hat{k}

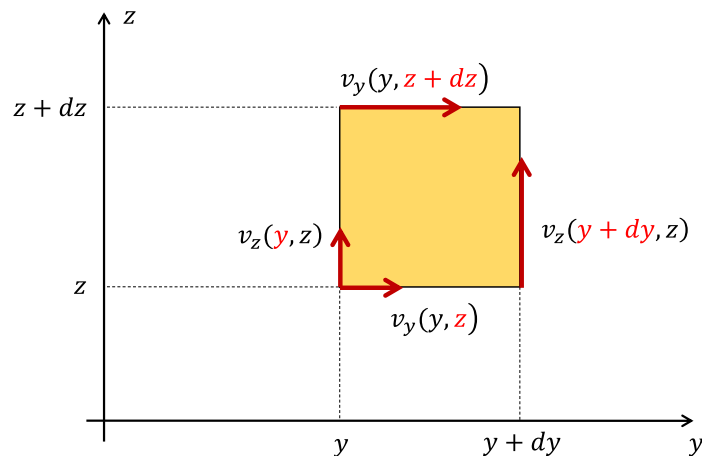
A componente da direção \hat{k} , $\text{rot } \vec{V}_k$, é calculada considerando as componentes v_x e v_y do campo vetorial, exatamente como fizemos:



$$\text{rot } \vec{V}_k = \left(-\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \hat{k}$$

Componente do rotacional em \hat{i}

De modo análogo, a componente na direção \hat{i} , $\text{rot } \vec{V}_i$, é calculada levando-se em conta as componentes $v_y \hat{j}$ e $v_z \hat{k}$. A integração seria no plano (y, z) .



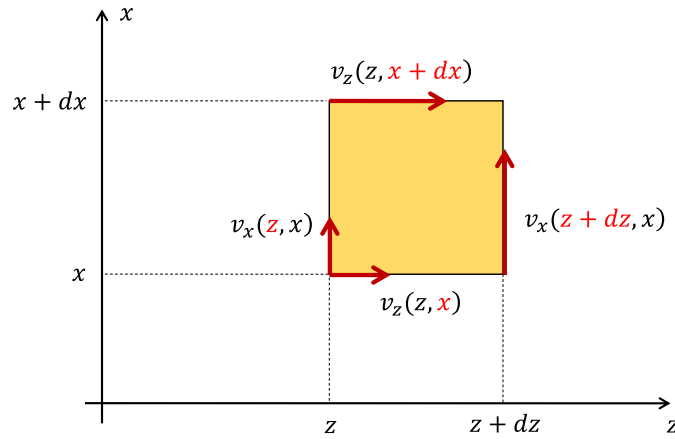
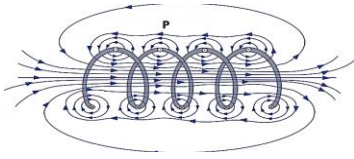
$$\text{rot } \vec{V}_i = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{V} \cdot d\vec{r}}{A} \hat{n} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{V} \cdot d\vec{r}}{A} \hat{i} = \frac{\left(-\frac{\partial v_y}{\partial z} dz dy + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy dz \right)}{dy dz} \hat{k} = \left(-\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \hat{i}$$

$$\text{rot } \vec{V}_i = \left(-\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \hat{i}$$

Componente do rotacional em \hat{j}

Ainda de modo análogo, a componente na direção \hat{j} , $\text{rot } \vec{V}_j$, é calculada levando-se em conta as componentes $v_z \hat{k}$ e $v_x \hat{i}$.

A integração seria no plano (z, x) .



$$\text{rot } \vec{V}_j = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{V} \cdot d\vec{r}}{A} \hat{n} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{V} \cdot d\vec{r}}{A} \hat{j} = \frac{\left(-\frac{\partial v_z}{\partial x} dx dz + \frac{\partial v_x}{\partial z} dy dx \right)}{dz dx} \hat{j} = \left(-\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \hat{j}$$

$$\text{rot } \vec{V}_j = \left(-\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \hat{j}$$

Concluimos então que o rotacional para um campo vetorial tridimensional é o vetor resultante da soma das três componentes:

$$\text{rot } \vec{V} = \left(-\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \hat{i} + \left(-\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(-\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \hat{k}$$

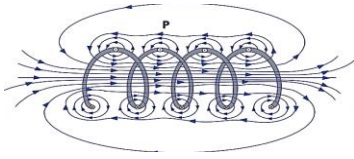
Como fizemos no caso do divergente de um campo, existe uma maneira mais simples de representar o cálculo do rotacional de um campo \vec{V} , através do uso do operador nabla ($\vec{\nabla}$). Lembre-se que:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right)$$

Se fizermos o produto vetorial $\vec{\nabla} \times \vec{V}$, chegaremos exatamente ao resultado do rotacional do campo vetorial \vec{V} , ou seja:

$$\text{rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

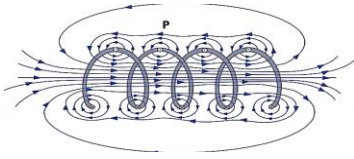
$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(-\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \hat{i} + \left(-\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(-\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \hat{k}$$



Assista agora a um vídeo incrível, que nos dá uma interpretação bem didática e gráfica dos significados de divergente e rotacional: <https://www.youtube.com/watch?v=rB83DpBJQsE>



Nos vemos na aula 11!



AULA 11

DIVERGENTE E ROTACIONAL DE UM CAMPO

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM DA AULA

Ao final dessa aula, os alunos serão capazes de:

- Compreender a definição de divergente e rotacional de um ponto em um campo vetorial.
- Explorar o significado do valor do divergente e do vetor rotacional.
- Calcular o divergente e o rotacional em um campo vetorial.

O DIVERGENTE DE UM CAMPO

Na leitura prévia para essa aula, definimos o divergente de um campo, em um dado ponto do espaço, como sendo:

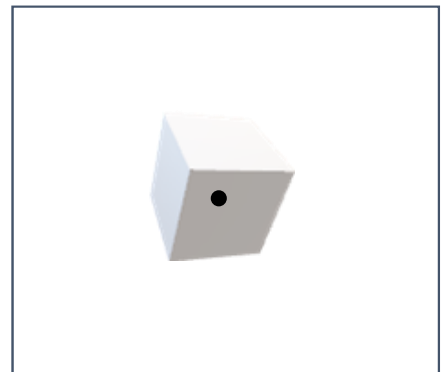
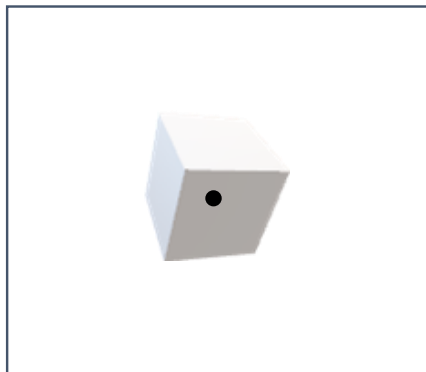
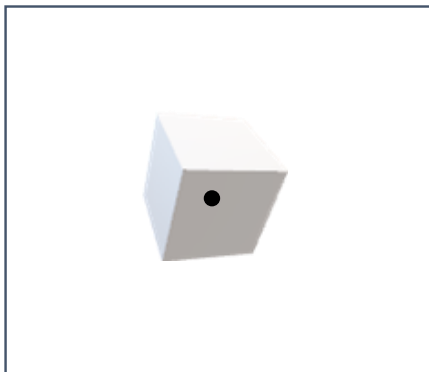
$$\text{Divergente} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi(V)}{V}$$

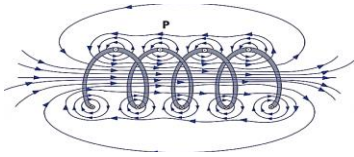
Demonstramos também que esse limite resulta em:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}(x, y, z) = \left. \frac{\partial v_x}{\partial x} \right|_x + \left. \frac{\partial v_y}{\partial y} \right|_y + \left. \frac{\partial v_z}{\partial z} \right|_z$$

Sendo o divergente o produto escalar entre o operador *nabla* e o campo vetorial.

1. Vamos interpretar o significado do divergente. Considerando que os 3 cubos a seguir são representações de volumes infinitesimais em torno de um ponto localizado em seus respectivos centros, você conseguiria desenhar em cada situação os vetores de um campo vetorial para os quais haveria um divergente positivo, nulo e negativo para o ponto no centro do cubo?





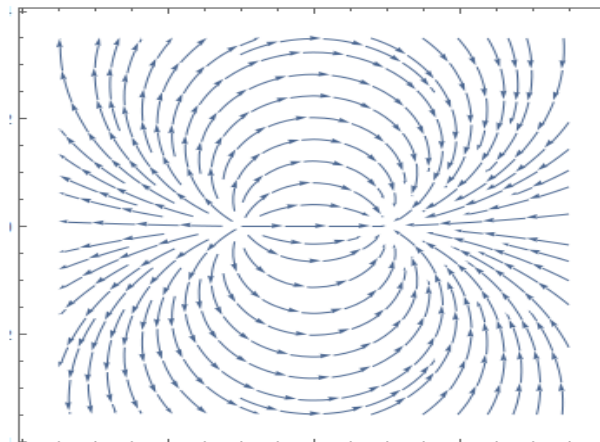
EXEMPLOS NUMÉRICOS

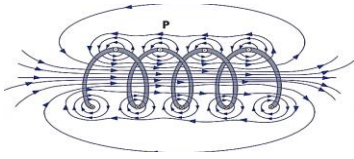
2. Vamos treinar um pouco. Calcule a forma geral para o divergente do campo vetorial $\vec{E} = (3x - 8y)\hat{i} + (y^2)\hat{j} + (-3xz + 5z^2)\hat{k}$

3. Você conseguiria descobrir 3 pontos desse campo vetorial com divergente negativo, nulo e positivo, respectivamente?

INTERPRETAÇÃO DO SORVEDOURO E GERADOR

Observando as linhas de campo de um campo vetorial ilustrado na figura a seguir, você conseguiria identificar, respectivamente, **dois pontos** com divergência claramente negativa e positiva? Lembre-se da definição de divergente!





Você deve ter identificado um ponto com divergente claramente positivo e outro negativo. Isso porque podemos identificar um pequeno volume (mesmo numa projeção em 2D) em torno dos pontos com fluxo positivo e negativo.

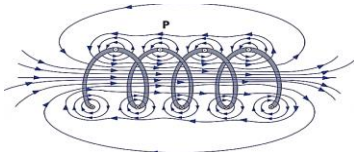
4. Com a informação de que esse campo vetorial foi gerado por duas cargas elétricas, onde você imagina que estariam posicionadas essas cargas? Quais os sinais de cada uma?

Você deve ter imaginado a carga positiva no ponto onde o divergente também é positivo, assim como a carga negativa no ponto de divergente negativo. Repare que no ponto de divergência positiva, as linhas “nascem”, elas surgem de um elemento criador de campo (uma fonte). No caso do ponto de divergência negativa, percebemos que as linhas morrem, desaparecem. Por isso, pontos com divergência positiva são muitas vezes denominados **fontes**, enquanto pontos com divergência negativa são denominados **sorvedouros**. Um ponto com divergência positiva não precisa, necessariamente, originar todo o campo, como no caso da carga elétrica, do mesmo modo que um ponto com divergência negativa não precisa aniquilar todo o campo. Lembre-se do conceito! Para um ponto ter um divergente positivo, mais fluxo “sai” do que “entra” em um volume tendendo a zero. Da mesma forma, para a divergência negativa, mais fluxo “entra” do que “sai”.

O DIVERGENTE E AS LEIS DE MAXWELL

5. Existem quatro leis de Maxwell aplicáveis a campos vetoriais. Duas delas se referem a fluxos em superfícies fechadas, uma ao fluxo do campo elétrico e outra ao fluxo do campo magnético. Enuncie com suas palavras e também com equações matemáticas essas duas leis.

6. Como dissemos, as duas leis são relativas ao fluxo em uma superfície fechada. Considere que essas leis sejam aplicadas a um volume muito pequeno, infinitesimal, tendendo a zero. Como ficariam? (aplique um limite para as equações)



Você deve ter chegado a $\lim_{V \rightarrow 0} \oint \vec{E} \cdot \hat{n} da = \lim_{V \rightarrow 0} \phi_E = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{Q_i}{\epsilon_0} \cdot E$, para a segunda lei, $\lim_{V \rightarrow 0} \phi_B = 0$.

7. Agora, divida as equações pelo volume!

Chegamos a $\frac{\lim_{V \rightarrow 0} \phi_E}{V} = \frac{\lim_{V \rightarrow 0} \frac{Q_i}{\epsilon_0}}{V}$ e $\frac{\lim_{V \rightarrow 0} \phi_B}{V} = 0$.

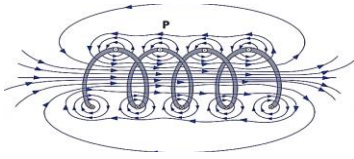
8. Compare o primeiro termo da equação com a definição de divergente.

9. Vamos agora analisar os termos do lado direito de ambas as equações do item 10. Na equação do fluxo magnético, esse termo é nulo, porém, na do fluxo elétrico, é igual à carga elétrica dividida pelo volume. Qual o significado dessa divisão?

10. Você deve ter concluído que carga sobre volume é **densidade volumétrica de carga**: quantidade de carga elétrica por unidade de volume. Vamos chamar essa densidade de ρ . Reescreva as equações do item 10 utilizando o divergente e a densidade de carga.

Chegamos à conclusão de que o divergente do campo elétrico em um ponto é proporcional à densidade volumétrica de carga nesse mesmo ponto. Matematicamente, essa equação é expressa por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

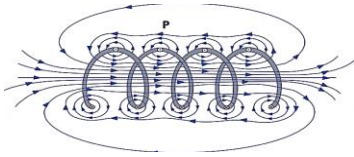


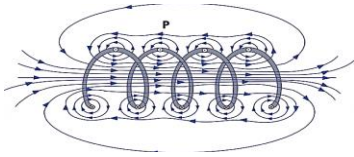
Trata-se da versão diferencial da lei de Gauss! Nessa equação, a permissividade elétrica do meio (ϵ_0) é a constante de proporcionalidade entre o divergente de \vec{E} e a densidade volumétrica de carga ρ . Essa relação tem muita importância para a compreensão do comportamento do campo elétrico em diferentes meios.

Da mesma forma, o divergente do campo magnético é sempre nulo em um ponto qualquer do espaço, o que está de acordo com o fato de não existir monopolo magnético. Matematicamente, podemos escrever a versão diferencial da lei de Gauss para o campo magnético:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

11. Considere um corpo esférico de raio a carregado eletricamente com uma carga Q , com seu centro coincidindo com a origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Mostre que o divergente do campo elétrico é nulo em qualquer ponto do espaço que dista $r > a$ da origem do sistema de coordenadas. Pense sobre o que isso significa.





O ROTACIONAL DE UM CAMPO

Vimos também na leitura prévia para essa aula a definição de rotacional de um campo. Em um dado ponto do espaço, o vetor rotacional de um campo será:

$$|\text{rot } \vec{V}| = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{V} \cdot d\vec{r}}{A}$$

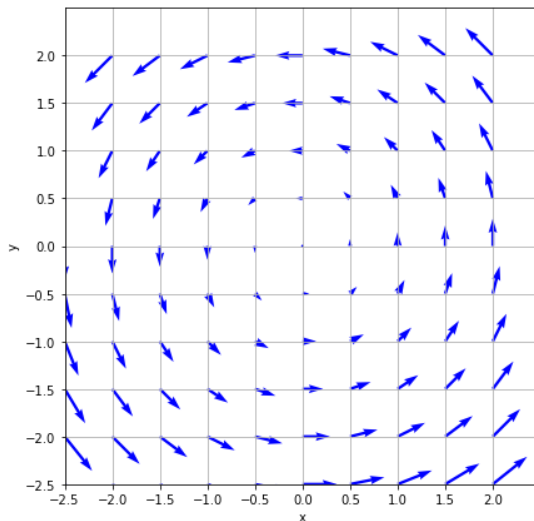
Demonstramos que, matematicamente, o resultado do limite acima é igual ao produto vetorial entre o operador *nabla* e o campo, ou seja:

$$\text{rot } \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

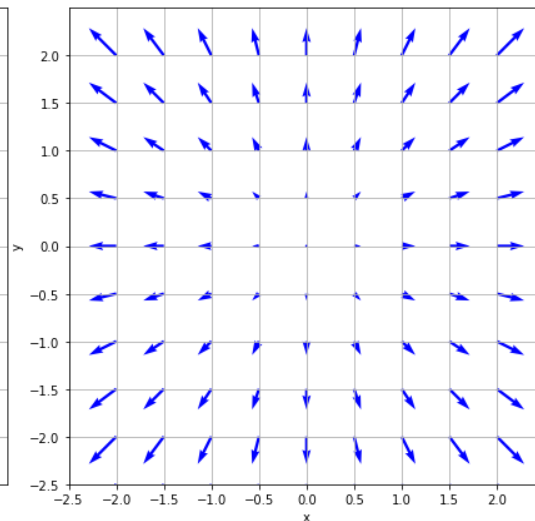
$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(-\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \hat{i} + \left(-\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(-\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \hat{k}$$

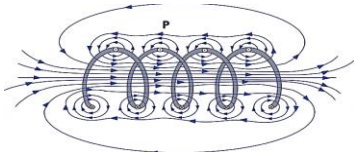
12. Vamos agora exercitar um pouco a interpretação do rotacional. Para isso, observe os dois campos vetoriais abaixo. O primeiro claramente exibe um comportamento de rotação, enquanto o segundo, não. Calcule o rotacional para um ponto genérico de cada campo. Os resultados estão coerentes com a interpretação que acabamos de fazer?

$$\vec{V}_1(x, y) = -y \hat{i} + x \hat{j}$$

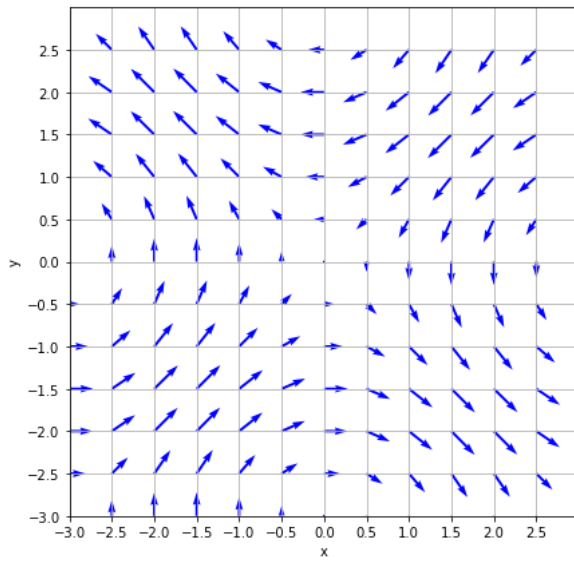


$$\vec{V}_2(x, y) = x \hat{i} + y \hat{j}$$



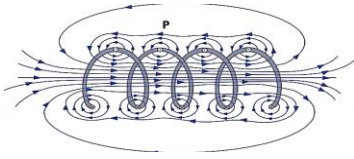


13. Vamos analisar o campo vetorial $\vec{V} = (y^3 - 9y) \hat{i} + (x^3 - 9x) \hat{j}$, ilustrado na figura abaixo. Calcule o rotacional desse campo vetorial, ou seja, uma função que pode ser usada para obtermos o valor do rotacional para qualquer ponto (x, y) .



14. Utilizando a expressão do rotacional do item anterior, encontre um conjunto de pontos sem nenhuma tendência de rotação, ou seja, um lugar geométrico (x, y) para os quais o rotacional é nulo.

15. Qual a tendência de rotação no ponto $(2,1)$ e $(1,-2)$? Horário ou anti-horário?



O ROTACIONAL EM CAMPOS CONSERVATIVOS

16. No início do nosso curso, quando começamos a estudar as forças de campo, definimos o que eram campos conservativos. Você consegue se lembrar da definição de um campo $\vec{F}(x, y, z)$ conservativo?

Talvez você não tenha se lembrado, mas um campo vetorial $\vec{F}(x, y, z)$ é conservativo se, e somente se, existe uma função escalar $\varphi(x, y, z)$ tal que $\vec{\nabla}\varphi = \vec{F}$. Ou seja, o campo é conservativo se existe uma função escalar cujo gradiente é o próprio campo vetorial.

Vamos assumir que $\vec{F} = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k}$ seja um campo conservativo. Temos então 3 igualdades:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_x; \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f_y; \frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_z$$

Derivando a primeira igualdade em y e a segunda em x , temos:

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \text{ e } \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}.$$

E, portanto:

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x} = 0$$

Do mesmo modo, podemos mostrar que:

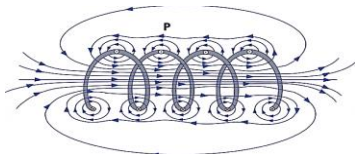
$$\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} = 0$$

e

$$\frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y} = 0$$

17. Com base nas três conclusões acima, qual a relação entre o campo conservativo e seu rotacional?

18. Agora que concluímos que um campo vetorial conservativo tem rotacional igual a zero em qualquer ponto, tente se lembrar do que há de especial em um campo conservativo no que diz respeito à integral de linha entre dois pontos do campo vetorial?



Em um campo vetorial conservativo a integral de linha entre dois pontos independe do caminho entre esses dois pontos, mas apenas de suas posições, o que significa dizer que, em um campo conservativo, qualquer integral de linha fechada será nula, resultando em rotacional nulo!

O ROTACIONAL E AS LEIS DE MAXWELL

Retomando o que estudamos durante uma boa parte do nosso curso, as quatro leis de Maxwell são:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \left(i + \epsilon_0 \frac{d \int \vec{E} \cdot \hat{n} dA}{dt} \right)$$

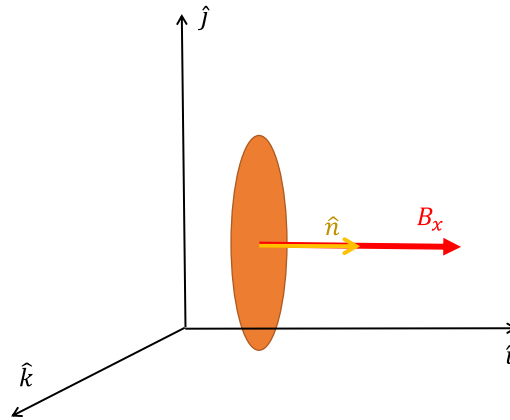
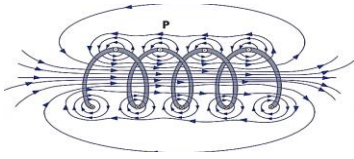
19. Quando estudamos o conceito do divergente, pudemos escrever as duas primeiras leis de Maxwell para quando a superfície fechada tende a um ponto. São as chamadas leis na forma diferencial. Você consegue se lembrar como ficam as duas primeiras leis na forma diferencial?

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow$$

$$\oint \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0 \rightarrow$$

A TERCEIRA LEI EM SUA FORMA DIFERENCIAL

Vamos agora analisar a terceira lei. Imaginemos uma situação em que exista um campo vetorial $\vec{B}(x, y, z) = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$, para o qual aplicaremos a terceira lei considerando uma superfície plana de área A no plano (y, z) , conforme a figura a seguir. Nesse caso, o fluxo magnético seria $\phi_B = \int \vec{B} \cdot \hat{i} dA = B_x A$.



De acordo com a terceira lei, a circulação do campo elétrico ao longo da borda dessa superfície seria, então:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{dB_x}{dt} A$$

Considerando a área A tendendo a zero, teremos:

$$\lim_{A \rightarrow 0} \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \lim_{A \rightarrow 0} -\frac{dB_x}{dt} A$$

Dividindo-se ambos os lados por A e multiplicando-se pelo versor \hat{i}

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot d\vec{r}}{A} \hat{i} = \lim_{A \rightarrow 0} -\frac{dB_x}{dt} \hat{i} = -\frac{dB_x}{dt} \hat{i}$$

O lado esquerdo da equação é exatamente o rotacional do campo elétrico no plano (y, z) , ou seja, a componente **$\text{rot } \vec{E}_i$** :

$$\text{rot } \vec{E}_i = -\frac{dB_x}{dt} \hat{i}$$

Por analogia, se fizemos o mesmo raciocínio para a componente B_y e uma superfície no plano (x, z) , chegaremos a:

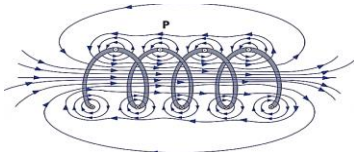
$$\text{rot } \vec{E}_j = -\frac{dB_y}{dt} \hat{j}$$

E, repetindo o raciocínio para a componente B_z e uma superfície no plano (x, y) , chegaremos a:

$$\text{rot } \vec{E}_k = -\frac{dB_z}{dt} \hat{k}$$

Finalmente somando as três componentes, chegamos a:

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{dB_x}{dt} \hat{i} + \frac{dB_y}{dt} \hat{j} + \frac{dB_z}{dt} \hat{k} \right) = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

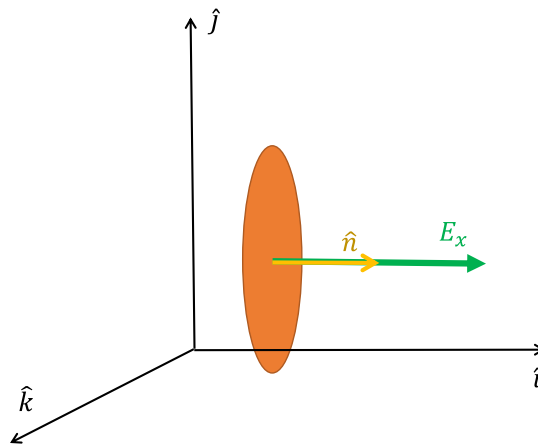


Essa é a terceira lei de Maxwell em sua forma diferencial! Essa lei pode ser aplicada a um ponto, nos dizendo que o rotacional do campo elétrico em um ponto do espaço é igual à derivada temporal do vetor campo magnético no mesmo ponto!

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

A QUARTA LEI DE MAXWELL EM SUA FORMA DIFERENCIAL.

Vamos analisar, por fim, a quarta lei. Imaginemos uma situação em que, agora, exista um campo vetorial $\vec{E}(x, y, z) = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}$, para o qual aplicaremos a quarta lei considerando uma superfície plana de área A no plano (y, z) . Nesse caso, o fluxo elétrico seria $\phi_E = \int \vec{E} \cdot \hat{i} dA = E_x A$.



De acordo com a quarta lei, a circulação do campo magnético ao longo da borda dessa superfície seria, então:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \left(i + \frac{d\phi_E}{dt} \varepsilon_0 \right) = \mu_0 \left(i + \frac{d(E_x A)}{dt} \varepsilon_0 \right)$$

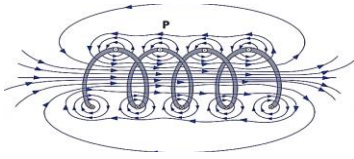
Considerando a área A tendendo a zero:

$$\lim_{A \rightarrow 0} \oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \lim_{A \rightarrow 0} \left(i + \frac{d(E_x A)}{dt} \varepsilon_0 \right) \mu_0$$

E, dividindo-se ambos os lados por A e multiplicando-se pelo versor \hat{i} , teremos:

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{B} \cdot d\vec{r}}{A} \hat{i} = \lim_{A \rightarrow 0} \mu_0 \left(\frac{i}{A} \hat{i} + \frac{dE_x}{dt} \varepsilon_0 \hat{i} \right)$$

O lado esquerdo da equação é exatamente o rotacional do campo magnético no plano (y, z) , ou seja, a componente **rot** \vec{B}_i . O limite $\lim_{A \rightarrow 0} \frac{i}{A} \hat{i}$ é a quantidade de corrente fluindo na direção i por unidade de área. É a componente \hat{i} do chamado vetor densidade superficial de corrente $\vec{J} = J_x \hat{i} + J_y \hat{j} + J_z \hat{k}$. Assim,



$$\text{rot } \vec{B}_i = \mu_0 \left(J_x \hat{i} + \frac{dE_x}{dt} \varepsilon_0 \hat{i} \right)$$

Por analogia, se fizermos o mesmo raciocínio para a componente E_y e uma superfície no plano (x, z) , chegaremos a:

$$\text{rot } \vec{B}_j = \mu_0 \left(J_y \hat{j} + \frac{dE_y}{dt} \varepsilon_0 \hat{j} \right)$$

Repetindo para a componente E_z e uma superfície no plano (x, y) , chegaremos a:

$$\text{rot } \vec{B}_k = \mu_0 \left(J_z \hat{k} + \frac{dE_z}{dt} \varepsilon_0 \hat{k} \right)$$

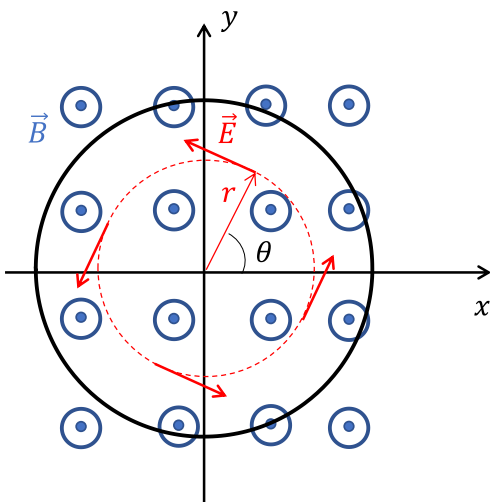
Finalmente, somando as três componentes, chegamos a:

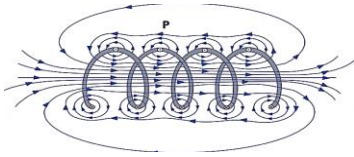
$$\text{rot } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \frac{dE_x}{dt} \varepsilon_0 \hat{i} + \frac{dE_y}{dt} \varepsilon_0 \hat{j} + \frac{dE_z}{dt} \varepsilon_0 \hat{k} \right) = \mu_0 \left(\vec{J} + \frac{d\vec{E}}{dt} \varepsilon_0 \right)$$

Essa é a quarta lei de Maxwell em sua forma diferencial! Essa lei pode ser aplicada a um ponto, nos dizendo que o rotacional do campo magnético em um ponto do espaço é proporcional à derivada temporal do vetor campo elétrico somado ao vetor densidade de corrente nesse mesmo ponto!

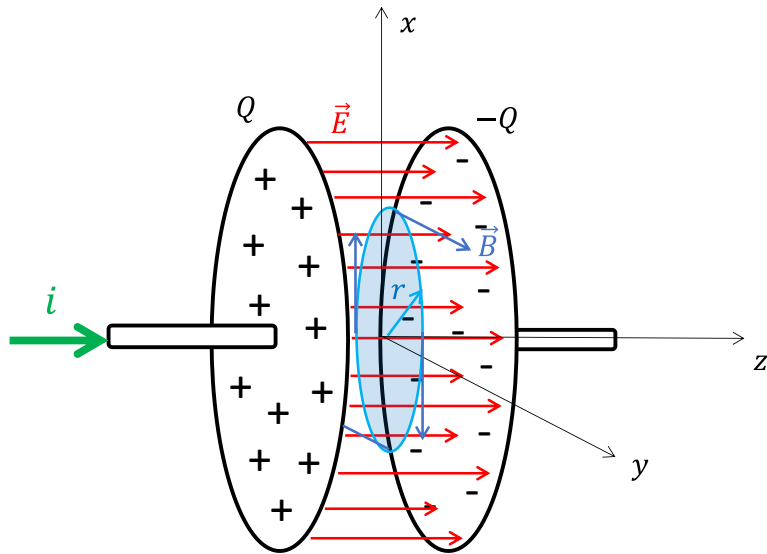
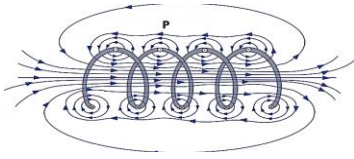
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \frac{d\vec{E}}{dt} \varepsilon_0 \right)$$

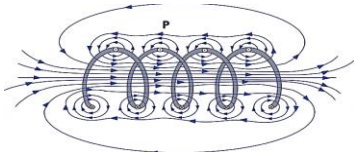
20. Vamos aplicar a terceira lei a um caso muito estudado em aulas passadas: considere uma espira (em preto) em uma região em que haja campo magnético variável no tempo na direção \hat{k} . Por simetria circular, vamos considerar que o campo elétrico induzido, a uma distância r do centro do sistema de coordenadas, está na direção $\hat{\theta}$. A partir da terceira lei na forma integral, prove que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$. Dica, lembre-se que $\hat{\theta} = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}$ e, também, que $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.





21. Vamos retomar agora a aula sobre a aplicação da quarta lei para determinar o campo magnético no interior do capacitor enquanto ele está carregando. A partir da aplicação da quarta lei, em sua forma integral, a um círculo plano de raio r , concêntrico às placas e localizado entre elas (observe o desenho), considerando o sistema de coordenadas dado, prove que $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$.



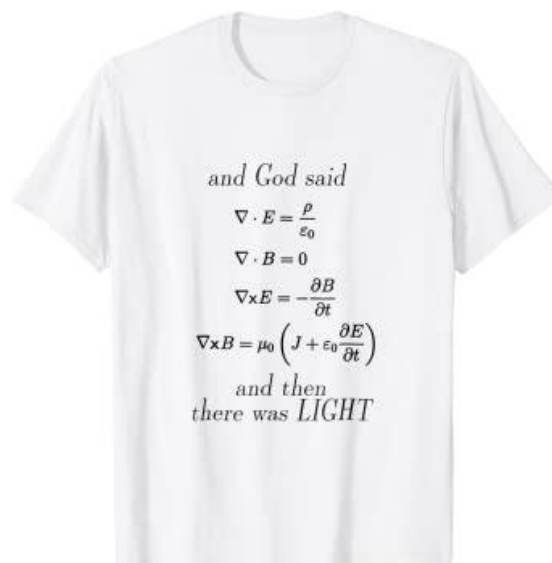


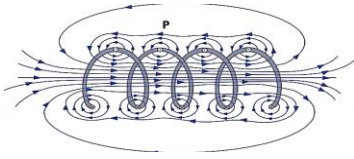
AS QUATRO LEIS DE MAXWELL NAS FORMAS INTEGRAL E DIFERENCIAL

Pronto, já podemos escrever as quatro leis de Maxwell na forma diferencial, além da forma integral, que já conhecíamos. As leis na forma diferencial descrevem o comportamento dos campos elétrico e magnético num ponto do espaço. Não sem uma certa emoção, podemos escrevê-las como:

Leis de Maxwell na forma integral	Leis de Maxwell na forma diferencial
$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$ $\oint \vec{B} \cdot \hat{n} dA = 0$ $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d \int \vec{B} \cdot \hat{n} dA}{dt}$ $\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \left(i + \epsilon_0 \frac{d \int \vec{E} \cdot \hat{n} dA}{dt} \right)$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$ $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \frac{d\vec{E}}{dt} \epsilon_0 \right)$

Agora você já é capaz de identificar os símbolos e entender uma piada muito popular entre os estudantes de Engenharia e Física.





AULA 12

INTRODUÇÃO À ONDULATÓRIA

OBJETIVOS

Ao final da aula, os alunos serão capazes de:

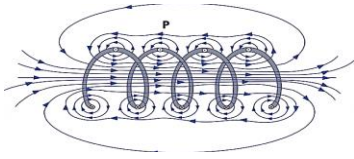
- Entender o conceito de onda a partir do caso mecânico;
- Definir conceitos fundamentais como frequência, fase, amplitude e período;
- Deduzir e entender a solução da equação da onda;

TIPOS DE ONDAS

Vamos começar considerando suas noções intuitivas sobre ondas, para em seguida teorizar a respeito delas. Existem, basicamente, três tipos de ondas. Um desses tipos, a **onda de matéria** (ou **onda de De Broglie**), é um fenômeno quântico e exige que, antes de tudo, tenhamos entendido os outros dois tipos de onda. Assim, pelo menos por enquanto, não vamos estudar as ondas de matéria.

Os outros dois tipos são as ondas mecânicas e as ondas eletromagnéticas. Se estudarmos o primeiro tipo, estaremos prontos para estudar o segundo, de modo que o foco dessa aula será as ondas mecânicas.

1. Ondas transportam energia. Por exemplo, o sol emite energia na forma de ondas eletromagnéticas, ao passo que sons são transmitidos na forma de ondas mecânicas. Sabendo que esses dois exemplos são bastante representativos de cada tipo de onda, tente explicar a diferença fundamental entre as ondas mecânicas e as eletromagnéticas, no que diz respeito ao meio onde se propagam.



Veja os dois vídeos a seguir:

<https://www.youtube.com/watch?v=g8GcMn7K0u4>

<https://www.youtube.com/watch?v=fMJrtheQfZw>

SCAN ME

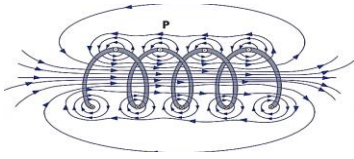


SCAN ME



2. No primeiro exemplo, temos uma onda transversal, ao passo que, no segundo, temos uma onda longitudinal. Tente explicar a diferença entre esses dois tipos de onda levando em consideração o sentido de propagação da onda e a direção em que as partículas constituintes do meio oscilam.

3. Tanto as ondas mecânicas transversais quanto as mecânicas longitudinais se caracterizam pela oscilação de partículas no meio de propagação em função do tempo, diferindo apenas na direção dessas oscilações. Que tipo de função poderíamos utilizar para descrever a posição das partículas de uma onda? Estamos nos referindo a uma função escalar, um campo escalar, uma função vetorial ou um campo vetorial?

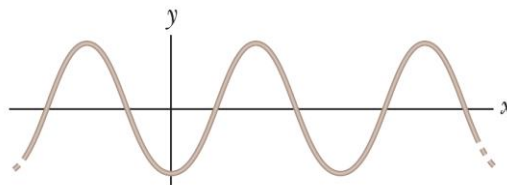


ONDA TRANSVERSAL EM UMA CORDA

Considere uma corda perfeitamente elástica estendida sobre o eixo x de um plano cartesiano e uma onda transversal que nela se propaga.

Como a onda é transversal, cada pequeno pedaço de corda que ocupa a posição x sofre um deslocamento y que depende, também, do tempo. Logo, o deslocamento y é uma função de x e t , ou seja, $y = y(x, t)$.

Se tirarmos uma foto da corda em um instante t_0 específico, teremos o deslocamento y de cada ponto em função da posição x :



Por outro lado, se olharmos apenas para um pedaço da corda que ocupa a posição x_0 , teremos o deslocamento y desse pedaço em função do tempo.

4. Esboce o gráfico da função $y(x_0, t)$ para uma posição x_0 específica e t variável. O gráfico que você esboçou representa o **formato** da corda?

5. Considerando o formato dos gráficos das funções $y(x, t_0)$ e $y(x_0, t)$, observe as expressões a seguir e diga qual delas é a mais adequada para a lei de $y(x, t)$.

$$y(x, t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

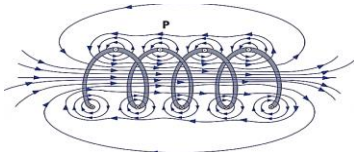
$$y(x, t) = B \cdot \text{sen}(k \cdot x)$$

$$y(x, t) = A \cdot x \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

$$y(x, t) = B \cdot t \cdot \text{sen}(k \cdot x)$$

$$y(x, t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) + B \cdot \text{sen}(k \cdot x)$$

$$y(x, t) = A \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

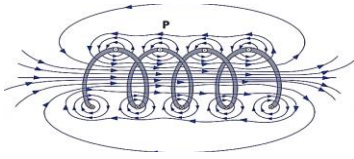


Vamos considerar o modelo $y(x, t) = A \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$ para descrever a onda transversal na corda.

6. Qual é o significado da constante A ?

- Chamamos de **fase** da onda o valor delimitado pela função senoidal, ou seja, o valor $(k \cdot x - \omega \cdot t)$.
- Chamamos de **comprimento da onda** e denotamos por λ a distância entre dois pontos consecutivos que oscilam em fase, ou seja, têm o mesmo valor da função $y(x, t_0)$ para um instante t_0 qualquer. As cristas os vales são pontos notáveis para a visualização do comprimento de onda.

7. Considere o instante $t = 0$ e dois pontos na corda, sendo que um deles ocupa uma posição x qualquer e outro, a posição $x + \lambda$. O que se pode dizer sobre $y(x, 0)$ e $y(x + \lambda, 0)$?

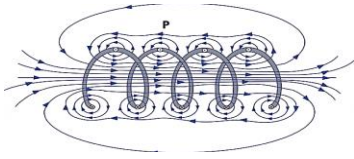


8. A partir da observação feita no item anterior, obtenha o menor valor positivo possível da constante k , conhecido como **número de onda**.

Chamamos de período e denotamos por T o menor intervalo de tempo necessário para que um ponto que ocupa uma determinada posição x realize uma oscilação completa.

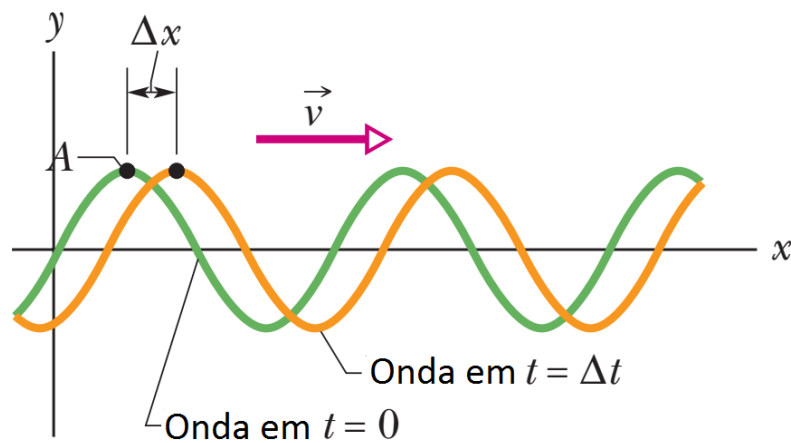
9. Considere o ponto que ocupa a posição $x = 0$ da corda. O que se pode dizer sobre $y(0, t)$ e $y(0, t + T)$?

10. A partir da observação feita no item anterior, obtenha o valor da constante ω , conhecida como **frequência angular**.



11. A frequência angular ω é medida em radianos por segundo (rad/s), ao passo que a **frequência f** é medida em **oscilações completas por segundo**, em uma unidade conhecida como hertz (Hz). Considerando a quantidade de radianos em uma oscilação completa, relacione T , ω e f .

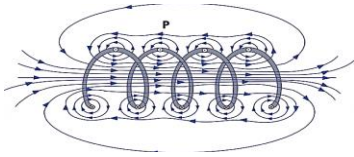
Considere duas fotografias da onda, uma no instante $t = 0$ e outra no instante $t = \Delta t$. A figura a seguir exibe o formato da onda nesses dois instantes.



12. É possível dizer que o ponto A é carregado ao longo da corda à medida que o tempo passa?

13. Desenhe na figura acima a posição ocupada pelo ponto A no instante Δt .

14. Considerando o pico marcado pelo ponto A (instante $t = 0$ e posição x) e o pico no instante $t = \Delta t$, cuja posição é $x + \Delta x$, o que se pode dizer sobre a **fase** da onda em $(x, 0)$ e em $(x + \Delta x, \Delta t)$?



15. Se considerarmos esse mesmo pico em diversas outras combinações de posição x e tempo t , o que podemos dizer sobre a fase da onda em cada uma delas?

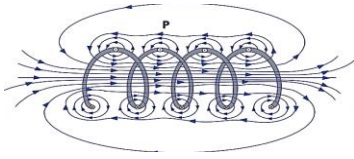
Através dos itens anteriores, podemos dizer que a fase da onda em todos os picos é **constante**, ou seja:

$$k \cdot x - \omega \cdot t = cte$$

Apesar da fase ser constante, tanto x quanto t variam. Para outros pontos que não os picos, a constante assumiria outro valor, mas ainda seria constante para todas as combinações de x e t .

16. Para encontrar a velocidade v com que a onda se propaga na corda, derive ambos os membros da igualdade anterior em relação ao tempo. Em seguida, escreva v de três formas:

- em função da velocidade angular e do número de onda;
- em função do comprimento de onda e do período;
- em função do comprimento de onda e da frequência.




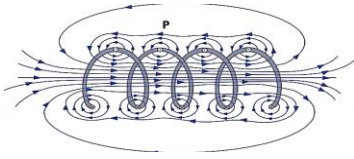
17. A onda se propaga na direção de x crescente ou x decrescente?

18. Como você poderia reescrever a lei $y(x, t)$ de modo a representar um deslocamento no sentido contrário ao estabelecido no item anterior?

Para confirmar, acesse <https://www.geogebra.org/m/v7q2ucsp> e faça o seguinte:



- Se a animação não se iniciar logo que você abrir o link, clique no botão  ao lado do controle deslizante t ;
- Mexa no controle deslizante k . O que você observa?
- Mexa no controle deslizante ω (não se esqueça de usar, também, valores negativos). O que você observa?



Pela relação obtida ($v = \lambda \cdot f$), talvez você fique inclinado(a) a dizer que a velocidade de propagação de uma onda depende apenas do comprimento de onda e da frequência dessa onda, o que é matematicamente correto, porém não é fisicamente preciso. Para entender melhor, pense na seguinte pergunta: se mergulharmos a mola vista dos vídeos após o item 1 em mel, será que as oscilações teriam a mesma velocidade e amplitude?

A resposta é: não. Na verdade, por mais que a equação $v = \lambda \cdot f$ relacione precisamente as grandezas velocidade, comprimento da onda e frequência, ela não mostra que essas grandezas são consequências do meio em que a onda se propaga.

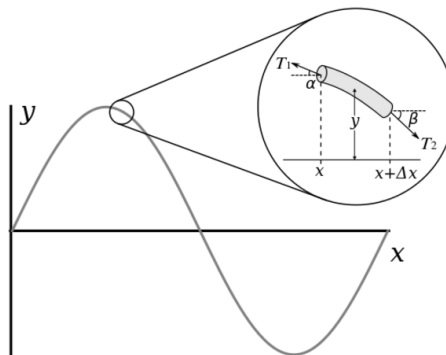
No caso da onda que se propaga em uma corda, as grandezas que descrevem o meio são a **tração τ** e a **densidade linear de massa μ** . É possível mostrar (há duas “demonstrações” no Halliday, e uma no anexo desta aula) que a velocidade v se relaciona às grandezas τ e μ por:

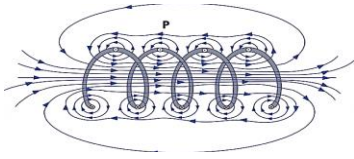
$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

19. Faça a análise dimensional da expressão $\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$ e confirme que se trata, de fato, de uma grandeza com dimensão de velocidade.

EQUAÇÃO DA ONDA

A partir do modelo de onda transversal em uma corda submetida a uma tração horizontal constante T , vamos deduzir uma equação que descreve ondas de modo geral. Seja Δx o comprimento (horizontal) de um elemento de corda, como mostra a figura a seguir.





20. Levando em consideração que a onda é transversal, qual é o significado de $\frac{\partial y}{\partial t}$? E de $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$?

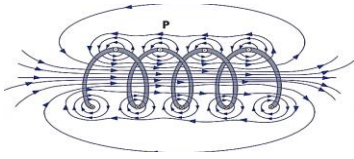
21. Novamente levando em consideração que a onda é transversal, o que se pode dizer sobre as componentes horizontais $T_2 \cdot \cos \beta$ e $T_1 \cdot \cos \alpha$? Relacione cada uma delas com a tração T .

22. E sobre as componentes verticais $T_2 \cdot \sin \beta$ e $T_1 \cdot \sin \alpha$, o que se pode dizer? Elas se anulam?

23. Se a densidade linear de massa da corda é μ , qual é a massa do elemento de corda?

24. Usando o princípio fundamental da dinâmica e os itens anteriores, prove que

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\mu \cdot \Delta x}{T} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

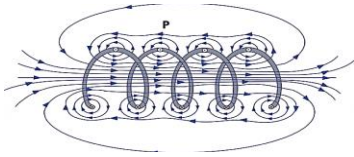


25. Visualizando a função $y(x, t)$ em um instante específico t_0 , temos que a figura mostra o gráfico da função $y(x, t_0)$, ou seja, uma função de apenas uma variável. Qual é o significado geométrico de $\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x$ e de $\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+\Delta x}$?

26. Relacionando $\tan \alpha$ e $\tan \beta$ com as derivadas parciais do item anterior, prove que:

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \right) = \frac{\mu}{T} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

27. Por fim, faça Δx tender a zero para obter a equação da onda e a reescreva eliminando μ e T , deixando apenas a velocidade v .



Sim, dá trabalho. Mas, fazendo com calma, a equação obtida é:

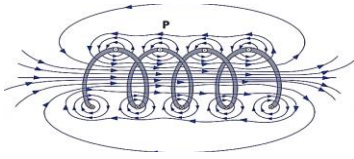
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

28. Mostre que as leis $y(x, t) = A \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t)$ e $y(x, t) = A \cdot \text{sen}(k \cdot x + \omega \cdot t)$ são soluções da equação da onda.

29. Verifique se as funções a seguir são soluções da equação da onda.

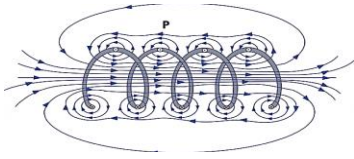
$$y_1(x, t) = \sqrt{a \cdot x + b \cdot t}$$

$$y_2(x, t) = \text{sen}(a \cdot x^2 - b \cdot t)$$



Engenharia
Eletromagnetismo e ondas

Insper



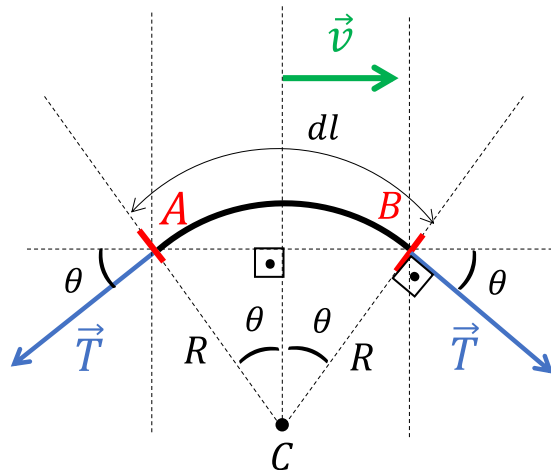
LEITURA COMPLEMENTAR PARA A AULA 12

DEDUÇÃO DA VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO EM UMA CORDA

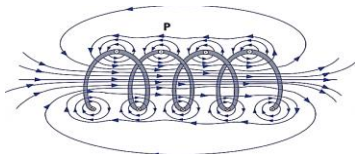
Neste anexo, vamos demonstrar como chegar à equação da velocidade de propagação de onda em uma corda. Para isso, vamos supor que uma **onda transversal** trafegue em uma corda de densidade linear μ com velocidade de intensidade v , horizontal para a direita, conforme a figura a seguir.



Vamos observar em uma escala aumentada o trecho AB , de comprimento dl , que pode ser representado por um arco de circunferência de raio R centrado em C , conforme a figura a seguir.



Note que, sendo a corda homogênea, o trecho geométrico AB se desloca para a direita, embora os pontos físicos da corda se movimentem **apenas na direção vertical**. É como se houvesse um pedaço de massa dm , de comprimento dl , no formato de um pequeno arco de circunferência, que se desloca com velocidade constante para a direita. Nesse pequeno arco, que a cada instante corresponde a pedaços diferentes da corda, agem forças de tração nos pontos A e B . Como a força de tração é muito superior ao peso desse pequeno trecho, vamos desprezá-lo.



Pela geometria do arco, podemos dizer que a resultante de forças a ele aplicada, tem componentes:

$$R_y = -2T \sin \theta$$

$$R_x = 0$$

Como a velocidade do arco é horizontal e sua aceleração vertical, podemos concluir que a resultante vertical é resultante centrípeta, e assim:

$$R_y = -2T \sin \theta = -\frac{mv^2}{R}$$

Se imaginarmos que o arco tem comprimento infinitesimal, podemos usar a aproximação $\sin \theta = \theta$, chegando a:

$$2T\theta = \frac{mv^2}{R} \quad (1)$$

Vamos lembrar que, dada a densidade linear μ da corda, podemos escrever:

$$m = \mu dl$$

Da geometria do problema, também é possível deduzir que $dl = 2\theta R$ e, assim, $m = \mu 2\theta R$. Substituindo m na equação (1), chegamos a:

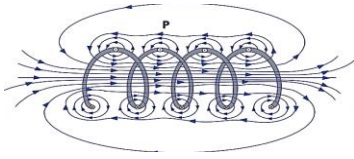
$$2T\theta = \frac{\mu 2\theta R v^2}{R}$$

Ou

$$T = \mu v^2$$

O que nos permite isolar v , chegando à intensidade da velocidade de propagação da corda.

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$



AULA 13

ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

OBJETIVOS

Ao final da aula, os alunos serão capazes de:

- Conceituar onda eletromagnética
- Compreender como as equações de Maxwell descrevem uma onda eletromagnética
- Compreender o conceito de energia transportada por uma onda eletromagnética

EQUAÇÃO DA ONDA

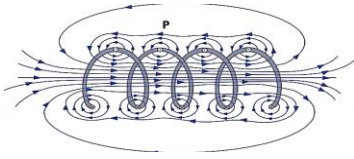
Como vimos na aula passada, se y for uma grandeza que oscila (como a pressão ou a altura de uma corda), a equação diferencial que descreve essa onda será:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Essa é a chamada **equação de onda**, sendo v a velocidade de propagação da onda. Vimos também, na aula passada, que uma possível **solução para a equação de onda** é a função $y(x, t) = Y_{max} \cdot \sin(kx - \omega t)$, que descreve o valor de y em cada ponto do espaço, a cada instante.

1. Relembre o que são os parâmetros k e ω da solução da equação de onda.

2. Lembrando que T é o período de oscilação e λ é o comprimento de onda, descreva as relações entre a velocidade de propagação da onda, v , e o número de onda e a frequência angular.



3. Agora, vamos abandonar as ondas mecânicas e começar a pensar sobre **ondas eletromagnéticas**, que são fenômenos também oscilatórios, isto é, variam no tempo e no espaço. Para começar, vamos relembrar as equações de Maxwell que relacionam campos elétrico e magnético variando no tempo. Estamos falando da lei de Faraday e da lei de Ampère, certo? Escreva-as abaixo em suas formas integral e diferencial para uma situação qualquer no vácuo, ou seja, sem a presença de fios, placas paralelas e materiais ferromagnéticos.

4. Observe as duas leis que você escreveu acima e preencha as lacunas no texto a seguir.

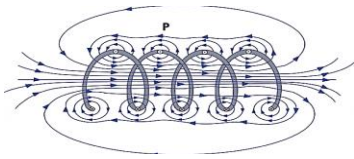
“A variação **temporal** do fluxo do campo magnético produz campo _____; por sua vez, a variação **temporal** do fluxo do campo elétrico produz campo _____.”

Ou seja, pensando numa determinada área imaginária no espaço, podemos dizer que um campo magnético variando no tempo indica a existência de um campo elétrico ao seu redor, e que, por sua vez, um campo elétrico variando no tempo indica a existência de um campo magnético ao seu redor. Se ambos estiverem variando no tempo, não é difícil pensar na hipótese de que constituam uma perturbação que se propaga no espaço, uma onda eletromagnética.

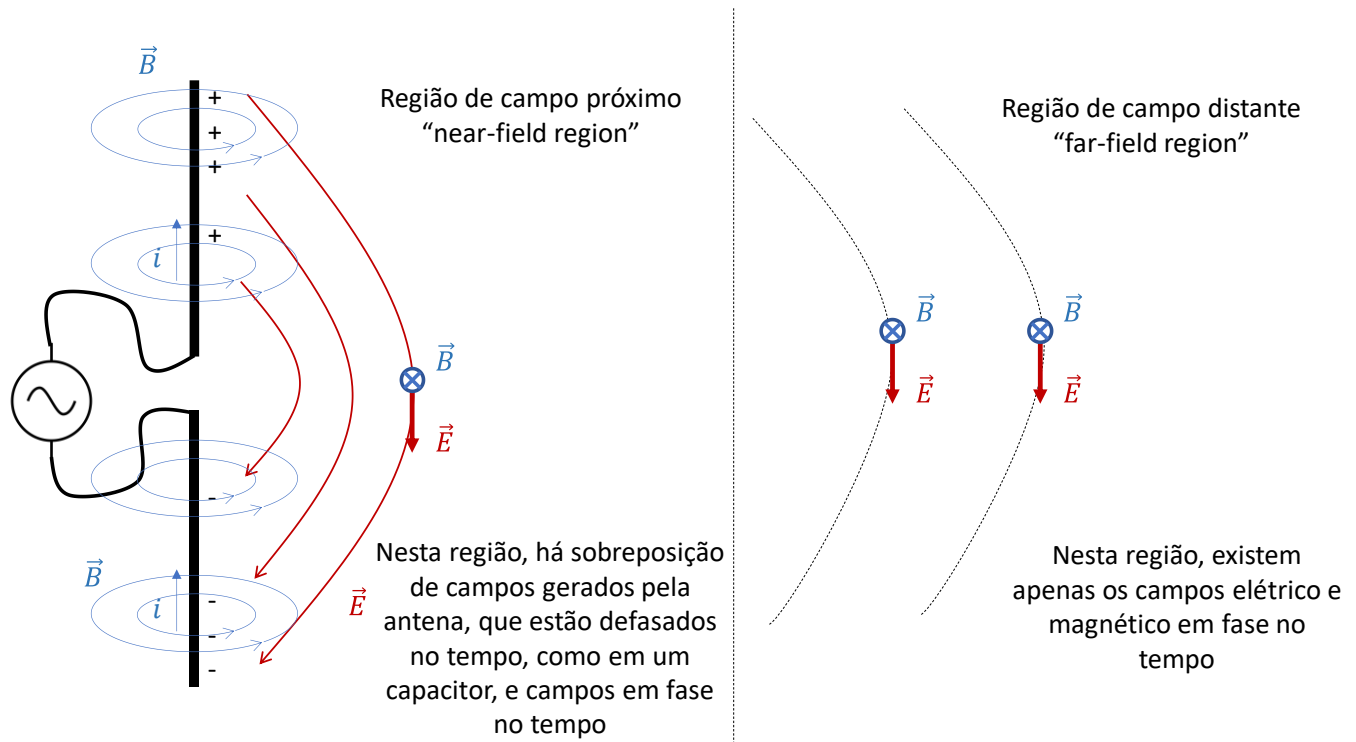
Pois bem, como a semelhança com ondas mecânicas sempre foi notável, os físicos pensaram na hipótese de que haveria necessidade de um meio para a propagação de uma onda eletromagnética, como ocorre com as ondas mecânicas. Esse meio ficou conhecido como “éter luminífero”, substância supostamente presente em todo o espaço, e que permitiria a propagação de ondas eletromagnéticas, como a luz (Maxwell foi o grande cientista que demonstrou, como faremos hoje, que a velocidade de propagação de ondas eletromagnéticas é a velocidade da luz).

Foi somente com o experimento de Michelson e Morley, em 1887, que ficou comprovada a inexistência de um meio (o éter luminífero) para a propagação da luz e, conseqüentemente, aceitou-se a hipótese de que ondas eletromagnéticas, diferentemente das ondas mecânicas, não precisam de um meio para se propagar. Mas, como seria possível produzir uma onda eletromagnética?

Você se lembra do que acontece com um capacitor de placas planas quando ele se carrega e descarrega, não? Quando ele está carregando ou descarregando, há corrente elétrica nos fios que conectam a fonte às placas, e essa corrente elétrica causa campo magnético ao redor dos fios e das placas. Da mesma forma, sempre que o capacitor tiver cargas acumuladas, haverá campo elétrico em seu interior e, no caso de carregamento ou descarregamento, esse campo elétrico será variável no tempo. Pois bem, a figura da página seguinte ilustra um



capacitor cujas placas não estão mais paralelas, mas abertas e dispostas verticalmente. Esse capacitor aberto (chamado agora de antena), foi conectado a uma fonte de tensão senoidal, de modo que haja sempre carregamento e descarregamento de cargas elétricas.

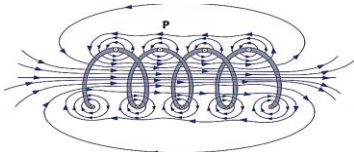


Na figura, é possível observar o campo elétrico no ar, entre as placas, e o campo magnético ao redor delas, do mesmo modo que ocorre com um fio. É possível perceber, no ponto destacado, que os campos magnético e elétrico são perpendiculares entre si no espaço. Talvez você nunca tenha pensado nisso, mas leva um certo tempo (muito pequeno) para que o campo elétrico (e magnético), que é originado na antena, chegue a um ponto afastado dela, o que indica a propagação de uma perturbação, no caso, eletromagnética.

Como em todo capacitor, tensão e corrente estão defasados no tempo e, como veremos, as leis de Maxwell nos garantem que, numa onda eletromagnética senoidal, os campos elétrico e magnético precisam estar em fase no tempo. Os campos próximos à antena, gerados por ela, não se propagarão por longas distâncias, por não estarem em fase, e por isso são chamados de campos próximos à antena (*near field*). Já, à medida que nos afastamos da antena, predominarão campos elétrico e magnético em fase no tempo, como nos confirmarão as equações de Maxwell.

Complicado? Pois é, estamos tentando deixar o mais simples que conseguimos... Como disse Einstein: “as coisas devem ser tornadas o mais simples possível, mas não mais simples do que são”.

Pois bem, vamos considerar que, em um certo ponto x do vácuo, no instante t , existam um campo elétrico de intensidade $E(x, t)$ e um campo magnético de intensidade $B(x, t)$. Manipulando algebricamente as equações de Maxwell (acompanhe o desenvolvimento algébrico que seu professor fará em lousa), é possível provar que:

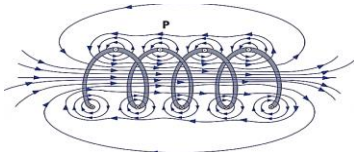


$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

e

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

5. Use o espaço a seguir para fazer anotações sobre as deduções que resultam nas equações da página anterior.



6. Observe as duas equações deduzidas e preencha as lacunas no texto a seguir.

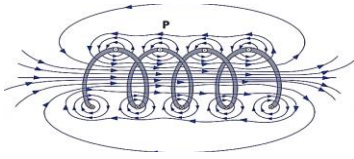
“A variação **espacial** do campo elétrico produz uma variação _____ do campo _____; por sua vez, a variação **espacial** do campo magnético produz uma variação _____ do campo _____.”

Conforme seu professor explicou, podemos considerar a propagação dos campos elétrico e magnético como sendo senoidais e **em fase**, ou seja:

$$E(x, t) = E_{max} \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

$$B(x, t) = B_{max} \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

7. Usando as 2 equações anteriores, calcule $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$ e compare os resultados obtidos com a equação da onda. O que você observa?

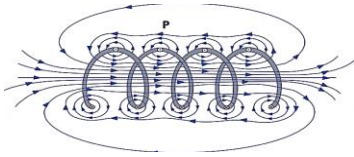


Nos itens a seguir, adote as leis $E(x, t) = E_{max} \sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$ e $B(x, t) = B_{max} \sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$, sendo $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ o número da onda e $\omega = 2\pi f$ sua frequência angular.

8. Substitua as leis dadas na equação $\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$ e obtenha o valor de $\frac{E_{max}}{B_{max}}$ em função de ω e k .

9. Substitua as leis dadas na equação $\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ e obtenha o valor de $\frac{E_{max}}{B_{max}}$ novamente.

10. Mostre que o valor de $\frac{E(x, t)}{B(x, t)}$ é constante e igual à velocidade da onda. Substituindo os valores numéricos das constantes μ_0 e ϵ_0 , obtenha o valor numérico da velocidade com que a onda se propaga.



Chegamos a um resultado avassalador: a variação da intensidade do campo elétrico alimenta a variação da intensidade do campo magnético e a propagação dessas variações ocorre **na velocidade da luz**. Ou seja, existe uma entidade chamada “onda eletromagnética” composta pela propagação de duas ondas (elétrica e magnética) em **planos perpendiculares entre si**, sendo que essa entidade se propaga na velocidade da luz.

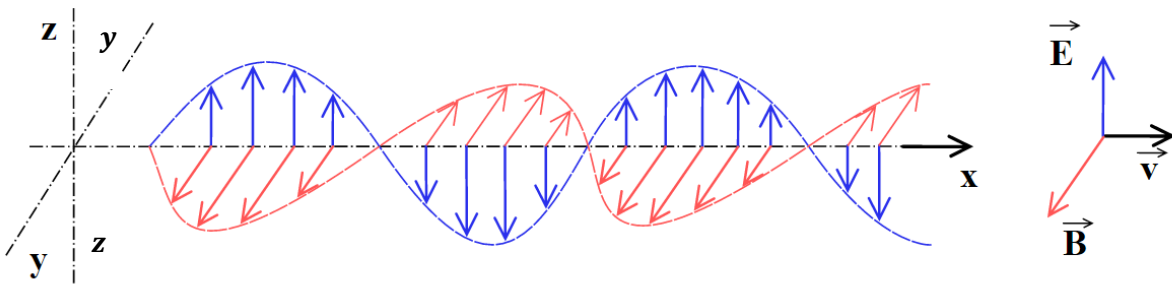
Ou seja, em uma tacada só tiramos duas conclusões:

- “informações” sobre a variação de um campo elétrico/magnético não são propagadas instantaneamente, mas sim com a velocidade da luz;
- a luz é uma onda eletromagnética.

A cada instante, a razão entre $E(x, t)$ e $B(x, t)$ é constante e igual à velocidade da luz c :

$$\frac{E(x, t)}{B(x, t)} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$$

A figura da página seguinte representa essa interpretação.

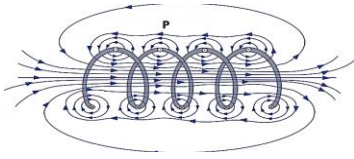


11. Qual é a direção e o sentido do produto vetorial $\vec{E} \times \vec{B}$?

12. Considere um vetor \vec{S} definido da seguinte forma:

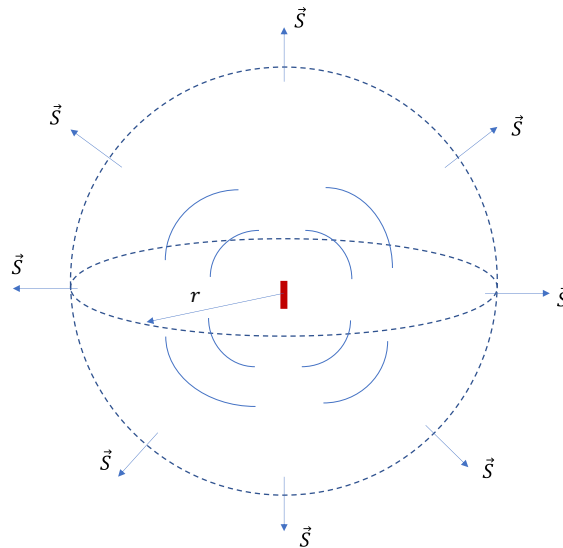
$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{E} \times \vec{B}$$

Prove que a unidade de medida de $|\vec{S}|$ é $\frac{W}{m^2}$.



O vetor \vec{S} é conhecido como **vetor de Poynting²**, em homenagem à **John Henry Poynting (1852 — 1914)**, físico inglês e aluno de Maxwell. Esse vetor tem mesma direção e sentido que a velocidade de propagação da onda, e sua intensidade nos diz a **potência por unidade de área** propagada por essa onda, ou seja, a **densidade superficial de potência**. A solução da equação de onda que usamos nessa aula refletiu uma situação de **frente de onda plana**, na qual os campos \vec{E} e \vec{B} têm intensidades uniformes e independentes da distância. Bom, esse tipo de onda eletromagnética unidirecional (que se propaga apenas na direção x), é muito raro, e fisicamente seria encontrada em um “raio laser”, por exemplo.

No entanto, há outras soluções para a equação de onda que são mais comuns no nosso dia a dia, como as **ondas de frente esférica**, por exemplo. Nesse tipo de onda, a densidade de potência não se mantém constante em função da distância, pois as ondas são propagadas em todas as direções. Observe a figura da próxima página.



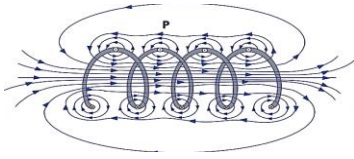
Na figura, estamos representando uma antena que propaga ondas eletromagnéticas em todas as direções, também chamada de antena omnidirecional (que significa em todas as direções). Nesse tipo de onda, a direção do vetor de Poynting é radial e para fora, no sentido de se afastar da antena. Como o vetor de Poynting exprime a densidade superficial de potência, podemos dizer que o fluxo do vetor de Poynting numa superfície fechada (no caso, a esfera) é igual à potência de emissão da antena. Ou seja:

$$\oint \vec{S} \cdot \hat{n} dA = P_{\text{antena}}$$

Como, a uma distância r da antena, o vetor de Poynting é radial e tem a mesma intensidade em todas as direções, podemos escrever:

$$S \cdot 4\pi r^2 = P_{\text{antena}}$$

² Para compreender a dedução do vetor de Poynting, leia a leitura complementar dessa aula.



E, assim:

$$S = \frac{P_{antena}}{4\pi r^2}$$

Como o valor máximo do vetor de Poynting é $S_{max} = \frac{E_{max} \cdot B_{max}}{\mu_0}$ e $\frac{E_{max}}{B_{max}} = c$, podemos escrever:

$$\frac{E_{max}^2}{c\mu_0} = \frac{P_{antena}}{4\pi r^2}$$

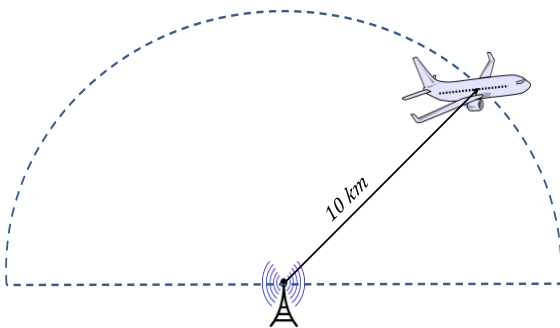
Por fim, concluímos que o campo elétrico máximo (de pico), numa onda esférica, tem intensidade decrescente com a distância, igual a:

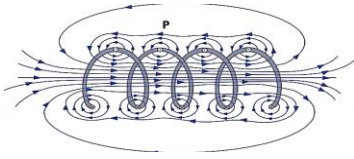
$$E_{max} = \sqrt{\frac{P_{antena} \cdot c\mu_0}{4\pi r^2}}$$

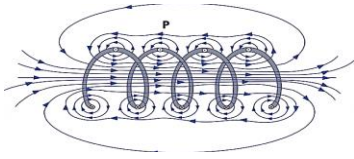
Da mesma forma, a intensidade máxima do campo magnético de uma onda esférica será:

$$B_{max} = \sqrt{\frac{P_{antena} \cdot \mu_0}{4\pi r^2 \cdot c}}$$

13. Exercício para casa: Um avião voando a uma distância de 10 km de um transmissor de rádio recebe um sinal eletromagnético cuja intensidade RMS é de $10 \mu\text{W}/\text{m}^2$. Considerando que se trata de uma onda eletromagnética senoidal, qual a amplitude do campo elétrico e do campo magnético do sinal captado pelo avião? Se o transmissor irradia uniformemente em todas as direções (considere meia casca esférica), qual é sua potência?







LEITURA COMPLEMENTAR PARA A AULA 13

ENERGIA IRRADIADA POR UMA ONDA ELETROMAGNÉTICA

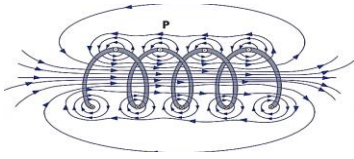
Na aula 13, aprendemos que é possível calcular a potência transferida por uma onda eletromagnética por unidade de área (que seria a densidade superficial de potência) a partir do cálculo do vetor de Poynting. Nessa leitura complementar, vamos tentar entender melhor o que significa esse vetor e porque essa energia tem a ver com as intensidades dos campos elétrico e magnético. Vamos compreender também o significado da energia armazenada na forma de um campo.

De maneira geral, sabemos que a energia de um sistema em uma dada configuração está relacionada ao trabalho de forças para levar o sistema até uma posição referencial (onde adotamos energia nula), sendo isso também válido para as forças eletromagnéticas. A energia armazenada em um campo eletromagnético é, na verdade, a energia associada à configuração elétrica do sistema. No entanto, quando as forças, cujos cálculos dos trabalhos resultam na energia do sistema, são expressas em função dos campos, teremos também a energia do sistema expressa em função dos campos, e assim dizemos, talvez por abuso de linguagem, que essa energia está contida no campo. Se conseguirmos expressar a energia do sistema por meio dos campos, podemos então calcular o quanto de energia está sendo transferida para dentro ou para fora de uma região do espaço, bastando observar o quanto de campo está sendo gerado ou “destruído” nessa região. No caso da radiação eletromagnética, podemos calcular o quanto de energia é transferida com base no comportamento dos campos em uma certa região do espaço ao longo do tempo.

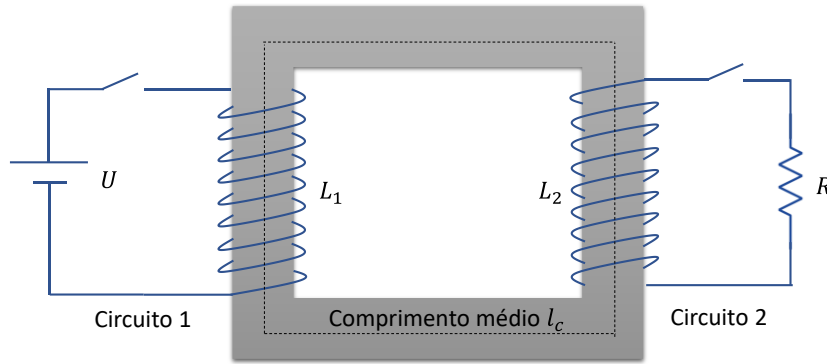
ENERGIA ASSOCIADA A UM CAMPO MAGNÉTICO

O que significa dizermos que existe uma energia associada a um certo campo magnético? Como podemos calcular esta energia? Como pode ser transformada em outra modalidade de energia? Seria muito difícil entender e calcular essa energia com base nas forças magnéticas e elétricas entre cargas, a partir dos modelos de campo criados por Biot-Savart e Coulomb. Felizmente, Maxwell nos ensinou algumas “verdades sintetizadas”, que nos servem de ponto de partida para chegarmos aos mais variados resultados na área do eletromagnetismo. Como calcular, então, o quanto de energia está associada a um campo magnético? Para respondermos esta pergunta, vamos considerar um núcleo ferromagnético de pequena área de secção com duas bobinas, uma ligada a uma fonte (circuito 1) e outra a um resistor (circuito 2), conforme ilustra a figura a seguir. Inicialmente, vamos imaginar que a chave do circuito 1 esteja fechada, resultando em um campo magnético constante no núcleo do material ferromagnético. Imagine que, nesta situação, a chave do circuito 2 esteja aberta.

Vamos considerar agora que em um dado instante ambas as chaves sejam comutadas, ficando a chave do circuito 1 aberta e a do circuito 2 fechada. Como o fluxo magnético na bobina 2 irá variar de um certo valor inicial a zero, uma força eletromotriz será induzida na bobina 2, que produzirá corrente no circuito 2. Vamos considerar que todo o campo magnético no núcleo tenha decaído até desaparecer. Se isso ocorre, temos uma força eletromotriz



no circuito 2 durante todo o tempo em que o campo no núcleo decaía. Podemos assim perceber que a energia dissipada no resistor do circuito 2 é a energia que está associada ao campo magnético inicialmente armazenado no núcleo do material ferromagnético.



A força eletromotriz induzida na bobina 2, responsável por converter a energia armazenada no campo magnético em energia elétrica dissipada no resistor é:

$$e_2(t) = -N_2 \frac{d\phi_B(t)}{dt} = -N_2 \frac{dB(t)A}{dt}$$

Considerando o caminho médio total ao longo do núcleo magnético de permeabilidade μ , dado por l_c , podemos escrever a expressão para a corrente induzida na bobina 2, dada pela lei de Ampère:

$$\oint \vec{B}(t) \cdot d\vec{r} = N_2 \mu i_2(t)$$

Sendo $B(t)$ uniforme ao longo do núcleo, podemos escrever:

$$\oint \vec{B}(t) \cdot d\vec{r} = B(t)l_c = N_2 \mu i_2(t)$$

E assim:

$$i_2(t) = \frac{B(t)l_c}{N_2 \mu}$$

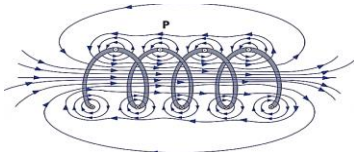
Como temos uma expressão para a força eletromotriz e outra para a corrente, podemos calcular a potência no tempo, ou seja:

$$P(t) = e_2(t) \cdot i_2(t)$$

Substituindo $e_2(t)$ e $i_2(t)$, temos:

$$P(t) = -N_2 \frac{dB(t)A}{dt} \cdot \frac{B(t)l_c}{N_2 \mu}$$

Sendo $Vol = A \cdot l_c$ o volume do núcleo de ferromagnético, podemos escrever:



$$P(t) = -Vol \cdot \frac{dB(t)}{dt} \cdot \frac{B(t)}{\mu}$$

Ou seja, a potência instantânea, que representa a transformação de energia magnética em outra modalidade de energia, depende da intensidade no campo magnético e de sua taxa de variação. Se considerarmos um intervalo infinitesimal de tempo dt durante o qual ocorreu uma variação dB do campo, então poderemos escrever:

$$P(t)dt = -Vol \cdot \frac{B(t)}{\mu} dB(t)$$

Podemos integrar o lado esquerdo em dt e o lado direito em $dB(t)$, considerando a variação de $B(t)$ correspondente à variação temporal. Assim, podemos obter o módulo da energia associada ao campo magnético.

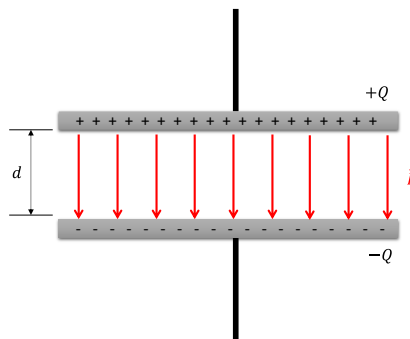
$$|E_{mag}| = \int_0^t |P(t)|dt = \int_0^B Vol \cdot \frac{B}{\mu} dB = Vol \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

Note que nossa premissa foi a de que o campo magnético é uniforme em todo o volume do ferromagnético. Em um caso mais genérico, no qual o campo magnético varia ao longo do volume, podemos integrar a energia de um pequeno volume dV , ou seja:

$$E_{mag} = \int_0^V \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} dV$$

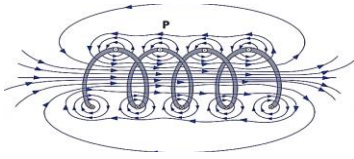
ENERGIA ASSOCIADA A UM CAMPO ELÉTRICO

Vamos agora usar o exemplo de um capacitor carregado para compreender o conceito de energia armazenada na forma de um campo elétrico. Já vimos em aula que o campo elétrico no interior de um capacitor de área A e carga armazenada $+Q$ e $-Q$ tem intensidade constante igual a $E = \frac{Q}{A\epsilon_0}$, lembrando que $\sigma = \frac{Q}{A}$ é a densidade superficial de carga nas placas planas do capacitor.



Para levarmos uma carga infinitesimal dQ da placa superior até a placa inferior, através do espaço entre as placas, a força elétrica realizaria um trabalho dado por:

$$dW = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} dQ \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_d^0 -\frac{Q}{A\epsilon_0} dQ dy = \frac{Qd}{A\epsilon_0} dQ$$



Para levar toda a carga da placa positiva para a placa negativa, o que resultaria no descarregamento do capacitor, teríamos um trabalho total dado por:

$$W = \int_0^Q \frac{Qd}{A\epsilon_0} dQ = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{A\epsilon_0}$$

Como, algebricamente, podemos escrever:

$$E^2 = \frac{Q^2}{A^2 \epsilon_0^2}$$

Podemos concluir que:

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{A\epsilon_0} = \frac{1}{2} \frac{E^2 A^2 \epsilon_0^2 d}{A\epsilon_0} = \frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 A d$$

Sendo $Vol = Ad$ o volume do espaço entre as placas do capacitor, podemos escrever que a energia elétrica necessária para descarregá-lo totalmente, transformando a energia elétrica em outra forma de energia, seria:

$$E_{elét} = Vol \frac{1}{2} E^2 \epsilon_0$$

Assim como no caso magnético, podemos considerar regiões de campos não uniformes e calcular a energia total por meio da integração no volume, ou seja:

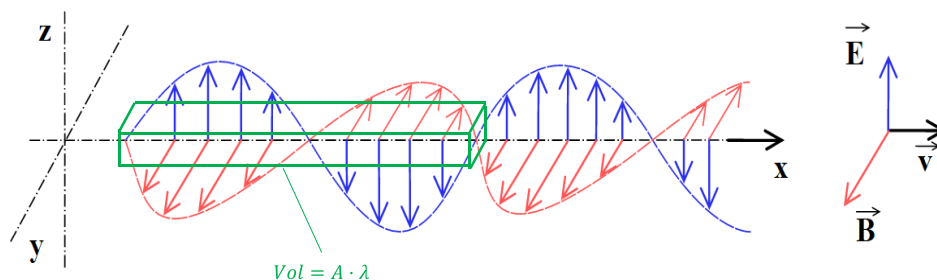
$$E_{elét} = \int_0^V \frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 dV$$

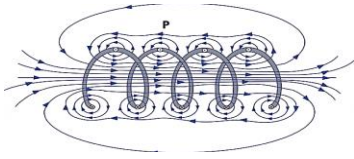
ENERGIA NA RADIAÇÃO

Vamos agora calcular qual seria a energia que um corpo pode absorver por meio de radiação eletromagnética. Para tal, vamos considerar a radiação se propagando ao longo do eixo x , de acordo com os seguintes campos escalares:

$$\vec{E}(x, t) = E_{max} \cdot \text{sen}(kx - \omega t) \hat{k}$$

$$\vec{B}(x, t) = B_{max} \cdot \text{sen}(kx - \omega t) \hat{j}$$





Vamos calcular, utilizando as expressões obtidas para as energias associadas aos campos, quanto de energia existe em um prisma retangular de área A e comprimento de onda λ , em um determinado instante. Para isso, devemos calcular a energia associada ao volume formado pelo prisma de base A e altura λ , com mostrado na figura. Vamos considerar que os campos no interior desse volume são dados pelas funções $E(x, t)$ e $B(x, t)$ dadas acima. Já deduzimos que:

$$E_{mag} = \int_0^V \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} dV$$

$$E_{elét} = \int_0^V \frac{1}{2} E^2 \epsilon_0 dV$$

Além disso, vimos na aula que $\frac{E_{max}}{B_{max}} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$, ou seja, $\frac{B_{max}^2}{\mu_0} = E_{max}^2 \epsilon_0$. Com essa igualdade, concluímos que a energia associada ao campo magnético é a mesma associada ao campo elétrico, ou seja:

$$E_{elét} = E_{mag}$$

Como a energia total é dada pela soma dessas energias:

$$E_{total} = E_{mag} + E_{elét} = 2 E_{elét} = 2 E_{mag}$$

Assim, a energia associada a **um comprimento de onda**, que é a energia armazenada no prisma da figura quando a onda se propaga, será:

$$E_{total} = 2 \int_0^\lambda \frac{1}{2} E_{max}^2 \epsilon_0 \sin^2(kx - \omega t) A dx = 2 \int_0^\lambda \frac{1}{2} \frac{B_{max}^2}{\mu_0} \sin^2(kx - \omega t) A dx$$

Como estamos interessados em observar a energia armazenada pela onda em um determinado instante de tempo, podemos considerar, por simplificação, que $t = 0$ ou $t = n2\pi$, sendo n um número inteiro que indicaria os instantes no tempo em que a fase da onda é a mesma. Assim, fazendo $t = 0$, teremos:

$$E_{total} = 2 \int_0^\lambda \frac{1}{2} E_{max}^2 \epsilon_0 \sin^2(kx) A dx = 2 \int_0^\lambda \frac{1}{2} \frac{B_{max}^2}{\mu_0} \sin^2(kx) A dx$$

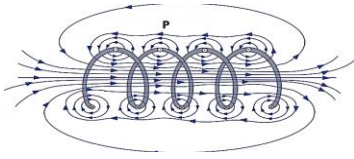
Usando a identidade trigonométrica $\sin^2(kx) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2kx))$, podemos calcular a integral:

$$\int_0^\lambda \sin^2(kx) dx = \int_0^\lambda \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int_0^\lambda \cos(2kx) dx = \frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{2} \frac{\sin(2k\lambda)}{2k}$$

Lembrando que o número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, chegamos a:

$$\int_0^\lambda \sin^2(kx) dx = \frac{1}{2} \lambda$$

Assim:



$$E_{total} = E_{max}^2 \epsilon_0 \frac{\lambda}{2} A = \frac{B_{max}^2}{\mu_0} \frac{\lambda}{2} A$$

A potência média de transferência de energia é dada pela energia calculada no volume do prisma, dividida pelo tempo, que é o próprio período da onda, ou seja: $\Delta t = \frac{\lambda}{c}$. Assim:

$$P_m = \frac{c}{\lambda} E_{max}^2 \epsilon_0 \frac{\lambda}{2} A = \frac{c}{\lambda} \frac{B_{max}^2}{\mu_0} \frac{\lambda}{2} A$$

Ou ainda, por unidade de área da seção transversal do prisma:

$$P_m = \frac{1}{2} c E_{max}^2 \epsilon_0 = \frac{1}{2} c \frac{B_{max}^2}{\mu_0} \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

Por fim, com as seguintes relações conhecidas:

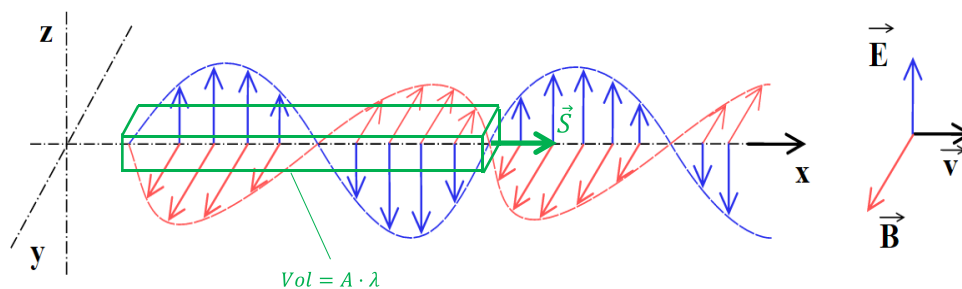
$$\frac{E_{max}}{B_{max}} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

A potência média por unidade de área da seção transversal do prisma pode ser reescrita por:

$$P_m = \frac{1}{2} \frac{B_{max} E_{max}}{\mu_0} \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

Essa potência média por unidade de área é a energia transportada por uma onda em um comprimento de onda, que se propaga na direção e no sentido da velocidade da onda eletromagnética. Perceba que o vetor de Poynting descreve a densidade superficial de potência instantânea, que ocorre na direção e no sentido de propagação da onda.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{E} \times \vec{B}$$

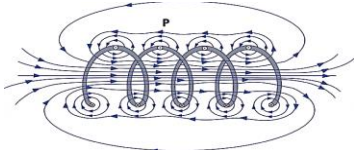


Ao calcularmos a densidade de potência instantânea para uma onda do tipo:

$$\vec{E}(x, t) = E_{max} \cdot \text{sen}(kx - \omega t) \hat{k}$$

$$\vec{B}(x, t) = B_{max} \cdot \text{sen}(kx - \omega t) \hat{j}$$

Chegaremos a:



$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{E} \times \vec{B} = \frac{E_{max}B_{max}}{\mu_0} \cdot \text{sen}^2(kx - \omega t)\hat{i}$$

Cujo valor médio será:

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{E_{max}B_{max}}{\mu_0} \cdot \langle \text{sen}^2(kx - \omega t) \rangle$$

Usando a mesma identidade trigonométrica que usamos anteriormente, ou seja:

$$\text{sen}^2(kx - \omega t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2kx - 2\omega t))$$

Podemos dizer que o valor médio de $\text{sen}^2(kx - \omega t)$ será:

$$\begin{aligned} \langle \text{sen}^2(kx - \omega t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \text{sen}^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} dt - \frac{1}{T} \int_0^T \cos(2kx - 2\omega t) dt \\ \frac{1}{T} \int_0^T \text{sen}^2(kx - \omega t) dt &= \frac{1}{2} - \frac{1}{T} \frac{\text{sen}(2kx - 2\omega T)}{-2\omega} + \frac{1}{T} \frac{\text{sen}(2kx)}{-2\omega} \end{aligned}$$

Como $\omega = \frac{2\pi}{T}$, podemos reescrever:

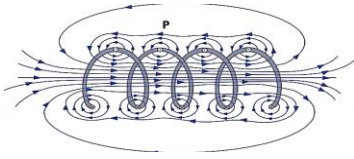
$$\frac{1}{T} \int_0^T \text{sen}^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{T} \frac{\text{sen}(2kx - 4\pi)}{-2\omega} + \frac{1}{T} \frac{\text{sen}(2kx)}{-2\omega}$$

Como $\text{sen}(2kx - 4\pi) = \text{sen}(2kx)$, então:

$$\langle \text{sen}^2(kx - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

E assim, finalmente, demonstramos que a densidade de potência média representada pelo vetor de Poynting é exatamente igual à densidade de potência presente no campo eletromagnético em um comprimento de onda. Ou seja:

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{1}{2} \frac{B_{max}E_{max}}{\mu_0} \left[\frac{W}{m^2} \right]$$



AULA 14

REFLEXÃO E ONDA ESTACIONÁRIA

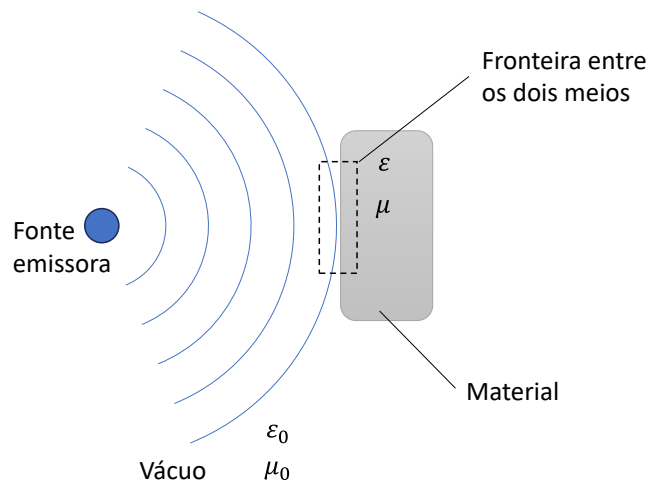
OBJETIVOS

Ao final da aula, os alunos serão capazes de:

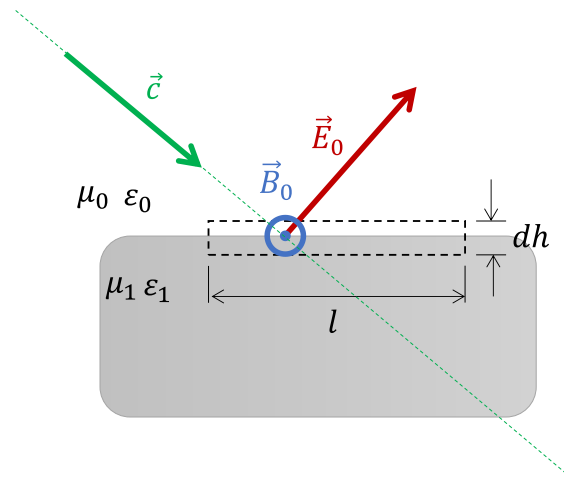
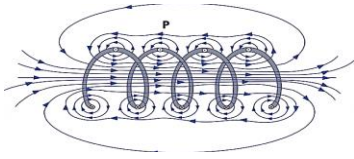
- Compreender as condições de contorno de uma onda incidente sobre uma superfície;
- Compreender os conceitos de reflexão, interferência e onda estacionária;

CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O CAMPO ELÉTRICO

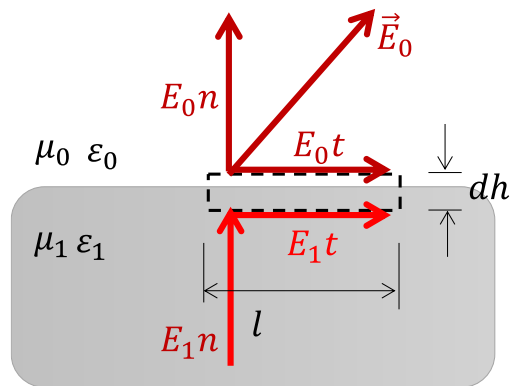
Já aprendemos que as ondas eletromagnéticas são perturbações de campos elétrico e magnético que se propagam com a velocidade da luz (no vácuo). Nesta aula, estudaremos o que acontece quando uma onda eletromagnética atinge a superfície de um objeto constituído de um material de propriedades eletromagnéticas diversas daquelas do meio em que a onda se propaga. Observe a figura a seguir, na qual ilustramos uma onda eletromagnética que se propaga no vácuo e atinge um corpo de propriedades eletromagnéticas ϵ e μ .



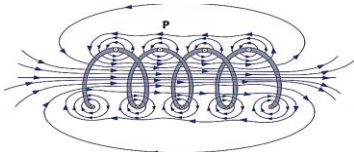
Aplicaremos as leis de Maxwell na região de fronteira entre os dois meios, de modo a tirarmos conclusões importantes. Observe a figura a seguir, na qual usamos um ângulo de incidência qualquer. Observe que o campo elétrico e o campo magnético são perpendiculares entre si, sendo a direção de propagação aquela representada pela velocidade de propagação no vácuo (\vec{c}) (que é a mesma do vetor de Poynting).



Se usarmos um bordo de comprimento l bastante pequeno, podemos garantir que os campos elétrico e magnético serão uniformes na região do bordo, dentro e fora do material. Isolando nossa análise apenas para os campos elétricos, chegamos à figura seguinte, na qual decomposemos os campos elétricos \vec{E}_0 (no vácuo) e \vec{E}_1 (dentro do material) em suas componentes tangente e normal.



1. Aplique a 3ª lei de Maxwell ao contorno tracejado, fazendo com que $dh \rightarrow 0$, ou seja, fazendo com que o bordo tracejado tenda à superfície que separa ambos os meios.

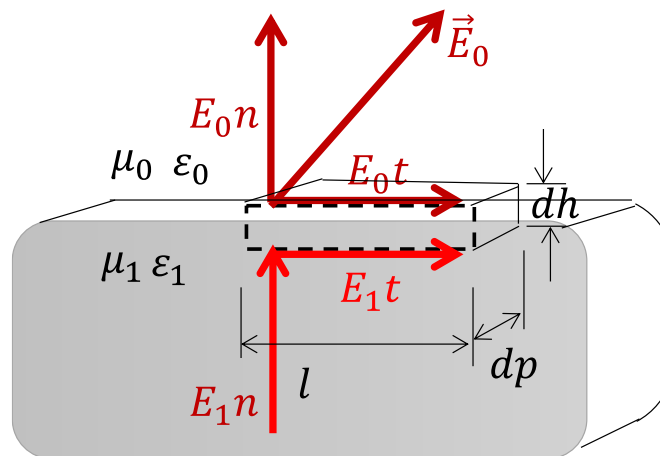


Acabamos de concluir que as componentes tangenciais dos campos elétrico, dentro e fora do material, têm de ser iguais! Ou seja:

$$E_{0t} = E_{1t}$$

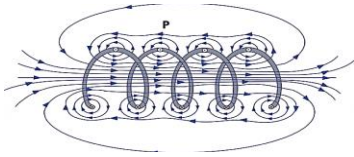
Trata-se da primeira condição de contorno.

Imaginemos agora que nosso bordo, assim como a interface entre os meios, tem certa profundidade dp (ou seja, possui três dimensões), de modo a que possamos pensar no volume de comprimento l , altura dh e profundidade dp , conforme a figura.



Estamos acostumados a representar a 1ª lei de Maxwell na forma:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$



Mas podemos escrevê-la como:

$$\oint \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} dA = Q_{int}$$

Quando aplicamos a 1ª lei em um volume em que há duas permissividades dielétricas diferentes, como é o caso, precisamos separar a integral fechada em duas integrais abertas, de tal modo que os volumes abertos somados constituam um volume fechado. Ou seja:

$$\int \epsilon_0 \vec{E}_0 \cdot \hat{n} dA + \int \epsilon_1 \vec{E}_1 \cdot \hat{n} dA = Q_{int}$$

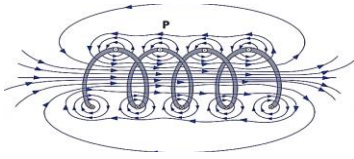
2. Sabendo que não há cargas elétricas livres no material, aplique a 1ª lei de Maxwell ao volume de comprimento l , altura dh e profundidade dp , obtendo a relação entre as componentes perpendiculares dos campos elétricos dentro e fora do material.

Você deve ter concluído que:

$$\epsilon_0 E_0 n = \epsilon_1 E_1 n$$

Assim, obtivemos as duas condições de contorno para o campo elétrico:

Condição de contorno para os campos elétricos tangenciais	Condição de contorno para os campos elétricos normais
$E_0 t = E_1 t$	$\epsilon_0 E_0 n = \epsilon_1 E_1 n$

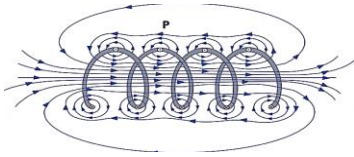


INCIDÊNCIA DE UMA ONDA SOBRE UMA SUPERFÍCIE METÁLICA

Embora pudéssemos aprofundar o estudo da incidência de ondas eletromagnéticas em meios quaisquer, o que nos levaria às leis ópticas que descrevem a reflexão e a refração, optamos por analisar o que ocorre quando ondas eletromagnéticas incidem sobre materiais metálicos.

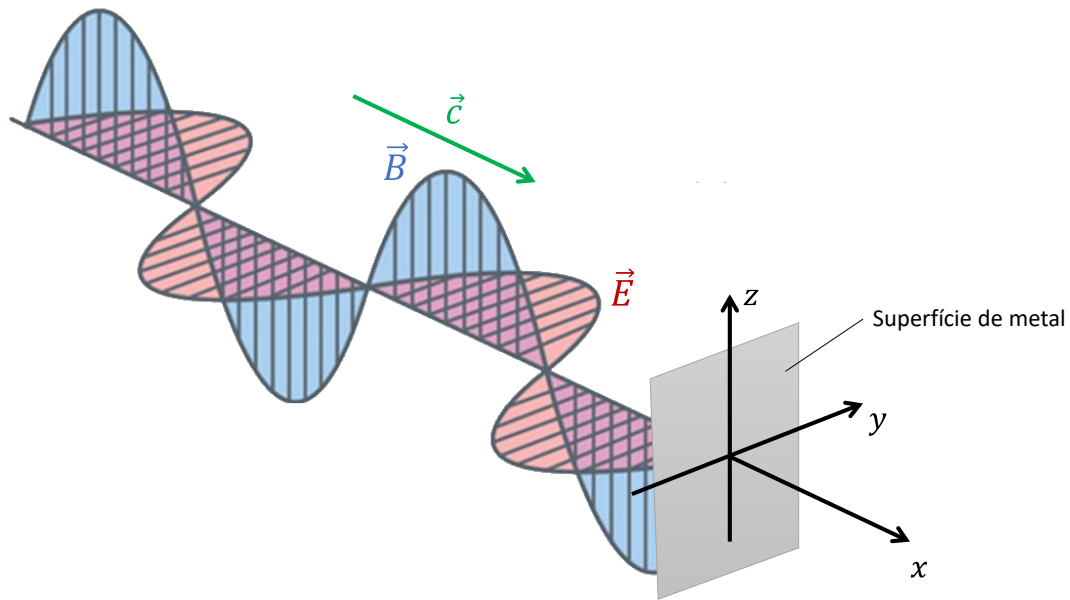
3. Sabendo que os metais apresentam permissividade dielétrica infinita, ou seja, $\varepsilon \rightarrow \infty$, qual deveria ser o campo elétrico normal dentro de uma superfície metálica que recebe uma onda eletromagnética incidente? Essa conclusão está de acordo com o que já sabíamos sobre campos elétricos no interior de materiais metálicos?

4. O que podemos concluir sobre os campos tangenciais dentro e fora do material metálico? O que isso significa?



REFLEXÃO DE ONDAS

Vamos imaginar uma onda eletromagnética plana e uniforme incidente sobre uma superfície de metal, conforme ilustra a figura a seguir.

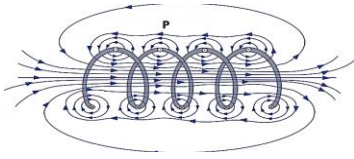


Supondo que os campos elétrico e magnético sejam dados pelas expressões:

$$\vec{E}(x, t) = E_{max} \cos(kx - \omega t) \hat{j}$$

$$\vec{B}(x, t) = B_{max} \cos(kx - \omega t) \hat{k}$$

5. Quais deveriam ser os campos magnéticos e elétrico na superfície metálica? Como isso seria possível?



Você deve ter concluído que, para garantir que os campos sejam nulos na interface com o material metálico, deve existir outra onda, de tal modo que a soma das duas atenda às condições de contorno na superfície metálica. Assim, deverá surgir uma onda refletida de tal modo que:

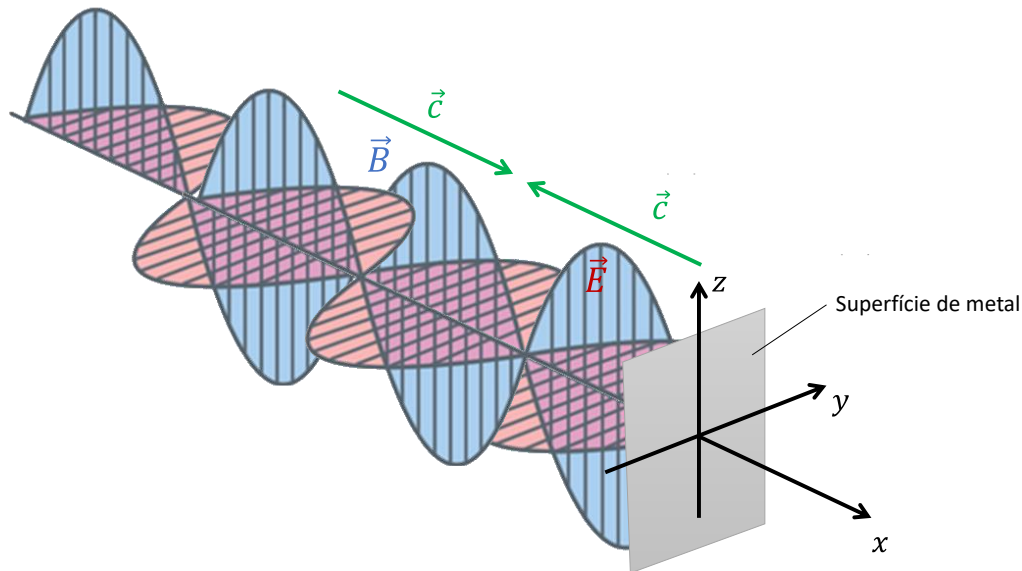
$$\vec{E}_r(x, t) = -E_{max} \cos(kx + \omega t) \hat{j}$$

$$\vec{B}_r(x, t) = -B_{max} \cos(kx + \omega t) \hat{k}$$

Os campos elétrico e magnético resultantes deverão ser:

$$\vec{E}_{total}(x, t) = [E_{max} \cos(kx - \omega t) - E_{max} \cos(kx + \omega t)] \hat{j}$$

$$\vec{B}_{total}(x, t) = [B_{max} \cos(kx - \omega t) - B_{max} \cos(kx + \omega t)] \hat{k}$$

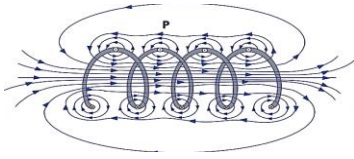


A existência de duas ondas, uma incidente e outra refletida, provoca na região de propagação o que denominamos interferência.

INTERFERÊNCIA DE ONDAS E ONDA ESTACIONÁRIA

O fenômeno da interferência de ondas é muito frequente em nosso dia a dia, tanto para ondas mecânicas quanto para ondas eletromagnéticas. É de conhecimento geral que, às vezes, precisamos dar um passo ao lado para que a recepção de nosso celular melhore. Isso tem tudo a ver com o fenômeno da reflexão e consequente interferência entre a onda incidente e a refletida, gerando o que conhecemos por onda estacionária. Embora paredes, muros e outros objetos não sejam de metal, parte das ondas incidentes sofrerão reflexão, assim como parte será absorvida por esses materiais.

Vamos à matemática para compreender bem o que significa uma onda estacionária.

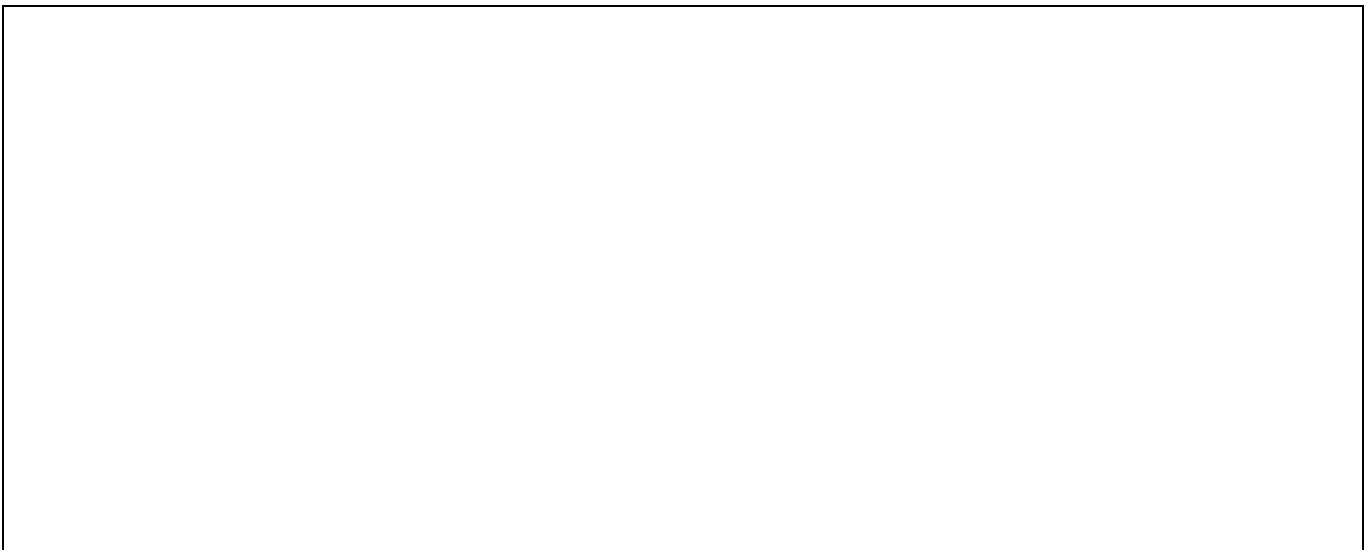


6. Abra o GeoGebra Web (<https://www.geogebra.org>) e faça o seguinte:

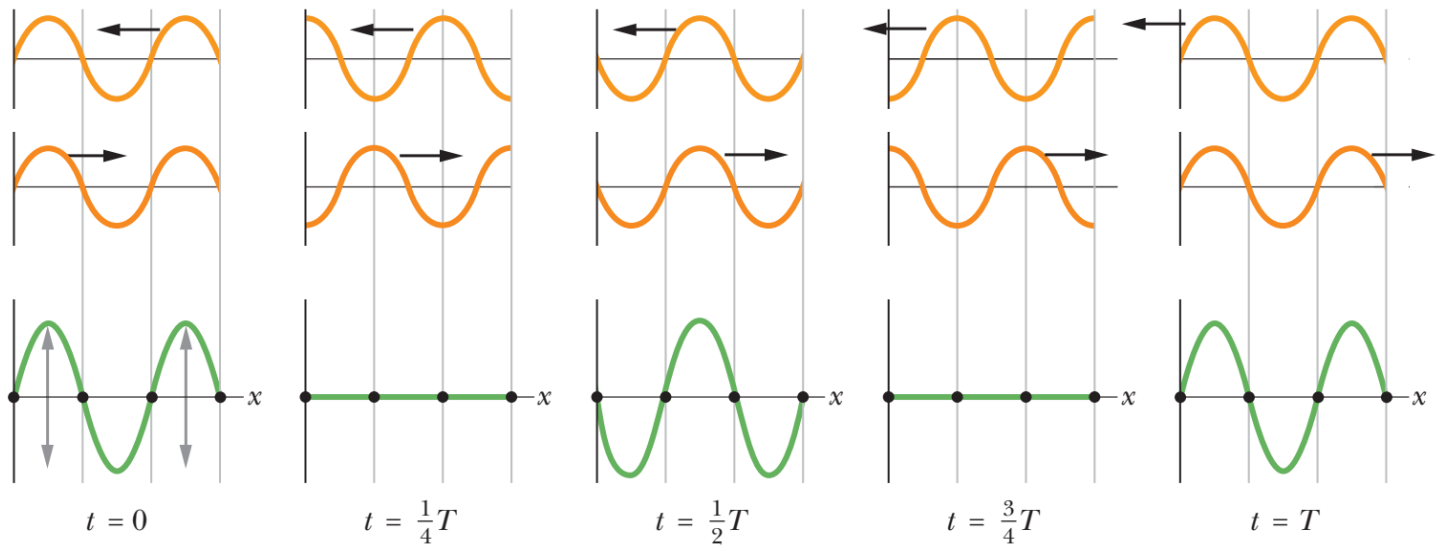
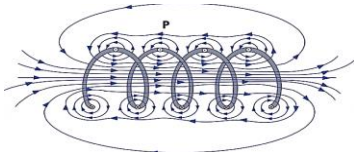
- Crie três controles deslizantes:
 - um deles representará o tempo t , de -5 s a $+5\text{ s}$, com passo $0,001\text{ s}$;
 - o segundo representará o número de onda k , de 1 m^{-1} a 10 m^{-1} , com passo 1 m^{-1} ;
 - o terceiro representará a velocidade angular ω , de 1 rad/s a 10 rad/s , com passo 1 rad/s ;
 - o último, denominado A , representará a amplitude da onda, de 1 a 10, com passo 1.
- Deixe o valor de k em 2 m^{-1} , o de ω em 3 rad/s e, o de A , em 4.
- Na barra de comando, crie a função $f_1(x) = A \sin(kx - \omega t)$;
- Ainda na barra de comando, crie a função $f_2(x) = -4 \sin(2x + 3t)$;
- Em seguida, crie a função $f_3(x) = f_1(x) + f_2(x)$;
- Desligue a visualização de $f_1(x)$ e de $f_2(x)$, deixando visível apenas $f_3(x)$;

À onda $f_3(x)$ damos o nome de **onda estacionária**. Aos pontos que não se movem, damos o nome de **nós**, ao passo que aos pontos que se movem com maior amplitude, damos o nome de **ventre**.

7. Altere a amplitude da onda f_1 de 4 para 5 e perceba se f_3 continua uma onda estacionária. Altere, na sequência, o número de onda de f_1 de 2 para 3 rad/m e verifique se obtemos uma onda estacionária. Por fim, altere a velocidade angular de f_1 para 7 rad/s . Para alguma das alterações tivemos uma onda estacionária?



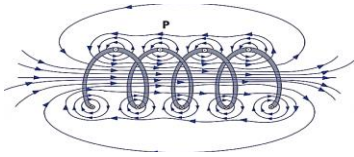
Na figura a seguir, ilustramos o perfil de interferência obtido quando duas ondas de mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos interagem entre si.



Você deve ter notado que a onda resultante da interferência não se desloca nem para a esquerda, nem para a direita. Por esse motivo, ela é chamada de **onda estacionária** e, assim, **não pode ser representada** por uma lei da forma $B \cdot \sin(k \cdot x \pm \omega \cdot t)$, a qual representaria uma onda que se desloca com velocidade de intensidade $v = \frac{\omega}{k}$.

8. Considerando que as ondas incidente e refletida são dadas pelas leis $y_1(x, t) = A \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$ e $y_2(x, t) = -A \cdot \sin(k \cdot x + \omega \cdot t)$, prove que a lei $y_R(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$ é:

$$y_R(x, t) = -2A \cdot \cos(k \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$



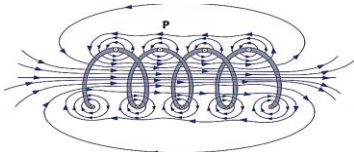
9. Observe novamente a lei da onda resultante da interferência:

$$y_R(x, t) = -2A \cdot \cos(k \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Considerando que essa lei representa uma onda estacionária, qual dos dois parâmetros, k ou ω , está relacionado ao número de nós e ventres? E qual deles está relacionado à velocidade com que a corda oscila verticalmente nos ventres?

10. Considere que uma onda estacionária foi formada entre a fonte e uma placa metálica, de tal modo que haja três nós e dois ventres. Se a distância entre a fonte e a placa é L , qual deve ser o valor de k ?

11. E se a onda estacionária tivesse sete nós e seis ventres, qual deve ser o valor de k ?



12. Por fim, e se a onda estacionária tivesse $(n + 1)$ nós e n ventres, qual deveria ser o valor de k ?

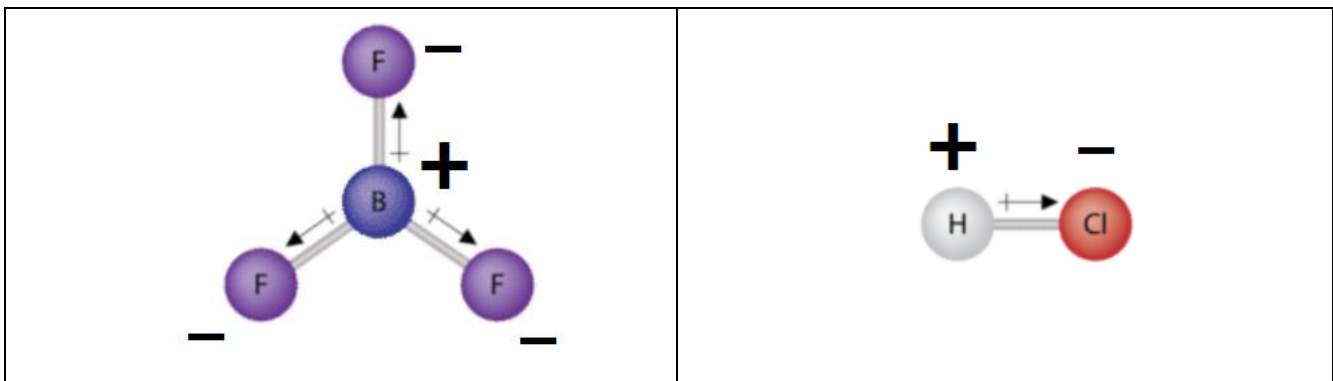
Vamos a um exemplo prático.

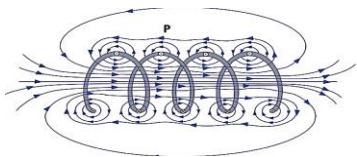
13. Exercício (Adaptada de Avaliação Final 2018-2) No forno de micro-ondas existe um dispositivo, chamado de *magnetron*, que emite ondas eletromagnéticas do espectro das micro-ondas, ou seja, aquelas cujo comprimento de onda assume valores entre 30 *cm* e 3 *mm*.

Essas ondas eletromagnéticas permeiam toda a região interna do forno, formando ondas estacionárias. Como são ondas eletromagnéticas, em cada ponto do interior do forno existem dois campos, um elétrico e outro magnético, variantes no tempo. Dessa forma, as cargas elétricas no interior do forno “sentem” a atuação de uma força eletromagnética, passando a oscilar. Essa oscilação das cargas elétricas gera calor, que esquenta a comida.

Porém, de modo geral, os alimentos são eletricamente neutros, se considerados como um todo. E, mesmo assim, o forno de micro-ondas é eficaz para aquecer boa parte deles. Para entender, é necessário observar a estrutura molecular das substâncias. No caso de moléculas com um átomo central positivo e átomos periféricos negativos (ou vice-versa), basta levar em consideração o campo elétrico estabelecido em cada uma das ligações feitas pelo átomo central.

Por exemplo, veja abaixo as simplificações das moléculas de trifluoreto de boro (BF_3) e de ácido clorídrico (HCl):



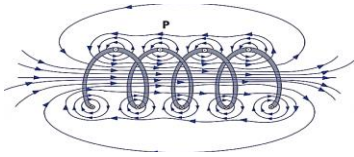


<p style="text-align: center;">BF₃</p> <p style="text-align: center;">As ligações estão em um mesmo plano e formam 120° entre si.</p>	<p style="text-align: center;">HCl</p> <p style="text-align: center;">Há uma única ligação.</p>
---	--

Em cada ligação, o campo elétrico aponta do átomo positivo para o átomo negativo. Devido à geometria, no caso do BF₃, o campo total resultante é nulo; porém, no caso do HCl, o campo resultante aponta de H para Cl. Assim, se considerarmos a molécula como um todo, temos que BF₃ é **apolar** (ou seja, o campo elétrico resultante é nulo) e que HCl é **polar** (ou seja, o campo elétrico resultante não é nulo).

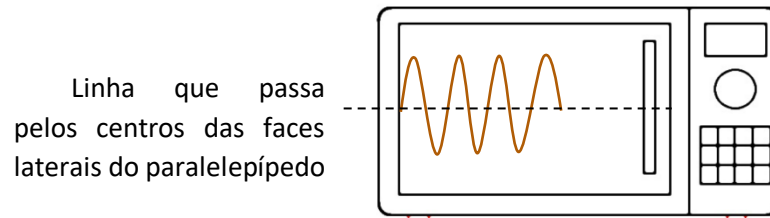
a) Dentre as substâncias puras (ou seja, compostas por apenas um tipo de molécula) a seguir, quais seriam eficazmente aquecidas pelo forno de micro-ondas? Justifique, representando na figura o campo elétrico resultante em cada caso.

<p style="text-align: center;">H₂O</p> <p style="text-align: center;">As ligações estão em um mesmo plano e formam menos do que 180° entre si.</p>	<p style="text-align: center;">CO₂</p> <p style="text-align: center;">As ligações estão em um mesmo plano e formam 180° entre si.</p>	<p style="text-align: center;">NH₃</p> <p style="text-align: center;">Os átomos de hidrogênio ocupam os vértices da base de um tetraedro regular</p>



b) Qual é a faixa de frequências abrangida pelas micro-ondas?

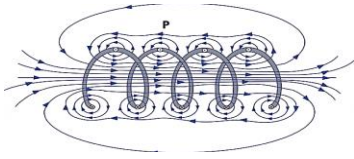
Como dito no enunciado, as ondas formadas no interior do forno de micro-ondas, cujo formato é o de um paralelepípedo retorrentângulo, são estacionárias. Para simplificar, vamos considerar apenas uma das direções de propagação, ilustrada na figura a seguir.



(A onda representada na figura acima é meramente ilustrativa. Não faça considerações sobre o comprimento de onda baseadas nessa figura.)

Considere, nos itens a seguir, um forno de micro-ondas cujo *magnetron* é capaz de emitir ondas de $25 \cdot 10^8 \text{ Hz}$.

c) Qual seria a menor largura (distância entre as faces laterais) admissível para que pudesse ser formada uma onda estacionária? Justifique.



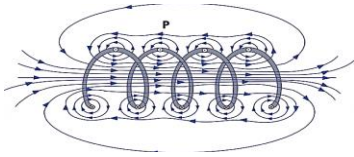
d) Qual(is) da(s) largura(s) a seguir seria(m) admissível (eis) para que a onda estacionária pudesse ser formada? Justifique em cada caso.

- 3 cm;
- 12 cm;
- 18 cm;
- 33 cm;

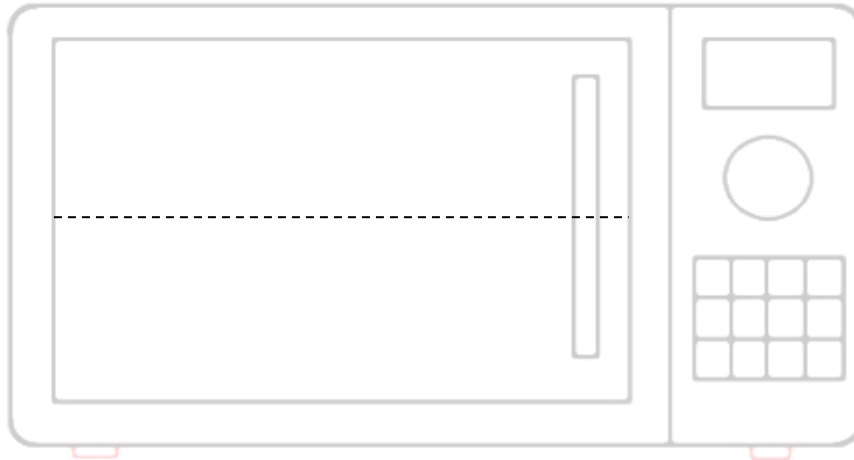
e) Para cada um dos casos do item anterior que você julgou admissível para a formação da onda estacionária, descreva quantos nós e quantos ventres são formados.

Por fim, considere para os itens a seguir que a onda estacionária formada tenha **5 nós**.

f) Qual deve ser a largura do interior do forno para que isso seja possível?



g) Represente na figura a seguir os pontos da linha tracejada que sofrerão o aquecimento com intensidade máxima e também os que sofrerão o aquecimento com intensidade mínima.



h) Esse modelo de forno de micro-ondas seria eficaz para aquecer porções de comida que ocupassem um espaço significativo do interior do forno? Justifique.

Dica: lembre-se de que muitos dos modelos atuais de micro-ondas têm uma plataforma giratória sobre a qual se apoia a comida.